Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2009

Question 1

Soit un triangle ABC, dont les deux côtés AB et AC ont la même longueur R. Par le sommet C, on trace la perpendiculaire CH à AB. On constate alors que les longueurs AH et BC sont égales. Que vaut l'angle A ?

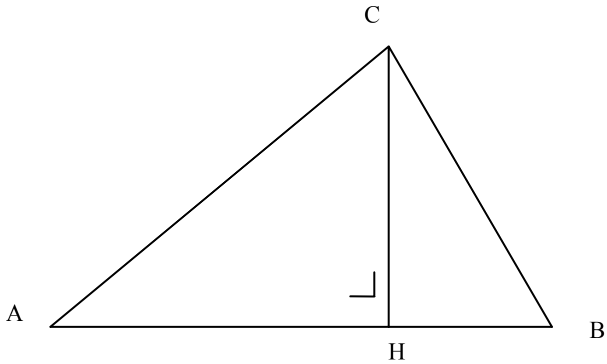

Figure 1 : Triangle isocèle ABC

Solutions proposées

Solution 1 – Considérons le cercle de centre *A* et de rayon *R*. À l'angle au centre $\theta = A$ correspond la corde $CB = 2R\sin\frac{\theta}{2}$. Par ailleurs, $AH = R\cos\theta$. On est donc conduit à l'équation

$$\cos\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

qui se transforme comme suit :

$$1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

soit

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2} - 1 = 0$$

Des deux solutions de cette équation,

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

il faut rejeter la négative, car sa valeur absolue est supérieure à 1. Il reste

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0{,}3660$$

ce qui correspond à

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{2} &= 21{,}4707° = 21°28'15'' = 0{,}3747 rad\\ \theta &= 42{,}9414° = 42°56'29'' = 0{,}7495 rad\end{aligned}$$

Solution 2 –

On a de toute évidence

$$\frac{AH}{R} = \cos A$$

. Par ailleurs, la relation de Pythagore généralisée donne

$$(BC)^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos A = R^2.2(1-\cos A)$$

soit

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 = 2(1-\cos A)$$

Donc

$$\begin{aligned}&2(1-\cos A) = \left(\frac{BC}{R}\right)^2 = \left(\frac{AH}{R}\right)^2 = \cos^2 A\\ &\cos^2 A + 2\cos A - 2 = 0\\ &\cos A = -1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

ce qui conduit au même résultat.

Solution 3 –

$$HC = AH \operatorname{tg} A = BC\sin B \qquad \text{donc} \qquad \operatorname{tg} A = \sin B$$

Par ailleurs, le triangle étant isocèle, on a

$$2B = \pi - A \quad \text{soit} \quad B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \quad \text{donc} \quad \sin B = \cos\frac{A}{2}$$

On obtient ainsi l'équation

$$\operatorname{tg} A = \cos \frac{A}{2}$$

qui se résout comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin A}{\cos A} \equiv \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos A} = \cos \frac{A}{2} \\
&2 \sin \frac{A}{2} = \cos A \equiv 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \\
&2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} - 1 = 0
\end{aligned}$$

Finir comme en solution 1.

Question 2

Résoudre l'équation suivante

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x + \sin 2x = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Solution proposée

On a successivement

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \sin 2x = 0$$
$$\frac{\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x}{\cos x \cos 3x} + \sin 2x = 0$$
$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} + \sin 2x = 0$$
$$\frac{2 \sin 2x \cos 2x + \sin 2x \cos x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} = 0$$
$$\sin 2x \frac{2 \cos 2x + \cos x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} = 0$$

● *cas 1 :*

$$\sin 2x = 0$$
$$2x = k\pi$$
$$x = k\frac{\pi}{2}$$

●*cas 2 :*

$$2\cos 2x + \cos x \cos 3x = 0$$
$$2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x = 0$$
$$5\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$$
$$\cos 2x = \frac{-5 + \sqrt{25+8}}{4} \quad \text{(l'autre racine est à rejeter, } |\bullet| > 1)$$
$$= 0{,}1861$$
$$2x = \pm 79{,}27° + k.360°$$
$$x = \pm 39{,}64° + k.180°$$

Question 3

Montrer que dans tout triangle ABC de côtés a,b,c, on a la relation

$$ab\cos C - ac\cos B = b^2 - c^2$$

Solutions proposées

Solution 1 – En vertu de la relation $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, cela revient à dire que

$$\sin A \sin B \cos C - \sin A \sin C \cos B = \sin^2 B - \sin^2 C$$
$$\sin A \sin(B - C) = \sin^2 B - \sin^2 C$$

Or, dans tout triangle, $\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin(B + C)$. On se ramène donc à devoir montrer que

$$\sin(B + C)\sin(B - C) = \sin^2 B - \sin^2 C,$$

relation bien connue et du reste facile à vérifier :

$$\sin(B + C)\sin(B - C) = \frac{1}{2}(\cos 2C - \cos 2B) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - 2\sin^2 C\right) - \left(1 - 2\sin^2 B\right)\right]$$

Solution 2 –

En soustrayant les deux relations

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

on obtient

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2\left(ab\cos C - ac\cos B\right)$$

ce qui équivaut à la thèse.