1. Si $tg\,x + \sin x = m$ et $tg\,x - \sin x = n$, quand a-t-on l'égalité $m^2 - n^2 = 4\sqrt{m\,n}$?

Solution:

Remarquons d'abord que

$$m^2 = tg^2 x + \sin^2 x + 2\,tg\,x \sin x$$

$$n^2 = tg^2 x + \sin^2 x - 2\,tg\,x \sin x$$

donc $\quad m^2 - n^2 = 4\,tg\,x \sin x = 4\,\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

et que

$$m\,n = (tg\,x + \sin x)(tg\,x - \sin x) = tg^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

soit

$$m\,n = tg^2 x \sin^2 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

Conditions d'existence :

1°/ La fonction $tg\,x$ n'a pas de valeur finie en $x = \pm p/2 + 2kp,\ k \in Z$. Ces solutions sont donc à éliminer.

2°/ Pour que la racine carrée du membre de droite ait un sens, il faut que le radicant soit supérieur ou égal à zéro, ce qui donne lieu à la condition

$$m\,n = tg^2 x \sin^2 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \geq 0$$

La condition est vérifiée pour tout x

3°/ Pour que l'égalité puisse être vérifiée, et parce que le membre de droite est positif ou nul (parce que c'est la valeur d'une racine carrée), il faut que le membre de gauche soit également à valeur positive ou nulle, il vient donc la condition

$$m^2 - n^2 = 4\,tg\,x \sin x = 4\,\frac{\sin^2 x}{\cos x} \geq 0$$

Cette condition est vérifiée lorsque $\cos x > 0$ ou lorsque $\sin^2 x = 0$ quelle que soit la valeur de $\cos x$.

La condition $\cos x > 0$ entraîne $x \in \left]-p/2\,, p/2\right[+ 2kp,\ k \in Z$, c'est-à-dire lorsque x est dans le premier et le quatrième cadran.

La seconde condition $\sin^2 x = 0$ est réalisée lorsque $x = kp,\ k \in Z$, ce qui génère donc la solution isolée x=π.

2. Résoudre le système suivant et représenter séparément les solutions pour x et y sur 2 cercles trigonométriques.

$$\begin{cases} 2\sin x = \cos y \\ \sin^2 x + \sin^2 y + \cos y + 0.75 = 0 \end{cases}$$

Solution:

La première équation donne :

$\sin x = \dfrac{\cos y}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 y}{4}$

On remplace alors $\sin^2 x$ dans la seconde équation :

$\dfrac{\cos^2 y}{4} + \sin^2 y + \cos y + \dfrac{3}{4} = 0$

et, comme $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$, on obtient une équation du second degré en $\cos y$,

$\dfrac{\cos^2 y}{4} + 1 - \cos^2 y + \cos y + \dfrac{3}{4} = 0$

$-3\cos^2 y + 4\cos y + 7 = 0$

$r = 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 7 = 100$

$\rightarrow \quad \cos y = \dfrac{-4 \pm 10}{-6} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{7}{3} \text{ à rejeter} \end{cases}$

Et on a donc comme <u>solutions pour *y* :</u> $\quad y = (\pm)180° + k \cdot 360°$

Partant de $\cos y = -1$, on a directement les solutions pour *x* en reprenant la première équation :

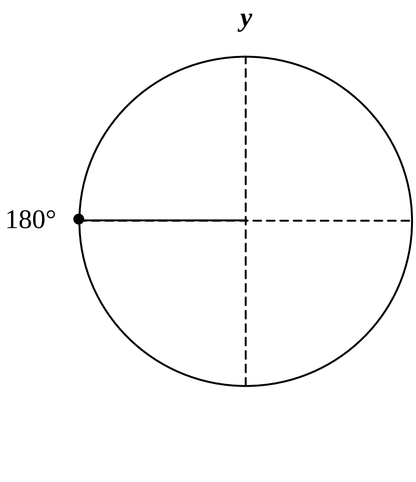
$2\sin x = \cos y$

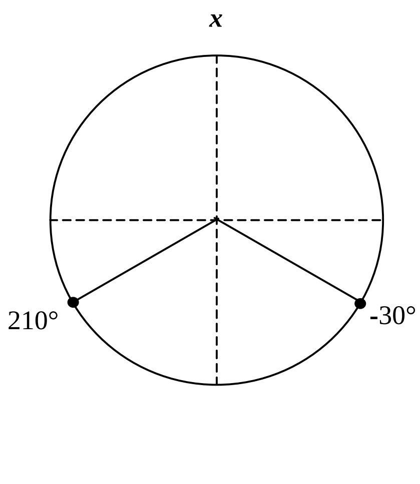
$2\sin x = -1$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$

<u>Solutions pour *x* :</u> $\quad x = \begin{cases} -30° + k \cdot 360° \\ 180° - (-30°) + k \cdot 360° \end{cases} = \begin{cases} -30° + k \cdot 360° \\ 210° + k \cdot 360° \end{cases}$

<u>Cercles trigonométriques :</u>





Démonstration de l'égalité

On peut maintenant démontrer l'égalité envisagée :

$$m^2 - n^2 = 4\,\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

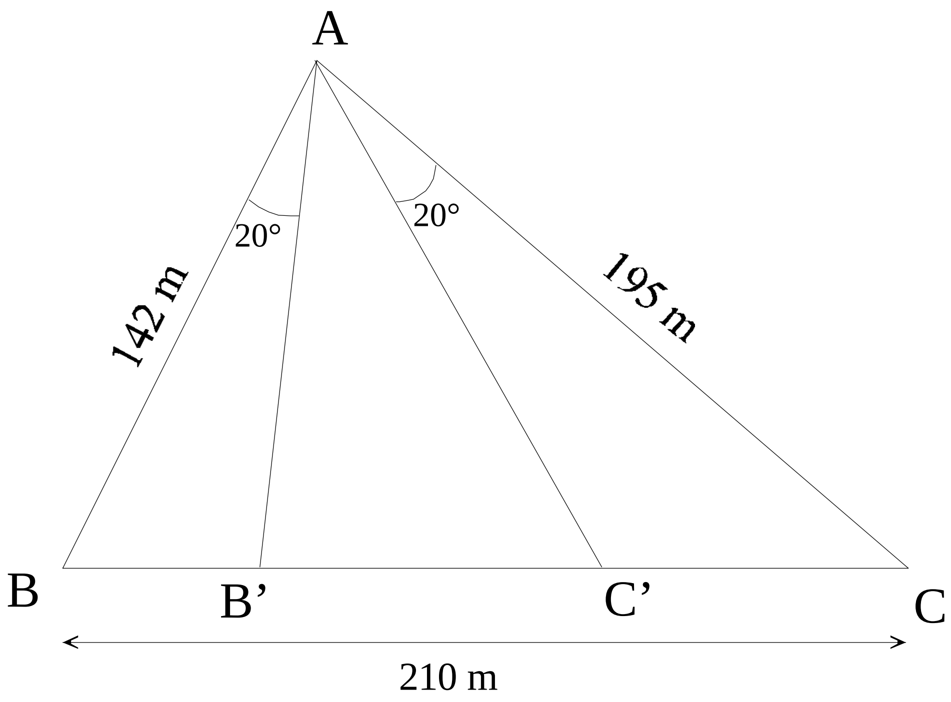
$$4\sqrt{m\,n} = 4\sqrt{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}} = 4\,\frac{\sin^2 x}{|\cos x|}$$

La relation $m^2 - n^2 = 4\sqrt{m\,n}$ est vérifiée lorsque $\cos x > 0$ (car $\cos x = |\cos x|$) ou lorsque $\sin^2 x = 0$ quelle que soit la valeur de $\cos x$, ce qui correspond aux conditions 1 et 3 données plus haut.

En résumé le domaine de validité de l'équation est

$$x \in \left]-p/2\,,\,p/2\right[+ 2kp \quad \cup \quad \{p\} + 2kp$$

3. On donne un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont connues. Par le sommet A, à l'intérieur du triangle, on mène deux segments de droite AB' et AC' formant avec AB et AC des angles de 20 degrés, tels que B' et C' appartiennent au côté BC. Calculer la surface AB'C'.



Solution:

Dans le triangle ABC, on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\hat{B}$$

$$\rightarrow \cos\hat{B} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}} = \frac{142^2 + 210^2 - 195^2}{2\cdot 142\cdot 210} = 0,43996$$

$$\rightarrow \hat{B} = 63,8989°$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\hat{C}$$

$$\rightarrow \cos\hat{C} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}} = \frac{195^2 + 210^2 - 142^2}{2\cdot 195\cdot 210} = 0,75654$$

$$\rightarrow \hat{C} = 40,8395°$$

Dans le triangle ABB’, on a :

$$\frac{\overline{BB'}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{B}'}$$

$$\frac{\overline{BB'}}{\sin 20°} = \frac{142}{\sin(180° - 20° - \hat{B})} \quad \rightarrow \quad \overline{BB'} = 48{,}8435\ \text{m}$$

Dans le triangle ACC’, on a :

$$\frac{\overline{CC'}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\sin \hat{C}'}$$

$$\frac{\overline{CC'}}{\sin 20°} = \frac{195}{\sin(180° - 20° - \hat{C})} \quad \rightarrow \quad \overline{BB'} = 76{,}3737\ \text{m}$$

On a alors la base du triangle AB’C’ dont on cherche la surface :

$$\overline{B'C'} = 210 - \overline{BB'} - \overline{CC'} = 84{,}7828\ \text{m}$$

La hauteur du triangle AB’C’ est évidemment égale à celle du triangle ABC et s’obtient facilement à partir de l’un des angles calculés plus haut :

$$h = 142 \cdot \sin \hat{B} = 195 \cdot \sin \hat{C} = 127{,}5187\ \text{m}$$

La surface de AB’C’ est donc de :

$$S_{AB'C'} = \frac{\overline{B'C'} \cdot h}{2} = 5405{,}6976\ \text{m}^2$$