TRIGONOMETRIE
ET
CALCUL NUMERIQUE

Juillet 2001

QUESTION 1

ENONCE

Vérifier les identités suivantes :

- a) $\tan(45° - \frac{a}{2}) = \dfrac{1 - \sin a}{\cos a}$
- b) $\tan(45° - \frac{a}{2}) = \dfrac{\cos a}{1 + \sin a}$

SOLUTION

Conditions d'existence

- $\tan(45° - \frac{a}{2})$ existe si et seulement si $45° - \frac{a}{2} \neq 90° \ + \ k\,180° \ k \in \mathbb{Z}$. Soit $a \neq 270° \ + \ k\,360° \ k \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{1-\sin a}{\cos a}$ existe si et seulement si $\cos a \neq 0$. Soit $a \neq 90° \ + \ k\,180° \ k \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{\cos a}{1+\sin a}$ existe si et seulement si $1+\sin a \neq 0$. Soit $a \neq 270° + k 360° \ k \in \mathbb{Z}$.

En résumé, la relation a) existe si

$$a \neq 90° \ + \ k\,180° \ k \in \mathbb{Z}$$

tandis que la relation b) existe si

$$a \neq 270° \ + \ k\,360° \ k \in \mathbb{Z}$$

Preuve de l'identité a)

On utilise les formules suivantes :

- $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$
- $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$
- $\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$

Il vient :

$$\frac{1 - \sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{(\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2})^2}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}$$

Comme $\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2} \neq 0$ découle de la condition d'existence, il vient :

$$\frac{1-\sin a}{\cos a} \quad = \quad \frac{\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}}$$

Etant donné que $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut encore écrire :

$$\frac{1-\sin a}{\cos a} = \frac{\sin 45° \cos\frac{a}{2} - \cos 45° \sin\frac{a}{2}}{\cos 45° \cos\frac{a}{2} + \sin 45° \sin\frac{a}{2}} = \frac{\sin(45° - \frac{a}{2})}{\cos(45° - \frac{a}{2})}$$

On obtient donc le résultat final annoncé :

$$\frac{1-\sin a}{\cos a} = \tan(45° - \frac{a}{2})$$

Preuve de l'identité b)

La seconde égalité se démontre de manière totalement similaire :

$$\frac{\cos a}{1+\sin a} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2})^2}$$

Parce que la troisième condition d'existence entraîne que $\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2} \neq 0$, on a :

$$\frac{\cos a}{1+\sin a} \quad = \quad \frac{\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}}$$

On obtient alors :

$$\frac{\cos a}{1+\sin a} = \frac{\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}} = \frac{\sin(45° - \frac{a}{2})}{\cos(45° - \frac{a}{2})} = \tan(45° - \frac{a}{2})$$

QUESTION 2

ENONCE

Soient :

$$\begin{aligned} m^2 &= \cos^2\beta \ + \ \sin^2\alpha \, \sin^2\beta \\ n^2 &= \cos^2\alpha \\ p^2 &= \sin^2\beta \ + \ \sin^2\alpha \, \cos^2\beta \end{aligned}$$

Et les équations :

$$4\, m^2 \ = \ n^2 \ = \ p^2$$

On demande de calculer les valeurs des angles α et β et de les représenter sur le cercle trigonométrique.

RESOLUTION

Transformons d'abord l'équation $4\, m^2 \ = \ n^2$.

$$\begin{aligned} 4\, \cos^2\beta \ + \ 4\, \sin^2\alpha\, \sin^2\beta \ &= \ \cos^2\alpha \\ 4\, \cos^2\beta \ + \ 4\,(1 - \cos^2\alpha)\, \sin^2\beta \ &= \ \cos^2\alpha \\ 4\, \cos^2\beta \ + \ 4\, \sin^2\beta \ &= \ \cos^2\alpha \ + \ 4\, \cos^2\alpha\, \sin^2\beta \\ 4 \ &= \ \cos^2\alpha\,(1 + \ 4\, \sin^2\beta) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\cos^2\alpha \ = \ \frac{4}{1 + 4\, \sin^2\beta}$$

Transformons ensuite l'équation $p^2 \ = \ n^2$.

$$\begin{aligned} \sin^2\beta \ + \ \sin^2\alpha\, \cos^2\beta \ &= \ \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta \ + \ (1 - \cos^2\alpha)\, \cos^2\beta \ &= \ \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta \ + \ \cos^2\beta \ - \ \cos^2\alpha\, \cos^2\beta \ &= \ \cos^2\alpha \\ 1 \ &= \ \cos^2\alpha\, (1 + \cos^2\beta) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\cos^2\alpha \ = \ \frac{1}{1 + \cos^2\beta}$$

En identifiant les deux résultats, on obtient :

$$\begin{aligned}
4\,(1+\cos^2\beta) &= 1+4\ \sin^2\beta \\
4\,(1+\cos^2\beta) &= 1+4\,(1-\cos^2\beta) \\
8\ \cos^2\beta &= 1
\end{aligned}$$

Soit :

$$\cos^2\beta \;=\; \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \sin^2\beta \;=\; \frac{7}{8}$$

En retournant dans une des deux équations, on obtient :

$$\cos^2\alpha \;=\; \frac{8}{9} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha \;=\; \frac{1}{9}$$

On calcule alors les solutions α et β :

$$\cos\alpha \;=\; \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{et} \quad \cos\beta \;=\; \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ce qui donne les solutions :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 19.4712^\circ + k\,180^\circ & \text{et} \qquad \alpha &= 160.5288^\circ + k\,180^\circ \\
\beta &= 69.2952^\circ + k\,180^\circ & \text{et} \qquad \beta &= 110.7048^\circ + k\,180^\circ
\end{aligned}$$

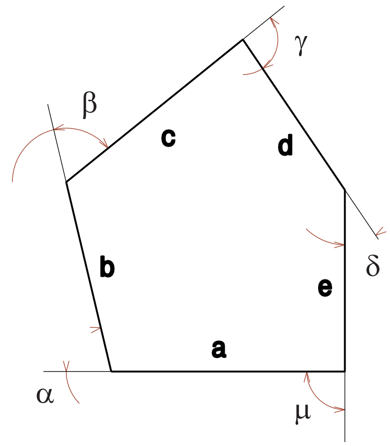

FIG. 1 – Enoncé

QUESTION 3

ENONCE

Un pentagone, volontairement déformé, est défini comme sur la figure 1.

Données :	a= 10 m	$\alpha = 45°$
	b = 30 m	$\beta = 60°$
	c = 40 m	$\mu = 90°$
	d = 50 m	

Calculer : γ, δ, et $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

Calculer le périmètre et la surface du pentagone

RESOLUTION

On commence par définir les sommets du pentagone par A, B, C, D, E comme sur la figure 2. On construit ensuite les points F, G, et H ainsi que P, Q, R comme montré sur la figure 2 suivant les perpendiculaires abaissées sur l'horizontale et la verticale.

Dans le triangle rectangle ABF, on a :

$$|BF| = |GH| = b \ \cos 45° = 21.2132 \ m$$
$$|AF| = b \ \cos 45° = 21.2132 \ m$$

Dans le triangle rectangle BGC, l'angle au sommet B vaut :

$$180° - (90° - \alpha) - \beta = 75°$$

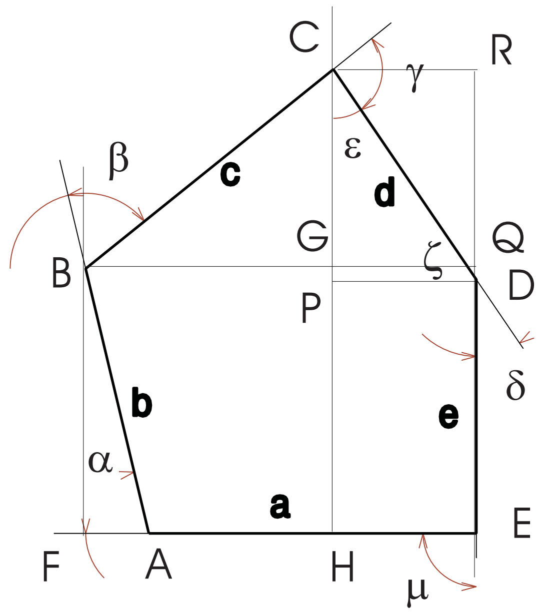

FIG. 2 –

De sorte que l'on a :

$$|CG| = c \ \sin 75° = 38.6370 \ m$$
$$|BG| = |FH| = c \ \cos 75° = 10.3528 \ m$$

On en tire encore :

$$|CH| = |CG| + |BF| = 59.8502 \ m$$
$$|AH| = ||FH| - |AF|| = 10.8604 \ m$$

Remarquons que, contrairement à ce que suggère la figure 2, le point H se trouve à gauche de A puisque $|AF| > |FH|$.

On considère maintenant le triangle rectangle CPD. On peut y déterminer la longueur de la projection du côté CD sur l'horizontale :

$$|EH| = |DP| = a + |AH| = 20.8604 \ m$$

Comme on connaît la longueur du segment CD, on peut déterminer l'angle ζ du triangle en D :

$$\cos \zeta = \frac{|DP|}{d} = \frac{20.8604}{50} = 0.4172$$

et donc

$$\zeta = \pm 65.3415°$$

Le choix du signe positif de ζ permet de se tourner vers une construction avec un côté CD tel que le point D est plus bas que le point C orienté et un petit côté DE (comme sur la figure 2) tandis que le signe négatif permet de choisir une solution alternative avec un côté CD tel que D est plus haut que C et un long côté DE. Nous choisissons ici de prendre le signe positif comme sur la figure 2.

On peut aussi calculer l'angle ϵ du triangle CPD au point C :

$$\epsilon = 180° - 90° - \zeta = 24.6585°$$

La valeur de δ s'obtient facilement car on peut remarquer que $\delta = \epsilon$, soit

$$\boxed{\delta = \epsilon = 24.6585°}$$

Quant à la valeur de γ, elle vaut :

$$\boxed{\gamma = 180° - \epsilon - 15° = 140.3415°}$$

Enfin la somme $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ s'obtient aisément en remarquant que la figure ABCDE est un polyèdre fermé dont la somme des angles $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu$ vaut 360°. On a donc :

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° - \mu = 270°}$$

Calculons le périmètre. On calcule d'abord la longueur e du côté DE, projection verticale de DE. Elle vaut :

$$e = |CH| - d\ \cos\epsilon = 14.4097\ m$$

Le périmètre s'obtient alors comme suit :

$$\boxed{a + b + c + d + e = 10 = 30 + 40 + 50 + 14.4097 = 144.4097\ m}$$

Calculons l'aire du polyèdre ABCDE. Cette aire est égale à l'aire du trapèze AEQB + l'aire du trapèze BQRC - l'aire du triangle CDR.

$$Aire(AEQB) = \frac{(|AE| + |BQ|)}{2}\ |GH$$
$$Aire(BQRC) = \frac{(|BQ| + |EH|)}{2}\ |CG|$$
$$Aire(CQR) = \frac{|EH| * |CP|}{2}$$

Soient :

$$|BQ| = |AF| + |AE| = 21.2132 + 10 = 31.2132\ m$$
$$|CP| = |CH| - e = 45.4405\ m$$

Il vient :

$$Aire(AEQB) = \frac{(10 + 31.2132)}{2} 21.2132 = 437.1319\ m^2$$
$$Aire(BQRC) = \frac{(31.2132 + 20.8604)}{2}\ 38.6370 = 1005.9838\ m^2$$
$$Aire(CQR) = \frac{20.8604 * 45.4405}{2} = 45.4405\ m^2$$

Soit l'aire recherchée :

$$\boxed{Aire(ABCDE) = 437.1319 + 1005.9838 - 45.4405 = 969.1623\ m^2}$$