Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2002
Solutions des questions

Question 1

Vérifier les identités suivantes:

a) $(2\cos a+1)\,(2\cos a-1)\,(2\cos 2a-1)=2\cos 4a+1$

b) $\dfrac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\tan a$

Solution:

a) Simplifions d'abord:

$$(2\cos a+1)\,(2\cos a-1)=4\cos^2 a-1$$

Or

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1$$

De sorte que

$$(2\cos a+1)\,(2\cos a-1)=4\cos^2 a-1=2\,(\cos 2a+1)-1$$

Il vient:

$$(2\cos a+1)\,(2\cos a-1)\,(2\cos 2a-1)=(2\cos 2a+1)\,(2\cos 2a-1)=4\cos^2 2a-1$$

On a de même:

$$\cos 4a=2\cos^2 2a-1$$

On en déduit:

$$(2\cos a+1)\,(2\cos a-1)\,(2\cos 2a-1)=2\,(\cos 4a+1)-1=\ 2\cos 4a+1$$

Ce qui démontre l'identité.

Il n'y a pas de conditions d'existence particulières.

b) Pour étudier l'identité

$$\frac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\tan a$$

on étudie d'abord le dénominateur et le numérateur de l'expression. Il vient pour le numérateur:

$$1-\cos 2a+\sin 2a=\cos^2 a+\sin^2 a-(\cos^2 a-\sin^2 a)+2\sin a\cos a$$
$$1-\cos 2a+\sin 2a=2\sin a\,(\sin a+\cos a)$$

En ce qui concerne le dénominateur:

$$1+\cos 2a+\sin 2a=\cos^2 a+\sin^2 a+(\cos^2 a-\sin^2 a)+2\sin a\cos a$$
$$1+\cos 2a+\sin 2a=2\cos a\,(\sin a+\cos a)$$

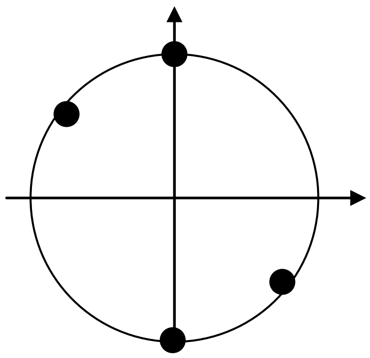
Il vient donc si $(\sin a+\cos a)\neq 0$ (ce qui se sera justifié par les conditions d'existence),

$$\frac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\frac{2\sin a\,(\sin a+\cos a)}{2\cos a\,(\sin a+\cos a)}=\tan a$$

Conditions d'existence:

Les conditions d'existence sont liées à l'annulation du dénominateur. La formule est valable si:

- $\cos a \neq 0$ ce qui arrive si $a \neq 90° + k\,180°$, avec k entier.
- $(\sin a + \cos a) \neq 0$, c'est-à-dire $\sin a \neq -\cos a$, ce qui arrive si $a \neq 135° + k\,180°$ avec k entier.



Question 2

1° Déterminer les solutions α et β satisfaisant au système d'équations suivant:

$$\begin{cases} P\cos\alpha + Q\sin\alpha = A + B\cos\beta \\ Q\cos\alpha - P\sin\alpha = B\sin\beta \end{cases}$$

où A, B, P et Q sont des constantes connues.

2° Donner les conditions sur A, B, P et Q pour assurer l'existence de la ou des solutions.

Solution

Elevons les deux équations du système au carré

$$\begin{cases} P^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha + 2\,PQ\cos\alpha\sin\alpha = A^2 + B^2\cos^2\beta + 2\,AB\cos\beta \\ Q^2\cos^2\alpha + P^2\sin^2\alpha - 2\,PQ\cos\alpha\sin\alpha = B^2\sin^2\beta \end{cases}$$

Faisons en la somme, il vient:

$$P^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+Q^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=A^2+B^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+2AB\cos\beta$$

D'où on tire $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{P^2+Q^2-A^2-B^2}{2AB}$$

Ce qui fournit deux familles de valeur pour β:

$$\boxed{\beta = \pm\arccos\frac{P^2+Q^2-A^2-B^2}{2AB} + 2\,k\,\pi}$$

On peut en déduire immédiatement les conditions sur A, B, P et Q pour que cette expression ait un sens:

$$-1 \le \cos\beta \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le \frac{P^2+Q^2-A^2-B^2}{2AB} \le 1$$

$$A \ne 0 \text{ et } B \ne 0$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient sans peine les conditions:

$$(A-B)^2 \le (P^2+Q^2) \le (A+B)^2$$

Calculons maintenant la valeur de $\sin\beta$

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta} = \pm\sqrt{\frac{4A^2B^2-\left[(P^2+Q^2)-(A^2+B^2)\right]^2}{4A^2B^2}}$$

Ce qui peut encore être mis sous la forme:

$$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{4A^2(P^2+Q^2)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}{4A^2B^2}}$$

Les valeurs de $\cos\beta$ et de $\sin\beta$ étant connues, on détermine la valeur de α à partir des équations du système:

$$\begin{cases} P\cos\alpha + Q\sin\alpha = A + B\cos\beta = \dfrac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{2A} \\ Q\cos\alpha - P\sin\alpha = B\sin\beta = \pm\sqrt{\dfrac{4A^2(P^2+Q^2)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}{4A^2}} \end{cases}$$

Pour la résolution, on pose classiquement:

$$P = K\sin\varphi \quad et \quad Q = K\cos\varphi$$

$$K = \sqrt{P^2+Q^2} \quad et \quad \tan\varphi = P/Q$$

Il vient:

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\varphi) = \dfrac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{2A\sqrt{P^2+Q^2}} \\ \cos(\alpha+\varphi) = \pm\sqrt{1-\dfrac{\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}{4A^2(P^2+Q^2)}} \end{cases}$$

Soit

$$\tan(\alpha+\varphi) = \pm\frac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{\sqrt{4A^2(P^2+Q^2)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}}$$

Pour chaque choix d'une solution β (repérée par l'indicateur $\pm$), on a donc respectivement une solution α:

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\pm\frac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{\sqrt{4A^2(P^2+Q^2)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}}\right) - \arctan(P/Q) + k\pi}$$

Les seules conditions sur A, B, P et Q sont que $A \neq 0$ et $P^2+Q^2 \neq 0$

2° Les conditions sur A, B, P et Q pour assurer l'existence des deux familles de solutions sont:

- $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $P^2+Q^2 \neq 0$
- $(A-B)^2 \leq (P^2+Q^2) \leq (A+B)^2$

Question 3

La figure ci-dessous représente un pentagone régulier, son cercle circonscrit et ses diagonales. En utilisant uniquement la formule de calcul de l'aire d'un cercle ou d'un de ses secteurs ainsi que les formules relatives aux triangles, calculer le rapport entre l'aire de la partie rouge de la figure et l'aire de sa partie jaune.

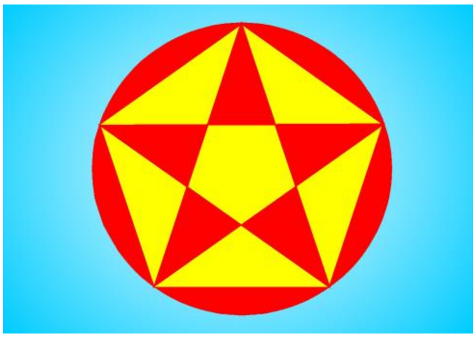


Figure 1: Pentagone régulier, son cercle circonscrit et ses diagonales.

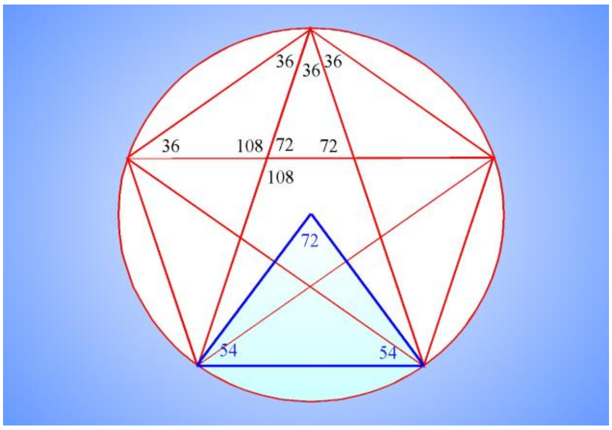


Figure 2

Solution:

Sur la figure, on distingue deux sortes de triangles, les rouges et les jaunes. Tous sont isocèles. Le calcul des angles est immédiat. On peut partir de l'observation que le pentagone est lui-même formé de 5 triangles isocèles, dont l'angle au sommet situé au centre du cercle vaut 72°, les deux autres étant égaux à 54°. Les angles au sommet du pentagone valent 108°. On en déduit que les angles rouges valent 36°, 72° et 72°. Ceux des triangles jaunes: 108°, 36° et 36°.
On calcule ensuite la longueur a du côté du pentagone en examinant son triangle de base ayant pour sommet le centre du cercle. Il vient

$$a = 2R\cos 54°$$

L'aire de ce triangle est égale à :

$$R\cos 54° R\sin 54° = \frac{R^2}{2}\sin 72°$$

Pour les triangles jaunes, la base étant égale à a, la hauteur vaut $a/2 \tan 36°$ et l'aire

$$\frac{a^2}{4}\tan 36° = R^2 \sin 36° \tan 36°$$

La longueur des autres côtés est par ailleurs donnée par:

$$\frac{a}{2} = b\cos 36°$$

donc

$$b = \frac{a}{2\cos 36°} = R\tan 36°$$

On en déduit l'aire d'un triangle rouge:

$$R\tan 36°\cos 72°\ R\tan 36°\sin 72° = \frac{R^2}{2}\tan^2 36°\sin 36°$$

Pour ce cinquième de figure la surface jaune est égale à :

$$\frac{R^2}{2}\sin 72° - \frac{R^2}{2}\tan^2 36°\sin 36°$$

On conclut en calculant les rapports entre les surfaces colorées et la surface totale, et le rapport entre les différentes surfaces rouges et jaunes:

$$\frac{jaune}{total} = \frac{5R^2}{2\pi R^2}\left[\sin 72° - \tan 36°\sin 36°\right] = 0.5099$$

$$\frac{rouge}{total} = 0.4901$$

$$\frac{rouge}{jaune} = 0.9611$$