Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2002
Solutions des questions

Question 1
Vérifier que pour tout x on a l'identité suivante:

$$\sin^2 x + \sin^2(x + 2\pi/3) + \sin^2(x - 2\pi/3) = 3/2$$

Solution:

On utilise la formule de Carnot $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ et il vient :

$$3/2 - 1/2\cos 2x - 1/2\cos(2x + 4\pi/3) - 1/2\cos(2x - 4\pi/3) = 3/2$$

$$\cos 2x + \cos(2x + 4\pi/3) + \cos(2x - 4\pi/3) = 0$$

La formule du cosinus d'une somme

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

donne :

$$\cos 2x + \cos 2x \cos 4\pi/3 - \sin 2x \sin 4\pi/3 + \cos 2x \cos 4\pi/3 + \sin 2x \sin 4\pi/3 = 0$$

$$\cos 2x + \cos 2x \cos 4\pi/3 + \cos 2x \cos 4\pi/3 = 0$$

Ce qui démontre que l'identité est trivialement satisfaite quelque soit x, si on se rend compte que $\cos 4\pi/3 = -1/2$.

Question 2
Sans l'aide de la calculatrice, démontrer l'égalité suivante :

$$\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° \sin 90° = 1/16$$

Solution :
Puisque que $\sin 90° = 1$ et que $\sin 30° = 1/2$, l'égalité à démontrer se réduit à :

$$\sin 10° \sin 50° \sin 70° = 1/8$$

La solution la plus classique :
On utilise les formules de transformation de produit en somme (Simpson), à savoir

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

Il vient :

$$\sin 10° \sin 50° \sin 70° = 1/8$$

$$\sin 10°\, 1/2\, (\cos 20° - \cos 120°) = 1/8$$

$$\sin 10° \cos 20° + \sin 10°\, 1/2 = 1/4$$

$$1/2(\sin(-10°) + \sin 30°) + \sin 10°\, 1/2 = 1/4$$

$$-1/2 \sin 10° + 1/2 \sin 30° + \sin 10°\, 1/2 = 1/4$$

$$1/2 \sin 30° = 1/4$$

Ce qui démontre l'égalité.

La solution la plus rapide :
On utilise la formule de duplication $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ soit $\sin a = \sin 2a/(2\cos a)$ pour écrire :

$$\sin 10° \sin 50° \sin 70° = 1/8$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 20°}{\cos 10°}\frac{1}{2}\frac{\sin 100°}{\cos 50°}\frac{1}{2}\frac{\sin 140°}{\cos 70°} = \frac{1}{8}$$

En utilisant par exemple cercle trigonométrique, il est alors facile de se rendre compte que :

$$\sin 20° = \cos 70°$$

$$\sin 100° = \sin 80° = \cos 10°$$

$$\sin 140° = \sin 40° = \cos 50°$$

L'égalité est alors trivialement satisfaite.

Question 3

Résoudre l'équation suivante :

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution :

On utilise les formules de transformation de somme en produit (Simpson) :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

et la formule de Carnot

$$1 + \cos a = 2\cos^2 a/2$$

Il vient :

$$2\cos 4x \cos 2x = 2\cos^2 4x$$

$$2\cos 4x\,(\cos 2x - \cos 4x) = 0$$

Ce qui donne lieu à deux familles de solutions :

$$\cos 4x = 0$$

qui a pour solution

$$4x = \pi/2 + k\pi$$

soit

$$x = \pi/8 + k\pi/4$$

$$\cos 2x = \cos 4x$$

qui a pour solution

$$4x = \pm 2x + 2k\pi$$

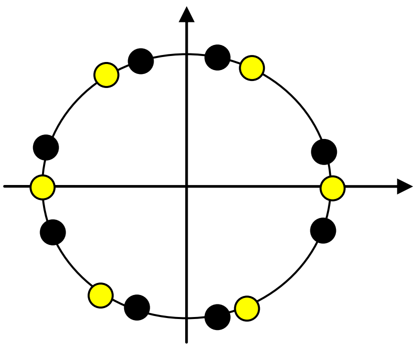
soit

$$6x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi/3$$

$$2x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$$

Avec k entier.

Les solutions sont représentées schématiquement sur le cercle trigonométrique avec en noir les solutions de $\cos 4x = 0$ et en jaune les solutions de $\cos 2x = \cos 4x$.



Question 4

Soit un triangle dont les côtés mesurent respectivement a=6cm, b=4cm et c=3cm (illustration voir figure 1).

1° On demande d'abord de calculer les valeurs des trois angles intérieurs du triangle A, B, C.

2° On divise ensuite le triangle en trois sous-triangles dont le sommet est D point d'intersection des médianes. On demande de calculer les aires, les angles et les côtés des trois sous-triangles ABD, BCD et ADC (en utilisant uniquement la trigonométrie).

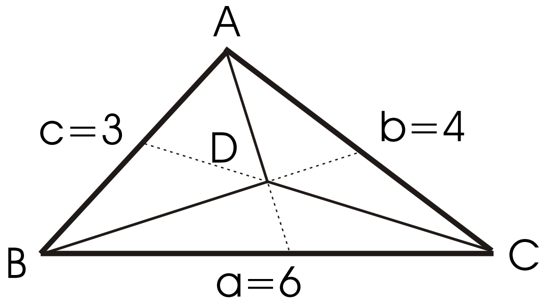
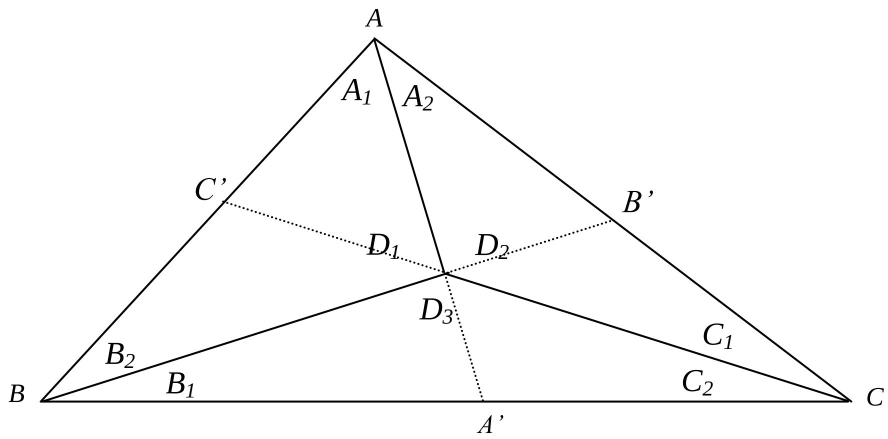


Figure 1: Triangle avec ses trois sous-triangles.

Solutions



Pour calculer les angles intérieurs A, B et C en connaissant les longueurs des côtés, on utilise la formule de Pythagore généralisée aux triangles quelconques. On obtient successivement :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \to A = \arccos\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \arccos\frac{6^2 - 4^2 - 3^2}{-2*4*3} = 117{,}2796°$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \to B = \arccos\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \arccos\frac{4^2 - 6^2 - 3^2}{-2*6*3} = 36{,}3361°$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \to C = \arccos\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \arccos\frac{3^2 - 6^2 - 4^2}{-2*6*4} = 26{,}3843°$$

Ensuite, encore par Pythagore généralisé, on calcule les longueurs des médianes *AA'*, *BB'* et *CC'*. En utilisant par exemple les triangles *AA'B*, *BB'C* et *CC'A*, les longueurs des côtés *A'B*, *B'C* et *C'A* étant connues par définition de la médiane, on a :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{A'B}^2 + c^2 - 2\,\overline{A'B}\,c\cos B = 3^2 + 3^2 - 2*3*3\cos(36{,}3361°) = 3{,}5 \quad \rightarrow \overline{AA'} = 1{,}8708\,\text{cm}$$

$$\overline{BB'}^2 = a^2 + \overline{B'C}^2 - 2\cdot a\,\overline{B'C}\cos C = 6^2 + 2^2 - 2*6*2\cdot\cos(26{,}3843°) = 18{,}5 \quad \rightarrow \overline{BB'} = 4{,}3012\,\text{cm}$$

$$\overline{CC'}^2 = \overline{C'A}^2 + b^2 - 2\,\overline{C'A}\,b\cos A = 1{,}5^2 + 4^2 - 2*1{,}5*4\cos(117{,}2796°) = 23{,}75 \quad \rightarrow \overline{CC'} = 4{,}8734\,\text{cm}$$

Toujours à l'aide de Pythagore généralisé, ces mêmes triangles peuvent ensuite servir à déterminer les angles définis par les médianes en chacun des sommets A, B et C. On a par exemple :

$$\overline{A'B}^2 = \overline{AA'}^2 + c^2 - 2\,\overline{AA'}\,c\cos A_1 \rightarrow A_1 = \arccos\frac{\overline{A'B}^2 - \overline{AA'}^2 - c^2}{-2\,\overline{AA'}\,c} = \arccos\frac{3^2 - 1{,}8708^2 - 3^2}{-2*1{,}8708*3} = 71{,}8320°$$

$$\overline{B'C}^2 = \overline{BB'}^2 + a^2 - 2\,\overline{BB'}\,a\cos B_1 \rightarrow B_1 = \arccos\frac{\overline{B'C}^2 - \overline{BB'}^2 - a^2}{-2\,\overline{BB'}\,a} = \arccos\frac{2^2 - 4{,}3012^2 - 6^2}{-2*4{,}3012*6} = 11{,}9254°$$

$$\overline{AC'}^2 = \overline{CC'}^2 + b^2 - 2\,\overline{CC'}\,b\cos C_1 \rightarrow C_1 = \arccos\frac{\overline{AC'}^2 - \overline{CC'}^2 - b^2}{-2\,\overline{CC'}\,b} = \arccos\frac{1{,}5^2 - 4{,}8734^2 - 4^2}{-2*4{,}8734*4} = 15{,}8763°$$

On déduit directement les angles A_2, B_2 et C_2 :

$$A_2 = A - A_1 = 117{,}2796° - 71{,}8320° = 45{,}4476°$$
$$B_2 = B - B_1 = 36{,}3361° - 11{,}9254° = 24{,}4107°$$
$$C_2 = C - C_1 = 26{,}3843° - 15{,}8763° = 10{,}5081°$$

Les angles en *D* des triangles *ABD*, *BCD* et *ADC* se calculent alors aisément :

$$D_1 = 180° - A_1 - B_2 = 180° - 71{,}8320° - 24{,}4107° = 83{,}7573°$$
$$D_2 = 180° - A_2 - C_1 = 180° - 45{,}4476° - 15{,}8763° = 118{,}6761°$$
$$D_3 = 360° - D_1 - C_2 = 360° - 83{,}7573° - 118{,}6761° = 157{,}5666°$$

A l'aide de ces dernières valeurs, on calcule les cotés inconnus des triangles *ABD*, *BCD* et *ADC* :

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A_1} = \frac{c}{\sin D_1} \quad \rightarrow \quad \overline{BD} = \frac{c\sin A_1}{\sin D_1} = \frac{3\sin(71{,}8320°)}{\sin(83{,}7573°)} = 2{,}8674\,\text{cm}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin C_1} = \frac{b}{\sin D_2} \quad \rightarrow \quad \overline{AD} = \frac{b\sin C_1}{\sin D_2} = \frac{4\sin(15{,}8763°)}{\sin(118{,}6761°)} = 1{,}2472\,\text{cm}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\sin B_1} = \frac{a}{\sin D_3} \quad \rightarrow \quad \overline{CD} = \frac{a\sin B_1}{\sin D_3} = \frac{6\sin(11{,}9254°)}{\sin(157{,}5666°)} = 3{,}2489\,\text{cm}$$

Il reste alors à calculer les aires de ces triangles :

$$S_{ABD} = \frac{c\,\overline{AD}\sin A_1}{2} = \frac{3*1{,}2472*\sin(71{,}8320°)}{2} = 1{,}7776\,\text{cm}^2$$

$$S_{BCD} = \frac{a\,\overline{BD}\sin B_1}{2} = \frac{6*2{,}8674*\sin(11{,}9254°)}{2} = 1{,}7776\,\text{cm}^2$$

$$S_{ADC} = \frac{b\,\overline{DC}\sin C_1}{2} = \frac{4*3{,}2489*\sin(15{,}8763°)}{2} = 1{,}7776\,\text{cm}^2$$