Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2004

Question 1

Vérifier l'identité suivante :

$$\frac{\sin 2x+\sin 2y}{\cos 2x+\cos 2y}=\operatorname{tg}(x+y)$$

On a les **conditions d'existence** suivantes :

- $\operatorname{tg}(x+y)\neq\infty \Leftrightarrow x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
- $\cos 2x+\cos 2y\neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x\neq-\cos 2y \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x\neq\cos(\pi-2y) & (1)\\ \cos 2x\neq\cos(\pi+2y) & (2)\end{cases}$

$$(1)\quad\begin{aligned}&\Leftrightarrow \cos 2x\neq\cos(\pi-2y)\\ &\Leftrightarrow 2x\neq\pm(\pi-2y)+2k\cdot\pi\\ &\Leftrightarrow 2x\pm 2y\neq\pm\pi+2k\cdot\pi\\ &\Leftrightarrow x\pm y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\end{aligned}$$

$$(2)\quad\begin{aligned}&\Leftrightarrow \cos 2x\neq\cos(\pi+2y)\\ &\Leftrightarrow 2x\neq\pm(\pi+2y)+2k\cdot\pi\\ &\Leftrightarrow 2x\mp 2y\neq\pm\pi+2k\cdot\pi\\ &\Leftrightarrow x\mp y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\end{aligned}$$

Ces conditions se réduisent à : $\begin{aligned}x+y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\\ x-y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\end{aligned}$

L'identité est vérifiée en considérant les formules : $\begin{aligned}&\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ &\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\end{aligned}$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2x+\sin 2y}{\cos 2x+\cos 2y}&=\frac{2\sin\frac{2x+2y}{2}\cos\frac{2x-2y}{2}}{2\cos\frac{2x+2y}{2}\cos\frac{2x-2y}{2}}.\\ &=\frac{\sin(x+y)\cos(x-y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)}\end{aligned}$$

Si $\cos(x-y)\neq 0 \Leftrightarrow x-y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, ce qui est toujours vrai par les conditions d'existence, on a donc :

$$\frac{\sin 2x+\sin 2y}{\cos 2x+\cos 2y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\operatorname{tg}(x+y)$$

Question 2

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\text{cotg}x - \text{tg}x - 2\text{tg}2x - 4\text{tg}4x > 8\sqrt{3}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

On a les **conditions d'existence** suivantes :

- $\text{cotg}x \neq \infty \iff x \neq 0° + k \cdot 180°$
- $\text{tg}x \neq \infty \iff x \neq 90° + k \cdot 180°$
- $\text{tg}2x \neq \infty \iff 2x \neq 90° + k \cdot 180° \iff x \neq 45° + k \cdot 90°$
- $\text{tg}4x \neq \infty \iff 4x \neq 90° + k \cdot 180° \iff x \neq 22{,}5° + k \cdot 45°$

Pour résoudre l'inéquation, remarquons que

$$\text{cotg}x - \text{tg}x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{1/2 \sin 2x} = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\text{cotg}2x .$$

On peut alors écrire :

$$\text{cotg}x - \text{tg}x - 2\text{tg}2x - 4\text{tg}4x > 8\sqrt{3}$$
$$\iff 2\text{cotg}2x - 2\text{tg}2x - 4\text{tg}4x > 8\sqrt{3}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\text{cotg}2x - \text{tg}2x = 2\text{cotg}4x \qquad \text{et} \qquad \text{cotg}4x - \text{tg}4x = 2\text{cotg}8x$$

L'inéquation devient :

$$\iff 4\text{cotg}4x - 4\text{tg}4x > 8\sqrt{3}$$
$$\iff 8\text{cotg}8x > 8\sqrt{3}$$
$$\iff \text{cotg}8x > \sqrt{3}$$

On a donc les solutions suivantes :

$$\iff 8x \in [0°;30°[\cup [180°;210°[+ k \cdot 360°$$
$$\iff x \in [0°;3{,}75°[\cup [22{,}5°;26{,}25°[+ k \cdot 45°$$

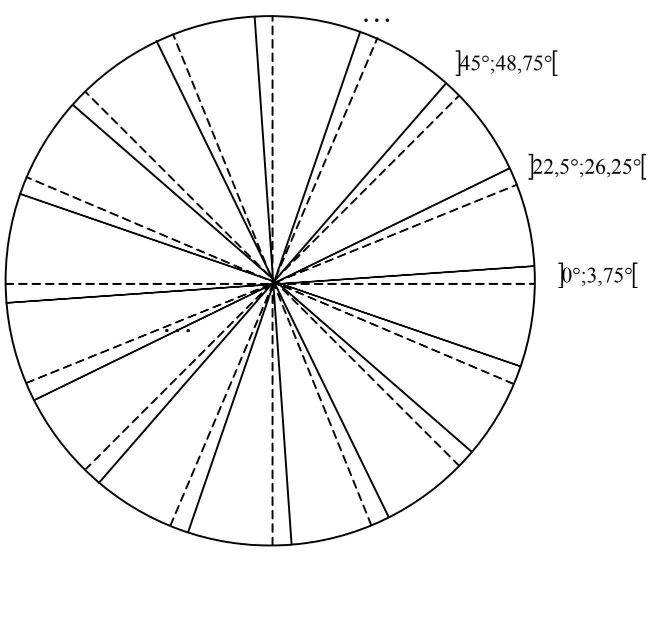
qui peuvent également s'écrire :

$$\iff x \in [0°;3{,}75°[+ k \cdot 22{,}5°$$

Après analyse des conditions d'existence ces **solutions** se réduisent à :

$$\iff x \in]0°;3{,}75°[+ k \cdot 22{,}5°$$

Certaines de celles-ci (k=0,1,2) sont représentées sur le **cercle trigonométrique** ci-contre.

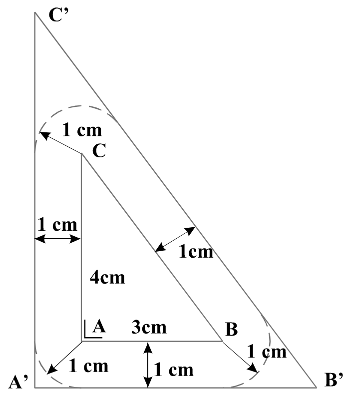


Question 3

Soit le triangle ABC donné. L'angle en A est droit. AB= 3 cm et AC=4 cm.

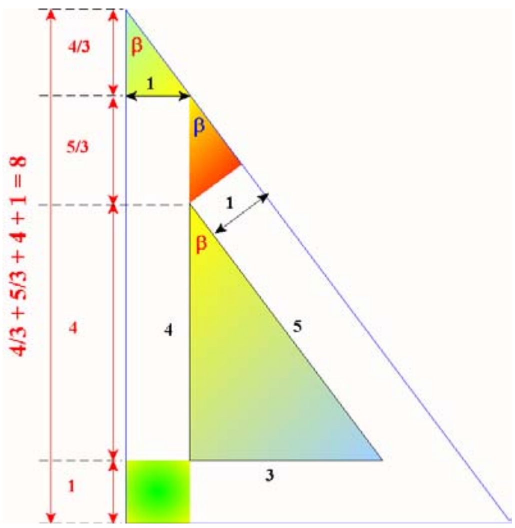
1° Calculer l'aire et le périmètre du triangle A'B'C' dont les côtés sont situés à 1 cm de ceux du triangle ABC (voir figure 1).

2° Quel sera le résultat (aire et périmètre) pour la figure où les coins sont remplacés par des arcs de cercles tangents aux côtés ?



Solution à partir de triangles semblables

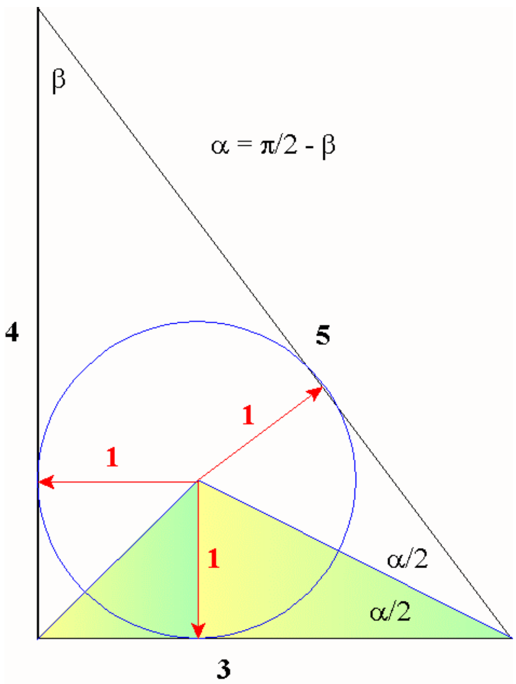
Tous les triangles en couleur sont semblables. Leurs angles et un de leurs côtés sont connus. Sachant que dans le triangle initial ABC, tg $\beta = 3/4$, cos $\beta = 4/5$ et sin $\beta = 3/5$, on calcule facilement les longueurs des côtés des petits triangles coloriés. On obtient ainsi que A'C' = 2 AC et donc que le triangle extérieur A'B'C' est deux fois plus grand que l'initial ABC. Son périmètre est donc le double et son aire quatre fois plus grande.



Périmètre A'B'C': 24 cm
Aire A'B'C' : 24 cm^2

Remarques :

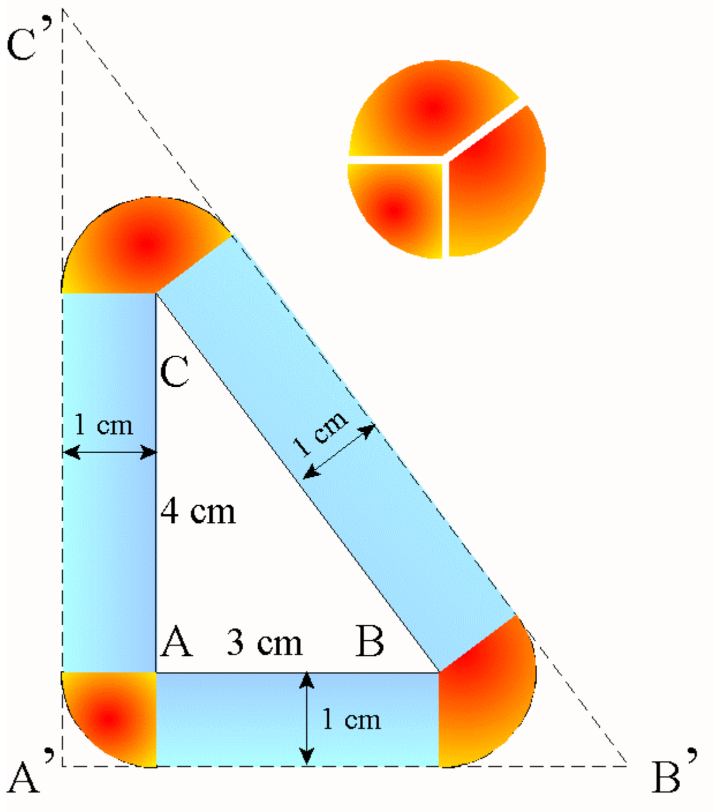
1. Sachant que l'aire d'un triangle est égale au produit de son demi-périmètre par le rayon du cercle inscrit, on déduit que le rayon du cercle inscrit à ABC est égal à 1 cm, puisque les côtés sont déplacés de 1 cm, le rayon du cercle inscrit à A'B'C' est de 2 cm et le rapport de similitude des triangles est égal à 2. La solution est immédiate.
2. Comme le centre du cercle inscrit est situé à l'intersection des bissectrices, une construction très simple basée sur le calcul des intersections des bissectrices issues de A et B permet de trouver le rayon de ce cercle et sa position. On part du fait que tg $\beta = 3/4$, d'où tg $\alpha = 4/3$ et tg $\alpha/2 = 1/2$. L'autre bissectrice est inclinée à 45°, on en déduit la hauteur du triangle colorié et donc le rayon du cercle inscrit.



Seconde partie du problème

La figure peut se décomposer en trois :

- le triangle initial (en blanc sur la figure)
- une série de secteurs circulaires qui forment au total un cercle complet (en rouge sur la figure),
- une bande (en bleu) dont la longueur est égale au périmètre du triangle ABC.



On en déduit pour un décalage de **r** cm :

Aire	**$(6 + \pi r^2 + 12r)$ cm^2**	**et avec r = 1 cm,**	**Aire =**	**$(18 + \pi)$ cm^2**
Périmètre :	**$(12 + 2\pi r)$ cm**	**et avec r = 1 cm,**	**Périmètre =**	**$(12 + 2\pi)$ cm**

La formule générale pour un polygone convexe de périmètre **2p** et d'aire **a** est :

Aire	**$(a + \pi r^2 + 2pr)$**	**cm^2**
Périmètre :	**$2(p + \pi r)$**	**cm**

Pour un polygone régulier comportant un nombre infini de côtés, la formule s'applique telle quelle pour un décalage des côtés égal à r, c'est le cas limite du cercle dont le rayon est augmenté de r.

En supposant que la longueur de l'équateur est égale à 40 000 km, un avion qui le suit à une altitude de 10 km parcourt une distance de 40 062.8 km tandis qu'un satellite qui tourne à une altitude de 200 km, parcourt une distance de 41 256 km.