Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2005
Solutions

Question 1
Un observateur relève l'angle α= 72° avec lequel il aperçoit la silhouette d'un arbre AB. L'œil de l'observateur est situé au point Q placé à une hauteur PQ=1,80m du sol. On mesure également la distance PB=10,21m qui sépare l'observateur du pied de l'arbre.

Quelle est la hauteur AB de l'arbre ?

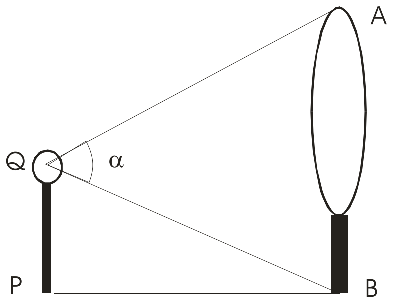


Figure 1: Mesure de la hauteur d'un arbre

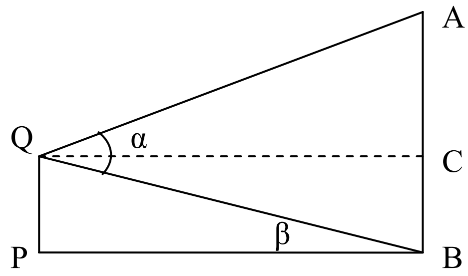


Figure 2

La Figure 1 peut se diviser en trois triangles rectangles comme illustré à la Figure 2 :

Dans le triangle rectangle PBQ, il est possible de déterminer l'angle β via la relation

$$tg\beta = \frac{PQ}{PB} = \frac{1.8}{20.21} \Rightarrow \beta = 9.9984°$$

Les angles PBQ et BQC étant alternes internes, ils sont donc identiques. Cela permet de déterminer la valeur de l'angle AQC comme étant :

$$\alpha - \beta = 72° - 9.9984° = 62.016°$$

A partir de cet angle AQC et par la définition de la tangente, il est possible de déterminer la longueur AC :

$$AC = tg(\alpha - \beta)QC = tg(\alpha - \beta)PB$$
$$\Rightarrow AC = tg(62.016°)*10.21 = 19.2152m$$

Finalement, il vient :

$$AB = AC + CB = AC + PQ = 19.2152 + 1.8 = 21.0156m$$

Question 2

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Par Carnot, l'expression de départ peut se réécrire :

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

En développant les expressions au cube, il vient :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\cos 2x}{2}\right) + 3\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\cos 2x}{3}\right)^3$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\cos 2x}{2}\right) + 3\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos 2x}{3}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

Après simplification, l'équation se réduit

$$\frac{2}{8} + 3\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}$$

Il vient donc finalement :

$$\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{8}$$

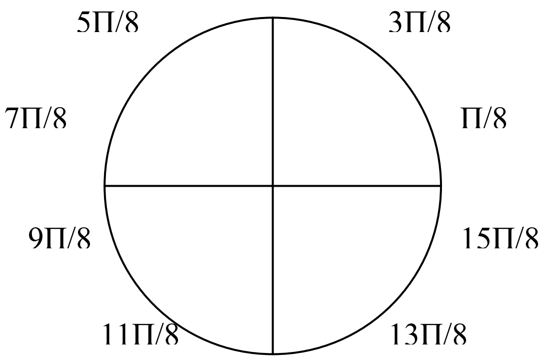
$$1 + \cos 4x = 1$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \qquad k \in Z$$

Représentées sur le cercle trigonométrique, ces solutions donnent :



Question 3

Démontrer l'égalité suivante :

$$arctg\, a + arctg\frac{1-a}{1+a} = \frac{\pi}{4}$$

Pour quelles valeurs de a cette égalité est-elle valable ?

Soit a donné dans R. Posons $tg\alpha = a$ avec $\alpha \in]-\pi/2\,,\pi/2[$. On évidemment aussi $tg\pi/4 = 1$. Il vient :

$$\frac{1-a}{1+a} = \frac{tg\pi/4 - tg\alpha}{1+tg\pi/4\; tg\alpha} = tg(\pi/4-\alpha)$$

Dès lors le membre de gauche de l'identité s'écrit :

$$arctg\, a + arctg\frac{1-a}{1+a} = arctg[tg\alpha] + arctg[tg(\pi/4-\alpha)]$$

Le premier terme de la somme ne pose aucun problème et vaut évidemment α, car il est situé dans l'intervalle $\alpha \in]-\pi/2\,,\pi/2[$. Pour le second terme, une réflexion un peu trop rapide pourrait nous laisser écrire :

$$arctg[tg(\pi/4-\alpha)] = \pi/4-\alpha$$

et par conséquent on aurait :

$$arctg\, a + arctg\frac{1-a}{1+a} = arctg[tg\alpha] + arctg[tg(\pi/4-\alpha)] = \alpha + (\pi/4-\alpha) = \pi/4$$

Quel que soit a.

Par contre, une étude plus approfondie nous permet de voir que

$$arctg\,\vartheta = \vartheta \quad si\ \vartheta \in]-\pi/2, \pi/2[$$

Dans notre cas, on a donc

$$arctg[tg(\pi/4-\alpha)] = \pi/4-\alpha \quad si \quad \pi/4-\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$$

Ceci n'arrive que donc que si

$$\alpha \in]-\pi/4, \pi/2[$$

soit en retournant à la valeur de a, on se rend compte que l'identité n'est vérifiée que si

$$a \in]-1,+\infty[$$

Si nous avons $\alpha \in]-\pi/2,-\pi/4[$, alors $(\pi/4-\alpha) \in]\pi/2\,,3\pi/4[$ et on voit aisément sur le cercle trigonométrique que

$$arctg[tg(\pi/4-\alpha)] = -[\pi-(\pi/4-\alpha)] = -3\pi/4-\alpha$$

puisque la fonction arc tangente est définie dans l'ouvert $]-\pi/2,\pi/2[$.

Il s'en suit que dans le cas où $a \in]-\infty,-1[$,

$$arctg\, a + arctg\frac{1-a}{1+a} = arctg[tg\alpha] + arctg[tg(\pi/4-\alpha)] = \alpha - 3\pi/4 - \alpha = -3\pi/4$$

Et la proposition n'est pas vérifiée dans ce domaine.

Il reste encore à discuter le cas a=-1. La fonction n'y est pas définie, mais on montre que l'identité est vérifiée à la limite pour des a supérieurs à –1.

$$\lim_{a\to -1+} arctg\, a + arctg\frac{1-a}{1+a} = -\pi/4 + \pi/2 = \pi/4$$

On montre également sans peine que la limite par valeurs inférieures vaut bien –3π/4.

Solution acceptée comme correcte :
Dans le cadre des connaissances des étudiants de rhétoriques, la démonstration plus simple a également été acceptée et validée comme juste, même si elle est incomplète car elle ne permet pas de déterminer le domaine de validité de a.

L'égalité proposé n'est évidemment pas valable en a=-1.

Pour démontrer la proposition, on prend la tangente du membre de droite et on utilise la formule de la tangente d'une somme d'angle

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha t\ g\beta}$$

Il vient :

$$tg\left[arctg\,a+arctg\frac{1-a}{1+a}\right]=\frac{a+\dfrac{1-a}{1+a}}{1-a\dfrac{1-a}{1+a}}=\frac{a(1+a)+(1-a)}{(1+a)-a(1-a)}=\frac{1+a^2}{1+a^2}=1$$

D'autre part, on a

$$tg\frac{\pi}{4}=1$$

Ce qui démontre l'égalité, mais ne nous renseigne pas sur son domaine de validité. En effet, on a également

$$tg\frac{-3\pi}{4}=1$$

Seule une analyse numérique permet de sélectionner la constante appropriée.

Question 4

Montrer que si les angles x et y vérifient

$$tg^2 x = 2\, tg^2 y + 1$$

alors on a l'égalité

$$\cos 2x + \sin^2 y = 0$$

1) Une solution très élégante consiste à ajouter 1 à chaque membre de l'hypothèse, ce qui donne

$$1 + tg^2 x = 2(1 + tg^2 y)$$

soit

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 y}$$

ou encore

$$2\cos^2 x = \cos^2 y$$

On transforme alors par Carnot :

$$1 + \cos 2x = \cos^2 y$$

soit

$$\cos 2x = \cos^2 y - 1 = -\sin^2 y$$

2) Une autre façon, très élégante également, consiste à écrire à partir de l'hypothèse

$$1 - tg^2 x = -2tg^2 y$$

dont on tire successivement en faisant appel à l'hypothèse

$$\cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = \frac{-2tg^2 y}{1 + tg^2 x} = \frac{-2tg^2 y}{2(1 + tg^2 y)} = \frac{-tg^2 y}{1 + tg^2 y}$$

D'autre part, on a également

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 1 + \cot g^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}$$

ce qui donne

$$\sin^2 y = \frac{1}{1 + 1/tg^2 y} = \frac{tg^2 y}{1 + tg^2 y}$$

Les expressions de $\cos 2x$ et de $\sin^2 y$ obtenues ci-dessus permettant de vérifier la relation

$$\cos 2x + \sin^2 y = 0$$