Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2006
Solution type

Ce solutionnaire ne prétend pas donner la solution unique, mais bien une voie simple pour arriver au résultat

QUESTION 1

Dans un triangle ABC, on a la relation

$$\sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 B \cos^2 C = \frac{1}{2} \sin 2B \sin 2C$$

Montrer que ce triangle est rectangle

On a donc successivement

$$\begin{aligned}
&\sin^2 B(1-\cos^2 C) + \cos^2 B(1-\cos^2 C) = 2\sin B \cos B \sin C \cos C \\
&1-\sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 C \cos^2 B = 2\sin B \cos C \sin C \cos B \\
&1 = \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 B + 2\sin B \cos C \sin c \cos B = \sin^2 (B+C)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sin(B+C) = \pm 1$$

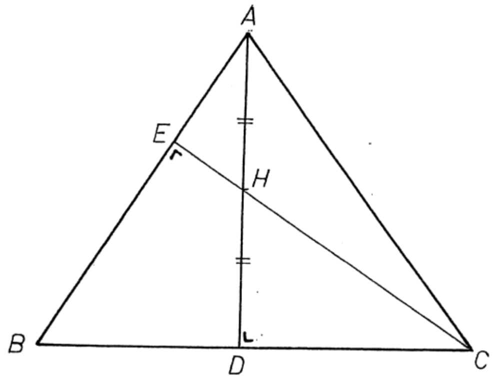
La valeur négative est à exclure, car $(B+C) \in \left]0,\pi\right[$. Donc,

$$B+C = \frac{\pi}{2}$$

et

$$A = \pi - (B+C) = \frac{\pi}{2}.$$

QUESTION 2



Dans le triangle ABC, la hauteur AD est coupée en son milieu H par la hauteur CE.

1) Montrer que $tgBtgC = 2$

On a en effet

$$tgB = \frac{AD}{BD} \quad ; \quad tgC = \frac{AD}{CD} \quad ; \quad tgBtgC = \frac{(AD)^2}{BD.CD}$$

Mais les angles (BAD) et (ECB) sont égaux. Soit α leur valeur commune. On a

$$BD = ADtg\alpha$$

$$CD = \frac{DH}{tg\alpha} = \frac{1}{2}\frac{AD}{tg\alpha}$$

et

$$BD.CD = \frac{1}{2}(AD)^2,$$

d'où la thèse.

2) Sachant que dans tout triangle, on a

$$tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$$

quelles sont les valeurs de l'angle A pour lesquelles la relation

$$tgBtgC = 2$$

est possible ?

Cela revient à déterminer quand la relation

$$tgA + tgB + \frac{2}{tgB} = 2tgA$$

soit

$$tg^2B - tgAtgB + 2 = 0$$

Il faut pour cela que le réalisant de l'équation soit non négatif, soit

$$\rho = tg^2A - 8 \geq 0$$

La condition est donc

$$tg^2A \geq 8$$

QUESTION 3

On désire trouver analytiquement la valeur de $\sin\frac{\pi}{10}$ *sous forme d'une expression comportant éventuellement des radicaux. A cette fin, on procédera comme suit :*

1) En posant $A=\frac{\pi}{10}$*, montrer que* $\cos 3A=\sin 2A$

C'est évident, car $3A+2A=5A=\frac{\pi}{2}$

2) Développer l'équation précédente en termes de cosA et sin A

$$\begin{aligned}&\cos 2A=\sin 2A\\&\cos 2A\cos A-\sin 2A=\sin 2A\\&\cos 2A\cos A=2\sin A\cos A(1+\sin A)\end{aligned}$$

3) L'équation obtenue peut se ramener à une équation en sinA, que l'on résoudra. Faire le bon choix entre les deux solutions possibles.

Il est clair que cos A ≠ 0. On a donc

$$\begin{aligned}&\cos 2A\equiv 1-2\sin^2 A=2\sin A-2\sin^2 A\\&4\sin^2 A+2\sin A-1=0\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont

$$\sin A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

C'est évidemment la valeur positive qui est la bonne, donc

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

QUESTION 4

Résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+tg\,\frac{x}{2}}{1-tg\,\frac{x}{2}}\right)^2+\sin x=0$$

On a

$$\frac{1+tg\,\frac{x}{2}}{1-tg\,\frac{x}{2}}=\frac{tg\,\frac{\pi}{4}+tg\,\frac{x}{2}}{1-tg\,\frac{\pi}{4}tg\,\frac{x}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

Le carré de cette expression vaut

$$tg^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})=\frac{\sin\ (\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\cos\ (\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$$

Or,

$$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\sin x=-\sin x$$

Ceci ramène l'équation à

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\sin x=0$$

soit

$$\sin^2 x-2\sin x-1=0$$

On en déduit

$$\sin x=1\pm\sqrt{2}$$

De ces deux racines, la positive est à rejeter, car supérieur à 1. La racine restante est

$$\sin x=1-\sqrt{2}\ ,$$

ce qui correspond à

$$x_1=-24{,}47°+k.360°$$
$$x_2=-155{,}5°+k360°$$