Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2007
Correction

Question 1

Démontrer l'identité

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)$$

<u>*Solution*</u>

$$1 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

donc

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}\left[1+\left(1-\sin^2 2x\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)$$

Question 2

Montrer que si a ,b, c sont des nombres positifs vérifiant,

$$a>b \text{ et } c^2=a^2-b^2,$$

alors l'expression

$$\sqrt{(a\cos\phi + c)^2 + b^2\sin^2\phi} + \sqrt{(a\cos\phi - c)^2 + b^2\sin^2\phi}$$

a une valeur indépendante de ϕ. Trouver cette valeur.

<u>*Solution*</u>

$$\left(a\cos\phi \pm c\right)^2 + b^2\sin^2\phi = a^2\cos^2\phi \pm 2ac\cos\phi + c^2 + (a^2-c^2)\sin^2\phi =$$

$$= a^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) \pm 2ac\cos\phi + c^2(1-\sin^2\phi) = a^2 \pm 2ac\cos\phi + c^2\cos^2\phi = (a \pm c\cos\phi)^2$$

dès lors

$$\sqrt{\left(a\cos\phi \pm c\right)^2 + b^2\sin^2\phi} = \sqrt{\left(a \pm c\cos\phi\right)^2} = \left|a \pm c\cos\phi\right| = a \pm c\cos\phi$$

car

$$c \le a \quad et \quad |\cos\phi| \le 1.$$

Finalement on obtient

$$\left(a + c\cos\phi\right) + \left(a - \cos\phi\right) = 2a.$$

Question 3

Résoudre l'équation

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

<u>*Solution*</u>

Par les formules de factorisation, on ramène l'équation à

$$\cos 4x \sin x = \cos 4x \cos 2x$$

soit

$$\cos 4x(\sin x - \cos 2x) = 0$$

a)*solutions de* $\cos 4x = 0$

$$x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

b)*solutions de* $\sin x - \cos 2x = 0$

$$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0$$

$$\sin x = \begin{cases} -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ou \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Le dessin des solutions sur le cercle trigonométrique est laissé au lecteur.

Question 4

Soit le trapèze isocèle ABCD représenté à la figure 1. La grande base a une longueur t, la hauteur vaut h, l'angle entre ses côtés obliques et la verticale vaut noté α et la petite base a une longueur notée b.

On déplace le sommet C vers la droite d'une distance x, de telle sorte que le côté BC' est incliné d'un angle θ par rapport à BC. On considère alors le trapèze ABC'D' tel que C'D' = CD = b. Le côté AD' est alors incliné d'un angle ϕ par rapport à AD.

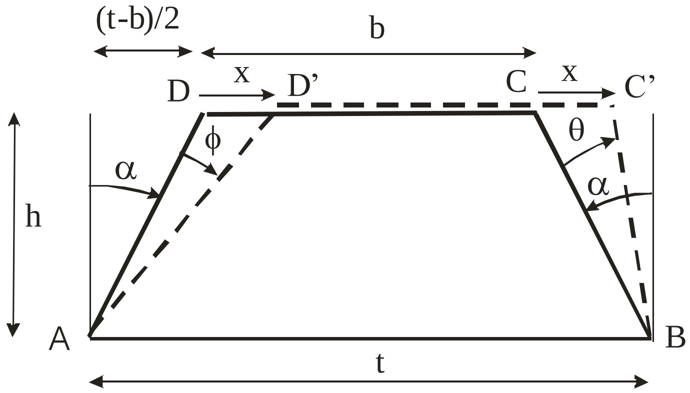

Figure 1 : Trapèze isocèle ABCD et quadrilatère ABC'D' après translation du côté CD

- *Montrer qu'il existe un angle α tel que :*

$$\cot\phi - \cot\vartheta = 2$$

quel que soit le déplacement x=CC'.

- *Déterminer la valeur numérique de cet angle α si t = 2 m et h = 0,5 m.*

<u>*Solution :*</u>

On a

$$b = t - 2htg\alpha = t - htg(\alpha+\phi) - htg(\alpha-\theta)$$

donc

$$tg(\alpha+\phi) + tg(\alpha-\theta) - 2tg\alpha = 0$$

$$\{tg(\alpha+\phi) - tg\alpha\} + \{tg(\alpha-\theta) - tg\alpha\} = 0$$

$$\frac{tg\alpha + tg\phi - tg\alpha(1 - tg\alpha tg\phi)}{1 - tg\alpha tg\phi} + \frac{tg\alpha - tg\theta - tg\alpha(1 + tg\alpha tg\theta)}{1 + tg\alpha tg\theta} = 0$$

$$\frac{tg\phi(1 + tg^2\alpha)}{1 - tg\alpha tg\phi} - \frac{tg\theta(1 + tg^2\alpha)}{1 + tg\alpha tg\theta} = 0$$

$$\frac{tg\phi}{1 - tg\alpha tg\phi} = \frac{tg\theta}{1 + tg\alpha tg\theta}$$

et, pour autant que θ et ϕ diffèrent de zéro,

$$\frac{1 - tg\alpha tg\phi}{tg\phi} = \frac{1 + tg\alpha tg\theta}{tg\theta}$$

$$\cot g\phi - tg\alpha = \cot g\theta + tg\alpha$$

$$\cot g\phi - \cot g\theta = 2tg\alpha$$

Il suffit donc de poser $tg\alpha = 1$, soit $\alpha = \pi/4$ pour satisfaire aux exigences de l'énoncé.