Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Juillet 2008

Question 1

Montrer que dans un triangle ABC, on a toujours

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \, cosC$$

Solution proposée

Partons du membre de gauche. Sachant que

$$A = \pi - B - C$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
&\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \cos 2(B+C) + \cos 2b + \cos 2C = \\
&\cos 2B \cos 2C - \sin 2B \sin 2C + \cos 2B + \cos 2C \\
&= (2\cos^2 B - 1)(2\cos^2 C - 1) - 4\sin B \cos B \sin C \cos C + (2\cos^2 B - 1) + (2\cos^2 C - 1) \\
&= \cos^2 B \cos^2 C - 2\cos^2 C - 2\cos^2 C + 1 - 4\sin B \sin C \cos B \cos C + 2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1 \\
&= 4\cos^2 B \cos^2 C - 4\sin B \sin C \cos B \cos C - 1 \\
&= 4\cos B \cos C(\cos B \cos C - \sin B \sin C) - 1 \\
&= 4\cos B \cos C \cos(B+C) - 1 \\
&= 4\cos B \cos C(-\cos A) - 1
\end{aligned}$$

Autre méthode de résolution moins classique…

La thèse,

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

équivaut à

$$2\cos^2 A - 1 + 2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1 = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

Divisons par deux et regroupons :

$$\cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C - 1 + \cos^2 A + \cos^2 B = 0$$

Cette équation du second degré n'est vérifiée que si

$$\begin{aligned}
\cos C &= -\cos A \cos B \pm \sqrt{\cos^2 A \cos^2 B - \cos^2 A - \cos^2 B + 1} \\
&= -\cos A \cos B \pm \sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)} \\
&= -\cos A \cos B \pm \sin A \sin B
\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que le sinus d'un angle d'un triangle n'est jamais négatif. Mais précisément, comme

$$C = \pi - (A+B)$$

on a

$$\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \blacksquare$$

Question 2

Résoudre l'équation suivante

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}\ (1 + \cos x + \cos 2x)$$

Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique

Solution proposée

Pour résoudre

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}(1 + \cos c + \cos 2x)$$

on remarque d'abord que le premier membre se transforme en

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x + \sin 3x &= \sin(2x - x) + \sin 2x + \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x + \sin 2x + \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x\\ &= \sin 2x(1 + \cos 2x) = 2\sin x(1 + \cos 2x)\end{aligned}$$

De la même façon, on réduit le second membre à

$$1 + \cos x + \cos 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x(1 + 2\cos x)$$

L'équation se ramène donc à

$$\cos x(1 + \cos 2x)(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

Les solutions sont donc (avec k entier)

a) $\cos x = 0$, soit $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (ou $\mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$)

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$, soit $x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $x = \left\{\begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ \pi - \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\} + 2k\pi$

Question 3

Dans un demi-cercle de rayon R, on trace trois cordes C_1, C_2 et C_3 parallèles à la base rectiligne du demi-cercle. La distance h entre C_1 et C_2 est égale à la distance entre C_2 et C_3. On mesure C_1= 8 m, C_2 = 16 m et C_3 = 20 m.
Quel est le rayon R du demi-cercle ?
Déterminer les angles α_1, α_2, et α_3 représentés sur la figure 1.
Donner vos réponses avec 4 chiffres après la virgule.

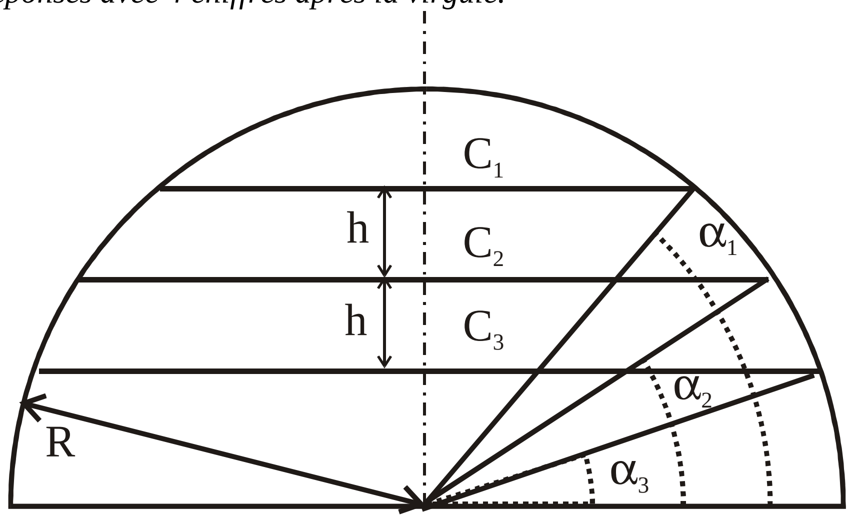

Figure 1 : Demi-cercle de rayon R avec ses trois cordes C_1, C_2, C_3.

Solutions proposées

Première méthode (par la trigonométrie)

On a successivement

$$\cos\alpha_1 = \frac{4}{R}, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{8}{R}, \qquad \cos\alpha_3 = \frac{10}{R} \qquad *$$

Par ailleurs,

$$h = R(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) = R(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_3)$$

soit, comme R n'est évidemment pas nul,

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_3 = 2\sin\alpha_2$$

Exprimant les sinus en fonction des cosinus (tous les angles sont entre 0 et π/2), on obtient

$$\sqrt{1-\frac{16}{R^2}} + \sqrt{1-\frac{100}{R^2}} = 2\sqrt{1-\frac{64}{R^2}}$$

soit, après multiplication par R^2,

$$\sqrt{R^2-16}+\sqrt{R^2-100}=2\sqrt{R^2-64} \qquad **$$

Elevons au carré : il vient

$$R^2-16+R^2-100+2\sqrt{(R^2-16)(R^2-100)}=4(R^2-64)$$

soit, après regroupement et division par 2,

$$\sqrt{(R^2-16)(R^2-100)}=R^2-70$$

Une nouvelle mise au carré donne

$$R^4-116R^2+1600=R^4-140R^2+4900$$

soit

$$R^2=137{,}5$$
$$R=11{,}73$$

Les angles s'obtiennent alors aisément des relations (*).

Deuxième méthode : à partir du théorème de Pythagore

En notant *x* l'ordonnée de la corde du milieu, on a les relations

$$x=\sqrt{R^2-64}$$
$$x+h=\sqrt{R^2-16}$$
$$x-h=\sqrt{R^2-100}$$

En sommant les deux dernières et en comparant le résultat à la première, on obtient

$$2x=\sqrt{R^2-16}+\sqrt{R^2-100}=2\sqrt{R^2-64}$$

qui n'est autre que l'équation (**) de la méthode précédente, que l'on reprend pour la suite.

Troisième méthode, également fondée sur le théorème de Pythagore

Avec la même définition de x que ci-dessus, on peut écrire

$$(1)\ R^2 = x^2 + 64$$
$$(2)\ R^2 = (x+h)^2 + 16 = x^2 + 2hx + h^2 + 16$$
$$(3)\ R^2 = (x-h)^2 + 100 = x^2 - 2hx + h^2 + 100$$

Sommant les relations (2) et (3), on obtient

$$2R^2 = 2x^2 + 2h^2 + 116 \qquad \text{soit} \qquad R^2 = x^2 + h^2 + 58$$

La soustraction de la relation (1) à ce résultat donne immédiatement

$$h^2 - 6 = 0 \quad \text{soit} \quad h = \sqrt{6}$$

De plus,

$$(1)\ \text{ donne }\ R^2 - x^2 = 64$$
$$(2)\ \text{ donne }\ R^2 - x^2 = 2hx + h^2 + 16$$

donc

$$64 = 2hx + h^2 + 16 \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{48 - h^2}{2h} = \frac{21}{h} = \frac{3.7}{\sqrt{6}}$$

On en déduit

$$R^2 = 64 + x^2 = 137{,}5$$

Il est alors aisé de calculer les angles.