Université de Liège

Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Juillet 2010

Prof. J.F. Debongnie et P. Duysinx

Question 1 *Montrer que l'on a*

$$4(\cos^6 a - \sin^6 a) = \cos 2a(4 - \sin^2\ 2a)$$

Solution

$$\begin{aligned} 4(\cos^6 a - \sin^6 a) &= 4(\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^4 a + \cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a) \\ &= 4\cos 2a(1 - \cos^2 a \sin^2 a) \\ &= \cos 2a \left[4 - (2\sin a \cos a)^2\right] \\ &= \cos 2a \left[4 - \sin^2\ 2a\right] \end{aligned}$$

Question 2 *Résoudre l'équation*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$$

Solution L'égalité à démontrer s'écrit :

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos x$$

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{\sin 2x}{2}$$

Soit

$$\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$

Les solutions de l'équation du second degré en $\sin x$ sont :

$$\sin 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 & \text{à rejeter} \\ \frac{2}{2} = 1 & \text{acceptable} \end{cases}$$

La solution acceptable donne :

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

Question 3 *Calculer l'angle A d'un triangle, sachant que les côtés adjacents b et c sont de même longueur et que l'aire du triangle vaut 3 fois celle du cercle dont le troisième côté a est le diamètre.*

Solution
L'aire du triangle est

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

tandis que l'aire du cercle de diamètre a vaut

$$\frac{\pi a^2}{4}$$

L'énoncé s'écrit donc :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \ = 3\frac{\pi a^2}{4}$$

Pythagore généralisé dans le triangle avec $b = c$ donne :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 2b^2(1 - \cos A) = 4b^2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

Dès lors on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} b^2 \sin A &= 3\pi b^2 \sin^2 \frac{A}{2} \\
\sin A &= 6\pi \sin^2 \frac{A}{2} \\
2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= 6\pi \sin^2 \frac{A}{2} \\
\operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{1}{3\pi}
\end{aligned}$$

Dont la solution ($0 \leq A \leq \pi$) vaut

$$\frac{A}{2} = 6,057^\circ = 0,1057 rad$$

Question 4 *Calculer la valeur de l'expression (sans l'aide de la calculatrice)*

$$E = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

Solution
On remarque que

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
E &= \operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) \\
&= \frac{sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
&= \frac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de transformation de produits en sommes

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) + \cos(p+q)]$$

on trouve

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\ &= \frac{2}{\cos 72^\circ + \cos 90^\circ} - \frac{2}{\cos 36^\circ + \cos 90^\circ} \\ &= \frac{2}{\cos 72^\circ} - \frac{2}{\cos 36^\circ} \\ &= 2\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 72^\circ \ \cos 36^\circ} \end{aligned}$$

En faisant usage à nouveau des formules de transformation de sommes en produits,

$$\cos p - \cos q = -2 \ \cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$$

Il vient

$$\begin{aligned} E &= 2 \ \frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 72^\circ \ \cos 36^\circ} \\ &= -4 \ \frac{\sin 54^\circ \ \sin(-18^\circ)}{\cos 72^\circ \ \cos 36^\circ} \\ &= 4 \ \frac{\sin 54^\circ \ \sin 18^\circ}{\cos 72^\circ \ \cos 36^\circ} \end{aligned}$$

Si on se souvient des relations

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ &= \cos(90^\circ - 54^\circ) = \cos 36^\circ \\ \sin 18^\circ &= \cos(90^\circ - 18^\circ) = \cos 72^\circ \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$E = 4$$