Solutions

J.F. Debongnie & P. Duysinx

6 juillet 2011

Nous présentons ici une voie de solution pour chaque problème, à titre d'exemple. Il va de soi que toute autre méthode correcte est admise lors de la correction

Solution 1

L'hypothèse implique

$$\frac{b}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{a+c}{2}$$

et, par conséquent,

$$\sin\frac{b}{2} = \cos\frac{a+c}{2}$$

Le second membre se ramène donc à

$$\begin{aligned}
2^d\ mb &= 4\cos\frac{a}{2}\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\right]\cos\frac{c}{2} \\
&= 4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{c}{2} - 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2} \\
&= (1+\cos a)(1+\cos c) - \sin a\sin c \\
&= 1+\cos a+\cos c+\cos a\cos c - \sin a\sin c \\
&= 1+\cos a+\cos c+\cos(a+c)
\end{aligned}$$

et il résulte de l'hypothèse que $\cos(a+c) = -\cos b$.

Solution 2

Dans le triangle ADC, on a

$$AD = AC\sin\hat{C}$$

et dans le triangle ABC, on a

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{BC}{\sin\hat{A}}$$

Il en résulte

$$AD = BC\frac{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$

Enfin,

$$\hat{A} = 180° - (\hat{B}+\hat{C}) = 180° - 70° - 84° = 26°$$

si bien que

$$AD = 1750\frac{\sin(70°)\sin(84°)}{\sin(26°)} = 3730m$$

Solution 3

Le plus simple est de résoudre d'abord la partie 2 de la question, ce que nous ferons ici.

2 - Il est clair que $AH = \frac{a-b}{2}$, d'où

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{h}{AH} = \frac{2h}{a-b}, \quad \text{et} \quad \hat{A} < \frac{\pi}{2}$$

On a alors

$$\hat{A} + \hat{D} = \pi \quad \text{d'où} \quad \hat{D} = \pi - \hat{A}$$

1 -

$$\ell = \frac{h}{\sin \hat{A}}$$

3 - le cercle circonscrit au trapèze l'est également au triangle ABD, qui ne possède *qu'un seul* cercle circonscrit. On a donc

$$2R = \frac{BD}{\sin \hat{A}}$$

Il suffit donc de calculer BD, par la formule classique

$$\overline{BD}^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cos \hat{A}$$

ce qui résout le problème.

Application numérique : $a = 100,\ b = 80,\ h = 50$

2 -

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \hat{A} &= \frac{2 \cdot 50}{100 - 80} = 5 \\ \hat{A} &= 1,3734 rad \\ \hat{C} &= 1,7682\end{aligned}$$

1 -

$$\begin{aligned}\sin \hat{A} &= 0,9806 \\ \ell &= \frac{50}{\sin \hat{A}} = 50,9902\end{aligned}$$

3 -

$$\begin{aligned}BD &= \sqrt{a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cos \hat{A}} = 102,9563 \\ R &= = \frac{BD}{2 \sin \hat{A}} = 52,4976\end{aligned}$$

Solution 4

Tout d'abord, le premier membre I de l'inéquation se transforme de façon évidente comme suit :

$$I = \sin^3 x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x$$

Nous aurons besoin des formules de $\sin 3x$ et $\cos 3x$, qui peuvent se calculer comme suit :

– *cosinus*

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (2\cos^2 -1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \qquad (1)$$

– *sinus*

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x+x)\\ &= \sin 2x\cos x + \sin x\cos 2x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + \sin x(1-2\sin^2 x)\\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \qquad (2)$$

L'introduction des résultats 1 et 2 dans le premier membre I de l'inéquation donne

$$\begin{aligned}I &= \frac{3}{4}\sin x\cos 3x - \frac{1}{4}\sin 3x\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 3x\sin 3x + \frac{3}{4}\cos x\sin 3x\\ &= \frac{3}{4}(\sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x)\\ &= \frac{3}{4}\sin 4x\end{aligned}$$

L'inéquation se ramène donc à

$$\frac{3}{4}\sin 4x \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

soit

$$\sin 4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solution de cette inéquation est

$$4x \in [\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}] \bmod 2\pi$$

ce qui revient à dire

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 4x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Divisant par 4, on obtient

$$\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$