Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef

Test à blanc - avril 2014

Question 1 *Soit un triangle quelconque ABC. Si le côté a mesure 10m, que la différence des deux autres côtés $b-c$ vaut 4m et la différence des angles opposés à ces derniers $B-C$ vaut $30°$, calculer la longueur des côtés b et c ainsi que la valeur des angles du triangle.*

Résolution

Utilisons la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} b = R\sin B \\ c = R\sin C \end{array} \right. \tag{1}$$

Cela nous permet d'écrire :

$$b - c = R(\sin B - \sin C) \;\Rightarrow\; \frac{b-c}{\sin B - \sin C} = R = \frac{a}{\sin A} \tag{2}$$

L'égalité précédente se développe en :

$$\frac{b-c}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \tag{3}$$

En notant que $\pi = A + B + C$, cette égalité se simplifie en :

$$\frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow A = 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{b-c}\sin\frac{B-C}{2}\right) = 99.36° \tag{4}$$

Connaissant maintenant l'angle A, le reste du triangle peut être déterminé en utilisant la théorème de Pythagore généralisé $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ et en notant que $b - c = m \;\Rightarrow\; b^2 + c^2 - 2bc = m^2$ et il vient :

$$a^2 = m^2 + 2bc(1-\cos A) \;\Rightarrow\; bc = \frac{a^2 - m^2}{2(1-\cos A)} \tag{5}$$

or $c = b - m$, ce qui permet de résoudre l'équation ci-dessus pour b :

$$b^2 - bm - \frac{a^2 - m^2}{2(1-\cos A)} = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} b = 8.33\,\mathrm{m} \\ c = 4.33\,\mathrm{m} \end{array} \right. \tag{6}$$

Ensuite il vient simplement :

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\sin A\right) = 55.32° \text{ et } C = B - 30° = 25.32° \tag{7}$$