1. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution:

Conditions d'existences:

$\cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x \neq \pm 90° + k \cdot 360°}$

$\cos 2x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \neq \pm 90° + k \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad \underline{x \neq \pm 45° + k \cdot 180°}$

$\cos 3x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \neq \pm 90° + k \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad \underline{x \neq \pm 30° + k \cdot 120°}$.

Développements:

En utilisant la formule $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$ avec les termes en x et 3x, on a :

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = \frac{\sin 4x}{\cos 3x \cos x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos 3x \cos x}.$$

On a aussi :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}.$$

L'équation peut donc s'écrire :

$$\frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos 3x \cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0$$

$$\sin 2x \left[\frac{2 \cos 2x}{\cos 3x \cos x} + \frac{1}{\cos 2x} \right] = 0$$

Solutions:

1)

$$\sin 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \begin{cases} k \cdot 360° \\ 180° + k \cdot 360° \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} \underline{k \cdot 180°} \\ 90° + k \cdot 180° \quad \text{à rejeter au vu des conditions d'existence} \end{cases}$$

2)

$$\frac{2\cos 2x}{\cos 3x \cos x} + \frac{1}{\cos 2x} = 0$$

$$2\cos^2 2x + \cos 3x \cos x = 0$$

$$2\cos^2 2x + \frac{1}{2}\left[\cos(3x + x) + \cos(3x - x)\right] = 0$$

$$4\cos^2 2x + \cos 4x + \cos 2x = 0$$

$$4\cos^2 2x + (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \cos 2x = 0$$

$$5\cos^2 2x - \sin^2 2x + \cos 2x = 0$$

$$5\cos^2 2x - (1 - \cos^2 x) + \cos 2x = 0$$

$$6\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Résolvons cette équation du second degré:

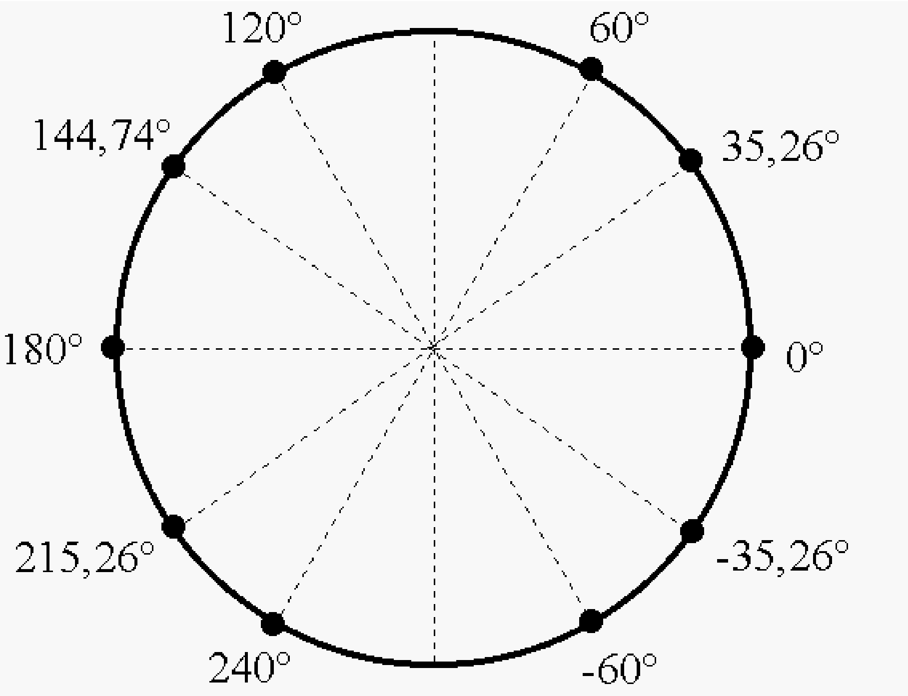
$$6\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$
$$\rho = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25$$

$$\rightarrow \cos 2x = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\cos 2x = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = \pm 120° + k \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \pm 60° + k \cdot 180°}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2x = \pm 70{,}5288° + k \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 35{,}2644° + k \cdot 180°}$$

Cercle trigonométrique:



2. Si $a+b+c=\pi$, vérifier que

$$\sin a-\sin b+\sin c=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

Solution:

En utilisant Simpson, les deux premiers termes du premier membre de l'équation peuvent s'écrire :

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\pi-c}{2}\qquad (a+b+c=\pi\ \rightarrow\ \frac{a+b}{2}=\frac{\pi-c}{2})$$

$$=2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

On a aussi pour le dernier terme du premier membre :

$$\sin c=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$=2\sin\frac{c}{2}\sin\frac{\pi-c}{2}$$

$$=2\sin\frac{c}{2}\sin\frac{a+b}{2}\qquad (\frac{a+b}{2}=\frac{\pi-c}{2})$$

On a donc:

$$\sin a-\sin b+\sin c=2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{c}{2}+2\sin\frac{c}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$=2\sin\frac{c}{2}\left[\sin\frac{a-b}{2}+\sin\frac{a+b}{2}\right]$$

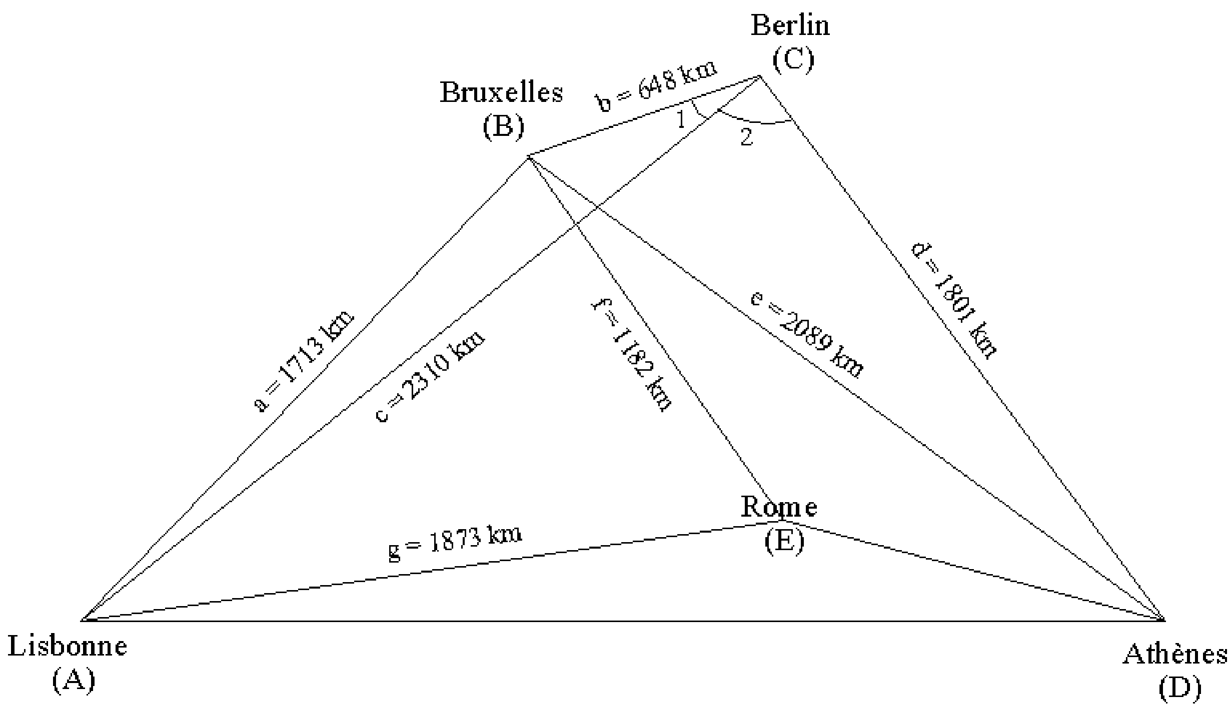
$$=2\sin\frac{c}{2}\left[2\sin\frac{a}{2}\cos(\frac{-b}{2})\right]\qquad \text{(Simpson)}$$

$$=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

3. Connaissant les distances suivantes:

Bruxelles - Berlin :	648 km
Bruxelles – Lisbonne :	1713 km,
Bruxelles – Rome :	1182 km,
Bruxelles - Athènes :	2089 km,
Lisbonne - Berlin :	2310 km,
Lisbonne – Rome :	1873 km,
Berlin - Athènes:	1801 km,

calculer l'aire du quadrilatère Bruxelles - Berlin - Athènes - Lisbonne.



Solution:

<u>Posons:</u>

a = 1713 (km): distance Bruxelles - Lisbonne
b = 648 (km): distance Berlin - Lisbonne
c = 2310 (km): distance Lisbonne - Rome
d = 1801 (km): distance Bruxelles - Rome
e = 2089 (km): distance Athènes - Rome
f = 1182 (km): distance Athènes - Bruxelles
g = 1873 (km): distance Athènes - Berlin

A : Lisbonne ; B : Bruxelles ; C : Berlin ; D : Athènes ; E : Rome.

Décomposons le quadrilatère en deux triangles, ABC et ACD.

Dans le triangle ABC, on a:

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin C_1}{2}.$$

b et c étant connus, C_1 est donné par :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos C_1$$

$$\rightarrow \quad \cos C_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{(648)^2 + (2310)^2 - (1713)^2}{2 \cdot 648 \cdot 2310} = 0.9425$$

$$\rightarrow \quad C_1 = 19.523°.$$

Donc, la surface du triangle ABC:

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin C_1}{2} = \frac{648 \cdot 2310 \cdot \sin(19.523°)}{2}$$

$$\rightarrow \quad S_{ABC} = 250121{,}83\ \text{km}^2.$$

Dans le triangle ACD, on a:

$$S_{ACD} = \frac{c \cdot d \cdot \sin C_2}{2}.$$

c et d sont connus et $C_2 = C - C_1$ peut être calculé via le triangle BCD :

$$e^2 = b^2 + d^2 - 2 \cdot b \cdot d \cdot \cos C$$

$$\rightarrow \quad \cos C = \frac{b^2 + d^2 - e^2}{2 \cdot b \cdot d} = \frac{(648)^2 + (1801)^2 - (2089)^2}{2 \cdot 648 \cdot 1801} = -0{,}300$$

$$\rightarrow \quad C = 107{,}462°$$

$$\rightarrow \quad C_2 = C - C_1 = 107{,}462 - 19{,}523 = 87{,}939°.$$

Donc, la surface du triangle ACD:

$$S_{ACD} = \frac{c \cdot d \cdot \sin C_2}{2} = \frac{2310 \cdot 1801 \cdot \sin(87{,}939°)}{2}$$

$$\rightarrow \quad S_{ACD} = 2078809{,}46\ \text{km}^2.$$

La surface du quadrilatère Bruxelles - Berlin - Athènes - Lisbonne (ABCD) est donc donnée par:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 250121{,}83 + 2078809{,}46 = 2328931{,}29\ \text{km}^2.$$