1. Vérifier l'identité $\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} 2a + 4\operatorname{tg} 4a + 8\operatorname{cotg} 8a = \operatorname{cotg} a$.

Conditions d'existence :

Il faut,

- pour les termes en tg :

  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

  $a \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$

- pour les termes en cotg :

  $a \neq k\frac{\pi}{8}$

  $a \neq k\pi$

Solution :

A partir des formules $\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$ et $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$, transformons le terme en $\operatorname{cotg} 8a$:

$$8\operatorname{cotg} 8a = \frac{8}{\operatorname{tg} 8a} = \frac{8}{\frac{2\operatorname{tg} 4a}{1 - \operatorname{tg}^2 4a}} = \frac{4 - 4\operatorname{tg}^2 4a}{\operatorname{tg} 4a} = 4\operatorname{cotg} 4a - 4\operatorname{tg} 4a .$$

L'identité peut donc s'écrire :

$\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} 2a + 4\operatorname{tg} 4a + 4\operatorname{cotg} 4a - 4\operatorname{tg} 4a = \operatorname{cotg} a$

$\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} 2a + 4\operatorname{cotg} 4a = \operatorname{cotg} a$.

En appliquant les mêmes transformations au terme en $\operatorname{cotg} 4a$, on obtient :

$\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} 2a + 2\operatorname{cotg} 2a - 2\operatorname{tg} 2a = \operatorname{cotg} a$

$\operatorname{tg} a + 2\operatorname{cotg} 2a = \operatorname{cotg} a$

De même pour le terme en $\operatorname{cotg} 2a$:

$\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a = \operatorname{cotg} a$

$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} a$

L'identité est donc vérifiée.

2. Résoudre l'équation suivante et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$$

Solution :

En utilisant la formule $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, on obtient :

$$1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$$

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1.$$

Sachant que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$ et $\frac{1}{2} = \cos 60°$, on peut écrire :

$$\sin 60° \cdot \sin 2x - \cos 60° \cdot \cos 2x = 1$$

$$\cos 60° \cdot \cos 2x - \sin 60° \cdot \sin 2x = -1$$

$$\cos(60° + 2x) = -1.$$

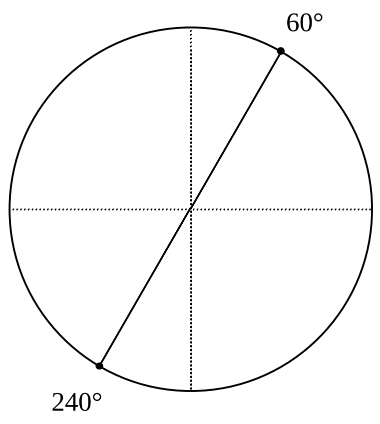
On a donc :

$$60° + 2x = 180° + k \cdot 360°$$

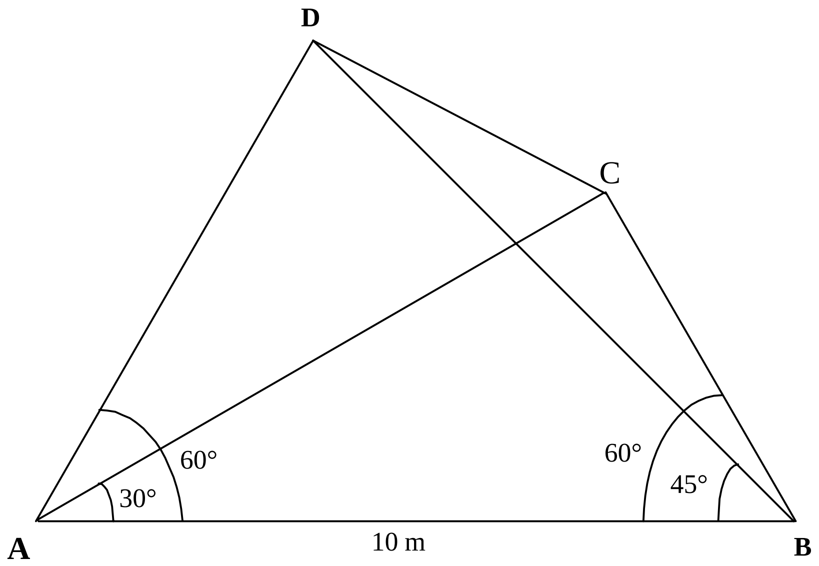
$$2x = 120° + k \cdot 360°$$

$\underline{x = 60° + k \cdot 180°}$.

Cercle trigonométrique :



3. Déterminer la distance entre les points C et D à partir des données fournies sur le dessin ci-dessous.



Solution:

Dans le triangle ABC, on a :

$$\frac{AC}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin(180° - 30° - 60°)} \rightarrow AC = AB\frac{\sin 60°}{\sin 90°} = 8{,}6603$$

Dans le triangle ABD, on a :

$$\frac{AD}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin(180° - 45° - 60°)} \rightarrow AD = AB\frac{\sin 45°}{\sin 75°} = 7{,}3205$$

Dans le triangle ADC, on a :

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos(60° - 30°)$$

$$= (7{,}3205)^2 + (8{,}6603)^2 - 2 \cdot 7{,}3205 \cdot 8{,}6603 \cdot \cos 30°$$

$$= 18{,}7822$$

La distance entre C et D est donc de 4,3338 m.