Examen d'entrée de Trigonométrie Septembre 2001

Question 1

Vérifier l'identité suivante:

$$\sin 3a = 4\ \sin(60° - a)\ \ \sin a\ \ \sin(60° + a)$$

Solution:

Le membre de droite s'écrit:

$$\begin{aligned}
&4\sin(60° - a)\sin(60° + a)\sin a \\
&= 4\,(\sin 60° \cos a - \cos 60° \sin a)\,(\sin 60° \cos a + \cos 60° \sin a)\,\sin a \\
&= 4\,(\sin^2 60° \cos^2 a - \cos^2 60° \sin^2 a)\,\sin a \\
&= 4\,(\sin^2 60° \{1 - \sin^2 a\} - \{1 - \sin^2 60\} \sin^2 a)\,\sin a \\
&= 4\,(\sin^2 60° - \sin^2 60\ \sin^2 a + \sin^2 a + \sin^2 60° \sin^2 a)\,\sin a \\
&= 4\,(\sin^2 60° - \sin^2 a)\,\sin a \\
&= 4\,(3/4 - \sin^2 a)\,\sin a \quad = \quad 3\sin a - 4\sin^3 a
\end{aligned}$$

Le membre de gauche devient:

$$\begin{aligned}
&\sin 3a \quad = \quad \sin(2a + a) \quad = \quad \sin 2a\ \cos a + \cos 2a\ \sin a \\
&= \quad \sin a\ (\cos^2 a - \sin^2 a) + \cos a\ 2\sin a\ \cos a \\
&= \quad \sin a\ \cos^2 a - \sin^3 a + 2\sin a\ \cos^2 a \\
&= \quad 3\sin a\ (1 - \sin^2 a) - \sin^3 a \\
&= \quad 3\sin a - 3\sin^3 a - \sin^3 a \quad = \quad 3\sin a - 4\sin^3 a
\end{aligned}$$

La comparaison des deux résultats prouve l'égalité.

<u>Question 2</u>

Résoudre l'équation suivante:

$$tg\, x + \cot g\, x + \sec x + \cos ec\, x = -2$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

<u>Solution:</u>

Conditions d'existence:

$$\sin x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 90° + \quad k\,180°$$
$$\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0° + \quad k\,180°$$

En mettant tous les termes de l'équation au même dénominateur, il vient:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = -2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = -2$$

A cause des conditions d'existence, on peut encore écrire

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)^2 + \cos x + \sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)\,(\cos x + \sin x + 1) = 0$$

On envisage donc deux possibilités:

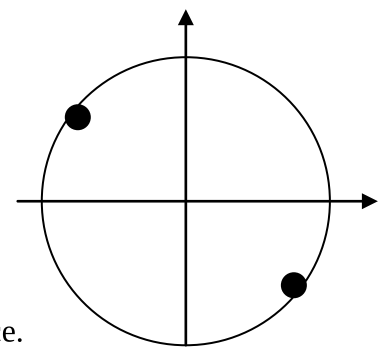
1. $\cos x + \sin x = 0$
2. $\cos x + \sin x + 1 = 0$

La première possibilité donne lieu à la solution suivante

$$\cos x = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = -45° + k\,180°$$

Etudions la seconde possibilité:

$$\cos x + \sin x = -1$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = -\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\ \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$



On a les solutions suivantes:

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 180° + k360°$$
$$\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{x}{2} = -\sin\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -90° + k360°$$

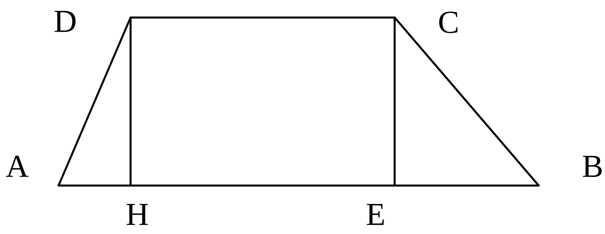
Ces deux dernières solutions sont à rejeter à cause des conditions d'existence.

Question 3

Soit un trapèze ABCD, CD étant parallèle à AB.
L'angle en B est de 60 degrés.
On donne également AB = 20 cm, BC = 15 cm et CD = 8 cm.

Solution:

Soit la figure suivante:



On trace d'abord les perpendiculaires abaissées de C et de D sur AB. Soient E et H respectivement les pieds de ces perpendiculaires sur AB.

Dans le triangle rectangle BCE, on a:

$CE = CB \sin B = 15 \sin 60° = 12.9904$ cm

$EB = CB \cos B = 15 \cos 60° = 7.5$

D'autre part :

$AH = AB – HE – EB = 20 – 8 – 7.5 = 4.5$ cm

On sait également que DH = CE = 12.9904 cm

Il vient dans le triangle rectangle AHD:

$DH = AD \sin A$ et $AH = AD \cos A$

Soit

$DH / AH = \text{tg } A$

Ce qui donne

$A = \text{arctg} (12.9904 / 4.5) = \text{arctg} (2.8868) = 70.8934°$

Il est alors facile de calculer tous les angles.
AB étant parallèle à CD, on en tire immédiatement que la valeur de l'angle en C

$C = 180°- 60° = 120°$

Enfin pour calculer D, on sait qu'on est dans un quadrilatère soit:

$D = 360° - A – B – C = 360 – 70.8934° - 60°- 120° = 109.1066°$

Pour calculer le périmètre, il suffit de connaître la longueur AD. Dans le triangle rectangle AHD, on a:

$AD = AH / \cos A = 12.0004 / \cos 70.8934° = 13.7477$ cm

D'où le périmètre:

$AB + BC + CD + DA = 20 + 15 + 8 + 13.7477 = 56.7477$ cm

On tire également l'aire du trapèze avec la formule classique:

$\text{Aire} = (AB+DC)/2 * CE = (20+8)/2 * 12.9904 = 181.8653 \text{ cm}^2$