Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2002
Solutions des questions

Question 1
Démontrer que

$$\operatorname{cosec} a = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{cotg} a$$

Puis calculer l'expression suivante

$$\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 4a + \operatorname{cosec} 8a$$

Rappel : $\operatorname{cosec} a = \dfrac{1}{\sin a}$

Solution:

Conditions d'existence:

Les conditions d'existence sont liées à l'existence des fonctions cotangentes et cosécantes, soit

- $\sin a \neq 0$ ce qui arrive si $a \neq 0° + k\,180°$, avec k entier.
- $\sin 2a \neq 0$ ce qui arrive si $a \neq 90° + k\ 90°$, avec k entier.
- $\sin 4a \neq 0$ ce qui arrive si $a \neq 45° + k\ 45°$, avec k entier.
- $\sin 8a \neq 0$ ce qui arrive si $a \neq 22{,}5° + k\ 22{,}5°$, avec k entier.
- $\sin a/2 \neq 0$ ce qui arrive si $a \neq 0° + k\ 360°$, avec k entier.

En résumé la condition peut être résumée par la condition

$$a \neq 0° + k\ 22{,}5°\text{, avec k entier}$$

Résolution

Démontrons d'abord que

$$\operatorname{cosec} a = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{cotg} a$$

Le membre de gauche s'écrit :

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{cotg} a = \frac{\cos a/2}{\sin a/2} - \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a \cos a/2 - \cos a \sin a/2}{\sin a \sin a/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{cotg} a \ = \frac{\sin(a - a/2)}{\sin a \sin a/2} = \frac{\sin a/2}{\sin a \sin a/2} = \frac{1}{\sin a} = \cos ec\ a$$

Ce qui démontre le premier résultat.

Evaluons à présent la somme :

$$\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 4a + \operatorname{cosec} 8a$$

La valeur de la somme s'obtient en utilisant le résultat précédent pour chacun des termes :

$$(\operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{cotg} a) + (\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} 2a) + (\operatorname{cotg} 2a - \operatorname{cotg} 4a) + (\operatorname{cotg} 4a - \operatorname{cotg} 8a) = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{cotg} 8a$$

Question 2

Résoudre l'équation suivante

$$\frac{\operatorname{cotg} x - \cos x}{\operatorname{cotg} x + \cos x} = 2\,(1 - \sin x)$$

Solution

Conditions d'existence

- $\operatorname{cotg} x$ existe si $\sin x \neq 0$, ce qui arrive si $x \neq 0° + k\,180°$, avec k entier.
- $\operatorname{cotg} x + \cos x \neq 0$, ce qui arrive si $\cos x \neq 0$, soit $x \neq 90° + k\,180°$, avec k entier

Résolution

Le membre de gauche peut s'écrire :

$$\frac{\operatorname{cotg} x - \cos x}{\operatorname{cotg} x + \cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \frac{\cos x\,\frac{1-\sin x}{\sin x}}{\cos x\,\frac{1+\sin x}{\sin x}}$$

Etant donné que $\cos x \neq 0$ par les conditions d'existence, il vient

$$\frac{\operatorname{cotg} x - \cos x}{\operatorname{cotg} x + \cos x} = 2\,(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 2\,(1 - \sin x)$$

La solution $1 - \sin x = 0$ est inacceptable aussi. En effet, elle correspond à

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 90° + k\,360° \text{ avec k entier}$$

Cette solution est à rejeter par les conditions d'existence.

L'équation se réduit donc à :

$$\frac{1}{1+\sin x} = 2$$

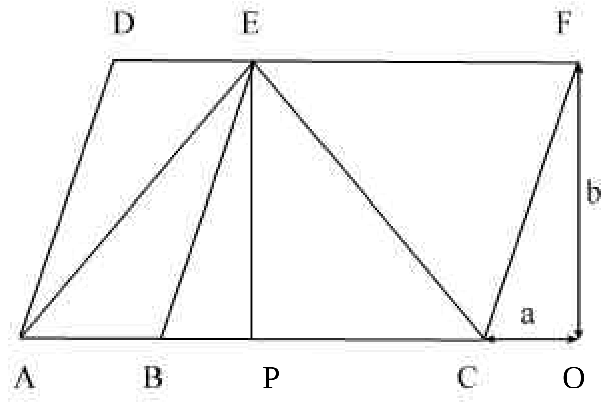
Soit

$$2\sin x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -1/2$$

Ce qui donne la solution : $\boxed{x = -30° + k\,180°}$

Question 3

On donne 2 parallélogrammes : ABED et BCFE. On sait que : AB = 3m, BC = 7m, a=2m, b=6m.



Calculer:

- les angles AEB et BEC;
- les longueurs des segments AE, BE et CE;
- le rapport des longueurs des diagonales AE et CE.

Solution:

Dans le triangle rectangle FCR, on a immédiatement par Pythagore que:

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 6{,}3246m$$

Puisqu'on a affaire à des parallèlogrammes, on a également les relations suivantes:

$$CF = AB = BE = \sqrt{40}m$$

$$DE = AB = 3m$$

$$BC = EF = 7m$$

Soit P et Q les pied des perpendiculaires abaissées respectivement de E et de F sur la droite BC. Dans le rectangle PQFE, on a:

$$PQ = EF = 7m$$

De sorte que:

$$PC = PQ - CQ = 7 - 2 = 5m \text{ et } BP = BC - PC = 7 - 5 = 2m$$

Examinons le triangle rectangle BPE. On a $EP = b = 6m$, de sorte que :

$$BE = CF = \sqrt{40}m$$

$$\cos B\hat{E}P = EP / BE = 6/\sqrt{40} = 0{,}9487 \quad \Leftrightarrow \quad B\hat{E}P = 18{,}4349°$$

Examinons le triangle rectangle APE. On a $AP = AB + BP = 3 + 2 = 5m$ de sorte que :

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} = 7{,}8102$$

$$\cos A\hat{E}P = EP / AE = \sqrt{61}/\sqrt{40} = 0{,}7882 \quad \Leftrightarrow \quad A\hat{E}P = 39{,}8056°$$

Examinons le triangle rectangle PCE. On sait que $PC = 5m$ de sorte que :

$$CE = \sqrt{PC^2 + EP^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} = 7{,}8102m$$

$$\cos P\hat{E}C = EC / BE = \sqrt{61}/\sqrt{40} = 0{,}7882 \quad \Leftrightarrow \quad P\hat{E}C = 39{,}8056°$$

On en conclut que:

- $\boxed{A\hat{E}B = A\hat{E}P - B\hat{E}P = 21{,}3706°}$ et $\boxed{B\hat{E}C = B\hat{E}P + P\hat{E}C = 58{,}2405°}$

- $\boxed{AE = \sqrt{61} = 7{,}8102m}$, $\boxed{BE = \sqrt{40} = 6{,}3246m}$ et $\boxed{CE = \sqrt{61} = 7{,}8102m}$
- $\boxed{AE / CE = 1}$

Les longueurs des segments AE et CE ne semblent pas être identiques, malgré qu'ils le soient. Cet exemple est une illustration des phénomènes d'illusion d'optique.