Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2003
Solutions des questions

Question 1

Pour la figure donnée, calculer l'angle a et l'aire du polygone.

Solution:

Question 2

On suppose que l'on connaît la valeur de $\cos 2\alpha$. Posons $\cos 2\alpha = m$. On demande de calculer la valeur de l'expression :

$$E = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$$

en fonction de la valeur de m.

Vérifier le résultat obtenu pour $m = 1/3$

Solution

Conditions d'existence : Aucune

Résolution

En faisant usage de la formule $a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)$, on obtient :

$$E = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\,(\sin^4 \alpha - \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4 \alpha)$$

Par la formule fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} E &= 1*(\sin^4 \alpha - \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= (1-\cos^2\alpha)^2 - (1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + \cos^4 \alpha \\ &= 3\cos^4 \alpha - 3\cos^2\alpha + 1 \\ &= 3\cos^2\alpha\,(\cos^2\alpha - 1) + 1 \end{aligned}$$

Par Simpson, on sait que :

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{m+1}{2}$$

et en insérant ce résultat, il vient :

$$E = 3\frac{m+1}{2}\left(\frac{m+1}{2} - 1\right) + 1 = \frac{3m^2+1}{4}$$

Vérification

Si $m = 1/3$, la formule ci-dessus donne :

$$E = \frac{3/9+1}{4} = \frac{1}{3}$$

Si on utilise la calculette de poche, on trouve :

$$\cos 2\alpha = 1/3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm 35{,}26° + k*360°$$

En insérant cette valeur dans l'expression, on trouve effectivement :

$$E = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 0.3333$$

Question 3

Trouver toutes les solutions *x* de l'équation suivante :

$$\cos 9x - 2\cos 6x = 2$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution:

Conditions d'existence : Aucune

Résolution

On a :

$$\cos 9x = \cos(6x + 3x) = \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x$$
$$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$$
$$\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$$

Il vient successivement :

$$\cos 9x - 2\cos 6 = 2$$
$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x - 2\cos 6x = 2$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right)\cos 3x - 2\sin 3x \cos 3x \sin 3x - 2\left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow \cos^3 3x - 3\sin^2 3x \cos 3x - 2\cos^2 3x + 2\sin^2 3x = 2$$

Par la formule $\sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x$, on peut encore écrire :

$$\cos 9x - 2\cos 6 = 2$$
$$\Leftrightarrow \cos^3 3x - 3\left(1 - \cos^2 3x\right)\cos 3x - 2\cos^2 3x + 2\left(1 - \cos^2 3x\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^3 3x - 4\cos^2 3x - 3\cos 3x + 2 = 2$$

Les solutions de l'équation sont donc les solutions de :

$$4\cos^3 3x - 4\cos^2 3x - 3\cos 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x\left(4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3\right) = 0$$

1° la première famille de solution est donnée par $\cos 3x = 0$, soit

$$3x = \pi/2 + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi/6 + k\pi/3$$

2° la seconde famille de solution satisfait à $4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré en $u = \cos 3x$. Ses solutions sont $u_1 = -1/2$ et $u_2 = 3/2$. La solution $\cos 3x = 3/2$ est inadmissible. Par contre la seconde racine $\cos 3x = -1/2$ donne lieu à la solution suivante :

$$3x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\pi/9 + 2k\pi/3$$