Université de Liège **Examen d'admission**

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2004

Question 1

Démontrer que si les angles d'un triangle ABC satisfont à la relation

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

alors le triangle est rectangle en A.

Dans le triangle ABC on a évidemment : $A+B+C=\pi$ et $0 < A, B, C < \pi$

Conditions d'existence :

$$\cos B + \cos C \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \cos B \neq -\cos C \quad \Leftrightarrow \quad \cos B \neq \cos(\pi - C)$$
$$\Leftrightarrow B \neq \pi - C \quad \Leftrightarrow \quad \pi \neq B + C$$

Dans le cas du triangle, cette condition équivaut à $A \neq 0$ qui est toujours vérifiée.

Solution :

Développons la relation qui est l'hypothèse et démontrons que la thèse est vérifiée.
En utilisant les relations de transformations de sommes en produits, l'hypothèse peut s'écrire :

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

On peut simplifier haut et bas le second membre par $\cos\frac{B-C}{2}$ car $\frac{B-C}{2} \neq \frac{\pi}{2}$, relation vérifiée dans le triangle puisque les angles sont inférieurs à π.

On a donc :

$$\sin A = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\pi - B + C) = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(B+C) = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

On peut également simplifier chaque membre par $\sin\frac{B+C}{2}$ puisque $\frac{B+C}{2} \neq 0$ et $\frac{B+C}{2} \neq \pi$ pour un triangle. Il vient alors :

$$2\cos\frac{B+C}{2} = \frac{1}{\cos\frac{B+C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2\left(\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$1 + \cos(B+C) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(B+C) = 0$$

Cette équation admet comme solution : $B+C = \pm\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$

Pour le triangle ABC, la seule solution acceptable est $B+C = \frac{\pi}{2}$ et donc $A = \frac{\pi}{2}$.

Question 2

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique.

Comme la formule ne contient que des sinus et cosinus, il n'y a **pas de condition d'existence**.

Il vient :

$$\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \left[\sin^2 x - \cos^2 x\right] = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Les formules de **duplication** donnent les deux relations suivantes :

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) \text{ et } \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos(2x)$$

En remplaçant dans l'équation on trouve

$$-\frac{1}{2}\sin(2x) \cdot \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

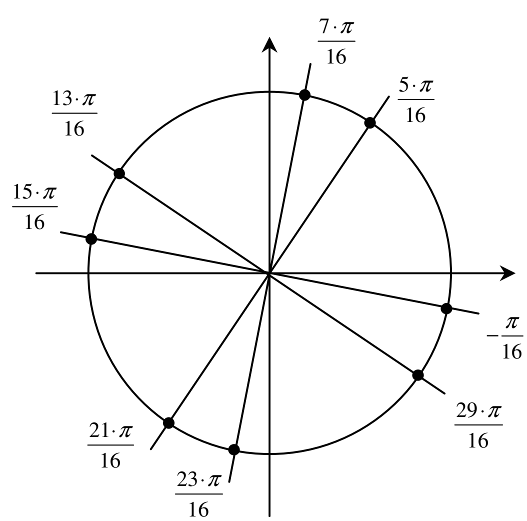
Et s'il on applique une nouvelle fois la formule de **duplication** du sinus, il vient

$$\sin(4x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc les 2 ensembles de solutions suivants :

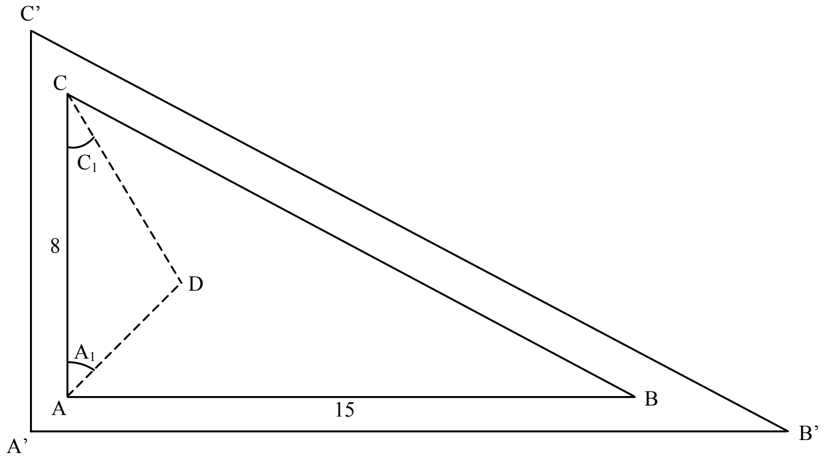
- $4x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$ et donc $x = -\frac{\pi}{16} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $4x = \frac{5\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$ et donc $x = \frac{5 \cdot \pi}{16} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

qui peuvent se représenter sur le cercle trigonométrique comme ci-contre.



Question 3

Soit un triangle rectangle ABC dont l'angle en A est droit. AB = 15 cm et AC = 8 cm. Calculer les valeurs des angles aux sommets B et C ainsi que la longueur de l'hypoténuse. Calculer la hauteur du triangle formé par le côté AC et les bissectrices intérieures des angles en A et C.
Sachant que cette hauteur est aussi le rayon du cercle inscrit au triangle, calculer l'aire et le périmètre du triangle A'B'C' dont les côtés sont situés à 1 cm de ceux du triangle ABC.



Calcule des angles et de l'hypoténuse du triangle ABC :

$$\tan B = \frac{8}{15} \rightarrow B = 28{,}0725°$$

$$\tan C = \frac{15}{8} \rightarrow C = 61{,}9275°$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{15^2+8^2} = 17 \text{ cm}$$

Soit D l'intersection des bissectrices en A et C. Dans le triangle ADC, on a :

$$A_1 = 45°, \quad C_1 = \frac{61{,}9275°}{2} = 30{,}9638°, \quad D = 180° - 45° - 30{,}9638° = 104{,}0362°$$

$$\frac{\sin D}{\overline{AC}} = \frac{\sin A_1}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin A_1}{\sin D} = \frac{8 \cdot \sin(45°)}{\sin(104{,}0362°)} = 5{,}8309 \text{ cm}$$

La hauteur du triangle ADC relative à AC est alors donnée par :

$$h = \overline{DC} \cdot \sin C_1 = 5{,}8309 \cdot \sin(30{,}9638°) = 3 \text{ cm}$$

Cette hauteur de 3 cm étant égale au rayon du cercle inscrit au triangle ABC, le triangle A'B'C' aura un cercle inscrit de rayon égal à 4 cm. Le rapport des aires de ces cercles inscrits étant conservé pour les triangles, on a :

$$\frac{r_{ABC}^2}{r_{A'B'C'}^2} = \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$$

$$\frac{3^2}{4^2} = \frac{(8 \cdot 15)/2}{S_{A'B'C'}}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{60}{S_{A'B'C'}} \rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{60 \cdot 16}{9} = 106{,}6667 \text{ cm}^2.$$

De même, le rapport des périmètres des triangles est égal au rapport des rayons :

$$\frac{r_{ABC}}{r_{A'B'C'}} = \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{8+15+17}{P_{A'B'C'}} \rightarrow P_{A'B'C'} = \frac{(8+15+17) \cdot 4}{3} = 53{,}3333 \text{ cm}$$