Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2005
Solutions

Question 1
Sans l'aide de la calculatrice, calculer la valeur numérique de E :

$$E = \cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{2\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10} - \sin^2\frac{4\pi}{10}$$

La solution la plus courte consiste à remarquer que $\frac{\pi}{10}$ est le complémentaire par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de $\frac{4\pi}{10}$ et que $\frac{2\pi}{10}$ est le complémentaire par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de $\frac{3\pi}{10}$.

Ainsi, il vient :

$$\sin\frac{4\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{4\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{10}$$

et

$$\sin\frac{2\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}$$

Il vient donc finalement

$$E = \cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{2\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10} - \sin^2\frac{4\pi}{10}$$
$$E = \cos^2\frac{\pi}{10} - \cos^2\frac{3\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10} - \cos^2\frac{\pi}{10} = 0$$

Question 2

Résoudre l'équation suivante :

$$tg^3x - 3tg^2x - 3tgx + 1 = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Suggestion : calculer la valeur de $tg3x$

La suggestion donne

$$tg3x = tg(2x + x)$$

$$tg3x = \frac{tg2x + tgx}{1 - tg2xtgx}$$

or

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$$

Il vient donc

$$tg3x = \frac{\frac{2tgx}{1 - tg^2x} + tgx}{1 - \frac{2tgx}{1 - tg^2x}tgx}$$

Soit, après quelques manipulations élémentaires, il vient

$$tg3x = \frac{tg^3x - 3tgx}{3tg^2x - 1}$$

Ce qui impose la condition d'existence suivante : $3tg^2x \neq 1$

L'expression de départ peut se mettre sous la forme suivante :

$$tg^3x - 3tg^2x - 3tgx + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{tg^3x - 3tgx}{3tg^2x - 1} = 1$$

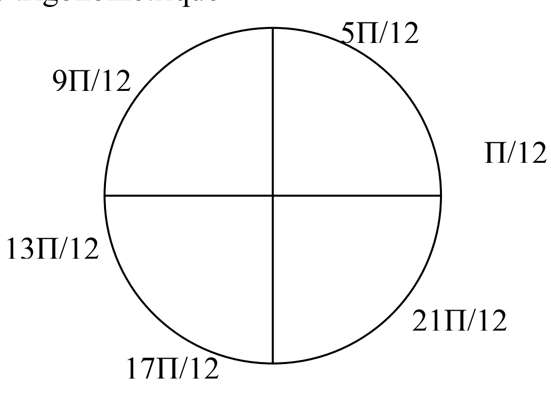
Soit

$$tg3x = 1$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \qquad k \in Z$$

Ce qui donne sur le cercle trigonométrique



Question 3

Soit un système bielle - manivelle schématisé à la figure 1. On demande :

1. De calculer l'angle α en fonction de l'angle θ, les paramètres r, l et e étant connus
2. En déduire les conditions d'existence de l'angle α en fonction des valeurs des paramètres r, l et e
3. Calculer la valeur numérique de l'angle α pour θ=30°, r=1 cm, l=5 cm et e=0,1 cm.
4. En déduire et calculer la valeur correspondante de la position x du point C.

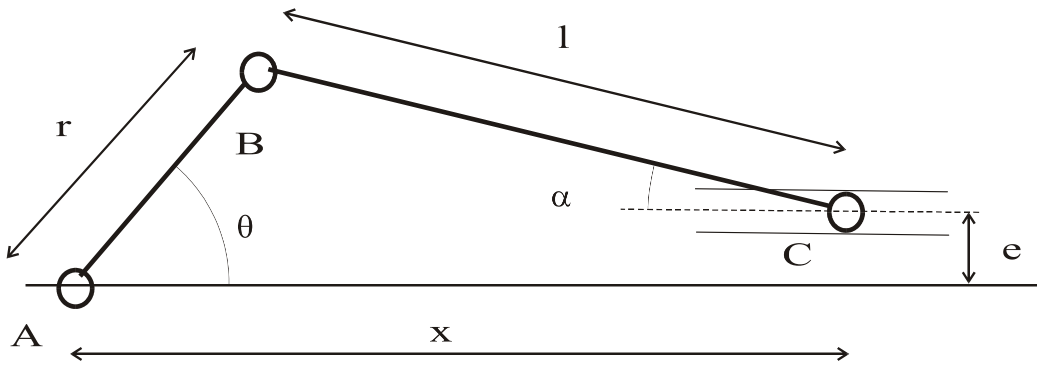


Figure 1: Calcul de la position d'un piston

1. En projetant sur la verticale et en utilisant les formules dans les triangles rectangles, il vient

$$r \sin\theta = l \sin\alpha + e$$

Soit

$$l \sin\alpha = r \sin\theta - e$$

et donc

$$\sin\alpha = \frac{r}{l}\sin\theta - \frac{e}{l}$$

2. Les conditions d'existence de l'angle α sont données par

$$|\sin\alpha| \le 1$$

soit

$$\left|\frac{r}{l}\sin\theta - \frac{e}{l}\right| \le 1$$

Il vient donc,

$$-1 \le \frac{r}{l}\sin\theta - \frac{e}{l} \le 1 \quad \forall\theta$$

$$e - l \le r\sin\theta \le e + l \quad \forall\theta$$

Soit

$$-r \ge e - l \Leftrightarrow r \le l - e$$

$$et$$

$$r \le e + l$$

Notez que la première condition impose également que $l \ge e$

3. En remplaçant les valeurs numériques données dans l'expression de $\sin\alpha$ trouvée au point 1, il vient

$$\sin\alpha = \frac{1}{5}\sin 30° - \frac{1/10}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) = \frac{4}{50} = 0.08$$

Ce qui donne finalement

$$\alpha = 4.5886° \quad ou \quad \alpha = 175.4114°$$

4. La position x du point C par rapport au point A est donnée en projetant sur l'horizontale par :

$$x = r\cos\theta + l\cos\alpha$$

Il vient donc directement, en fonction de la valeur de α déterminée au point 3 :

$$x_1 = 1\cos 30° + 5\cos 4.5886° = 5.8500cm$$

$$x_2 = 1\cos 30° + 5\cos 175.4114° = -4.1179cm$$