

Université de Liège

Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2006

Solution Type

Question 1

Soit ABC un triangle quelconque non dégénéré. Montrer que

$$\cot g \frac{A}{2} + \cot g \frac{B}{2} + \cot g \frac{C}{2} = \cot g \frac{A}{2} \cdot \cot g \frac{B}{2} \cdot \cot g \frac{C}{2}$$

Solution

On a $C = \pi - (A + B)$ donc $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2}$.

Dès lors,

$$\cot g \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A + B}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}}$$

La division du dernier membre par $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ donne

$$\cot g \frac{C}{2} = \frac{\cot g \frac{B}{2} + \cot g \frac{A}{2}}{\cot g \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2} - 1}$$

soit

$$\cot g \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2} \cot g \frac{C}{2} - \cot g \frac{C}{2} = \cot g \frac{B}{2} + \cot g \frac{A}{2}$$

ce qui est équivalent à la thèse.

Question 2

Soit ABC un triangle et soit \mathcal{D} une droite qui coupe le côté AB en un point F , le côté AC en un point E et le prolongement du côté BC en un point D (voir figure 1). On donne les rapports

$$\frac{FA}{FB} = \frac{1}{3} \quad \frac{EA}{EC} = \frac{2}{3}$$

Que vaut le rapport $\frac{DC}{DB}$?

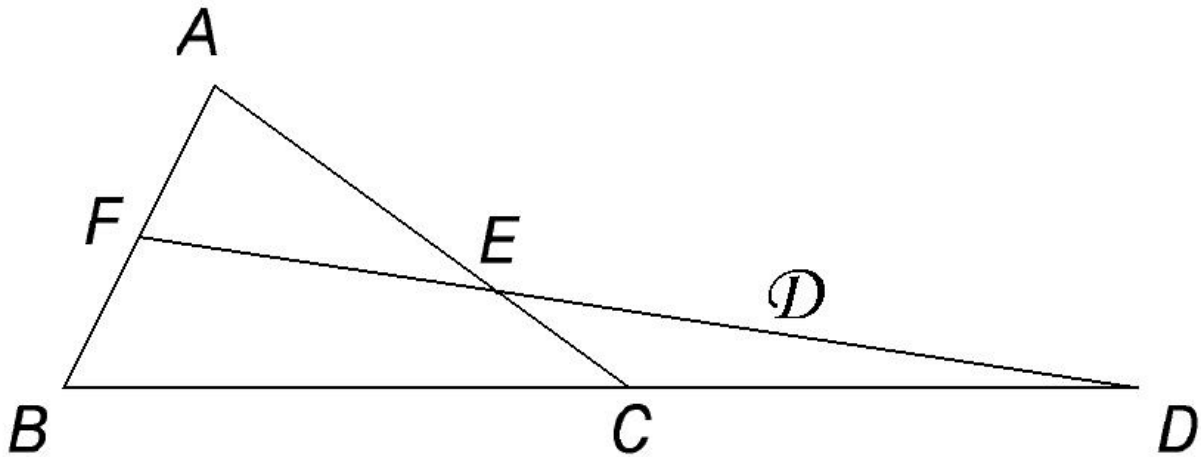


Figure 1

Solution

$$\triangle AFE \text{ --- } > \frac{AF}{AE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\triangle ECD \text{ --- } > \frac{CF}{CD} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\triangle FBD \text{ --- } > \frac{BD}{BF} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}$$

$$\text{Or, } \sin \delta = \sin \alpha$$

$$\text{Donc, } \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

et

$$\frac{DC}{DB} = \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Question 3

Résoudre l'équation

$$2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$$

Solution

Comme

$$\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$$

on a successivement

$$2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x \cos^2 3x = 2$$

$$\sin^2 3x + 2\sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 1$$

$$2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\sin^2 3x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1 & (a) \\ 0,5 & (b) \end{cases}$$

(a)

$$\sin 3x = \pm 1$$

$$3x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k \frac{\pi}{3}$$

(b)

$$\sin 3x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + 2k \frac{\pi}{3}$$

