Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2007
Correction

Question 1

Montrer que dans tout triangle non dégénéré d'angles A, B et C, on a

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{(\sin B+\sin C)^2-\sin^2 A}{4\sin B\sin C}$$

<u>*Solution*</u>

En faisant appel à la relation des sinus.

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

on peut écrire

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

Le second membre vaut encore

$$\frac{(\sin B+\sin C)^2-2\sin B\sin C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}=\frac{(\sin B+\sin C)^2-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}-1$$

si bien que

$$\frac{(\sin B+\sin C)^2-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}=1+\cos A=2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

Question 2

Résoudre l'équation

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

<u>*Solution*</u>

On remarque que

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 \equiv \sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x \equiv 1$$

En soustrayant l'équation de cette identité, on obtient

$$3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

soit

$$3\sin^2 x \cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \equiv 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{9}{16}$$

ou encore

$$\frac{3}{16} = \sin^2 x \cos^2 x \equiv \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

On se ramène donc à

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4} \ , \qquad \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions sont

$$\begin{cases} 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi & \text{soit} \quad x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi & \text{soit} \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Le dessin des solutions sur le cercle trigonométrique est laissé au lecteur.

Question 3

Les côtés d'un triangle ont pour longueurs respectives (en mètres)

$$a = 2.\,m,\;\; b = 3.\,m,\;\; c = 4.\,m$$

Que valent ses angles ?

<u>*Solution*</u>

De la relation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

on déduit

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9+16-4}{2.3.4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \text{ soit } A = ar\cos\left(\frac{7}{8}\right) = 0{,}5054 rad = 28{,}96°$$

De la même façon,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4+16-9}{2.2.4} = \frac{11}{16} \text{ ce qui donne } B = 0{,}8128 rad = 46{,}57°$$

Enfin,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4+9-16}{2.2.3} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4} \text{ ce qui corrspond à } C = 1{,}823 rad = 104{,}48°$$

A titre de preuve, on vérifie que

$$A + B + C = 28{,}96 + 46{,}57 + 104{,}48 = 180{,}01° = 180° \text{ aux erreurs d'arrondi près.}$$