Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2008

Question 1
Montrer que dans un triangle ABC, on a toujours la relation

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

Solution proposée

Solution 1

$$\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A+B)\cos(A-B) = 2\sin C\cos(A-B) \quad \text{car} \quad A+B = \pi - C$$

par ailleurs,

$$\sin 2C = 2\sin C\cos C$$

donc

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2\sin C\left(\cos C + \cos(A-B)\right)\\ &= 2\sin C\left(-\cos\left(A+B\right) + \cos\left(A-B\right)\right) \quad \text{car} \quad C = \pi - (A+B)\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\left(A-B\right) - \cos\left(A+B\right) = -2\sin A\sin(-B) = 2\sin A\sin B$$

ce qui conduit à la thèse.

Solution 2

$$\begin{aligned}&2A = 2\pi - 2(B+C)\\ &\sin 2A = -\sin 2(B+C) = -\sin 2B\cos 2C - \sin 2C\cos 2B\\ &\sin 2a + \sin 2B + \sin 2C = \sin 2B\left(1-\cos 2C\right) + \sin 2C\left(1-\cos 2B\right)\\ &\qquad = 2\sin B\cos B.2\sin^2 C + 2\sin C\cos C.2\sin^2 B\\ &\qquad = 4\sin B\sin C\left(\cos B\sin C + \cos C\sin B\right)\\ &\qquad = 4\sin B\sin C\sin(B+C) = 4\sin B\sin C\sin A\end{aligned}$$

Question pour les fanas : *Montrer que cette relation résulte du calcul de l'aire du triangle.*

Si R est le rayon du cercle circonscrit, on a

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donc l'aire S du triangle vérifie

$$2S = ab\sin C = 4R\sin A\sin B\sin C$$

Joignons le centre O du cercle circonscrit aux trois sommets du triangle. L'aire du triangle vaut

$$2S = 2S(AOB) + 2S(BOC) + 2S(COA)$$

Les angles au centre valent

$$< AOB = 2C, \quad < BOC = 2A, \quad < COA = 2B$$

donc

$$S(AOB) = 2R\sin\frac{2C}{2}\cos\frac{2C}{2} = R\sin 2C$$

etc.

<u>Question 2</u>

Un pentagone convexe irrégulier ABCDE est inscrit dans une circonférence de rayon 5 cm (voir Figure 1).
Quel est le périmètre du pentagone ABCDE ?
Quel est la surface du pentagone ABCDE ?

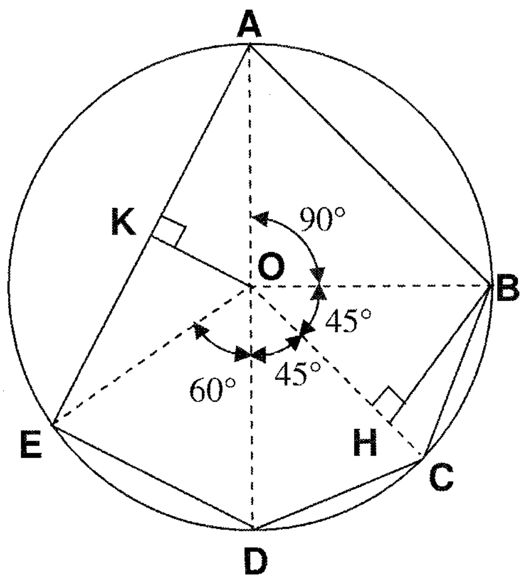

Figure 1 : Pentagone convexe irrégulier ABCDE

<u>Solution proposée</u>

Dans le triangle OAB, on a :

$$R = AB\cos 45° \quad \Leftrightarrow \quad AB = \frac{5}{\cos 45°} = 7,0711\,cm$$

$$Aire(OAB) = \frac{R^2}{2} = 12,5\,cm^2$$

Dans le triangle ODE, il vient

$$DE = R = 5\,cm$$

$$Aire(ODE) = R\frac{R\cos 30°}{2} = R^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3} = 10,8253\,cm^2$$

Dans le triangle OBC, on a :

$$OB = R \quad OC = R$$

$$BH = OB\sin 45° = R\sin 45° = 3,5355\,cm$$

Par Pythagore généralisé, on a :

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB\;OC\;\cos 45°$$

$$BC = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2.5.5.cos 45°} = 3,8268\,cm$$

Et

$$HC = OC - OH = R - R\cos 45° = 5 - 5\cos 45° = 1,4645\,cm$$

$$Aire(OBC) = \frac{OC.BH}{2} = R^2 \cos 45° = 8,8388\ cm^2$$

Le triangle ODC est le même que OBC, car ils ont deux côtés identiques et un angle égal. On a donc :

$$DC = BC = 3,8268\ cm$$

$$Aire(ODC) = Aire(OBC) = 8,8388\ cm^2$$

Le triangle OED est équilatéral (angles de 60°). Soit I la médiane du côté ED, on a donc :

$$OI = OE \cos 30° = R\frac{\sqrt{3}}{2} = 4,3301\ cm$$
$$EI = OE \sin 30° = 2,5\ cm$$

$$Aire(OED) = \frac{ED.OI}{2} = 10,8253\ cm^2$$

Dans le triangle OAE, l'angle au centre vaut 360°-90°-45°-45°-60°=120° et on trouve

$$\frac{R}{\sin 30°} = \frac{AE}{\sin 120°} \quad \Leftrightarrow \quad AE = R\frac{\sin 120°}{\sin 30°} = \sqrt{3}R = 8,8388\ cm$$

Le triangle étant isocèle, on trouve :

$$Aire(OAE) = \frac{AE}{2} R \cos 60° = 10,8253\ cm^2$$

En conclusion, il vient :

Le périmètre vaut :

$$P = AB + BC + CD + DE + EA = 28,3847\ cm$$

L'aire de la figure vaut :

$$Aire(ABCDEA) = Aire(OAB) + Aire(OBC) + Aire(OCD) + Aire(ODE) + Aire(OAE) = 51,8279 m^2$$

Question 3

On désire calculer EXACTEMENT (sans calculatrice) $\cos\frac{2\pi}{5}$ *et* $\cos\frac{4\pi}{5}$. *A cette fin, on procédera comme suit :*

1) Montrer que chacun de ces deux angles vérifie l'équation

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \qquad (*)$$

2) Chercher l'ensemble des solutions de l'équation (*) vérifiant $0 \le \theta < \pi$ *. Parmi celles-ci, il en est une, que nous noterons* θ_1 *dont le cosinus est connu de manière évidente.*

3) Exprimer l'équation (*) en termes de $\cos\theta$*. On obtient une équation du troisième degré.*

4) En divisant cette équation par le binôme $(\cos\theta - \cos\theta_1)$*, on peut se ramener à une équation du second degré, dont on calculera les racines* $\cos\theta_2$ *et* $\cos\theta_3$.

5) Déterminer, parmi ces deux racines, laquelle correspond à $\frac{2\pi}{5}$ *et laquelle correspond à* $\frac{4\pi}{5}$*. Justifier ce choix.*

Solutions proposées

1) On a

$$3\frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5} \quad \text{et} \quad 2\frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} = 2\pi - \frac{6\pi}{5}$$
$$3\frac{4\pi}{5} = \frac{12\pi}{5} \quad \text{et} \quad 2\frac{4\pi}{5} = \frac{8\pi}{5} = 4\pi - \frac{12\pi}{5}$$

2) Les solutions de (*) sont données par

$$3\theta = \pm 2\theta + 2k\pi \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \theta = 2k\pi ....\theta = 0 \\ 5\theta = 2k\pi, \quad \theta = 2k\frac{\pi}{5} ....\theta = \frac{2\pi}{5} \ \text{ et } \ \theta = \frac{4\pi}{5} \end{cases}$$

3) On a

$$
\begin{aligned}
0 &= \cos 2\theta - (\cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta) = \\
&= (2\cos^2\theta - 1)(1-\cos\theta) + 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= -2\cos^3\theta + 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 + 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= -2\cos^3\theta + 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 + 2\cos\theta - 2\cos^3\theta \\
&= -4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1
\end{aligned}
$$

L'équation cherchée est donc

$$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

4) La solution évidente de (*) est $\cos\theta_1 = 1$. Divisons donc notre équation par $(\cos\theta - 1)$. On obtient

$$4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$$

ce qui fournit les racines

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

5) On a

$$
\begin{aligned}
&\cos\frac{2\pi}{5} \geq 0 \qquad \text{(premier quadrant)} \\
&\cos\frac{4\pi}{5} \leq 0 \qquad \text{(deuxième quadrant)}
\end{aligned}
$$

donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$