Université de Liège
Examen d'admission aux études de candidat ingénieur civil et ingénieur architecte

Trigonométrie et calcul numérique – Septembre 2009

Question 1
Montrer que dans un triangle ABC quelconque, on a toujours

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = 1$$

Solution proposée

Multiplions cette relation par $\sin A \sin B \sin C$. Il vient

$$\begin{aligned}
&\cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B = \sin A \sin B \sin C \\
&\sin A(\cos B \cos C - \sin B \sin C) + \cos A(\sin B \cos C + \sin C \cos B) = 0 \\
&\sin A \cos(B + C) + \cos A \sin(B + C) = 0 \\
&\sin(A + B + C) = 0 \text{ - Evident puisque } A + B + C = \pi
\end{aligned}$$

Question 2
Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$$

Expliciter les conditions d'existence. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solutions proposées

Solution 1
Les conditions d'existence sont liées à l'existence de tg x, tg 2x et tg 3x. Celles-ci étant remplies, on peut écrire

$$\operatorname{tx} x + \operatorname{tg} 2x + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 0$$
$$0 = \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 1)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)(2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}$$

- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$$
$$2x = -x + k\pi$$
$$3x = k\pi$$
$$x = k\frac{\pi}{3}$$

- $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 2$

$$\operatorname{tg} x \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2$$
$$2\operatorname{tg}^2 x = 2 - 2\operatorname{tg}^2 x$$
$$4\operatorname{tg}^2 x = 2$$
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \pm\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k\pi = \pm 0,6155 rad + k\pi$$
$$= \pm 35,2644° + k180°$$
$$= \pm 35°15'52" + k180°$$

La représentation sur le cercle trigonométrique est laissée au soin du lecteur.

Solution 2

L'équation s'écrit :

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+\sin 2x\cos x\cos 3x+\sin 3x\cos x}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0$$

Etant donné que cos x, cos 2x et cos 3x ne peuvent être nuls à cause des conditions d'existence, on obtient :

$$\sin x+\cos 2x\cos 3x+\sin 2x\cos x\cos 3x+\sin 3x\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x)\cos 3x+\sin 3x\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 3x\cos 3x+\sin 3x\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 3x(\cos 3x+\cos x\cos 2x)=0$$

On obtient alors deux familles de solution

- $\sin 3x=0$

$$\sin 3x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x=k*180°$$

$$\Leftrightarrow \quad x=k*60°$$

- $\cos 3x+\cos x\cos 2x=0$

$$\cos 3x+\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x+\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x-2\sin x\cos\sin x+\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x+\cos^3 x-\sin^2 x\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^3 x-4\sin^2 x\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^3 x-2(1-\cos^2 x)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos^3 x-2\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\,(3\cos^2 x-2)=0$$

La solution $\cos x=0$ est à rejeter par les conditions d'existence. On obtient donc la seconde solution :

$$3\cos^2 x=2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x=2/3$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x=\pm\sqrt{2/3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\pm 35,2644°+k\,180°=\pm 35°15'52''+k\,180°$$

Question 3

Soit une tour de hauteur h dont le pied est inaccessible, mais dans le même plan horizontal que les pieds d'un observateur. L'œil de ce dernier se trouve à 1,50m du sol. A une distance AD de la tour, l'observateur en voit le sommet sous un angle α=24°36' par rapport à l'horizontale. Après s'être rapproché de 32m de la tour, l'observateur la voit sous un angle β=40°12' par rapport à l'horizontale. Quelle est la hauteur de la tour ?

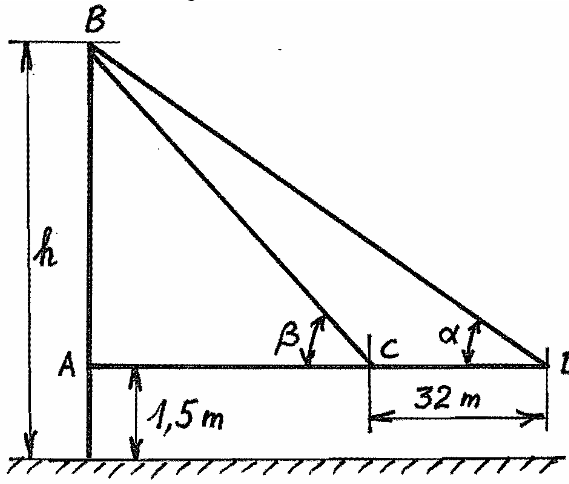

Figure 1 : Mesure de la hauteur d'une tour

Solutions proposées

Solution 1

Soit A le point de la tour situé à 1,50m du sol, et soit B son sommet. Soit D le premier point d'observation, et soit C le second. On a évidemment

$$AB = BC \sin\beta$$

Dans le triangle BCD, l'angle $\gamma = CBD$ vérifie

$$\gamma = \beta - \alpha = 15°36'$$

La relation des sinus donne

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CD}{\sin\gamma} \quad \text{soit} \quad BC = CD\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Il vient donc

$$AB = CD\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = 31{,}9768m$$

et la hauteur de la tour est

$$h = 1{,}5m + 31{,}9768m = 33{,}4728m$$

Solution 2

On considère les triangles rectangles ACB et ADB et on trouve :

$$AB = AC \tan\beta$$

et

$$AB = AD \tan\alpha = (AC + 32)\tan\alpha$$

En égalant la valeur de AB, on déduit la valeur de AC puisque tous les autres paramètres sont connus :

$$\begin{aligned} & AB = AC \tan\beta = (AC + 32)\tan\alpha \\ \Leftrightarrow \quad & AC = \frac{32\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \\ \Leftrightarrow \quad & AC = 37{,}8347 m \end{aligned}$$

Il vient

$$AB = (AC + 32)\tan\alpha = 31{,}9728\ m$$

$$h = AB + 1{,}5 = 33{,}4728\ m$$