Solutions septembre 2010

Nous présentons ici une voie de solution pour chaque problème, à titre d'exemple. Il va de soi que toute autre méthode correcte est admise lors de la correction

Solution 1

La proposition revient à dire que

$$\operatorname{tg} 3a(1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a) = \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a$$

soit

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(2a + a)$$

ce qui est évident.

Solution 2

L'équation s'écrit encore

$$(2\cos^2 x + 2\sin^2 x)\cos x - 5\sin x \cos^2 x = 0$$

soit

$$\cos x(2 - 5\sin x \cos x) = 0$$

– Une première famille de solutions correspond à $\cos x = 0$, ce qui donne

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{1}$$

– Une deuxième famille de solutions correspond à

$$5\sin x \cos x = 2$$

soit

$$\frac{5}{2}\sin 2x = 2$$

ou encore

$$\sin 2x = \frac{2}{10}$$

ce qui donne

$$2x = 11,54° + k\ 360° \quad \text{ou} \quad 2x = 168,5° + k\ 360°$$

c'est-à-dire

$$x = 5,768° + k\ 180° \quad \text{ou} \quad x = 84,23° + k\ 180°$$

Solution 3

L'hypothèse signifie que

$$a = b - r, \quad c = b + r$$

r étant la raison de la progression arithmétique. On a donc

$$\sin a + \sin c = 2\sin\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2} = 2\sin b\cos r$$

et

$$\cos a + \cos c = 2\cos\frac{a+c}{2}\cos a - c2 = 2\cos b\cos r$$

donc

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \frac{\sin b(1 + 2\cos r)}{\cos b(1 + 2\cos r)} = \operatorname{tg} b$$

Discussion

1. La relation n'a de sens que si $\operatorname{tg} b \neq \pm\infty$ soit si $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
2. Le premier membre est indéterminé si $\cos r = -\frac{1}{2}$ soit $r = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Réciproque

Soit

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \operatorname{tg} b = \frac{\sin b}{\cos b}$$

On notera d'abord que cette relation n'a de sens que si $\operatorname{tg} b \neq \pm\infty$ et si l'on n'a pas simultanément $\sin a + \sin b + \sin c = 0$ et $\cos a + \cos b + \cos c = 0$. Il découle alors des propriétés des proportions que

$$\frac{\sin a + \sin c}{\cos a + \cos c} = \frac{\sin b}{\cos b}$$

soit

$$\frac{2\sin\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}}{2\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}} = \frac{\sin b}{\cos b}$$

On obtient donc, si $\frac{a-c}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $a - c \neq \pi + 2k\pi$

$$\operatorname{tg}\frac{a+c}{2} = \operatorname{tg} b$$

ce qui conduit à

$$\frac{a+c}{2} = b + k\pi$$

La réciproque est alors vraie si $|\frac{a+c}{2} - b| < \pi$.

Dans le cas exclu ci-dessus, où $a - c = \pi + 2k\pi$, on a $\sin a = -\sin c$ et $\cos a = -\cos c$ et l'hypothèse de ramène à $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} b$ ce qui ne permet de tirer aucune conclusion.

Solution 4

En une minute, l'avion a parcouru une distance $x = \frac{800km}{60} = 13,33km$. Au départ, l'avion est à une distance ℓ de la base et son altitude h est donnée par $h = \ell \operatorname{tg} 16^\circ$ ce qui revient à dire

$$\ell = \frac{h}{\operatorname{tg} 16^\circ}$$

Une minute plus tard, l'avion est à une distance horizontale $\ell - x$et on a de même que ci-dessus

$$\ell - x = \frac{h}{\operatorname{tg} 37^\circ}$$

Soustrayant ces deux relations, on obtient

$$x = h\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 16^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg} 37^\circ}\right) = 2,160h$$

d'où

$$h = \frac{x}{2,160} = 6,170km$$