Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. M. Hogge

Septembre 2012

Nous présentons ici une voie de solution pour chaque problème, à titre d'exemple. Il va de soi que toute autre méthode correcte est admise lors de la correction

Question 1 *Soient A, B et C, les angles d'un triangle. Montrer que le triangle ABC est rectangle si et seulement si*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

Solution

Partie 1 : Si $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2$, alors le triangle est rectangle

Dans tout triangle, on a $A+B+C=\pi$, de sorte que $C=\pi-(A+B)$ et

$$\sin C = \sin(\pi-(A+B)) = \sin(A+B)$$

L'hypothèse s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B) = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2 A + \sin^2 B + (\sin A\cos B + \cos A\sin B)^2 = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos A\sin B\cos B = 2
\end{aligned}$$

Par l'équation fondamentale de la trigonométrie $\sin^2 A = 1-\cos^2 A$ et $\sin^2 B = 1-\cos^2 B$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & 1-\cos^2 A + 1-\cos^2 B + \cos^2 B - \cos^2 A\cos^2 B + \cos^2 A - \cos^2 A\cos^2 B \\
& + 2\sin A\cos A\sin B\cos B = 2
\end{aligned}$$

Après simplifcations, il vient :

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & -\cos^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\cos^2 B + 2\sin A\cos A\sin B\cos B = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cos A\cos B\ (\sin A\ \sin B - \cos A\ \cos B) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cos A\cos B\ \cos(A+B) = 0
\end{aligned}$$

Puisque l'on est dans un triangle on a :

$$\cos(A+B) \;=\; \cos(\pi - C) \;=\; -\cos C$$

L'hypothèse s'écrit donc en défintive :

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\cos A\,\cos B\,\cos C \;=\; 0$$

Puisque les angles d'un triangle appartiennent à l'interval $]0,\pi[$, l'hypothèse implique que $A = \frac{\pi}{2}$ ou $B = \frac{\pi}{2}$ ou $C = \frac{\pi}{2}$. Ce qui démontre que le triangle ABC est rectangle.

Partie 2 : Si le triangle est rectangle, alors $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

Supposons que $A = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\sin A \;=\; 1$$

et $A \,+\, B \,+\, C \;=\; \pi$ implique

$$B \;=\; \frac{\pi}{2} - C \quad \text{et} \quad \sin B \;=\; \sin(\frac{\pi}{2} - C) \;=\; \cos C$$

La thèse s'écrit :

$$\begin{aligned} &\sin^2 A \,+\, \sin^2 B \,+\, \sin^2 C \;=\; 2 \\ \Leftrightarrow \quad &1 \,+\, \cos^2 C \,+\, \sin^2 C \;=\; 2 \end{aligned}$$

L'identité est aisément démontrée en utilisant la formule fondamentale de la trigonomémtrie $\cos^2 C \,+\, \sin^2 C \;=\; 1$

Remarque

De manière alternative, on peut également démontrer la réciproque de manière immédiate lorsque l'on a démontré *de manière claire et indiscutable* l'équivalence entre les identités

$$\sin^2 A \,+\, \sin^2 B \,+\, \sin^2 C \;=\; 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A \cos B\,\cos C \;=\; 0$$

Dès lors si $A = \frac{\pi}{2}$, alors $\cos A \;=\; 0$ et l'identité est satisfaite.

Question 2 *Résoudre*

$$\sqrt{3}\cos 2x \,+\, \sin 2x \;=\; 2$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

L'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\cos 2x \,+\, \sin 2x \;=\; 2 \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos 2x \,+\, \frac{1}{2}\,\sin 2x \;=\; 1 \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6}\,\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\,\sin 2x = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = 1
\end{aligned}$$

La solution s'écrit

$$\begin{aligned}
& 2x - \frac{\pi}{6} = 0 + 2\,k\,\pi \\
\Leftrightarrow \quad & 2x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\pi}{12} + k\,\pi
\end{aligned}$$

Ou encore

$$x = 15^\circ + k\,180^\circ$$

On représente aisément ces solutions sur le cercle trigonométrique

---

Question 3 *Soit le triangle ABC. On désigne par α, β et γ la mesure des angles respectivement aux sommets A, B et C et par a, b et c, la mesure des longueurs des côtés opposés. On appelle m la mesure de la médiane AM, par θ la mesure de l'angle AMB et par S la mesure de la surface du triangle ABC.*

1. *Dessiner une esquisse de la situation.*
2. *Démontrer les relations*

$$4\,m^2 - a^2 = 4\,b\,c\,\cos\alpha \quad \textit{et} \quad S = \frac{a\,m}{2}\sin\theta$$

3. *Si on donne les valeurs numériques suivantes $c = 3,45$ m, $\alpha = 48^\circ$ et $\beta = 73^\circ$, que valent a, b, m, θ et S ?*

Donnez les résultats numériques avec 4 chiffres après la virgule.

Solution
Partie 1 : La situation est esquissée à la figure 1

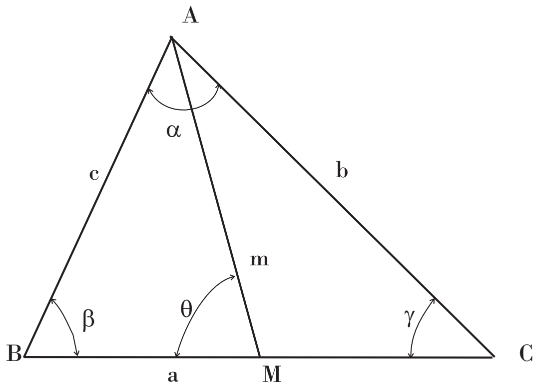

FIGURE 1 – Esquisse de la situation

Partie 2 :

Appliquons le théorème d'Al-Kashi encore connu sous le nom de Pythagore généralisé au triangle AMB, il vient

$$\begin{aligned} AB^2 \;&=\; AM^2 \;+\; MB^2 \;-\; 2\,\cos\theta\, AM\, MB \\ \Leftrightarrow \quad c^2 \;&=\; \frac{a^2}{4} \;+\; m^2 \;-\; 2\,\frac{a}{2}\,m\,\cos\theta \end{aligned} \tag{1}$$

Appliquons le théorème d'Al-Kashi au triangle AMC, il vient

$$\begin{aligned} AC^2 \;&=\; AM^2 \;+\; MC^2 \;-\; 2\,\cos(\pi-\theta)\, AM\, MC \\ \Leftrightarrow \quad b^2 \;&=\; m^2 \;+\; \frac{a^2}{4} \;+\; 2\,\frac{a}{2}\,m\,\cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

La somme de ces deux équations donne :

$$b^2 \;+\; c^2 \;=\; 2\,m^2 \;+\; \frac{a^2}{2} \tag{3}$$

Appliquons le théorème d'Al-Kashi au triangle ABC, il vient

$$a^2 \;=\; b^2 \;+\; c^2 \;-\; 2\,b\,c\,\cos\alpha \tag{4}$$

Substituons la valeur de $b^2 \;+\; c^2$, il vient :

$$\begin{aligned} a^2 \;&=\; b^2 \;+\; c^2 \;-\; 2\,b\,c\,\cos\alpha \\ \Leftrightarrow \quad a^2 \;&=\; 2\,m^2 \;+\; \frac{a^2}{2} \;-\; 2\,b\,c\,\cos\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

Ce qui démontre la proposition :

$$4\,m^2 - a^2 \;=\; 4\,b\,c\,\cos\alpha \tag{6}$$

La surface du triangle est base fois hauteur sur deux.

$$S \;=\; a\,h\,\frac{1}{2} \tag{7}$$

La hauteur se calcule aisément à partir de la longueur de la médiane. Soit H la perpendiculaire abaissé de A sur la droite BC. Dans le triangle AHM, on a :

$$h \;=\; m\,\sin\theta \tag{8}$$

Il vient

$$S \;=\; \frac{a\,m}{2}\,\sin\theta \tag{9}$$

Ce qui démontre la seconde identité proposée.

Partie 3 : Application numérique :

On donne les valeurs numériques suivantes $c = 3,45$ m, $\alpha = 48°$ et $\beta = 73°$

La valeur du troisième angle se détermine par la somme es angles d'un triangle :

$$\gamma \;=\; 180° - \alpha - \beta \;=\; 59° \tag{10}$$

On utilise ensuite la formule

$$\frac{\sin\alpha}{a} \;=\; \frac{\sin\beta}{b} \;=\; \frac{\sin\gamma}{c} \tag{11}$$

Il vient

$$\begin{aligned} b \;&=\; c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \;=\; 3,45\,\frac{\sin 73°}{\sin 59°} \;=\; 3,8490\;m \\ a \;&=\; c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \;=\; 3,45\,\frac{\sin 48°}{\sin 59°} \;=\; 2,9911\;m \end{aligned}$$

Pour calculer on peut utiliser la formule démontrée précedemment :

$$b^2 \;+\; c^2 \;=\; 2\,m^2 \;+\; \frac{a^2}{2}$$

ou bien la formule de Al-Kashi dans le triangle ABM :

$$m^2 \;=\; c^2 \;+\; \frac{a^2}{4} \;-\; 2\,c\,\frac{a}{2}\,\cos\beta$$

Il vient

$$m \;=\; 3,3350\;m$$

Pour calculer la surface S, on doit d'abord calculer θ par Al-Kashi dans le triangle AMB par exemple :

$$c^2 \;=\; \frac{a^2}{4} \;+\; m^2 \;-\; 2\,m\,\frac{a}{2}\,\cos\theta$$

Soit

$$\cos\theta \;=\; \frac{c^2 - \frac{a^2}{4} - m^2}{-a\,m} \;=\; 0,1460$$

Il vient en choisissant le bon quadrant de la solution

$$\theta \;=\; 81,6057°$$

On doit encore calculer la hauteur h :

$$h = m \sin\theta = 3,2993 \ m$$

Finalement, on obtient la surface du triangle ABC :

$$S = \frac{a\,m}{2} \sin\theta = 4,9342 \ m^2$$