Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

# Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. P. Duysinx

Juillet 2013

---

*Nous présentons ici une voie de solution pour chaque problème, à titre d'exemple. Il va de soi que toute autre méthode correcte est admise lors de la correction*

**Question 1** *Vérifier l'identité suivante*

$$\frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a} = \operatorname{tg} 2a$$

*Solution*

On utilise les formules de transformation de somme en produit ou bien, si on ne s'en souvient plus, les formules de sinus / cosinus d'une somme. Il vient respectivement pour le numérateur et pour le dénominateur :

$$\begin{aligned}
\sin 2a + \sin 5a - \sin a &= \sin 2a + \sin(3a + 2a) - \sin(3a - 2a) \\
&= \sin 2a + 2\ \cos 3a\ \sin 2a \\
&= \sin 2a\,(1\ +\ 2\cos 3a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2a + \cos 5a + \cos a &= \cos 2a + \cos(3a + 2a) + \cos(3a - 2a) \\
&= \cos 2a + 2\ \cos 3a\ \cos 2a \\
&= \cos 2a\,(1\ +\ 2\cos 3a)
\end{aligned}$$

Le premier membre de l'identité devient donc :

$$\frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a} = \frac{\sin 2a\,(1\ +\ 2\cos 3a)}{\cos 2a\,(1\ +\ 2\cos 3a)} = \operatorname{tg} 2a$$

Ce qui démontre l'identité lorsque les deux familles de conditions suivantes sont réalisées :

1. $$\cos 2a \neq 0$$

2. $$\cos 3a \neq -1/2$$

On exprime respectivement ces deux conditions.

$$\begin{aligned} \cos 2a \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos 3a \neq -1/2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3a \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{et} \quad 3a \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad a \neq \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad a \neq \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

---

**Question 2** *Résoudre l'équation suivante sans calculatrice :*

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

*Solution 1 : Solution compacte*

textitConditions d'existence : L'existence de l'équation est liée à celle de la tangente $\operatorname{tg} x \neq \infty$, soit

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

L'équation peut se ré-écrire sous la forme suivante ;

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 4 \operatorname{tg} x$$

Etant donné la formule fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on a :

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

et l'équation à résoudre devient :

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 4 \operatorname{tg} x$$

Etant donné que $\cos x \neq 0$ (conditions d'existence), l'équation peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{\cos^2} = 4 \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \sin x \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$$

On en déduit les solutions :

$$\begin{gathered} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{et} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{et} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{gathered}$$

Soit l'ensemble des solutions :

$$S = \{ \frac{\pi}{12} + k\pi \} \bigcup \{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \}$$

*Solution 2 : Solution suivie par le plus grand nombre d'étudiants*

L'équation est une équation du second degré en $\operatorname{tg} x$. Les deux solutions sont :

$$\operatorname{tg} x_1 = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Etant donné que l'on ne dispose pas de la calculatrice, il faut réduire l'expression :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \mp \sqrt{3}$$

Pour la première des racines, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x}{\cos x} = 2 - \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\sin x = \cos x - \cos x\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Etant donné que $\sin \pi/6 = 1/2$, et $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ et que $\cos x \neq 0$ par les conditions d'existence, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x}{\cos x} = 2 - \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad & \cos x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin x = \cos x \\ \Leftrightarrow \quad & \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \cos x \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos x \end{aligned}$$

Les solutions s'écrivent :

$$\begin{array}{ccc} x - \dfrac{\pi}{6} = x + 2k\pi & \text{ou} & x - \dfrac{\pi}{6} = -x + 2k\pi \\ \text{impossible} & & 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ & & x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}$$

De même pour la second racine de l'équation du second degré, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x}{\cos x} = 2 + \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\sin x - \cos x\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos x \\ \Leftrightarrow \quad & \cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6} = -\cos x \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi - x) \end{aligned}$$

Les solutions s'écrivent :

$$\begin{array}{ccc} x + \dfrac{\pi}{6} = \pi - x + 2k\pi & \text{ou} & x + \dfrac{\pi}{6} = -\pi + x + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi & & \text{impossible} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi & & \end{array}$$

On retrouve l'ensemble des solutions de la première approche.

---

**Question 3** *Démontrer que, si dans un triangle l'identité suivante est vérifié,*

$$\frac{1}{\sin\beta} + \operatorname{cotg}\beta = \frac{a+c}{b}$$

*alors ce triangle est rectangle.*
*$a$, $b$ et $c$ sont les longueurs des côtés opposés aux angles $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ respectivement.*

*Solution*

Par inspection, on peut se rendre compte que le triangle ne peut pas être rectangle en $\beta$. En effet si $\beta = \pi/2$, on a

$$\frac{1}{1} + \frac{0}{1} = \frac{a+c}{b}$$

Elevons au carré, on a

$$b^2 = (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac \neq a^2 + c^2$$

Ce qui viole la relation de Pythagore. Le triangle ne peut donc être rectangle que en A ($\alpha = \pi/2$) ou en C ($\gamma = \pi/2$).

Ecrivons la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} a/b = & \sin\alpha/\sin\beta \\ c/b = & \sin\gamma/\sin\alpha \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin\beta}$$

Si $\sin\beta \neq 0$ ce qui entraîne $\beta \neq \pi + k\pi$, il vient :

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + \cos\beta &= \sin\alpha + \sin\gamma \\ &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

Si on remarque que $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi - \beta$, nous pouvons écrire :

$$\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\beta}{2}$$

De même la formule de Simpson permet d'écrire :

$$1 + \cos\beta = \cos\frac{\beta^2}{2}$$

L'égalité de départ s'écrit sous la forme :

$$1 + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cdot \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

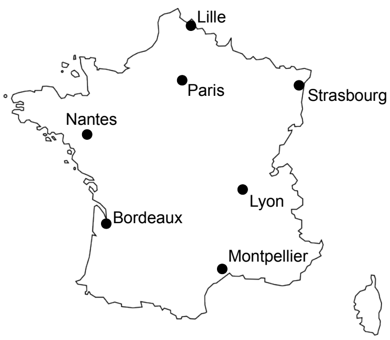
$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = 0$$

L'équation ci-dessus possède trois solutions :

1. $\cos\frac{\beta}{2} = 0$ admet comme solution
$$\beta = \pi + k\pi$$
Cette solution est à rejeter (triangle plat).
2. $\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{2}$. Or $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$ ce qui donne
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$
et le triangle est rectangle en $\alpha$.
3. $\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha - \gamma}{2}$ Or $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$ ce qui donne
$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$
et le triangle est rectangle en $\gamma$.

---

**Question 4** *On connaît les distances suivantes entre les villes ainsi que leur situation géographique. On suppose une Terre plane.*




| | |
|---|---|
| *Paris - Lille* | *200 km* |
| *Nantes - Lille* | *505 km* |
| *Montpellier - Lille* | *780 km* |
| *Paris - Strasbourg* | *400 km* |
| *Strasbourg - Nantes* | *713 km* |
| *Paris - Lyon* | *394 km* |
| *Nantes - Lyon* | *518 km* |
| *Paris - Montpellier* | *596 km* |
| *Paris - Bordeaux* | *500 km* |
| *Strasbourg - Bordeaux* | *761 km* |
| *Paris - Nantes* | *343 km* |

*Calculer la longueur à vol d'oiseau du parcours du tour de France partant de Paris et passant successivement par les villes de Lille, Strasbourg, Lyon, Montpellier, Bordeaux, Nantes et Paris. Utiliser 4 chiffres après la virgule pour vos calculs.*

*Solution*

Utilisons la relation de Pythagore généralisé (Al Kashi) successivement dans les triangles suivants :

**Lilles-Paris-Nantes** noté $LPN$ :
$$l_6^2 = d_1^2 + d_6^2 - 2d_6d_1\cos\zeta$$
ce qui nous donne
$$\zeta = \operatorname{acos}\left(\frac{d_1^2 + d_6^2 - l_6^2}{2d_1d_6}\right) = 135.2136°$$

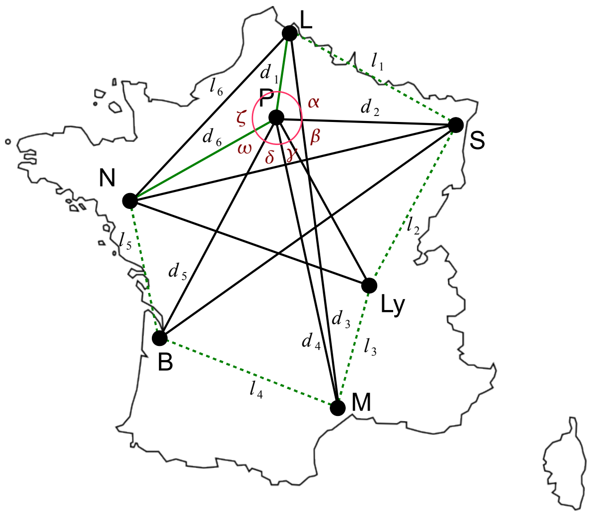



FIGURE 1 – Les distances connues sont représentées en traits pleins, les distances inconnues en pointillés. Le trajet du Tour de France est représenté en vert.

**Nantes-Paris-Strasbourg** noté $NPS$ :

$$SN^2 = d_2^2 + d_6^2 - 2d_2d_6\cos(\zeta + \alpha)$$

ce qui nous donne

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{d_1^2 + d_4^2 - LM^2}{2d_1d_4}\right) - \zeta = 77.5600°$$

(Attention il faut vérifier $\alpha + \zeta > 180°$)

**Lilles-Paris-Montpellier** noté $LPM$ :

$$LM^2 = d_1^2 + d_4^2 - 2d_1d_4\cos(\zeta + \omega + \delta)$$

ce qui nous donne

$$\omega + \delta = \text{acos}\left(\frac{d_1^2 + d_4^2 - LM^2}{2d_1d_4}\right) - \zeta = 71.3770°$$

**Nantes-Paris-Lyon** noté $NPLy$ :

$$NLy^2 = d_3^2 + d_6^2 - 2d_3d_6\cos(\omega + \delta + \gamma)$$

ce qui nous donne

$$\gamma = \text{acos}\left(\frac{d_1^2 + d_4^2 - LM^2}{2d_1d_4}\right) - (\omega + \delta) = 17.6561°$$

**Bordeaux-Paris-Strasbourg** noté $BPS$ :

$$SB^2 = d_2^2 + d_5^2 - 2d_2d_5\cos(\beta + \delta + \gamma)$$

ce qui nous donne

$$\beta + \delta = \text{acos}\left(\frac{d_2^2 + d_5^2 - SB^2}{2d_2d_5}\right) - \gamma = 97.3555°$$

En notant que la somme $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \omega + \zeta = 360°$, il vient

$$\beta = 58.1933°$$

ce qui nous permet de déterminer

$$\delta = 75.8495° - \beta = 39.1622°$$

et

$$\omega = 71.3770° - \delta = 32.2148°.$$

Connaissant tous les angles, il est maintenant possible de déterminer les distances $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ et $l_5$ selon :

$$\begin{array}{rcl}
l_1^2 &=& d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(\alpha) \;\Rightarrow\; l_1 = 406.9\,\text{km} \\
l_2^2 &=& d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3\cos(\beta) \;\Rightarrow\; l_2 = 386.1\,\text{km} \\
l_3^2 &=& d_3^2 + d_4^2 - 2d_3d_4\cos(\gamma) \;\Rightarrow\; l_3 = 250.9\,\text{km} \\
l_4^2 &=& d_4^2 + d_5^2 - 2d_4d_5\cos(\delta) \;\Rightarrow\; l_4 = 378.3\,\text{km} \\
l_5^2 &=& d_5^2 + d_6^2 - 2d_5d_6\cos(\omega) \;\Rightarrow\; l_5 = 278.3\,\text{km}
\end{array}$$

Nous en déduisons la distance totale à vol d'oiseau

$$l_{tot} = d_1 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + d_6 = 2243.5\,\text{km}$$