Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef

Juillet 2014

Question 1 *Montrer que*

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$$

Solution

Notons tout d'abord que les angles $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$ ainsi que $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}$ sont supplémentaires 2 à 2.

$$\begin{cases}\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}\\ \sin\frac{5\pi}{8}=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{8}\right)=\sin\frac{3\pi}{8}\end{cases}$$

Et nous pouvons écrire :

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$$

En faisant usage de la formule de Carnot : $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ et $\cos 2a=2\cos^2 a-1$, nous pouvons exprimer :

$$\begin{aligned}\sin^4 a=\left(\sin^2 a\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2a}{2}\right)^2&=\frac{1+\cos^2 2a-2\cos 2a}{4}\\&=\frac{1+\frac{1+\cos 4a}{2}-2\cos 2a}{4}=\frac{3+\cos 4a-4\cos 2a}{8}\end{aligned}$$

En appliquant cette relation aux deux termes du membre de gauche de l'égalité nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}&=\frac{3+\cos(\pi/2)-4\cos(\pi/4)}{8}+\frac{3+\cos(3\pi/2)-4\cos(3\pi/4)}{8}\\&=\frac{3+0-4\cos(\pi/4)}{8}+\frac{3+0+4\cos(\pi-3\pi/4)}{8}\\&=\frac{3-4\cos(\pi/4)}{8}+\frac{3+4\cos(\pi/4)}{8}=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité.

Question 2 *Résoudre l'équation*

$$\cos 3x \;+\; \cos 7x \;=\; 1 \;+\; \cos 10x$$

Représenter les solutions entre 0 *et* 2π *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

On fait d'abord usage de la formule de Simpson :

$$\cos p \;+\; \cos q \;=\; 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}$$

Le membre de gauche devient

$$\cos 3x + \cos 7x \;=\; 2\,\cos\frac{3x+7x}{2}\,\cos\frac{3x-7x}{2} \;=\; 2\,\cos 5x\,\cos 2x$$

On utilise ensuite la formule de Carnot

$$\cos 2x \;=\; 2\,\cos^2 x \;-\; 1$$

et le second membre s'écrit

$$1 \;+\; \cos 10x \;=\; 2\,\cos^2 5x$$

L'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos 3x \;+\; \cos 7x \;=\; 1 \;+\; \cos 10x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos 5x\,\cos 2x \;=\; 2\,\cos^2 5x \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos 5x\,(\,\cos 2x - cos 5x) \;=\; 0\end{aligned}$$

Il vient les deux familles de solutions :

– $\cos 5x = 0$ ce qui donne

$$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}}$$

– $\cos 2x - \cos 5x = 0$. Il vient

$$5x = 2x + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = k\frac{2\pi}{3}}$$

ou bien

$$5x = -2x + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 7x = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = k\frac{2\pi}{7}}$$

D'autres étudiants ont transformé la somme $\cos 2x - \cos 5x = 0$ en produit en utilisant une nouvelle fois la formule de Simpson

$$\cos p \;-\; \cos q \;=\; -2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2}$$

L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned}\cos 3x \;+\; \cos 7x \;=\; 1 \;+\; \cos 10x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos 5x\,(\,\cos 2x - cos 5x) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos 5x\,\sin\frac{7x}{2}\,\sin\frac{-3x}{2} \;=\; 0\end{aligned}$$

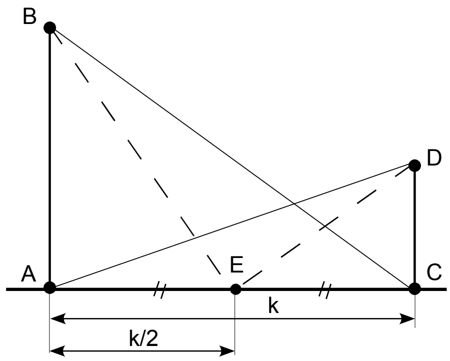
On trouve alors les mêmes solutions :

$$\sin\frac{7x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = k\frac{2\pi}{7}}$$

et

$$\sin\frac{3x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = k\frac{2\pi}{3}}$$

Question 3 *Deux églises sont situées de part et d'autre d'une place horizontale. Les clochers de ces deux églises sont représentés respectivement par les segments AB et CD. Les bases de ces clochers sont séparées d'une distance k. Un observateur placé au point C voit le sommet B du clocher opposé sous un angle BCA. De même, un observateur situé au point A voit le sommet D du clocher opposé sous un angle DAC valant la moitié de l'angle BCA. La somme des angles BEA et DEC sous lesquels un observateur placé au point E voit respectivement les sommets B et D est égale à $90°$. Si la distance k vaut $60\,\mathrm{m}$, déterminer la hauteur des deux clochers AB et CD.*



Solution 1

Exprimons tout d'abord les angles $\widehat{DEC}$ et $\widehat{BEA}$ en fonction de k en notant que $\widehat{DEC} + \widehat{BEA} = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\widehat{DEC} = \dfrac{2\overline{DC}}{k} \\ \operatorname{tg}\widehat{BEA} = \dfrac{2\overline{AB}}{k} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \widehat{BEC}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\widehat{BEC}} = \dfrac{k}{2\overline{DC}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\overline{DC}}{k} = \dfrac{k}{4\overline{AB}} \end{cases}$$

Alternativement, nous pouvons noter que les triangles EDC et BEA sont semblables 2 à 2. En effet, $\widehat{EDC} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{DEC}$ et par hypothèse $\widehat{DEC} + \widehat{BEA} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui nous permet de déduire que $\widehat{EDC} = \widehat{BEA}$. De manière similaire, nous pouvons déduire que $\widehat{DEC} = \widehat{EBA}$ et les deux triangles rectangles EDC et BEA sont semblables, ce qui entraine que :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{DC}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\overline{BA}}{k/2} = \frac{k/2}{\overline{DC}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\overline{DC}}{k} = \frac{k}{4\overline{AB}}$$

Exprimons maintenant les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{DAC}$ en fonction de k en notant que $\widehat{BCA} = 2\widehat{DAC}$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\widehat{DAC} = \dfrac{\overline{DC}}{k} \\ \operatorname{tg}\widehat{BCA} = \dfrac{\overline{AB}}{k} = \operatorname{tg}\left(2\widehat{DAC}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\widehat{DAC}}{1 - \operatorname{tg}^2\widehat{DAC}} = \dfrac{\frac{2\overline{DC}}{k}}{1 - \frac{\overline{DC}^2}{k^2}} \end{cases}$$

En remplaçant la valeur de $\dfrac{\overline{DC}}{k}$ par la valeur précédemment trouvée, à savoir $\dfrac{k}{4\overline{AB}}$, il vient $\dfrac{\overline{AB}}{k} = \dfrac{\frac{2k}{4\overline{AB}}}{1-\frac{k^2}{16\overline{AB}^2}} \Leftrightarrow 16\overline{AB}^2 = 9k^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{3k}{4}$. Ensuite, $\overline{DC} = \dfrac{4k^2}{12k} = \dfrac{k}{3}$. Si $k = 60\,\mathrm{m}$, $\overline{AB} = 45\,\mathrm{m}$ et $\overline{DC} = 20\,\mathrm{m}$.

Solution 2

Une autre solution possible consiste à écrire les relations entre les côtés des triangles rectangles BAE, BAC, CDA et CDE.

L'énoncé nous dit d'une part

$$\widehat{ACB} = 2\,\widehat{CAD} = 2\,\alpha$$

et d'autre part que :

$$\widehat{BED} = 90°$$

soit

$$\widehat{AEB} + \widehat{DEC} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{DEC} = 90° - \widehat{AEB}$$

Donc

$$\tan\widehat{DEC} = \tan(90° - \widehat{AEB}) = \frac{1}{\tan\widehat{AEB}}$$

Ecrivons maintenant les relations dans les triangles rectangles BAE, BAC, CDA et CDE. Dans BAE, on a :

$$\overline{BA} = \overline{AE}\ \tan\widehat{AEB} = (k/2)\ \tan\widehat{AEB}$$

Dans BAC, on a :

$$\overline{BA} = \overline{AC}\ \tan\widehat{ACB} = k\ \tan\widehat{ACB}$$

Dans CDE, on a

$$\overline{CD} = \overline{EC}\ \tan\widehat{DEC} = (k/2)\ \tan\widehat{DEC}$$

Dans CDA, on a

$$\overline{CD} = \overline{AC}\ \tan\widehat{DAC} = k\ \tan\widehat{DAC}$$

En égalant les expressions des longueurs $\overline{BA}$ et $\overline{CD}$, il vient :

$$\overline{BA} = (k/2)\ \tan\widehat{AEB}\ = k\ \tan 2\alpha$$

soit

$$\tan\widehat{AEB} = 2\tan 2\alpha = 2\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

On a également

$$\overline{CD} = (k/2)\ \tan\widehat{DEC} = k\ \tan\alpha$$

soit

$$\tan\widehat{DEC} = \tan(90° - \widehat{AEB}) = \frac{1}{\tan\widehat{AEB}} = 2\tan\alpha$$

En identifiant la valeur de $\tan \widehat{AEB}$, on obtient une équation permettant de déterminer $\tan\alpha$.

$$\tan \widehat{AEB} = \frac{1}{2\tan\alpha} = 4\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

soit

$$4\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{1}{2\tan\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2\alpha = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Seul le signe plus a du sens ici, et on a

$$\alpha = 18,4399°$$

Il est alors maintenant aisé de calculer les hauteurs

$$\overline{AB} = k\tan 2\alpha = 45 \text{ m}$$

et

$$\overline{CD} = k\tan\alpha = 20 \text{ m}$$