Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef

Septembre 2013

Question 1 *Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence :*

$$\frac{\operatorname{tg}(a+b)+\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}(a-b)}=\frac{\operatorname{tg} a\left(1+\operatorname{tg}^2 b\right)}{\operatorname{tg} b\left(1+\operatorname{tg}^2 a\right)}$$

Le premier membre devient :

$$\frac{\operatorname{tg}(a+b)+\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}(a-b)}=\frac{\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}+\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}}{\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}-\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)})} \quad =$$

$$\frac{\sin(a+b)\cos(a-b)+\sin(a-b)\cos(a+b)}{\sin(a+b)\cos(a-b)-\sin(a-b)\cos(a+b)} \quad = \quad \frac{\sin 2a}{\sin 2b}$$

Le second membre s'exprime :

$$\frac{\operatorname{tg} a\left(1+\operatorname{tg}^2 b\right)}{\operatorname{tg} b\left(1+\operatorname{tg}^2 a\right)} \quad = \quad \frac{\operatorname{tg} a\left(1+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\right)}{\operatorname{tg} b\left(1+\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right)}=$$

$$\frac{\operatorname{tg} a\cos^2 a}{\operatorname{tg} b\cos^2 b} \quad = \quad \frac{\sin a\cos a}{\sin b\cos b}=\frac{\sin 2a}{\sin 2b}$$

ce qui vérifie l'identité.

conditions d'existence :
- $\cos a \neq 0 \;\Rightarrow\; a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
- $\cos b \neq 0 \;\Rightarrow\; b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
- $\cos(a+b) \neq 0 \;\Rightarrow\; a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \;\Rightarrow a \neq -b+\frac{\pi}{2}+k\pi$
- $\cos(a-b) \neq 0 \;\Rightarrow\; a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \;\Rightarrow a \neq b+\frac{\pi}{2}+k\pi$

Question 2 *Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence :*

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\sin a\cos a-\sin b\cos b}$$

Le second membre de l'identité devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b} &= \frac{\frac{1-\cos 2a}{2} - \frac{1-\cos 2b}{2}}{\frac{1}{2}\left(\sin 2a - \sin 2b\right)} = \\
\frac{\sin \frac{2b+2a}{2} \sin \frac{2a-2b}{2}}{\sin \frac{2a+2b}{2} \sin \frac{2a-2b}{2}} &= \operatorname{tg}(a+b)
\end{aligned}$$

ce qui vérifie l'égalité.

Alternativement, nous pouvons développer le premier membre ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} &= \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b} \\
\Leftrightarrow \quad (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos a - \sin b \cos b) &= (\sin^2 a - \sin^2 b)(\cos a \cos b - \sin a \sin b)
\end{aligned}$$

En distribuant et en notant que $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$, il vient :

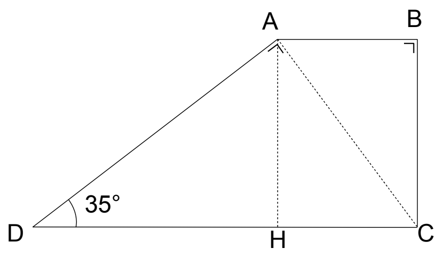
$$\begin{aligned}
&\cancel{\sin^2 a \cos a \cos b} + \cancel{\sin a \sin b} + \cancel{\sin^3 a \sin b} - \cancel{\sin a \sin b} + \cancel{\sin a \sin^3 b} + \cancel{\cos a \sin^2 a \cos b} \\
&= \cancel{\sin^2 a \cos a \cos b} - \cancel{\sin^3 a \sin b} - \cancel{\sin^2 a \cos a \cos b} + \cancel{\sin a \sin^2 b}
\end{aligned}$$

Ce qui vérifie l'égalité.

conditions d'existence :

- $\cos(a+b) \neq 0 \;\Rightarrow\; a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\Rightarrow a \neq -b + \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\sin(a-b) \neq 0 \;\Rightarrow\; a - b \neq k\pi \;\Rightarrow a \neq b + k\pi$

Question 3 *Un des angles d'un trapèze rectangle $ABCD$ vaut $35°$. La plus petite diagonale vaut $7\,\text{cm}$ et est perpendiculaire au côté oblique. Calculer le périmètre et l'aire du trapèze. Utiliser 4 chiffres derrière la virgule pour vos calculs.*



- Dans le triangle rectangle ADC, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sin 35° = \frac{AC}{DC} \quad &\Rightarrow \quad DC = \frac{AC}{\sin 35°} = 12.204\,\text{cm} \\
\cos 35° = \frac{AD}{DC} \quad &\Rightarrow \quad AD = DC \cos 35° = 9.997\,\text{cm}
\end{aligned}$$

– Dans le triangle AHD, nous avons :

$$\begin{aligned}
\cos 35^\circ = \frac{DH}{AD} \quad &\Rightarrow \quad DH = AD\cos 35^\circ = 8.189\,\mathrm{cm} \\
\sin 35^\circ = \frac{AH}{AD} \quad &\Rightarrow \quad AH = AD\sin 35^\circ = 5.734\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $BC = AH$ et $AB = HC = DC - DH$, nous obtenons le périmètre P et l'aire S du trapèze en utilisant respectivement les relations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
P &= AB + BC + DC + DA = 31.95\,\mathrm{cm} \\
S &= \frac{(DC + AB)\cdot BC}{2} = 46.5\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

Question 4 *Soit l'équation suivante :*

$$\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,x + 1} = \frac{2}{\cos^2 x} - 2\,\mathrm{tg}^2\,x - \mathrm{tg}\,x$$

1. *Donner les conditions d'existence.*
2. *Résoudre l'équation.*
3. *Tracer les solutions entre* $[0, 2\pi[$ *sur le cercle trigonométrique.*

conditions d'existence :
– $\cos x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
– $2\,\mathrm{tg}\,x + 1 \geq 0 \;\Rightarrow \mathrm{tg}\,x \geq -\frac{1}{2}$
– $\frac{2}{\cos^2 x} - 2\,\mathrm{tg}^2\,x - \mathrm{tg}\,x \geq 0 \;\Rightarrow\; 2 + 2\,\mathrm{tg}^2\,x - 2\,\mathrm{tg}^2\,x - \mathrm{tg}\,x \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\,x \leq 2$

L'équation s'écrit $\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,x + 1} = 2 - \mathrm{tg}\,x$ qui, élevée au carré, donne :

$$2\,\mathrm{tg}\,x + 1 = (2 - \mathrm{tg}\,x)^2 = 4 - 4\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}^2\,x \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}^2\,x - 6\,\mathrm{tg}\,x + 3 = 0$$

La résolution de cette équation du second degré en $\mathrm{tg}\,x$ donne les racines :

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$$

La comparaison de ces racines avec les conditions d'existence permet de conclure :

$$\mathrm{tg}\,x = \begin{cases} 3 + \sqrt{6} > 2 & \text{à rejeter} \\ 3 - \sqrt{6} \in [-1/2, 2] & \text{OK} \end{cases}$$

$\Rightarrow\; x = 28.83^\circ + k180^\circ$