Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef

Août 2014

Question 1 *Montrer que*

$$\sin\frac{\pi}{12}\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

Solution 1

On peut démontrer cette égalité en notant que :

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi - 7\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$$

En remplaçant cette expression dans l'identité de départ et en utilisant la relation $\sin 2a = 2\sin a \cos a$, il vient :

$$\sin\frac{\pi}{12}\ \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ce qui démontre l'identité.

Solution 2

Alternativement, on peut développer le premier membre de l'identité en utilisant la formule de Simpson suivante :

$$\sin A\ \cos B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12}\ \sin\frac{7\pi}{12} &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi - 7\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi + 7\pi}{12}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{6\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{8\pi}{12}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{2\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Question 2 *Montrer que, si la relation suivante liant les trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée :*

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

alors, le triangle est rectangle en A.

Solution 1

Conditions d'existence

$$\cos B + \cos C \neq 0 \;\Rightarrow\; \cos B \neq -\cos C$$

Cette conditions entraîne les deux conditions suivantes :

- $B \neq \pi - C$, ce qui est toujours vrai car $A + B + C = \pi$
- $B \neq -(\pi - C) = C - \pi$ ce qui est toujours vrai car $A + B + C = \pi$.

En appliquant les 2 formules de factorisation suivantes :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

au second membre de l'identité fournie, il vient :

$$\sin A = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

Ensuite, il suffit de noter que $\pi = A + B + C$ et que, par suite, $\sin\dfrac{B+C}{2} = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B+C}{2}\right] = \cos\dfrac{A}{2}$ et $\cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B+C}{2}\right] = \sin\dfrac{A}{2}$.

En remplaçant ces résultats dans l'identité et en exprimant que $\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$,

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \;\Leftrightarrow\; 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cette identité entraine $\dfrac{A}{2} = \dfrac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; A = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle est rectangle en A.

Solution 2

Une autre approche consiste à développer $\sin A$ en notant que $A + B + C = \pi \;\Rightarrow\; A = \pi - (B + C)$ et il vient :

$$\sin A = \sin\left[\pi - (B + C)\right] = \sin(B + C)$$

Ensuite, en utilisant la relation $\sin(p + q) = \sin p\cos q + \cos p\cos q$, l'identité de départ peut être développée en :

$$\begin{aligned} \sin B\cos C + \cos B\sin C &= \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \\ (\sin B\cos C + \cos B\sin C)(\cos B + \cos C) &= \sin B + \sin C \\ \sin B\cos B\cos C + \sin B\cos^2 C + \sin C\cos^2 B + \sin C\cos C\cos B &= \sin B + \sin C \end{aligned}$$

Cette équation est ensuite simplifiée en :

$$\begin{aligned}
\sin B\left(\cos^2 C-1\right)+\sin C\left(\cos^2 B-1\right)+\sin B\cos B\cos C+\sin C\cos C\cos B &= 0\\
\sin B\cos B\cos C-\sin C\sin^2 B+\sin C\cos C\cos B-\sin B\sin^2 C &= 0\\
\sin B\left(\cos B\cos C-\sin B\sin C\right)+\sin C\left(\cos B\cos C-\sin B\sin C\right) &= 0\\
\left(\sin B+\sin C\right)\left(\cos B\cos C-\sin B\sin C\right) &= 0\\
\cos(B+C)\left(\sin B+\sin C\right) &= 0
\end{aligned}$$

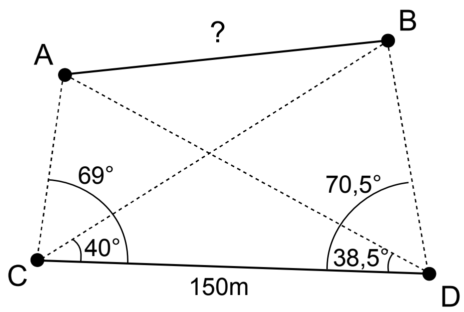
Cette relation est vérifiée si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
- $\cos(B+C)=0 \Rightarrow B+C=\frac{\pi}{2}$ ce qui entraine que $A=\frac{\pi}{2}$ et le triangle est rectangle.
- $(\sin B+\sin C)=0$, ce qui entraine :

$$\begin{array}{ll}
B=-C & \text{impossible}\\
B=\pi-(-C)=\pi+C & \text{impossible}
\end{array}$$

Question 3 *Pour déterminer la distance entre 2 points inaccessibles A et B, on choisit une base d'opération CD longue de 150m et on mesure les angles* $\widehat{BCD} = 40°$, $\widehat{ACD} = 69°$, $\widehat{ADC} = 38.5°$ *et* $\widehat{BDC} = 70.5°$. *Calculer la distance AB.*

Solution

La configuration décrite dans l'énoncé peut se représenter de la manière suivante (le dessin n'est pas à l'échelle !) :



En appliquant le théorème de Pythagore généralisé au triangle ABC il vient :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\;\overline{BC}\cos\widehat{ACB}$$

Le segment $\overline{AC}$ peut être déterminé en appliquant la relation des sinus dans le triangle ACD :

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{\overline{DC}}{\sin\widehat{CAD}} \;\Rightarrow\; \overline{AC} = \frac{\overline{DC}\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{CAD}}$$

L'angle $\widehat{ADC}$ est donné dans l'énoncé et vaut 38.5° alors que l'angle $\widehat{CAD}$ peut être évalué en notant que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ce qui, appliqué au triangle ACD donne :

$$180° = \widehat{ADC} + \widehat{CDA} + \widehat{ADC} + \widehat{CAD} \;\Rightarrow\; \widehat{CAD} = 180° - 69° - 38.5° = 72.5°$$

ainsi nous calculons $\overline{AC} = \dfrac{150\,\text{m} \times \sin 38.5°}{\sin 72.5°} = 97.91\,\text{m}.$

Pour déterminer le segment $\overline{BC}$, nous procédons de manière similaire en appliquant Pythagore généralisé au triangle BCD :

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\widehat{BDC}} = \frac{\overline{DC}}{\sin\widehat{CBD}} \;\Rightarrow\; \overline{BC} = \frac{\overline{DC}\sin\widehat{BDC}}{\sin\widehat{CBD}}$$

L'angle $\widehat{BDC}$ est donné dans l'énoncé et vaut 70.5° alors que l'angle $\widehat{CBD}$ peut être évalué en notant que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ce qui, appliqué au triangle BCD donne :

$$180° = \widehat{BDC} + \widehat{CDB} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} \;\Rightarrow\; \widehat{CBD} = 180° - 70.5° - 40° = 69.5°$$

et nous calculons $\overline{BC} = \dfrac{150\,\mathrm{m} \times \sin 70.5°}{\sin 69.5°} = 150.96\,\mathrm{m}$.

Le segment $\overline{AB}$ est alors estimé en reprenant la première relation :

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\ \overline{BC} \cos \widehat{ACB} \\ &= 97,91^2 + 150.96^2 - 2 \times 97,91 \times 150,96 \times \cos(69° - 40°) \\ &= 6520.45 \ \Rightarrow\ \overline{AB} = 80.75\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$