EFFORTS DANS LES TRANSMISSIONS

Pierre Duysinx

Aérospatiale & Mécanique

Année académique 2021-2022

PLAN DE L'EXPOSE

- Introduction
- Principe
- Rhéogramme des puissances
- Efforts dans les engrenages
  - Engrenages à dentures droites
  - Engrenages à denture hélicoïdales
  - Engrenages à dentures coniques
- Efforts dans les transmissions par courroie et poulies
- Efforts dans les transmissions par chaînes

INTRODUCTION

INTRODUCTION

- Le premier problème qui se pose en dimensionnement est le recensement des efforts.
  - Les efforts peuvent être une donnée du problème, fondée sur une analyse statistique par exemple.
  - Dans un certain nombre de cas, ils font l'objet de règlements.

- Nous nous pencherons plus particulièrement sur le recensement des efforts dans une transmission.
  - Envisager un certain nombre d'éléments courants en mécanique.

PRINCIPE

PRINCIPE

- La première démarche consiste à déterminer le schéma de la circulation de la puissance.

- Identifier efforts actifs, c'est-à-dire ceux qui travaillent.

- La plupart des transmissions ne peuvent exister que moyennant des efforts secondaires, induisant de la flexion et parfois aussi des efforts axiaux.
  - Contrairement à leur dénomination, ces efforts ne sont pas nécessairement plus petits que les efforts actifs.
  - Ils jouent souvent un rôle fondamental dans la résistance de l'arbre et de ses supports.
  - La détermination des efforts secondaires fait l'objet d'une deuxième étape de calcul

RHEOGRAMME DE LA PUISSANCE

RHEOGRAMME DE PUISSANCE

- La puissance fournie par le ou les organes moteurs et actionneurs est amenée aux organes récepteurs par la transmission
- La transmission peut se réaliser au prix de certaines pertes.

$$\sum \mathcal{P}_{mot} = \sum \mathcal{P}_{rec} + \sum \mathcal{P}_{pertes}$$

- Le rendement de transmission

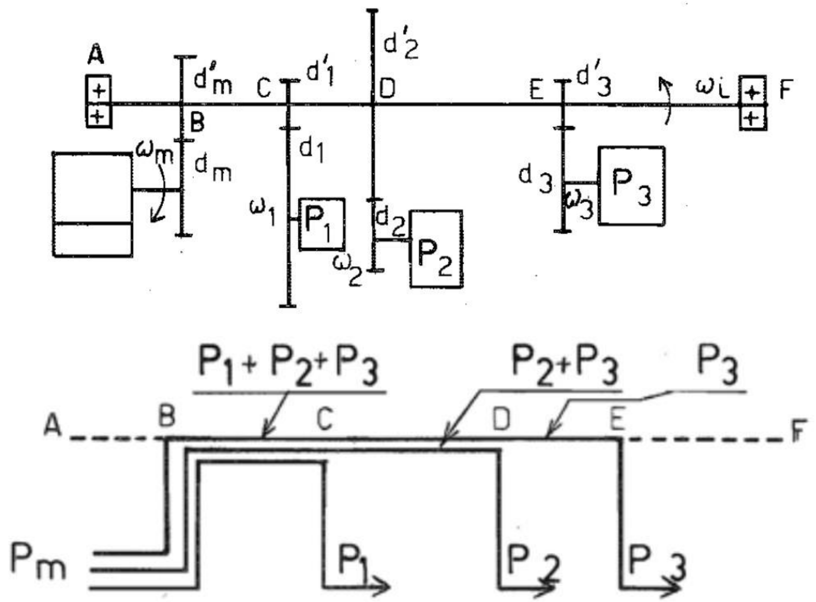
$$\eta = \frac{\sum \mathcal{P}_{rec}}{\sum \mathcal{P}_{mot}} < 1.0$$

- Dans un grand nombre de transmissions, les pertes sont faibles de sorte qu'on peut les ignorer au stade de l'avant projet

$$\eta \simeq 1$$

RHEOGRAMME DE PUISSANCE

- **Le rhéogramme de la puissance** est le schéma des flux de puissance au sein du système mécanique.
- En pratique on peut remonter de chaque récepteur vers son générateur pour établir le chemin pris par la puissance.
- L'ensemble des chemins de tous les récepteurs forme dans ce cas un circuit maillé



RHEOGRAMME DE PUISSANCE

- A partir du rhéogramme, il est aisé de déterminer les efforts moteurs Q (au sens généralisé), car la puissance P est toujours de la forme

$$\mathcal{P} = Q\,v$$

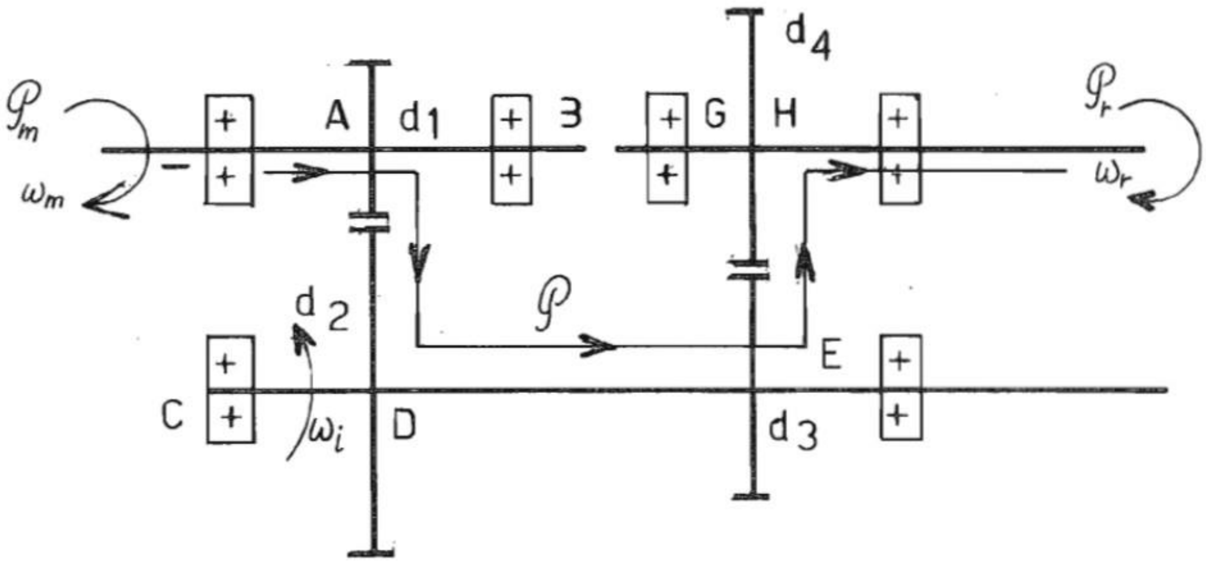
  - v est une vitesse généralisée
  - Q est l'effort actif associé.
- En pratique, on rencontre des vitesses de translation pour lesquelles la formule s'applique sans modification, et des vitesses de rotation, pour lesquelles la formule doit s'entendre comme

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}\,\omega = M_t\,\omega = M_t\,2\,\pi\,N$$

  - avec un couple $C=M_t$ multipliant une vitesse angulaire ω (en radians par secondes) et N la vitesse de rotation correspondante exprimée en tours par seconde [tr/s]

EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

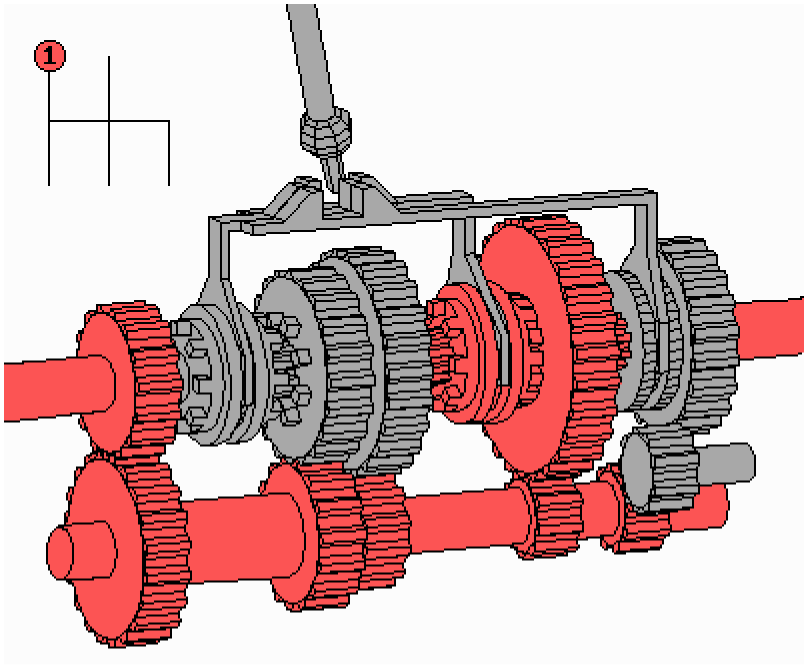
- Un réducteur est destiné à transformer une puissance à grande vitesse de rotation ω_m en une puissance à faible vitesse de rotation ω_r.



- Le réducteur à engrenages possède deux étages.
- Le rendement des engrenages est élevé 98%, ce qui permet de négliger les pertes.

EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

- Exemple de réducteur à étage d’une boîte de vitesses pour automobile



EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

- Les couples en entrée et en sortie sont donnés par

$$M_{tm} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_m} \quad \text{et} \quad M_{tr} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_r}$$

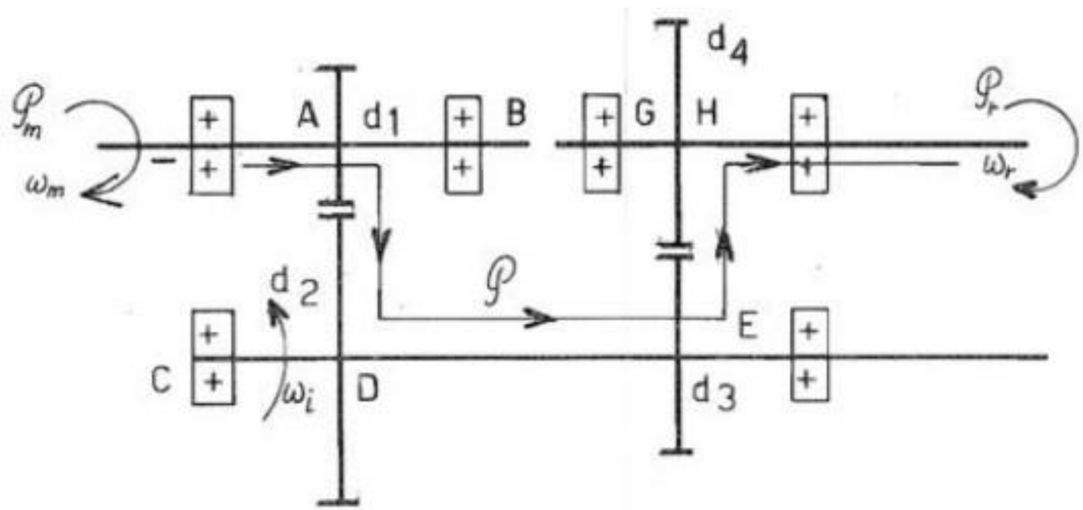
- Le couple de sortie est plus important que le couple d'entrée

$$\Delta M_t = M_{tr} - M_{tm}$$

- La différence doit être reprise par les réactions de liaison du réducteur (bâti) à la fondation!

EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

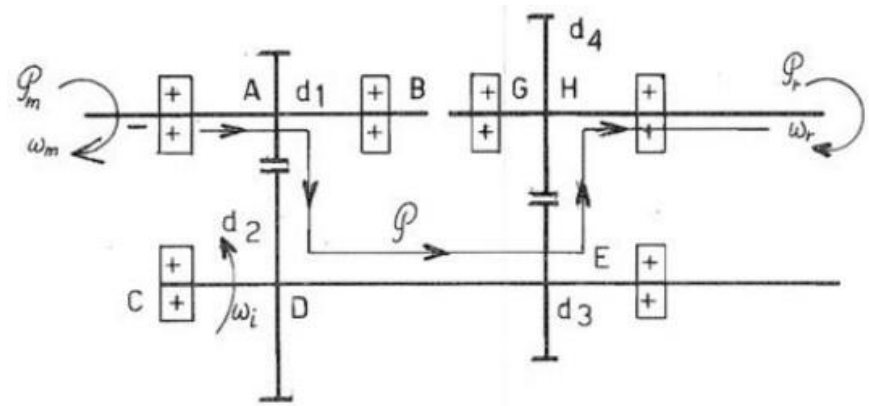
- La puissance passe de l'entrée au point A par l'arbre moteur.
- Elle passe alors par les roues dentées sur l'arbre intermédiaire, ou elle fait le chemin DE.
- P passe par la seconde paire engrenages à l'arbre récepteur, ou elle fait le chemin de H vers la sortie.



EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

- On en déduit les moments de torsion dans les différentes tronçons d'arbres.
- Il est clair que le moment de torsion est nul dans les portions d'arbre AB, CD, EF, GH puisque le couple y est nul.

Portion d'arbre	Puissance	Moment de torsion
Entree - A	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}/\omega_m$
A - B	0	0
C - D	0	0
D - E	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}/\omega_t$
E - F	0	0
G - H	0	0
H - Sortie	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}/\omega_r$



EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

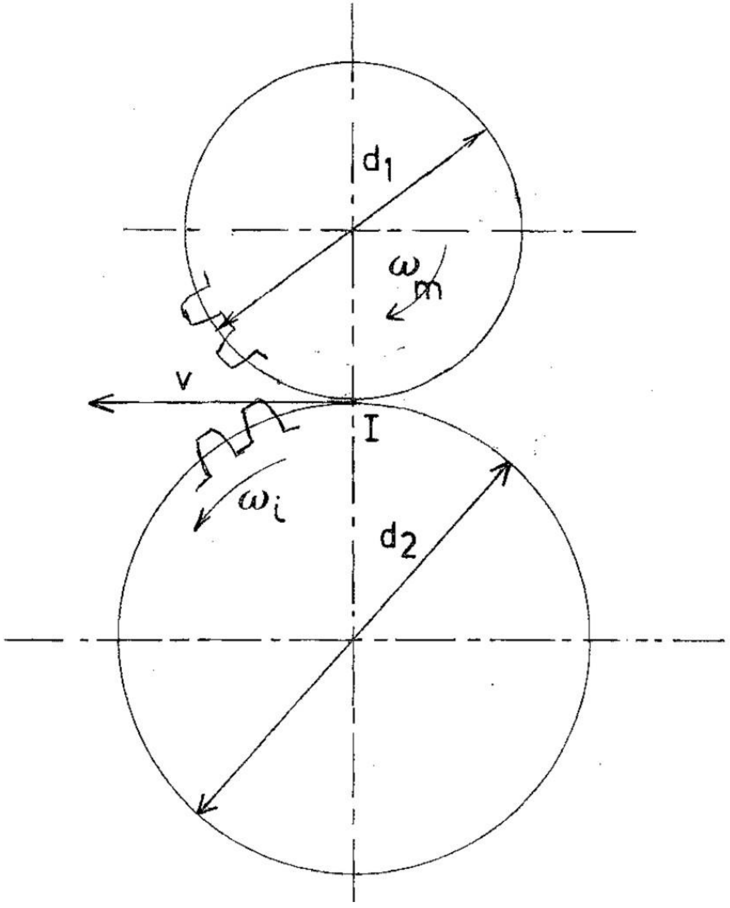
- Grâce à la présence de dents, les engrenages sont comme des cylindres qui roulent l'un sur l'autre sans glisser
- Diamètres primitifs des cylindres équivalents d_{01} et d_{02}.

- Vitesse commune au point de contact

$$v = \omega_m \frac{d_{01}}{2} = \omega_i \frac{d_{02}}{2}$$

- Soit le rapport de réduction

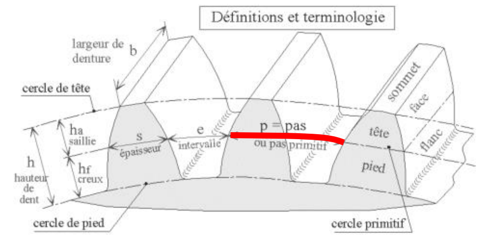
$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_{02}}{d_{01}}$$



EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

- Deux roues peuvent s'engrener si elles ont le même pas:

$$p = \frac{\pi\, d}{Z}$$



  - Avec Z le nombre de dents sur la roue
- Le pas est difficile à mesurer, c'est un nombre irrationnel. On préfère manipuler des choses mesurables comme le diamètre. On définit donc le module:

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{Z}$$

  - Ce sont les modules qui sont normalisés
- Comme les deux roues dentées ont même module, on en déduit aussi

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{m\, Z_2}{m\, Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

EXEMPLE 1: REDUCTEUR A ENGRENAGES

- On peut tout aussi aisément déduire les efforts actifs dans les engrenages.

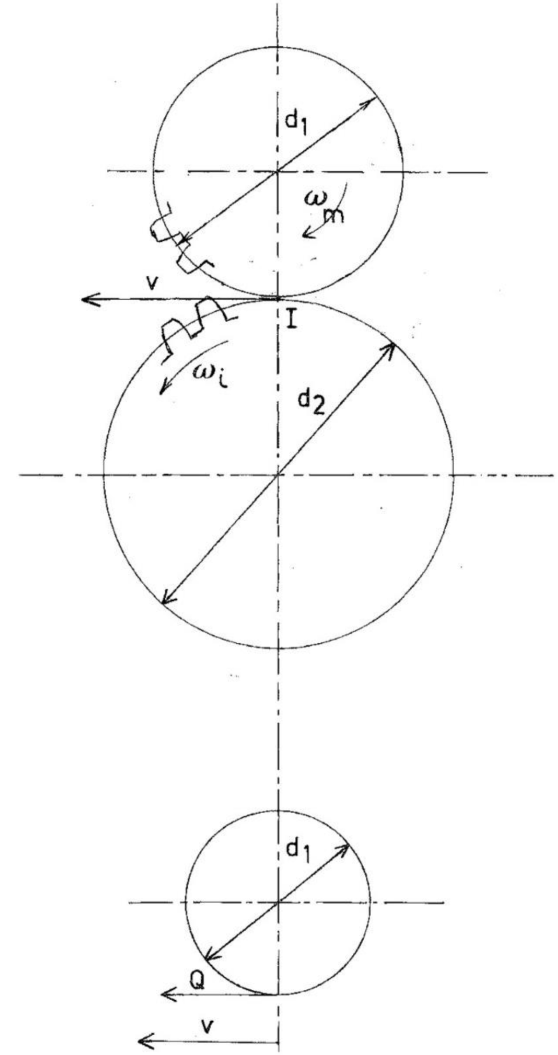
- La roue motrice fournit la puissance P

$$\mathcal{P} = Q\, v$$

- Q est la composante tangentielle de l'effort d'interaction entre les deux roues

$$F_t = Q = \frac{\mathcal{P}}{v}$$

- C'est l'effort actif. Il est accompagné d'efforts secondaires.

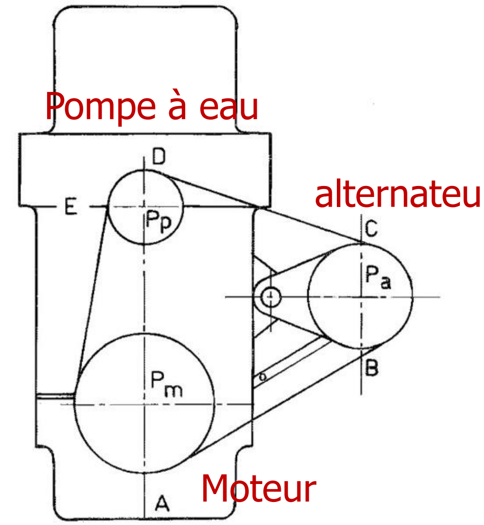


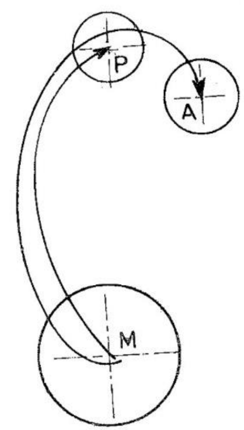
EXEMPLE 2: DISTRIBUTION DE PUISSANCE PAR COURROIE

- Considérons la distribution de puissance aux auxiliaires d'un moteur à combustion interne, soit la pompe à eau et le ventilateur d'une part, l'alternateur d'autre part
- On utilise un courroie trapézoïdale

- On suppose que l'alternateur tourne 1.8 fois plus vite que le moteur et la pompe à eau 1.5 fois plus vite

$$\omega_p = 1.5\,\omega_m \quad \text{et} \quad \omega_a = 1.8\,\omega_m$$





EXEMPLE 2: DISTRIBUTION DE PUISSANCE PAR COURROIE

- La caractéristique d'une courroie est de transmettre (au rendement près) sa vitesse tangentielle aux poulies.

$$v = \frac{\omega_m d_m}{2} = \frac{\omega_p d_p}{2} = \frac{\omega_a d_a}{2}$$

- De sorte que les diamètres doivent être dans le rapport inverse des vitesses angulaires :

$$d_p = \frac{d_m}{1.5} \quad \text{et} \quad d_a = \frac{d_m}{1.8}$$

- Le bilan des puissances

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_p$$

- Si, par exemple, l'alternateur consomme 230 W et le groupe pompe-ventilateur, 500 W, on aura donc

$$\mathcal{P}_m = 730\ W$$

EXEMPLE 2: DISTRIBUTION DE PUISSANCE PAR COURROIE

- Calculons les efforts actifs.
- On appelle effort actif d'une courroie sur une poulie le rapport:

$$\mathcal{P} = Q\,v$$

- C'est la charge concentrée à la jante de la poulie qui fournirait la même puissance ou encore, la somme de tous les efforts tangentiels fournis par la courroie à la poulie.
- Si la vitesse de la courroie vaut 30 m/s, on aura

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{\mathcal{P}_m}{v} = \frac{730}{30} = 24.33\ N \\ Q_p &= \frac{\mathcal{P}_p}{v} = \frac{500}{30} = 16.67\ N \\ Q_a &= \frac{\mathcal{P}_a}{v} = \frac{230}{30} = 7.67\ N \end{aligned}$$

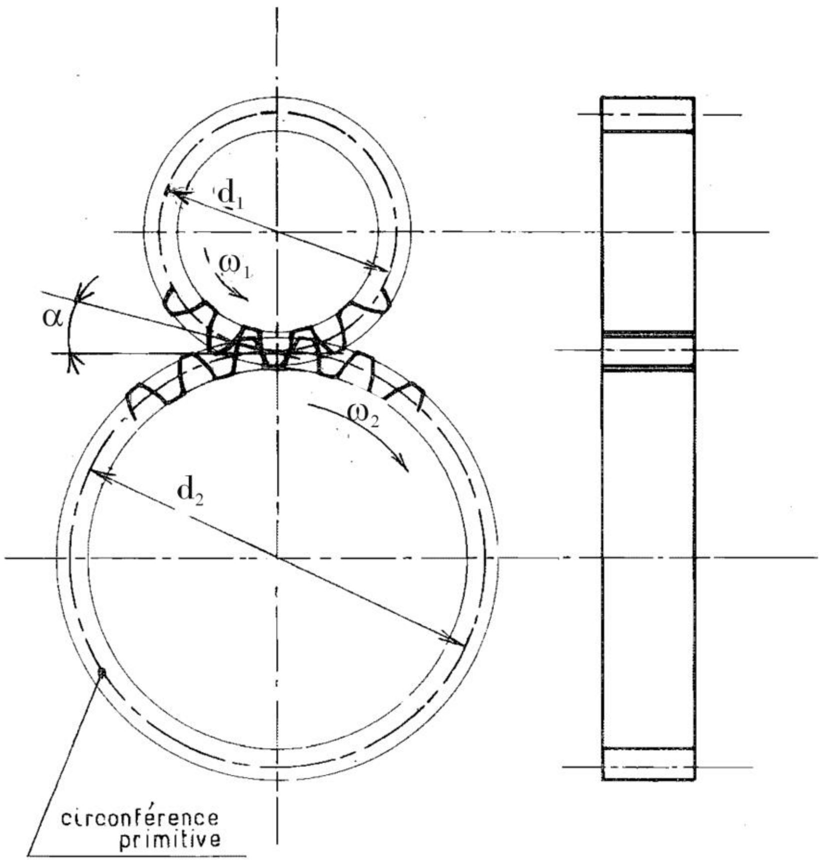
- Dans tout ceci, nous assimilons le rendement à l'unité. En pratique, il se situe aux environs de 96 à 98%

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

- Un engrenage est un système dans lequel deux roues dentées engrènent entre elles.
- On appelle pignon la petite roue dentée, l'autre étant simplement dénommée la roue.
- Affectons l'indice 1 les grandeurs relatives au pignon et d'un indice 2 les grandeurs relatives à la roue.
- L'effet des dents est d'amener les circonférences primitives à rouler sans glisser l'une sur l'autre.
- Leur vitesse commune v au point de contact est donc

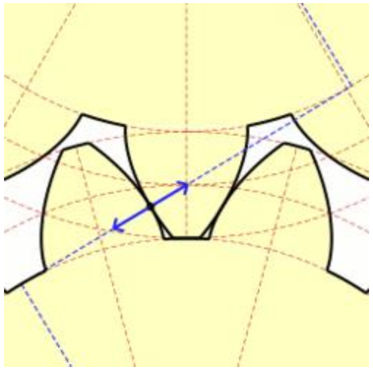
$$v = \omega_1 \frac{d_{01}}{2} = \omega_2 \frac{d_{02}}{2}$$

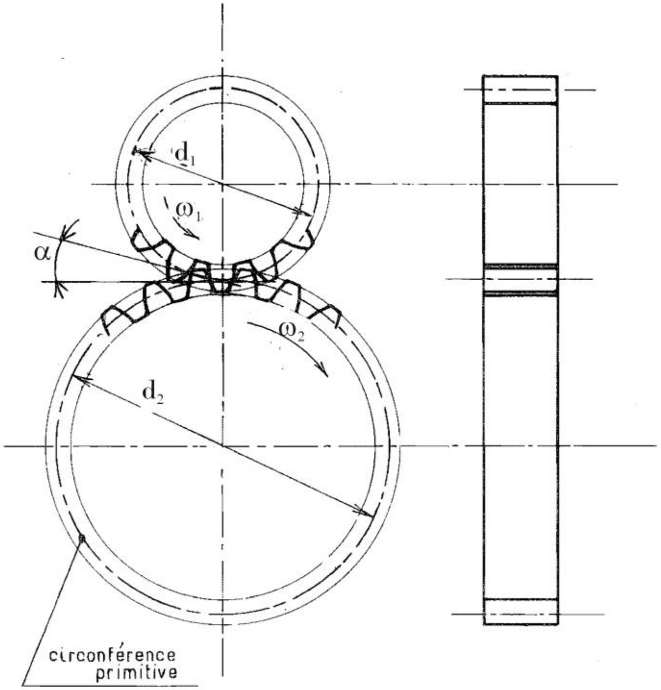


EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

- Pour que les dents d'une des deux roues puissent entrer et sortir des entredents de la roue conjuguée, il faut évidemment qu'elles aient des profils adaptés appelés profils conjugués.
- Au point de contact, le profil de la dent a sa normale inclinée d'un angle α par rapport à la tangente au cercle passant par ce point de contact. Cet angle est appelé angle de pression.
- L'angle de pression reste constant tout au long de l'engrènement.
- Cet angle est normalisé à la valeur

$$\alpha = 20^\circ$$





EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

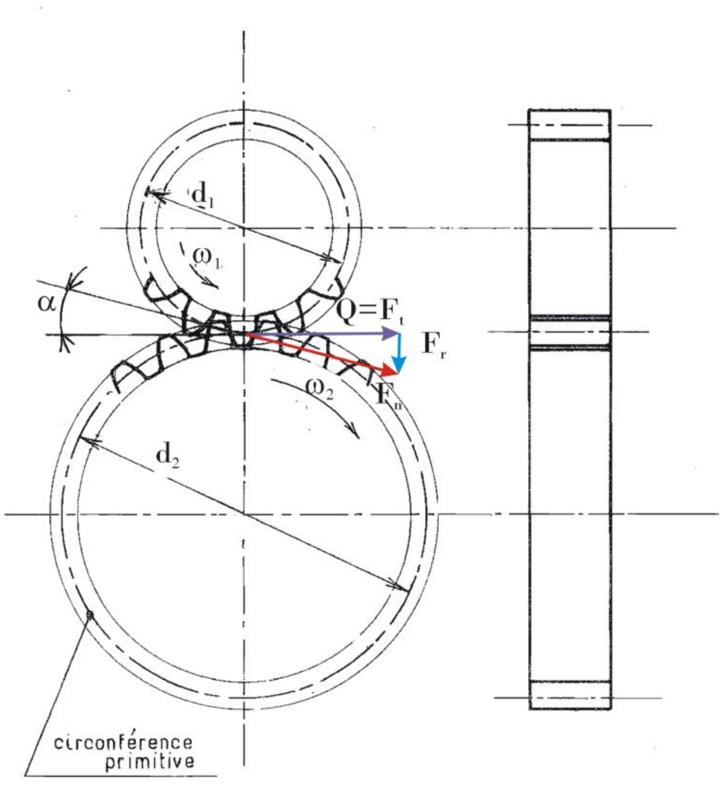
- Si l'on néglige les frottements, l'action de la roue menante sur la roue menée est située sur la normale commune aux deux profils. On a donc
  - Force tangentielle F_t:

$$F_t = Q = \frac{\mathcal{P}}{v} = \frac{\mathcal{P}\, 2}{\omega\, d_0}$$

  - Force radiale F_r (tend à repousser les deux roues):

$$F_r = F_t \tan\alpha$$

- Pour un angle de pression 20°, la tangente vaut 0.36, ce qui signifie que l'effort secondaire F_r vaut 36% de l'effort actif F_t.



EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

- En se référant à la Figure ci contre, les forces ci-dessus induisent les sollicitations suivantes pour l'arbre :
  - Moment de torsion

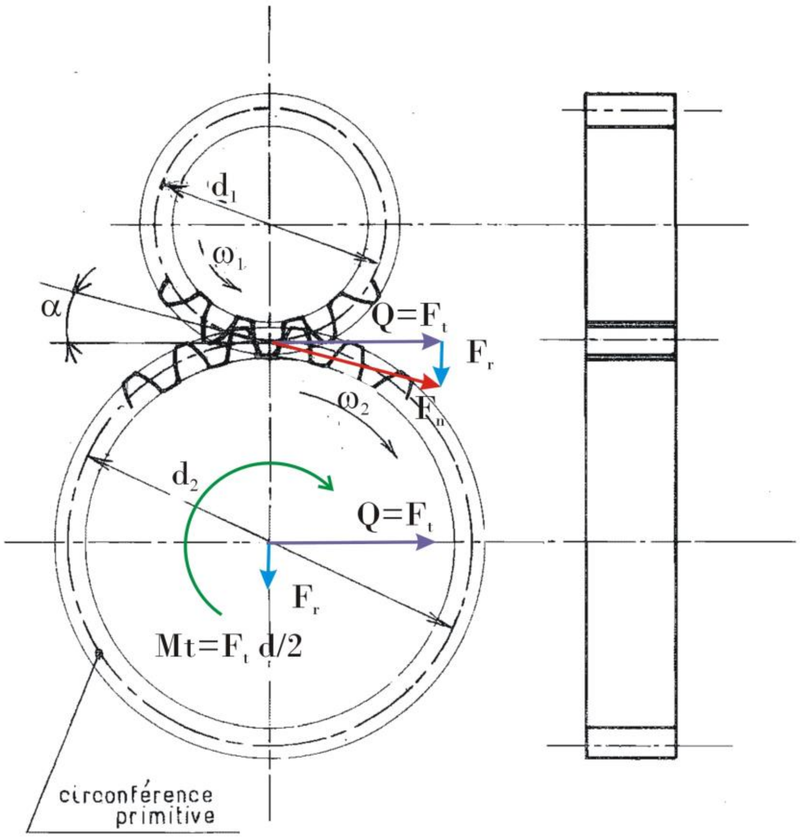
$$M_t = F_t \, d_0/2$$

  - Flexion dans le plan xOz, sous l'effet de l'effort tranchant F_t;

$$F_t = Q = \frac{\mathcal{P}}{v} = \frac{\mathcal{P}\,2}{\omega \, d_0}$$

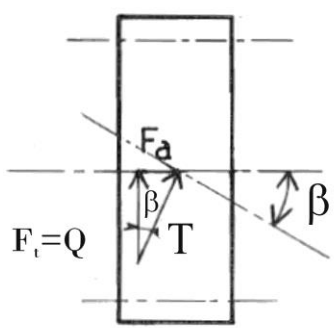
  - Flexion dans le plan yOz, sous l'effet de l'effort tranchant F_r.

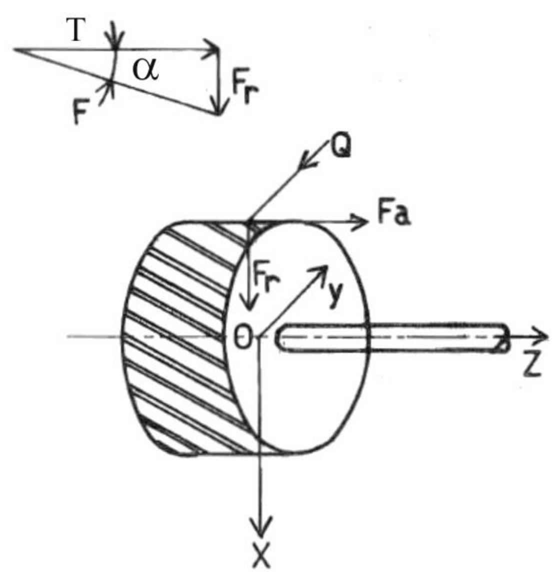
$$F_r = F_t \, \tan \alpha$$

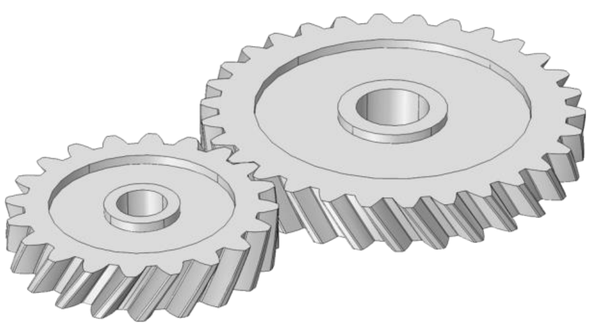


EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

- Pour accroître le silence de fonctionnement, améliorer la régularité de fonctionnement, on préfère souvent recourir à des dentures hélicoïdales
- Les dents sont inclinées d’un angle β par rapport à la génératrice du cylindre primitif.
- Cet angle prend une valeur entre 8° et 30°, typiquement 10°



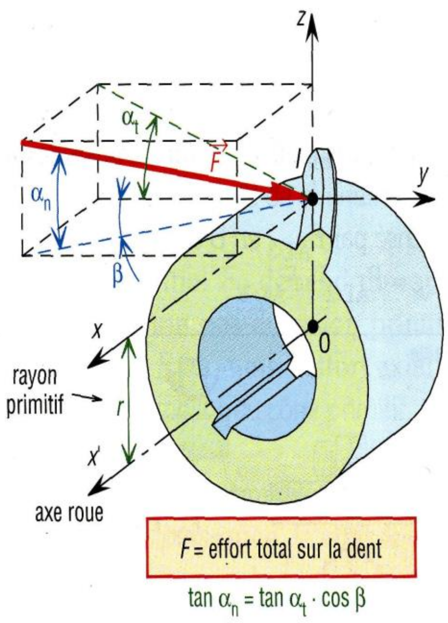


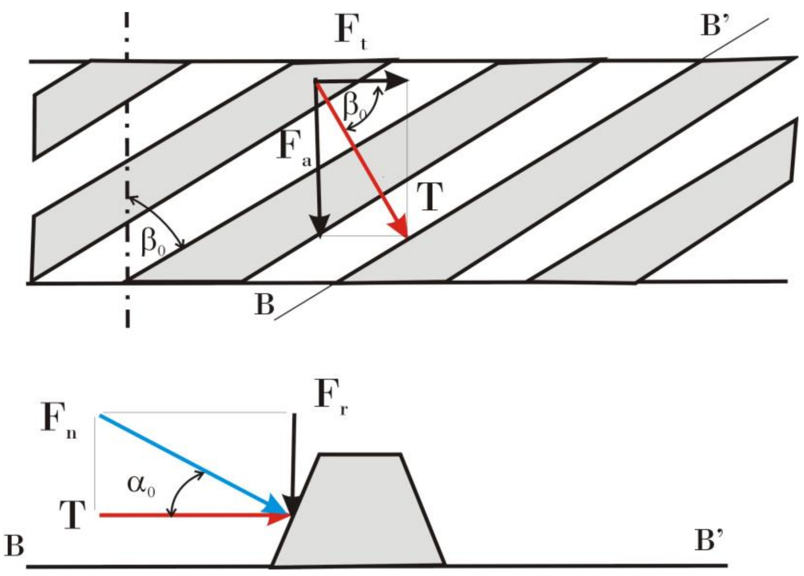


EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

- Dans le plan normal à la denture, la force normale à la denture F_n donne lieu à une composante radiale F_r et une composante dans le plan tangent T. On a donc

$$\begin{aligned} T &= F_n \cos\alpha \\ F_r &= F_n \sin\alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad F_r = T \tan\alpha$$





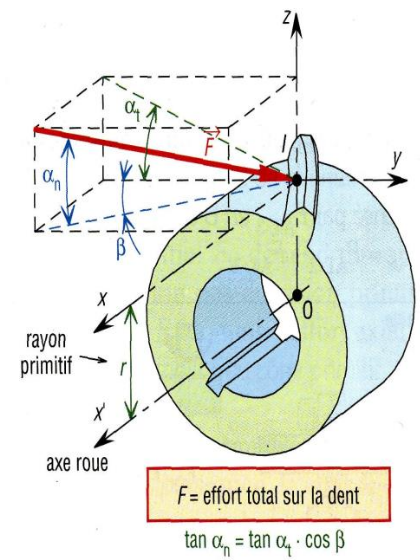
EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

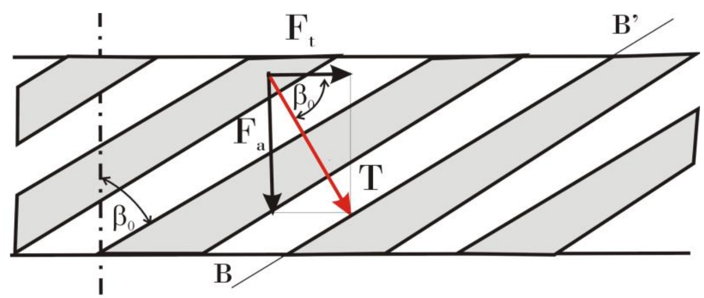
- Mais du fait de l'angle d'hélice β, la force tangentielle T se décompose elle-même en une composante active Q et une force axiale F_a. On a donc

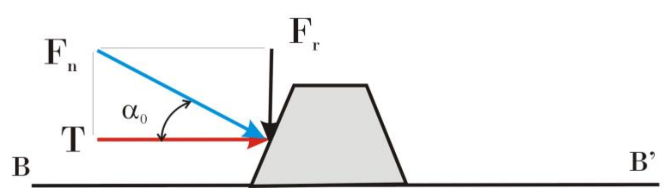
$$\begin{aligned} Q &= T\,\cos\beta \\ F_a &= T\,\sin\beta \end{aligned}$$

- L'effort productif Q est quant à lui donné par la puissance à transmettre

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega\,\frac{d_0}{2}}$$







EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

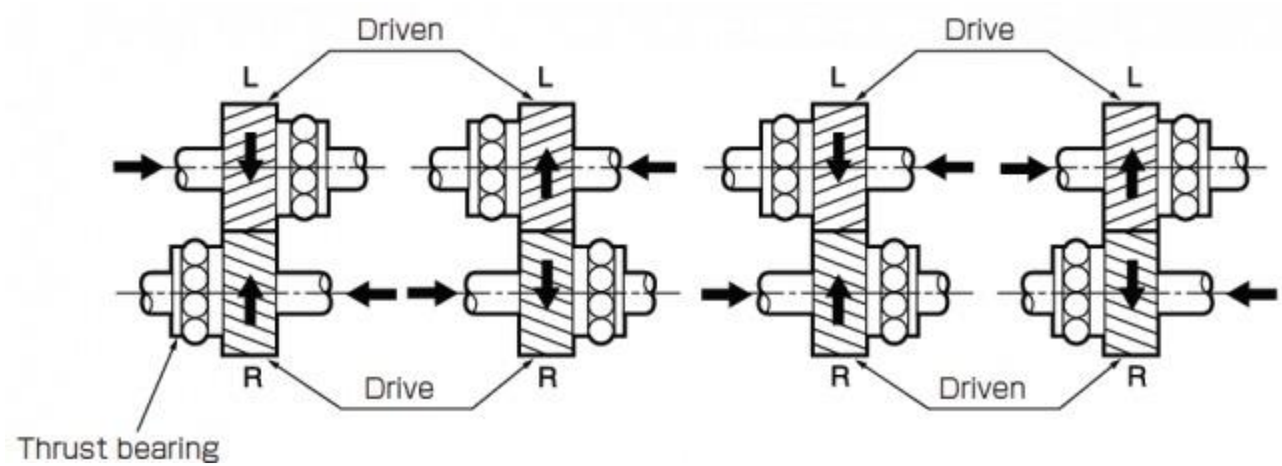
- Il vient donc

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega \frac{d_0}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad F_a = Q \tan\beta$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{Q}{\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \quad F_r = T \tan\alpha = Q \frac{\tan\alpha}{\cos\beta}$$

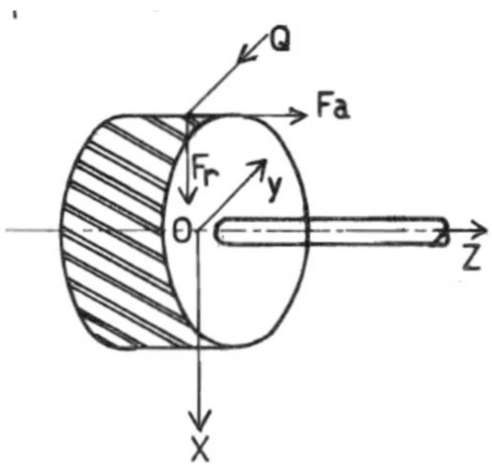


Sens des poussées

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

- En définitive, tout se déduit de la puissance à transmettre et de l'effort productif Q:

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega \frac{d_0}{2}}$$
$$F_a = Q \tan\beta$$
$$F_r = Q \frac{\tan\alpha}{\cos\beta}$$



- Les efforts de denture soumettent l'arbre à :
  - un moment de torsion M_t

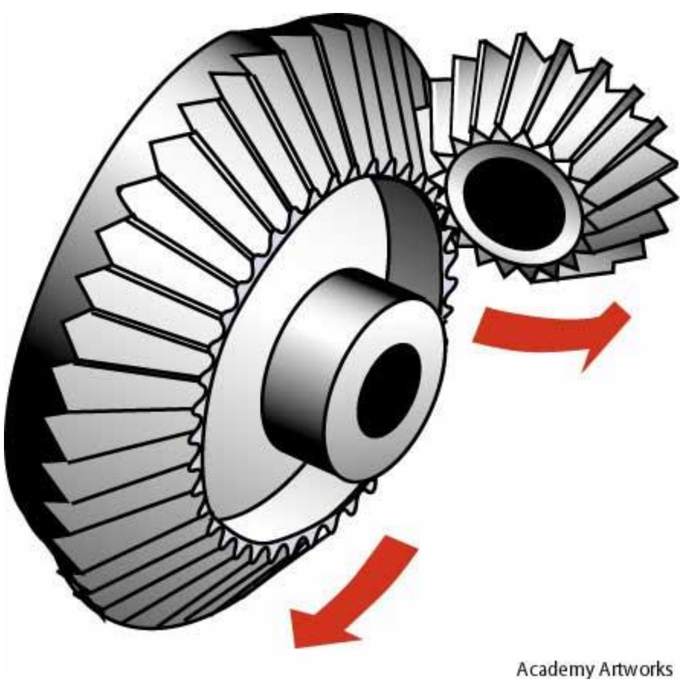
$$M_t = Q \frac{d_0}{2}$$

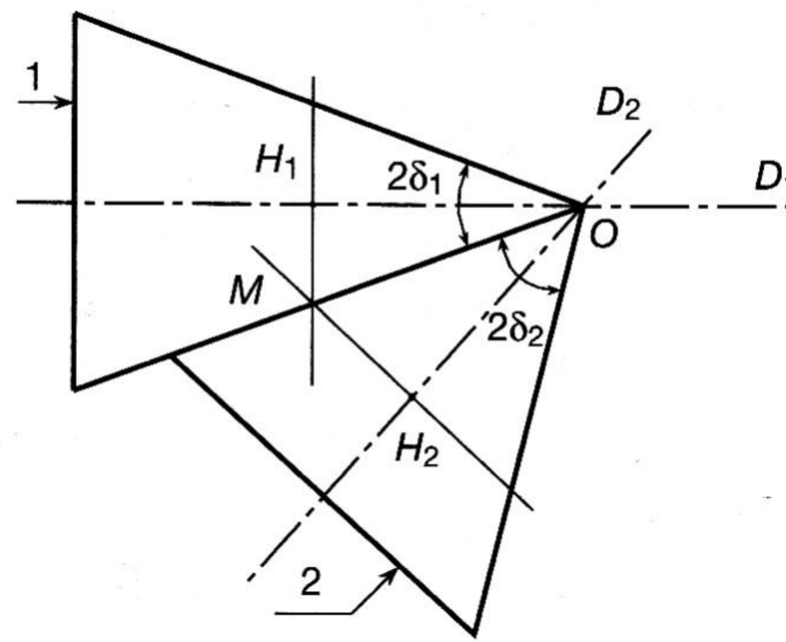
  - une flexion dans le plan xOz, due aux efforts F_r et F_a
  - une flexion dans le plan yOz, due à l'effort Q
  - un effort axial F_a qui devra être repris par une butée.

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES CONIQUES DROITS

ENGRENAGES CONIQUES A DENTURE DROITE

- Nous nous limiterons au cas courant de l'engrenage entre deux arbres perpendiculaires.





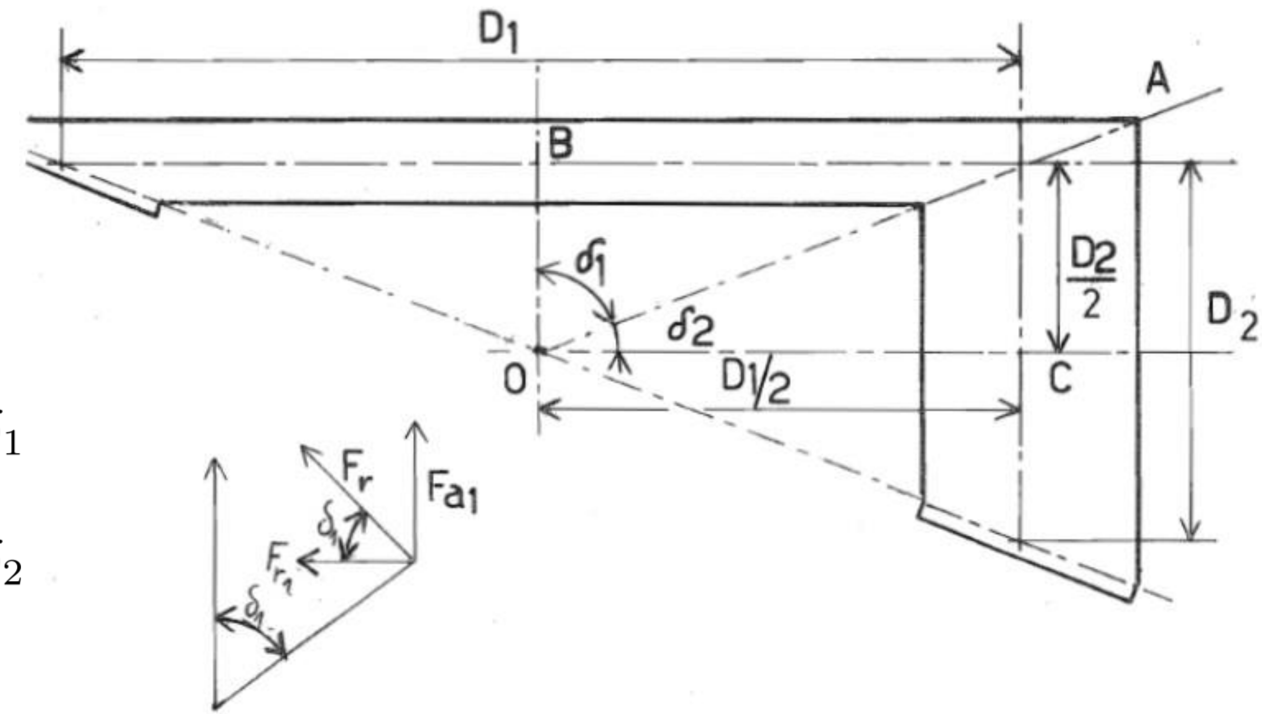
ENGRENAGES CONIQUES A DENTURE DROITE

- Les deux demi-angles au sommet des cônes, δ_1 et δ_2 et les diamètres des engrenages sont liées

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{D_1}{2} = \frac{D_2}{2} \tan \delta_1$$

$$\frac{D_2}{2} = \frac{D_1}{2} \tan \delta_2$$



ENGRENAGES CONIQUES A DENTURE DROITE

- Ceci implique en notant par Z le nombre de dents sur les roues

$$\tan\delta_1 = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$
$$\tan\delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

- La force active

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega_1 \frac{D_1}{2}} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_2 \frac{D_2}{2}}$$

- La composante normale à la ligne OA dans le plan BAC vaut

$$F_n = Q \tan\alpha$$

  – Où α (=20°) est l'angle de pression dans le plan normal à la denture

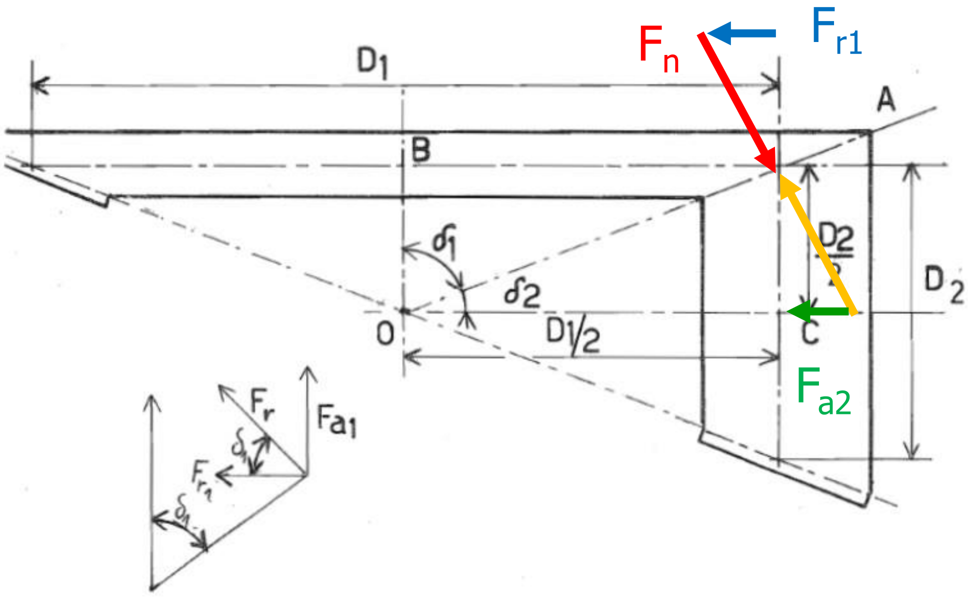
ENGRENAGES CONIQUES A DENTURE DROITE

- La force normale à la denture

$$F_n = Q \tan\alpha$$

- se décompose en une force axiale et une force radiale pour chacun des axes des engrenages

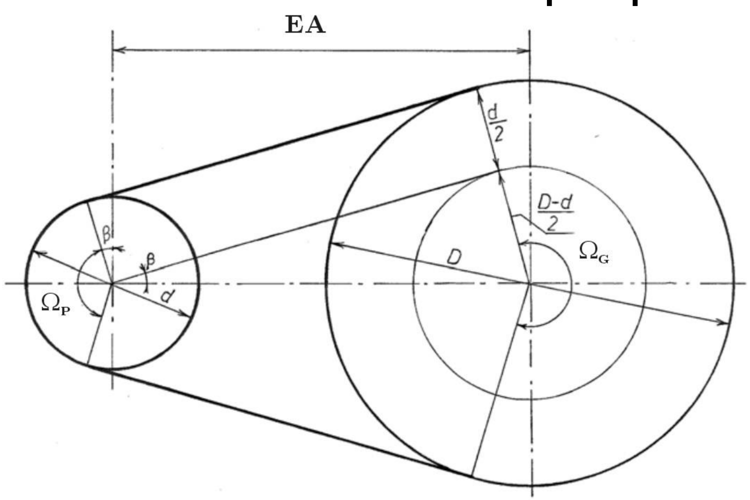
$$F_{r1} = F_{a2} = F_n \cos\delta_1 = F_n \sin\delta_2$$
$$F_{r2} = F_{a1} = F_n \sin\delta_1 = F_n \cos\delta_2$$



EFFORTS SECONDAIRES DANS LES COURROIES

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES COURROIES

- Géométrie d'une transmission classique par courroie sans tendeur



- L'arc sur lequel la courroie s'enroule sur la jante d'une poulie s'appelle l'arc embrassé.
- Si la tension de la courroie soit suffisante, la courroie suit la tangente commune aux deux poulies. Ces parties de la courroie qui sont en l'air sont appelés les brins.
- La distance EA entre les axes des deux poulies est appelée l'entraxe.

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES COURROIES

- LONGUEUR DE LA COURROIE
- Soit

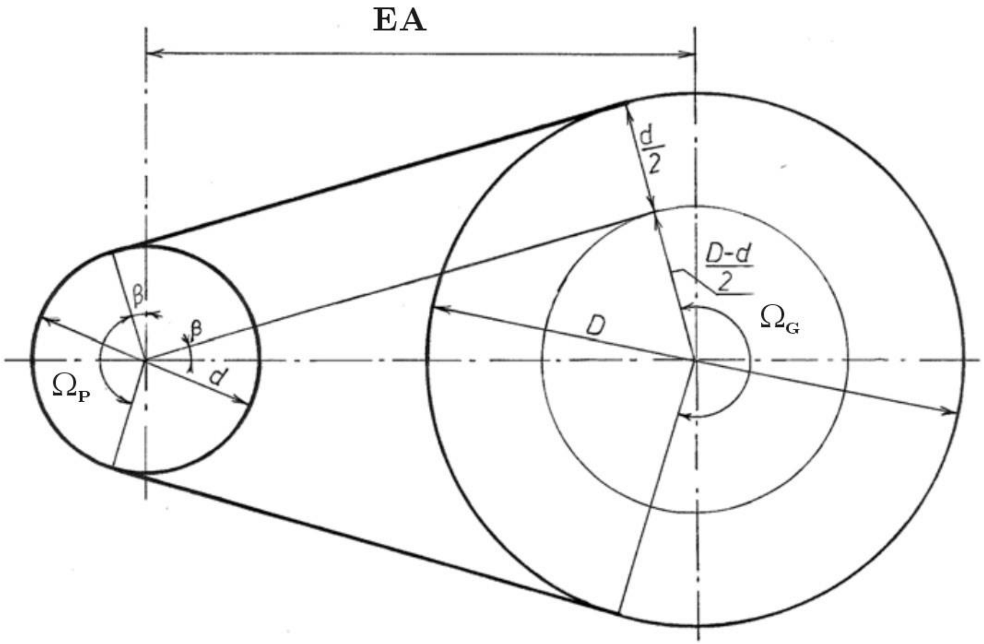
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega_P}{2}$$

- La Figure montre que

$$\sin\beta = \frac{D-d}{2\,EA}$$

- Angles embrassés

$$\begin{aligned} \Omega_P &= \pi - 2\beta \\ \Omega_G &= \pi + 2\beta \end{aligned}$$

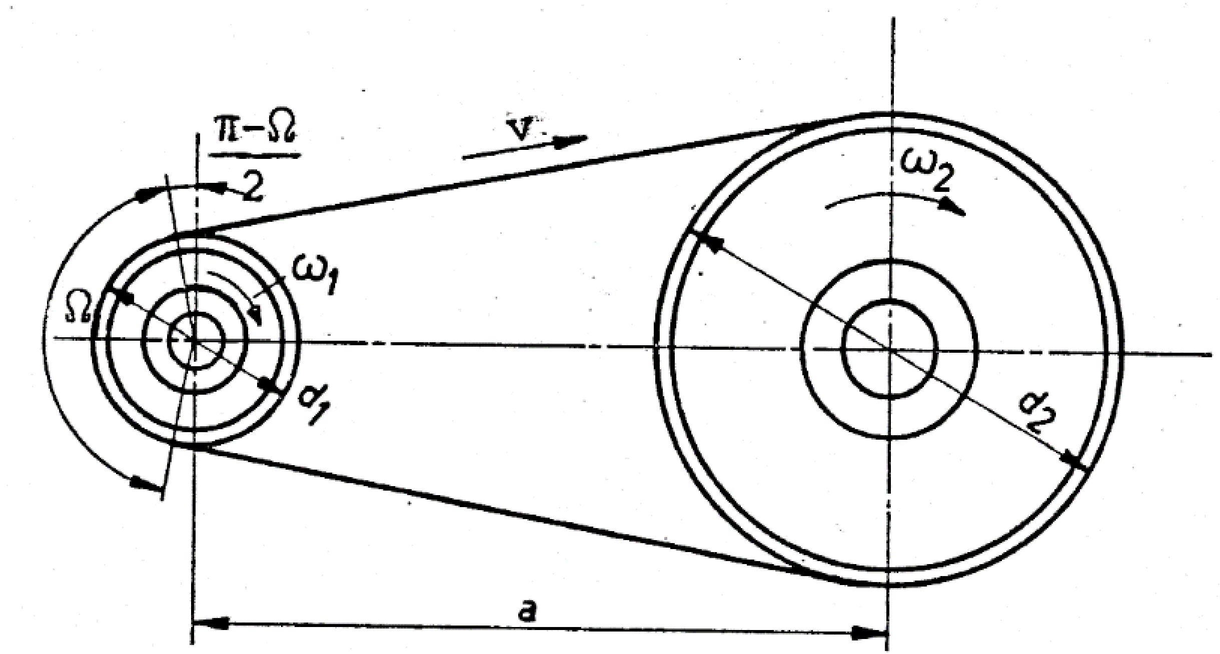


- La longueur de la courroie est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{d}{2}\,\Omega_P + \frac{D}{2}\,\Omega_G + 2\,EA\,\cos\beta$$

RAPPORT DE REDUCTION IDEAL

- Le moteur développe sur la poulie 1 une puissance P_1, un couple C_1 et une vitesse de rotation $\Omega_1 = N_1\ 2\pi/60$.
- L'organe récepteur absorbe une puissance P_2, un couple C_2 et tourne à une vitesse $\Omega_2 = N_2\ 2\pi/60$.



RAPPORT DE REDUCTION IDEAL

- Pour une transmission idéale sans perte

$$\mathcal{P}_1 = C_1\,\omega_1 = \mathcal{P}_2 = C_2\,\omega_2$$

- On en tire le rapport de réduction idéal i

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{C_2}{C_1} = i$$

- La conservation de la vitesse tangentielle de la courroie v donne

$$v = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

- On en tire l'expression du rapport de réduction idéal

$$\Longrightarrow \quad i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

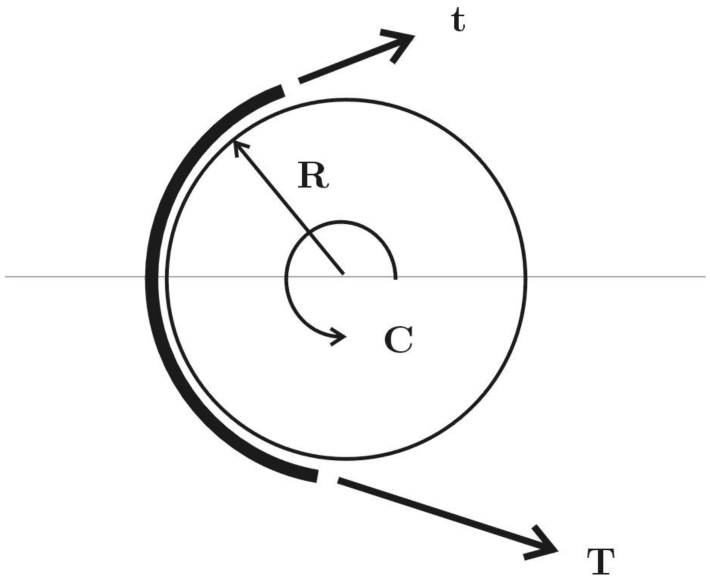
EFFORTS SECONDAIRES DANS LES COURROIES

- Une transmission par courroie ne peut pas être intrinsèquement homocinétique pour trois raisons:

  – L'élasticité relative de la courroie autorise celle-ci à s'allonger selon l'intensité des tensions de fonctionnement;
  – Le contact de la courroie sur la poulie sans obstacle n'exclut pas le glissement d'ensemble, toujours possible lors d'une surcharge;
  – La courroie *rampe* le long de son contact curviligne avec chacune des deux poulies. Ce phénomène qui se décrit au moment du traitement de l'équilibre de la courroie le long des jantes des poulies conduit à une glissement systémique pouvant faire varier de 2% le rapport de transmission.

EFFORTS PERIPHERIQUES

- Soit C_2 le couple résistant délivré par la poulie motrice 2. Pendant la transmission, le brin supérieur est tendu (tension T) tandis que le brin inférieur est mou (tension t)



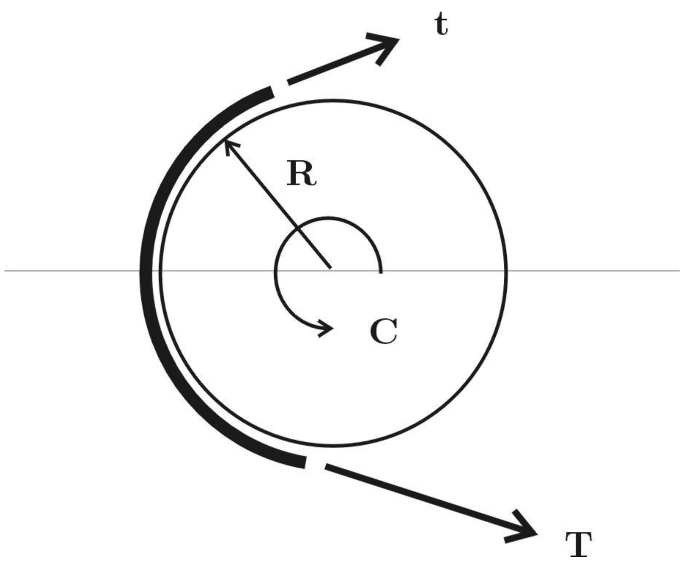
- En régime établi, l'équation d'équilibre des moments autour de l'axe de la poulie 2

$$C_2 = T\,R_2 - t\,R_2$$

- Soit

$$\boxed{T - t = \frac{C_2}{d_2/2}}$$

EFFORTS PERIPHERIQUES



- De même sur la poulie motrice 1

$$\boxed{T - t = \frac{C_1}{d_1/2}}$$

- Effort périphérique équivalent

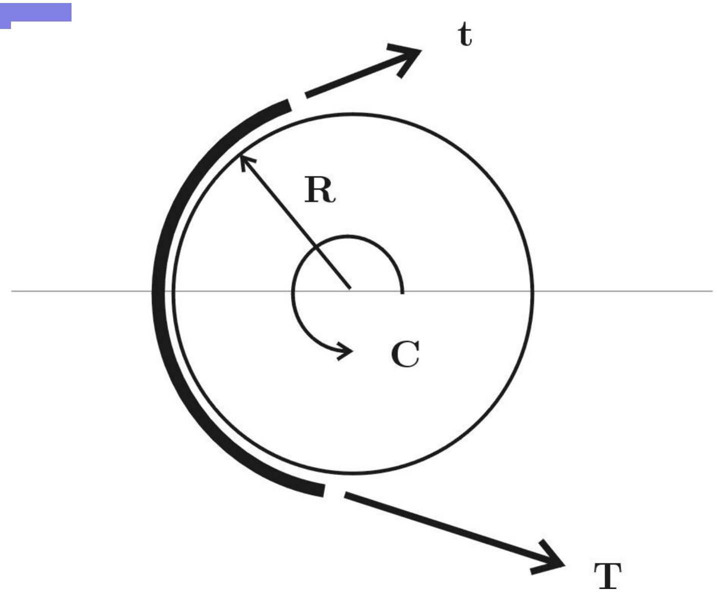
$$\boxed{Q = T - t}$$

- Les couples C_1 et C_2 s'obtiennent à partir de la puissance *P* à transmettre:

$$C_1 = \frac{\mathcal{P}}{\omega_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\mathcal{P}}{\omega_2}$$

$$T - t = \frac{C_1}{d_1/2} = \frac{\mathcal{P}_1}{\omega_1\, d_1/2} = \frac{C_2}{d_2/2} = \frac{\mathcal{P}_2}{\omega_2\, d_2/2}$$

EFFORTS PERIPHERIQUES



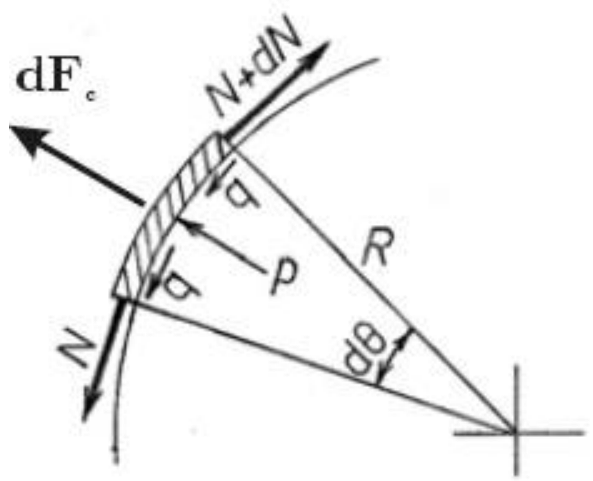
- Pour déterminer T et t, les tensions respectivement dans les brins tendus et mous, on dispose d'un système de deux équations:
  - la première est issue de l'expression de la puissance transmise
  - la seconde résulte l'équilibre dynamique d'un élément de courroie. ➔ équation d'Euler.

EFFORTS PERIPHERIQUES

- L'équation d'Euler est issue de l'équilibre dynamique d'un élément de courroie. L'équilibre d'un élément de courroie de longueur R dθ est représenté à la Figure suivante. La vitesse linéaire de la courroie le long de la jante est v.

- L'équilibre radial s'écrit:

$$dF_c = N \sin\frac{d\theta}{2} + (N + dN) \sin\frac{d\theta}{2} - p\, R\, d\theta$$



- Tandis que l'équilibre circonférentiel donne:

$$(N + dN) \cos\frac{d\theta}{2} - N \cos\frac{d\theta}{2} = q\, R\, d\theta$$

EFFORTS PERIPHERIQUES

- Soit m' la masse linéique de la courroie, les forces centrifuges s'écrivent:

$$F_c = m' \, R \, d\theta \, \frac{v^2}{R}$$

- On peut également négliger les termes d'ordre supérieur

$$dN \; d\theta \ll 1$$

- et linéariser les fonctions sinus et cosinus.

$$\cos d\theta \simeq 1 \quad \text{et} \qquad \sin d\theta \simeq d\theta$$

- Il vient

$$m' \, R \, d\theta \, \frac{v^2}{R} = 2 \, N \, \frac{d\theta}{2} - p \, R \, d\theta$$

$$dN = q \, R \, d\theta$$

EFFORTS PERIPHERIQUES

- Après simplification, on trouve

$$N - m' v^2 = p R$$

$$\frac{dN}{d\theta} = q R$$

- Il faut maintenant écrire la condition de liaison entre la pression de contact p entre la courroie et la jante et la force de frottement q qui s'y développe. On note par μ le coefficient de frottement entre la poulie et la courroie.

$$q \leq \mu p$$

EFFORTS PERIPHERIQUES

- En utilisant les deux équations d'équilibre précédentes, on peut écrire

$$\frac{dN}{d\theta} \leq \mu\,(N - m'v^2)$$

- Dénotons par $\bar{N}$, la traction amputée de la composante centrifuge:

$$\bar{N} = N - m'v^2$$

- Il vient

$$\frac{d\bar{N}}{d\theta} \leq \mu\,\bar{N}$$

EFFORTS PERIPHERIQUES

- En prenant en compte les conditions limites et en intégrant, il vient

$$\ln \bar{N} \;\leq\; \ln \bar{t} \,+\, \mu\,\theta$$

- Et à la fin de l'arc d'embrassement

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} \;\leq\; \exp(\mu \Omega)$$

- Si la transmission travaille à la limite du glissement, l'inégalité se transforme en égalité et l'équilibre radial et tangentiel du morceau de courroie permet d'écrire l'équation d'Euler qui lie les tensions dans les brins tendus et mous.

$$\boxed{\frac{T \,-\, m' v^2}{t \,-\, m' v^2} \;=\; \exp(\mu\,\Omega)}$$

EFFORTS PERIPHERIQUES

- La première composante, appelée tension centrifuge, est liée aux forces centrifuges et à la vitesse de défilement v.

$$T_c = m'v^2$$

  - Elle est indépendante des rayons des poulies.
  - Cette tension nait tout au long de la courroie et ne produit aucun effort de transmission.

- Les tensions productives moyennes:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= T - m'v^2 \\ \bar{t} &= t - m'v^2 \end{aligned}$$

- Sont celles qui produisent l'effort Q lié à la transmission de couple et de puissance.

$$Q = \bar{T} - \bar{t}$$

EFFORTS PERIPHERIQUES

- Soit T_0 la moyenne des tensions productive des brins tendus et mous.

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{2}(\bar{T} + \bar{t})$$

- Calculons le ratio entre l'effort périphérique Q à la valeur moyenne des tensions productive.

$$\frac{Q}{2\,\bar{T}_0} = \frac{\bar{T} - \bar{t}}{\bar{T} + \bar{t}} = \tanh\frac{\mu\,\Omega}{2}$$

- Soit

$$Q = 2\,\bar{T}_0\,\tanh\frac{\mu\,\Omega}{2}$$

- On en conclut que pour qu'il y ait un effort non nul et donc un couple transmis, il est impératif d'avoir une tension initiale supérieure à zéro.

TENSION DE POSE (TENSION INITIALE)

- L'existence des tensions de fonctionnement T et t est due à celle d'une tension initiale T_i appliquée à l'arrêt. Cette tension de pose donne naissance aux actions de contact initiales entre la poulie et la courroie nécessaire à l'entraînement sans glissement.

$$T_i = \frac{1}{2}(T + t)$$

- Une approche élémentaire consiste à appliquer une tension de pose suite à la mise en place d'un dispositif de mise sous tension initiale qui procède généralement de l'imposition d'une allongement initial de la courroie, on a

$$T_i = \frac{T + t}{2} = \frac{(\bar{T} + m'v^2) + (\bar{t} + m'v^2)}{2} = \bar{T}_0 + m'v^2$$

TENSION DE POSE (TENSION INITIALE)

- Ceci signifie que la tension de pose étant fixée, la tension productive moyenne va diminuer d'autant plus vite que la vitesse est grande.
- L'effort tangentiel va donc aussi diminuer en conséquence:

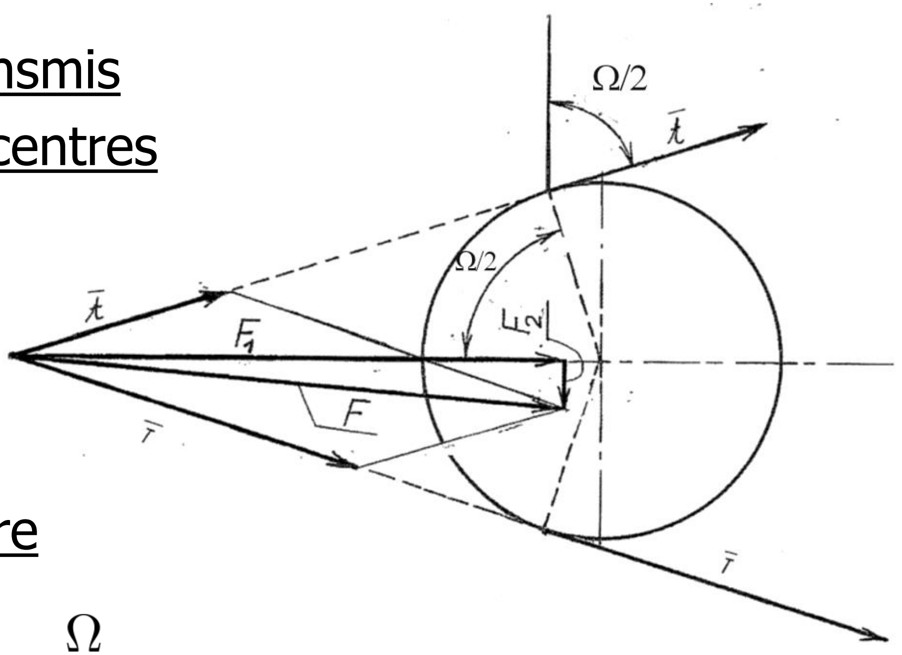
$$Q = (T_i - m'v^2) \tanh \frac{\mu \Omega}{2}$$

EFFORTS TRANSMIS AUX ARBRES

- L'interaction entre la poulie et la courroie est déterminé par les efforts à l'arrêt.

- Dans le cas d'une poulie motrice,
  - La <u>composante de l'effort transmis à l'arbre le long de la ligne des centres</u>

$$F_1 = \bar{T}\,\sin\frac{\Omega}{2} + \bar{t}\,\sin\frac{\Omega}{2}$$
$$= 2\,\bar{T}_0\,\sin\frac{\Omega}{2}$$



  - La <u>composante perpendiculaire</u>

$$F_2 = \bar{T}\,\cos\frac{\Omega}{2} - \bar{t}\,\cos\frac{\Omega}{2} = Q\,\cos\frac{\Omega}{2}$$

EFFORTS TRANSMIS AUX ARBRES

- On remarque que comme la tension moyenne

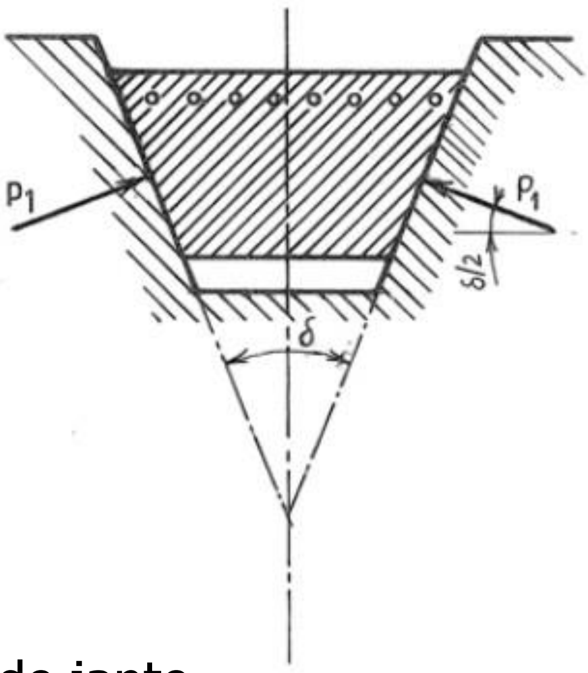
$$\bar{T}_0 = T_i - m'v^2$$

diminue avec la vitesse, il en est de même avec la force F_1.

- On notera aussi que cette force F_1 est en général nettement plus grande que l'effort actif Q.

CAS DES COURROIES TRAPEZOIDALES

- Le cas des courroies trapézoïdales peut se déduire assez facilement des formules développées pour les courroies plates.



- Désignons par dN la réaction normale de la poulie sur l'élément $Rd\theta$.
- dN est la résultante des réactions dN' normales aux parois de la gorge.

$$dN = 2\,dN' \sin\frac{\delta}{2}$$

- La force de frottement à la paroi

$$dF' = \mu\,dN'$$

- La force de frottement totale sur l'élément de jante

$$dF = 2\,dF' = 2\,\mu\,dN' = \mu\,\frac{dN}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

CAS DES COURROIES TRAPEZOIDALES

- Coefficient de friction apparent μ’:

$$dF = \mu_{\text{eff}}\, dN \qquad \mu_{\text{eff}} = \frac{\mu}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

- La formule d'EULER est donc applicable au cas des courroies à profil trapézoïdal, à condition d'introduire le coefficient de frottement apparent en lieu et place du coefficient de frottement réel matière à matière.

- En pratique l'angle de la gorge de la poulie δ est de l'ordre de 34°, ce qui donne:

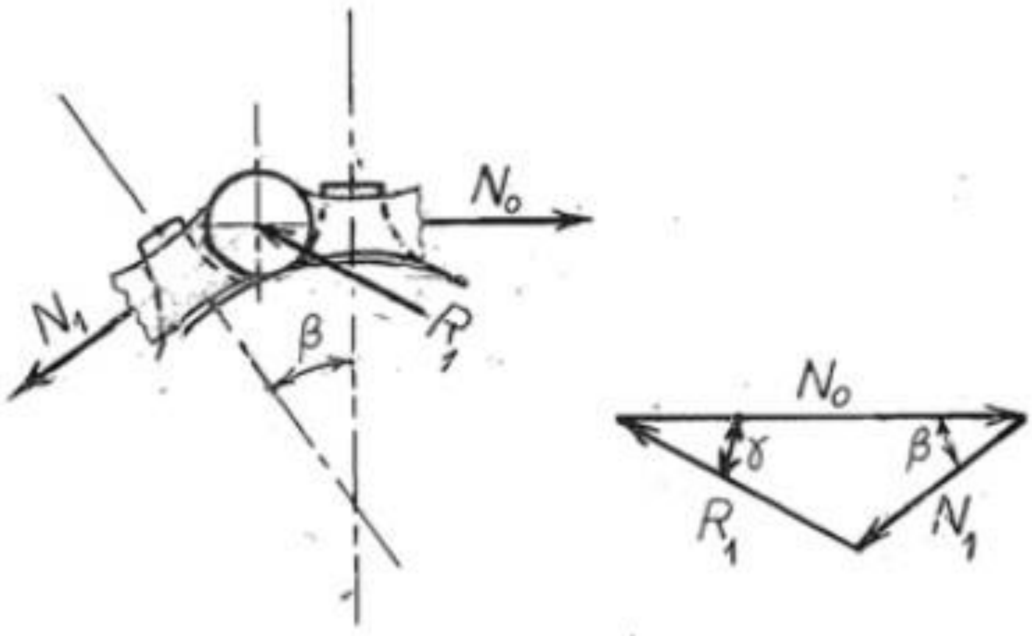
$$\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} = 3.420$$

- Ce terme conduit à des facteurs de l'ordre de 20, ce qui mène à des accroissements considérables des performances.

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES TRANSMISSIONS PAR CHAINE

TRANSMISSION PAR CHAINE

- Dans les transmissions par chaîne à rouleaux, les rouleaux transmettent l'effort à la roue dentée avec une certaine obliquité γ égale au demi-angle de la dent.

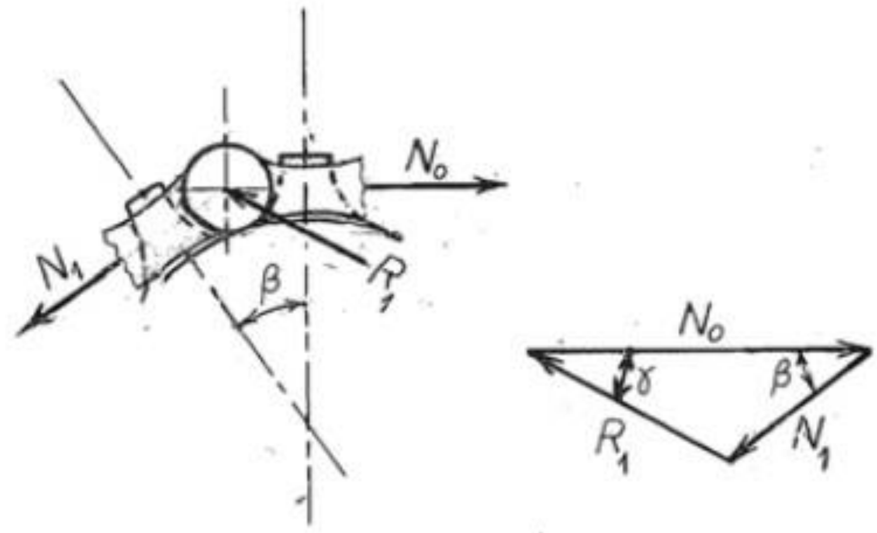


- Cette obliquité est de l'ordre de 15° à 19°

TRANSMISSION PAR CHAINE

- Si β est l'angle entre deux maillons, on a donc, les relations suivantes:

$$\begin{aligned} N_0 &= N_1 \cos\beta + R_1 \cos\gamma \\ N_1 \sin\beta &= R_1 \sin\gamma \end{aligned}$$



- La seconde équation donne

$$R_1 = N_1 \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

- En insérant dans la première relation

$$N_0 = N_1 \left(\cos\beta + \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}\right) = N_1 \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}$$

TRANSMISSION PAR CHAINE

- Comme la relation se répète de maillon en maillon, après n maillons, on a

$$N_n = N_0 \left(\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} \right)^n$$

- Calculons le nombre de maillons.
- Si Z est le nombre de dents sur la roue dentée, un maillon occupe le secteur angulaire

$$\beta = \frac{2\pi}{Z}$$

- Si Ω est l'arc embrassé par la chaîne sur la roue, le nombre de dents en prise est la valeur entière de

$$Z_P = \text{partie entiere de } \left(Z\frac{\Omega}{2\pi} \right) = \left\lfloor Z\frac{\Omega}{2\pi} \right\rfloor$$

TRANSMISSION PAR CHAINE

- L'effort au brin mou t est donc relié à l'effort du brin tendu $T=N_0$ par la relation:

$$t = T\left(\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\right)^{Z_P}$$

- Ainsi pour un angle d'obliquité γ = 15° et une nombre de dent Z=17, on trouve

$$\beta = \frac{360}{17} = 21.18^\circ$$

- Et

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin(36{\cdot}18^\circ)} = 0.4384$$

TRANSMISSION PAR CHAINE

- Pour un arc embrassé de 180°, le nombre de dents en prise est

$$Z_P = \left\lfloor 17\frac{180}{360} \right\rfloor = 8$$

- On obtient

$$\frac{t}{T} = (0.4384)^8 = 0.001364$$

- L'effort dans le brin mou est donc négligeable et on peut écrire sans grande erreur

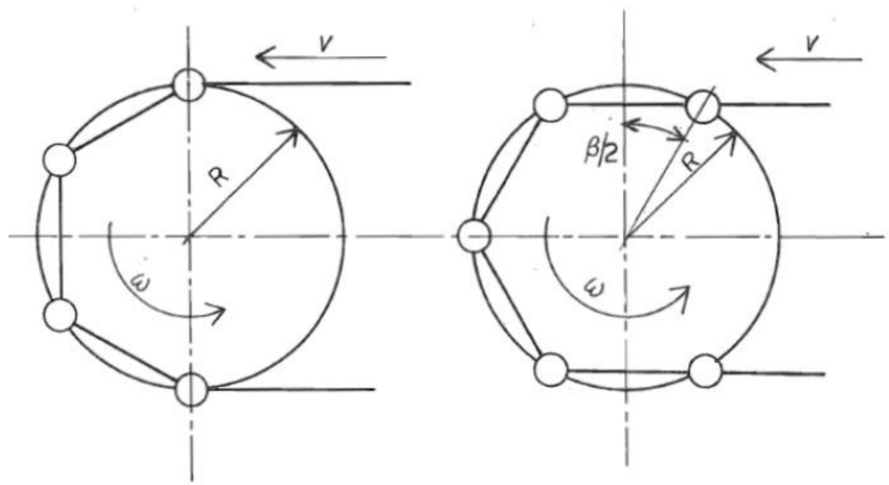
$$T - t \approx T = Q$$

- L'effort sur l'axe est dès lors approximativement égal à l'effort actif Q, dans la direction du brin tendu. C'est là l'avantage des chaînes sur les courroies : à effort actif égal, elles soumettent l'arbre à des efforts bien moindres.

TRANSMISSION PAR CHAINE

- Il existe cependant un inconvénient aux transmissions par chaînes. Il s'agit de l'effet de polygone.

$$v = \omega R$$



$$v = \omega R \cos \frac{\beta}{2}$$

- La vitesse du brin tendu n’est pas identique selon les configurations envisagées.
- La transmission du mouvement n'est donc pas parfaitement régulière, on dit homocinétique. Cet effet s'accentue pour les roues à faible nombre de dents (β grand).

TRANSMISSION PAR COURROIES CRANTEES

- Les courroies crantées s'apparentent aux chaînes pour la transmission de l'effort, avec γ=20° … 25°.
- Elles n'ont pas d'effet de polygone.