

## Éléments de résistance des matériaux (rappels)

Prof. Éric Béchet

## Éléments de RDM

- Introduction
- Équilibre et calcul des réactions
- Flexion et cisaillement dans les arbres / Diagramme de corps libre (DCL)
- Contraintes locales induites
- Déformations – Énergie de déformation (élasticité)
- Compléments sur le calcul des réactions (cas hyperstatique)
- Notion de contrainte équivalente

## Éléments de RDM

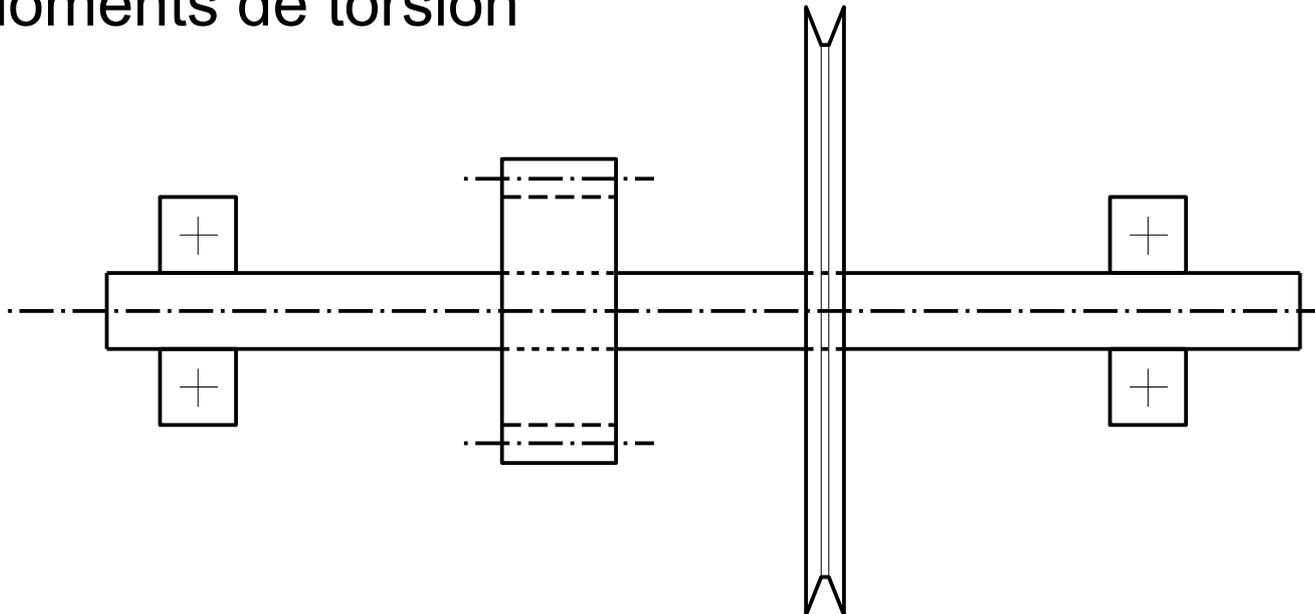
- Introduction

- Particularisation au cas des arbres :

Arbre = poutre en rotation

- supportée sur un ou plusieurs appuis

- soumise à des forces, des moments de flexion, des moments de torsion



## Éléments de RDM

- Équilibre et calcul des réactions
  - Cas isostatique : autant d'inconnues que de données
    - La solution ne dépend que de la géométrie du problème.
    - Cas idéal en pratique, mais pas toujours possible !
  - Cas hyperstatique : moins d'inconnues que d'équations
    - Nous traiterons cela en fin de chapitre : la solution dépend en effet à la fois de la géométrie et des propriétés mécaniques

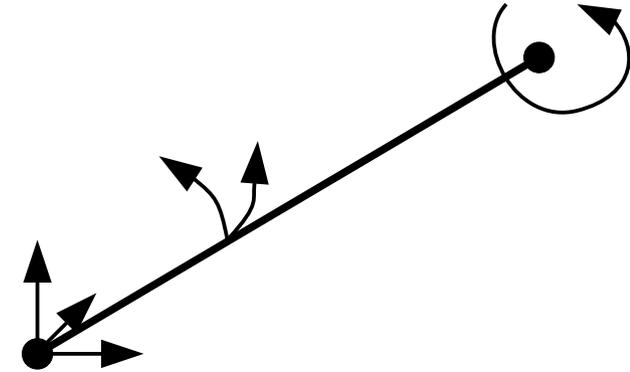
## Éléments de RDM

- Poutre libre

  - 3 degrés de liberté en translation

  - 3 degrés de liberté en rotation

  - En tout, 6 inconnues.



- Isostatique ...

  - On impose 6 liaisons cinématiques *indépendantes* parmi :

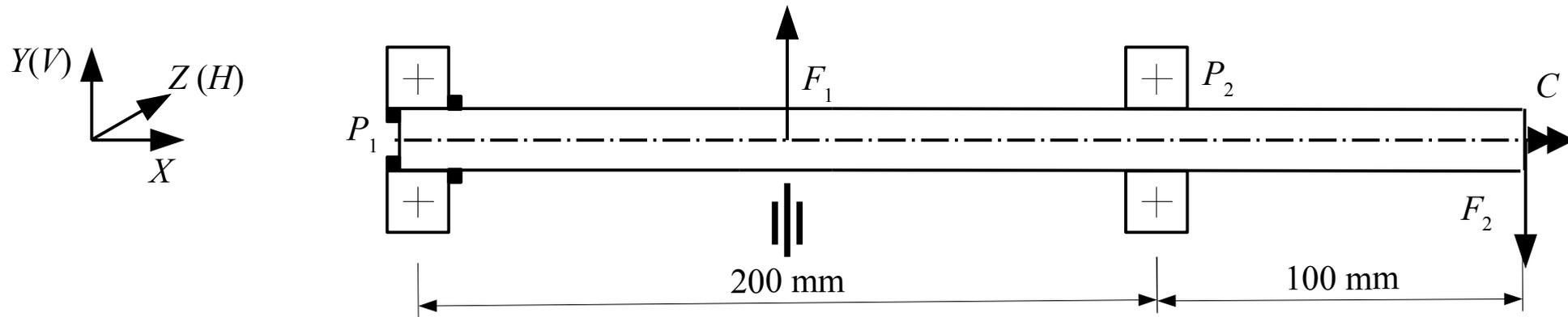
    - Blocage d'un point donné dans une direction donnée (X,Y, Z ou autre)
    - Blocage d'une rotation (autour de l'axe de la poutre, ou d'un axe perpendiculaire)

  - Toute liaison supplémentaire entraîne une équation supplémentaire

    - Système linéaire surcontraint, impossible à résoudre sans autre hypothèse...

## Éléments de RDM

- Exemple de calcul de réactions (isostatique)



- Bilan des liaisons

- Blocage en  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  au palier 1 ( $P_1$ )
- Blocage en  $Y$  et  $Z$  au palier 2 ( $P_2$ )
- Blocage en rotation au niveau de la force  $F_1$  (e.g. une poulie)

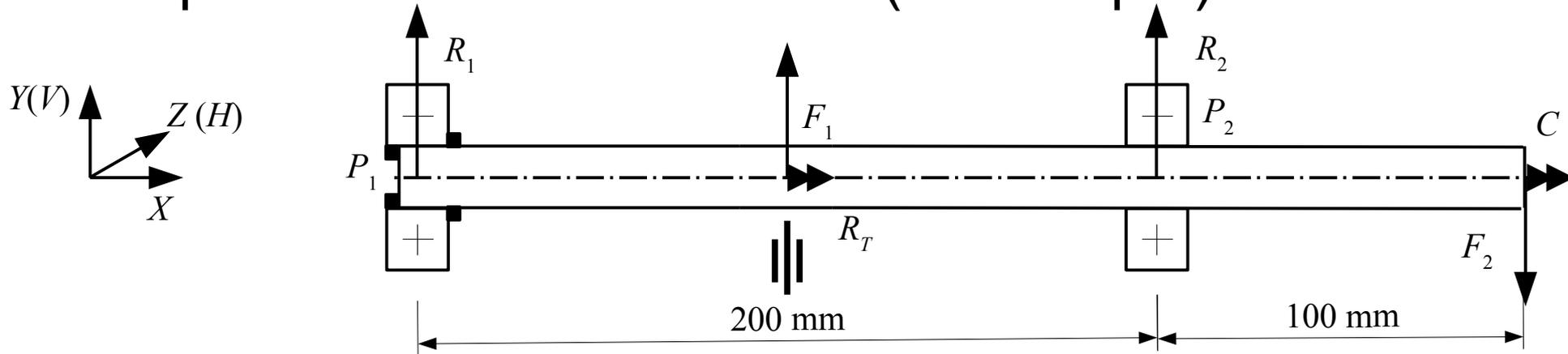
- À chaque liaison correspond une réaction que l'on doit évaluer

- Bilan des forces extérieures :

- Forces verticales (selon  $Y$ )  $F_1$  et  $F_2$ .
- Moment de torsion  $C$  en  $F_2$ , pas de moment de flexion.

## Éléments de RDM

- Exemple de calcul de réactions (isostatique)



- Bilan des réactions :

- Seules  $R_1$ ,  $R_2$  (selon  $Y$ ) et  $R_T$  sont non nulles
- Toutes les autres réactions (il y en a 3 :  $R_1$  selon  $X$  et  $Z$ ,  $R_2$  selon  $Z$ ) sont nulles.

- Système en équilibre

- Bilan des forces selon  $y$  :  $R_1 + R_2 + F_1 - F_2 = 0$
- Bilan des moments en  $z$  par rapport au palier  $R_1$  :  $F_1 + 2 R_2 - 3 F_2 = 0$
- Bilan des moments en  $x$  par rapport à l'origine (torsion) :

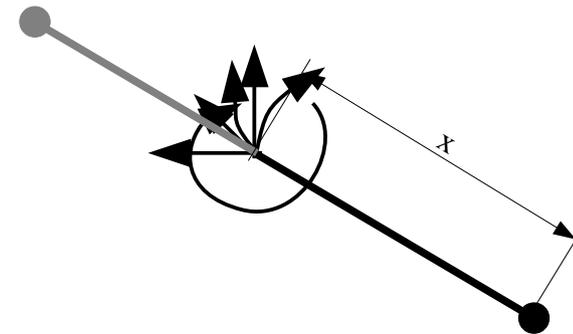
$$C + R_T = 0$$

## Éléments de RDM

- Flexion, torsion et cisaillement dans les arbres

Chaque force appliquée, chaque réaction (respectivement moment appliqué) a une influence le long de l'arbre. L'arbre (considéré comme élastique) reprend ces efforts. Il y a une correspondance entre les efforts extérieurs, et les efforts intérieurs dans le matériau. On va faire un **bilan** pour déterminer ceux ci.

- Imaginons une coupure à une position  $x$ , et calculons quels sont les efforts à appliquer au niveau de cette coupure afin de conserver l'équilibre...



## Éléments de RDM

- Diagramme du corps libre (DCL)
  - Il y a 6 efforts distincts à rajouter au niveau de la coupure pour retrouver l'équilibre de la partie droite:

3 forces

- Effort normal selon  $x$  noté  $N$  (traction le long de l'arbre)
- Effort tranchant vertical selon  $y$  noté  $T_y$
- Effort tranchant horizontal selon  $z$  noté  $T_z$

... et 3 moments :

- Moment fléchissant selon  $y$  noté  $Mf_y$  (tend à courber verticalement)
- Moment fléchissant selon  $z$  noté  $Mf_z$  (tend à courber horizontalement)
- Moment de torsion selon  $x$  noté  $Mt$  (torsion)



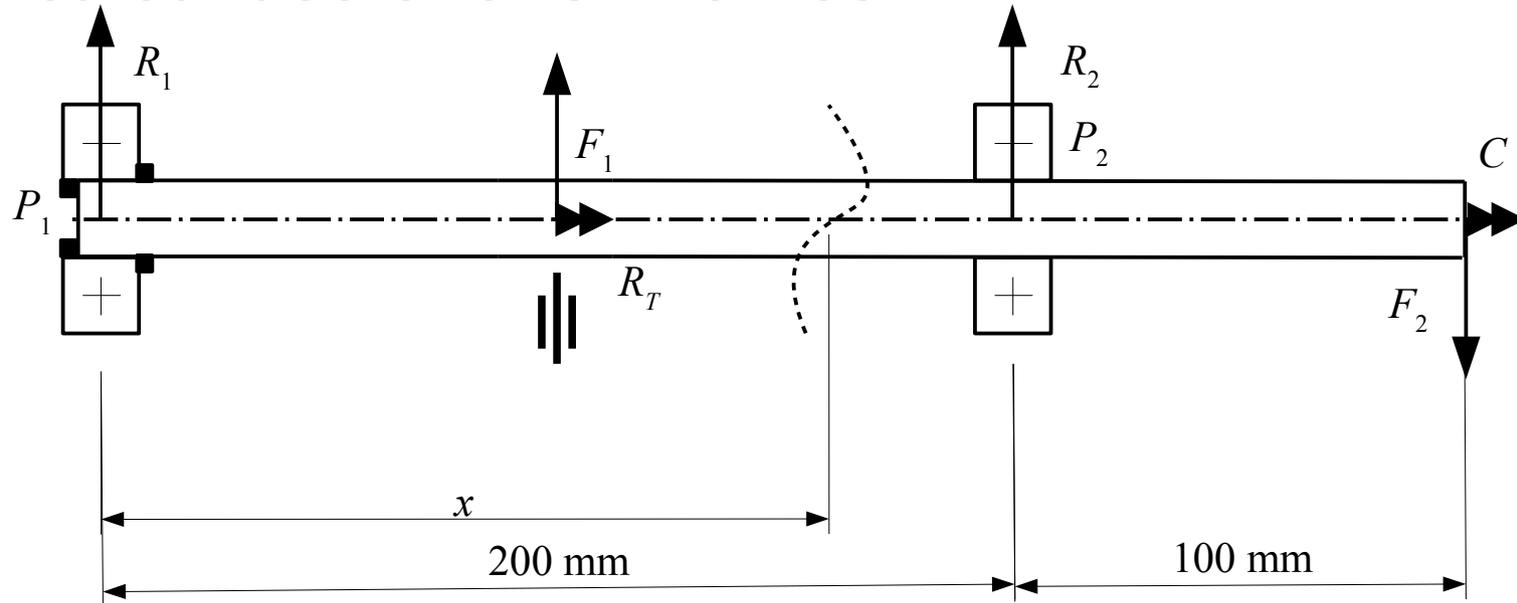
## Éléments de RDM

- Diagramme du corps libre (DCL)
  - Comment calculer ces 6 efforts ?
    - Faire le bilan des forces/moments situées à gauche (par convention)
    - Rétablir l'équilibre, en tenant compte des efforts « rajoutés » au niveau de la coupure.
    - Faire ce calcul pour n'importe quelle position  $x$  de la coupure.
  - L'objectif est d'obtenir  $N(x)$ ,  $T_y(x)$ ,  $T_z(x)$ ,  $Mf_z(x)$ ,  $Mf_y(x)$  et  $Mt(x)$ .
  - Exemple dans la suite.



## Éléments de RDM

- Exemple de calcul des efforts internes



- Prenons l'exemple de  $N(x)$ . L'ensemble des forces situées à gauche de la coupure contribue (il n'y en a pas dans ce cas !)

$$\int_0^x f_n(X) dX + \sum_{pos^i < x} N_y^i = N(x) \longrightarrow N(x) = 0 \quad 0 \leq x < 300$$

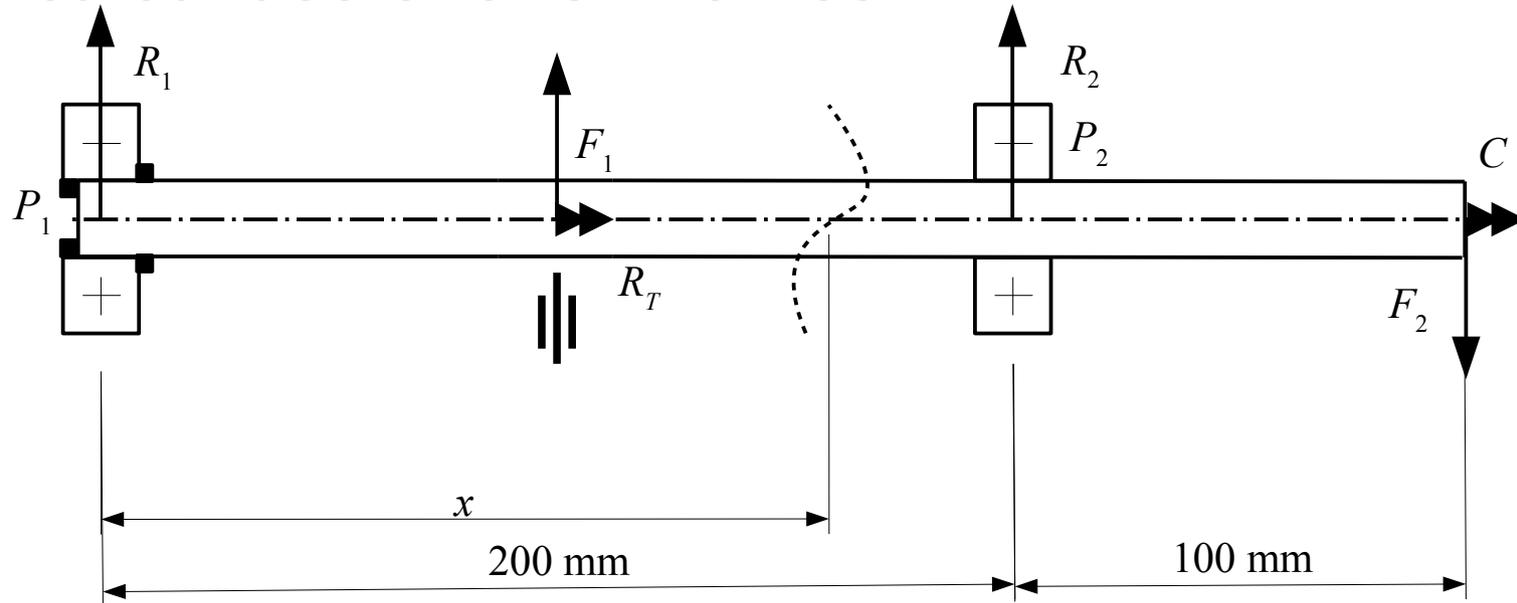
## Éléments de RDM

- Diagramme des efforts normaux



## Éléments de RDM

- Exemple de calcul des efforts internes



- Prenons l'exemple de  $T_y(x)$ . L'ensemble des forces situées à gauche de la coupure contribue.

$$\int_0^x f(X) dX + \sum_{pos^i < x} F_y^i = T_y(x) \rightarrow \begin{cases} T_y(x) = R_1 & 0 \leq x < 100 \\ T_y(x) = R_1 + F_1 & 100 \leq x < 200 \\ T_y(x) = R_1 + F_1 + R_2 & 200 \leq x < 300 \end{cases}$$

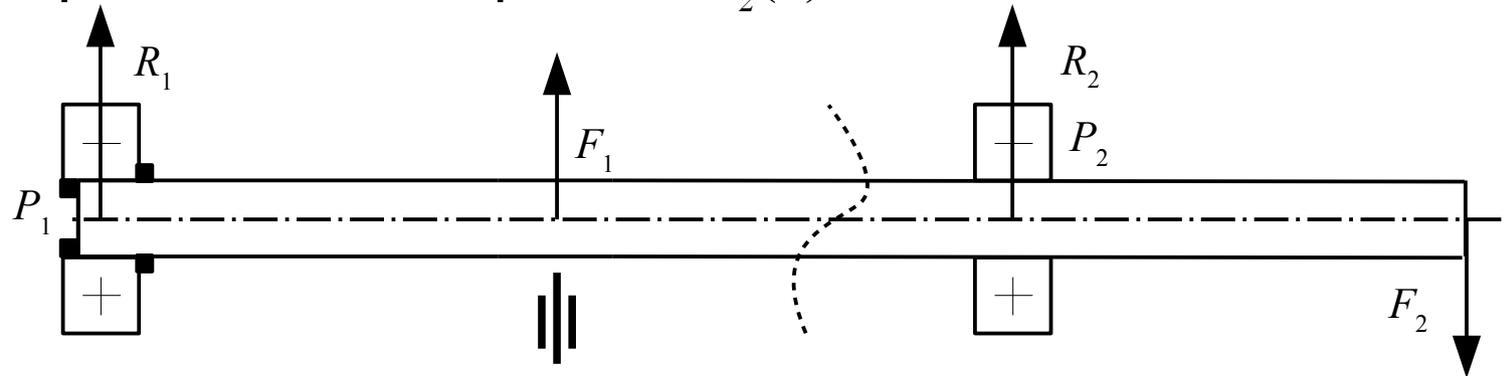
## Éléments de RDM

- Diagramme des efforts tranchants (ici  $F_1 = F_2 > 0$ ,  $R_1 < 0$ ,  $R_2 > 0$ )



## Éléments de RDM

- Maintenant, prenons l'exemple de  $M_z(x)$ .



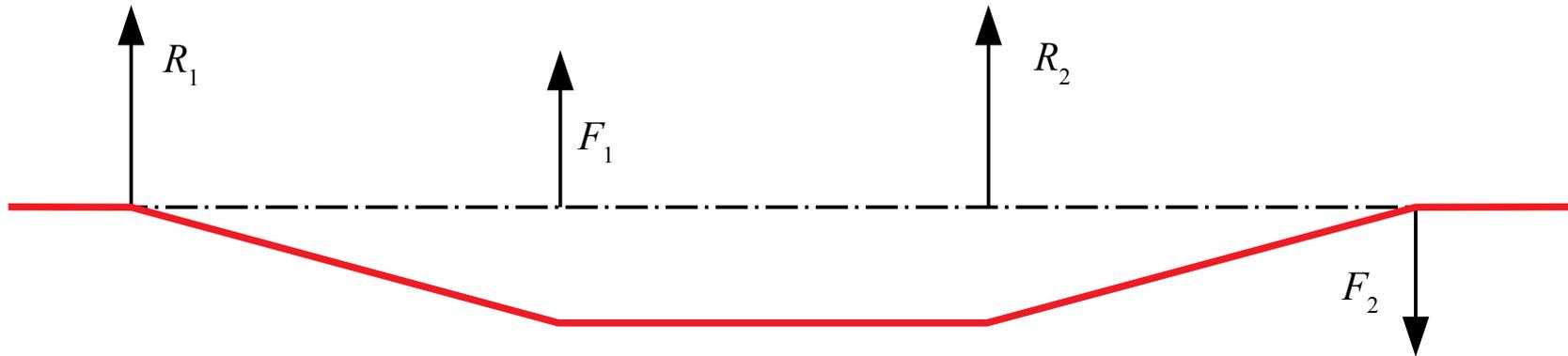
- L'ensemble des moments générés par les forces situées à gauche de la coupure contribuent ... ainsi que les moments ponctuels (c'est + rare)

$$\int_{X < x} (x - X) f(X) dX + \sum_{pos^i < x} F_y^i \cdot (x - pos^i) + Mf_z^i = Mf_z(x)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Mf_z(x) &= R_1 x & 0 \leq x < 100 \\ Mf_z(x) &= R_1 x + F_1(x - 100) & 100 \leq x < 200 \\ Mf_z(x) &= R_1 x + F_1(x - 100) + R_2(x - 200) & 200 \leq x < 300 \end{aligned}$$

## Éléments de RDM

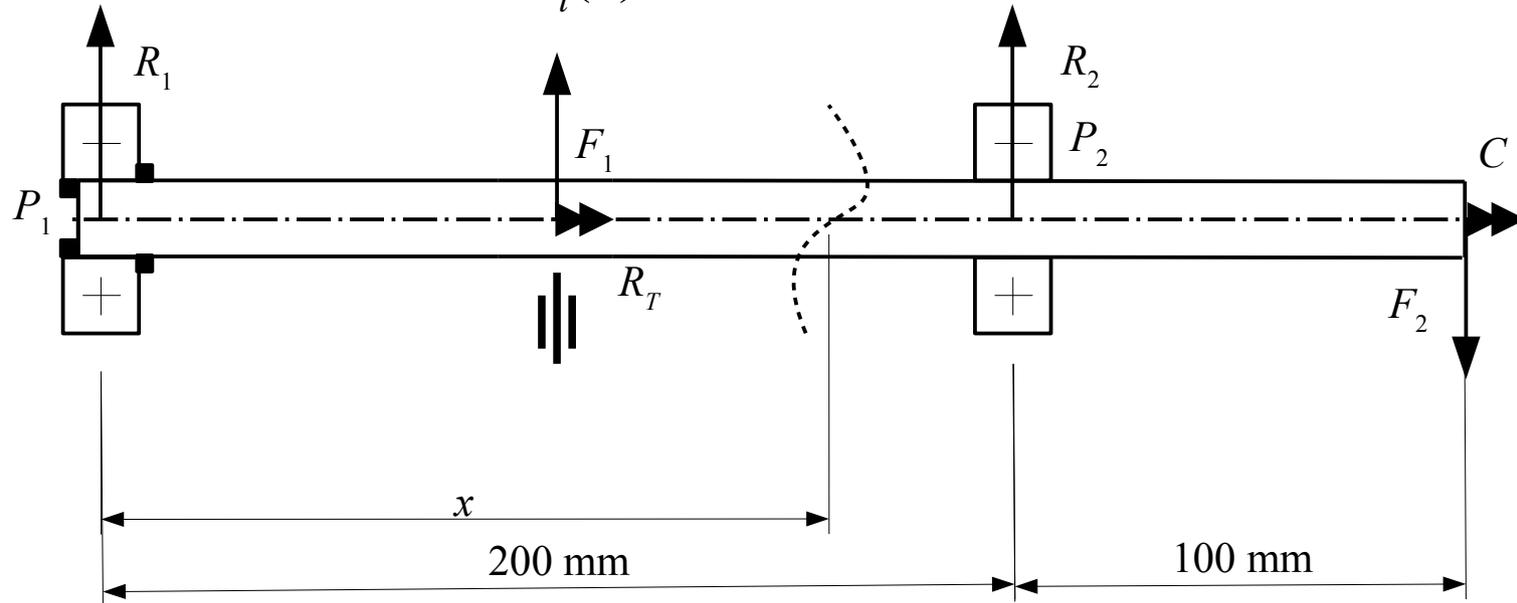
- Diagramme des moments fléchissants  $Mf_y(x)$



- En fait, si il n'y a pas de moments ponctuels, c'est l'intégrale de  $T_y(x)$ .

## Éléments de RDM

- Enfin, le moment de torsion  $M_t(x)$ .

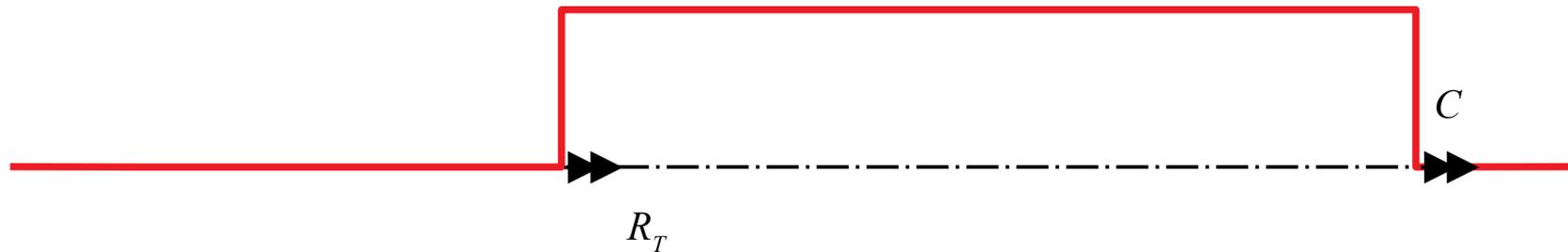


- L'ensemble des moments de torsion situées à gauche de la coupure contribue.

$$\int_{X < x} m(X) dX + \sum_{pos^i < x} M_x^i = M_t(x) \longrightarrow \begin{cases} M_t(x) = 0 & 0 \leq x < 100 \\ M_t(x) = R_T & 100 \leq x < 300 \end{cases}$$

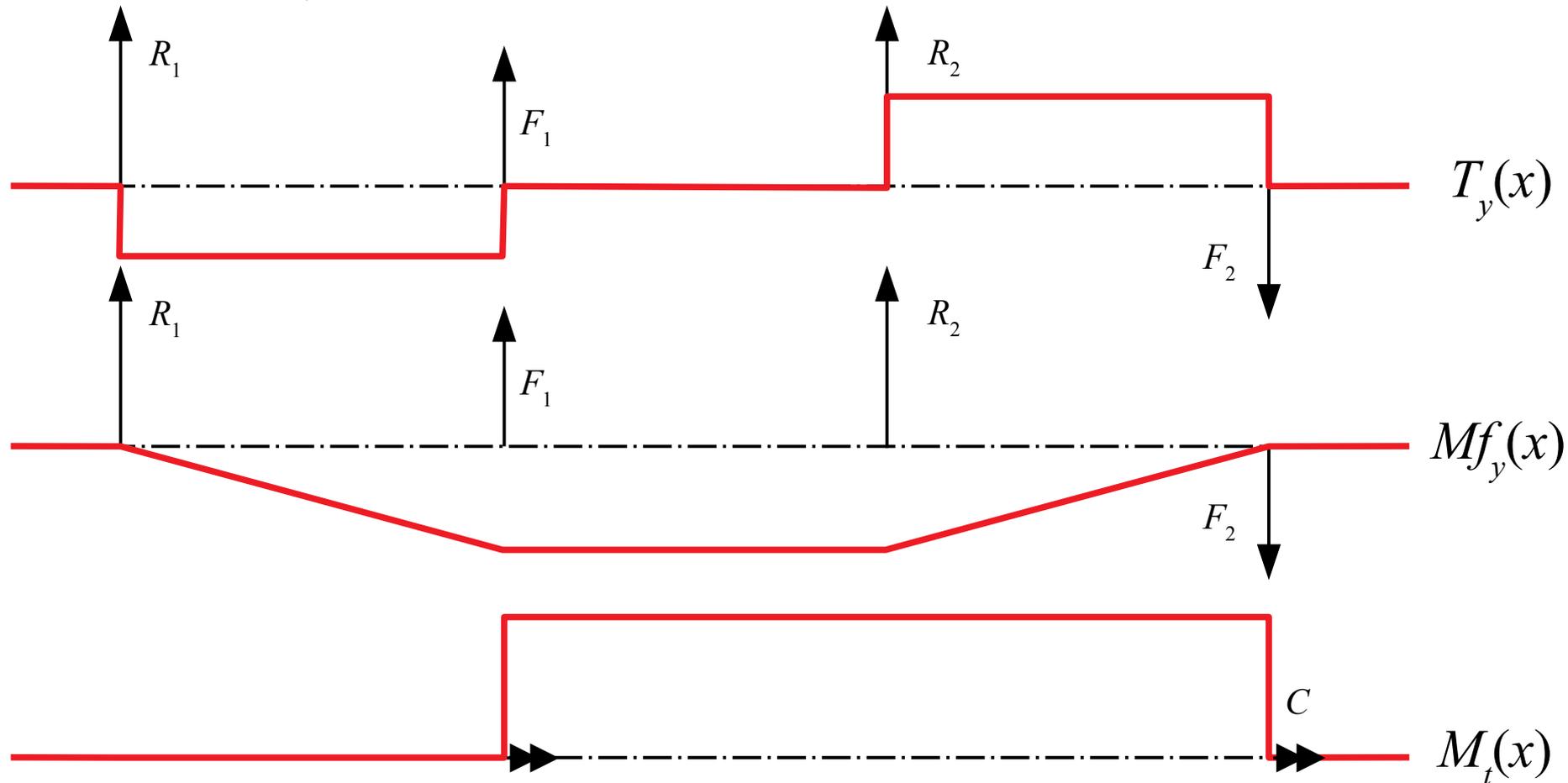
## Éléments de RDM

- Diagramme du moment de torsion  $M_t(x)$



## Éléments de RDM

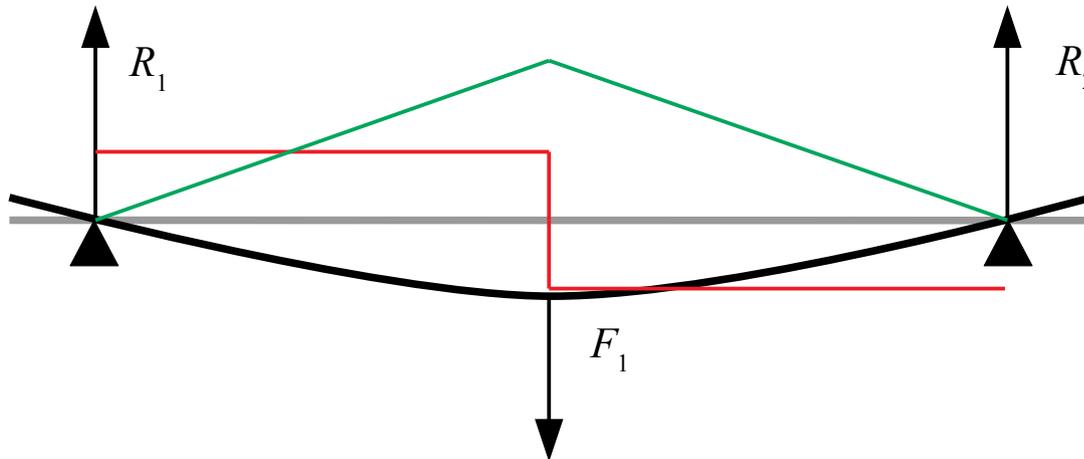
- En somme,



- Les forces réparties, moments répartis etc. sont rares en conception mécanique !

## Éléments de RDM

- Convention de signe des efforts internes



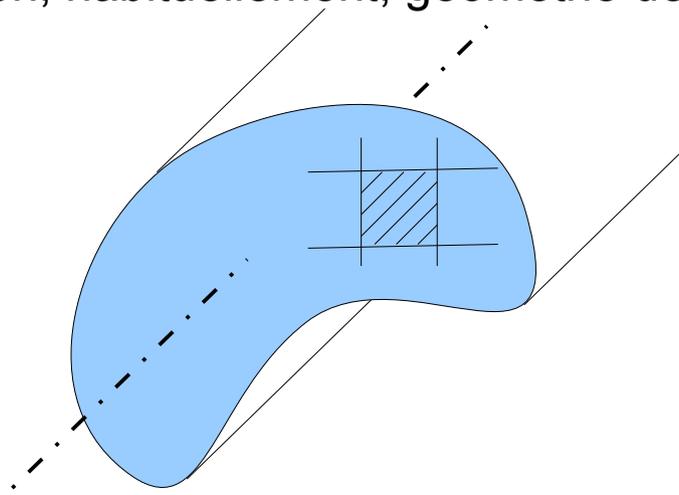
Si  $F_1$  est positive dans le sens indiqué, alors :

- $R_1$  et  $R_2$  sont positives dans le sens indiqué
- Les efforts tranchants sont positifs sur la moitié gauche, négatifs sur la moitié droite,
- Le moment fléchissant est positif et correspond à une déflexion comptée positivement **vers le bas**.

## Éléments de RDM

- Contraintes locales induites par les efforts globaux

On connaît la résultante des efforts globaux dans chaque tranche de l'arbre, pour une position  $x$  donnée. Il faut maintenant déterminer comment se répartissent les efforts dans la tranche. Est-ce uniforme (auquel cas il suffit de diviser la résultante par l'aire de la tranche pour obtenir la contrainte), ou la répartition est elle différente ?
- Pour évaluer cela, on a besoin de la géométrie de la section.
  - Pour les arbres en rotation, habituellement, géométrie de révolution autour de l'axe de rotation !



## Éléments de RDM

- Caractéristiques géométriques d'une section

- Aire  $S$  :  $S = \int_{\Omega} ds$

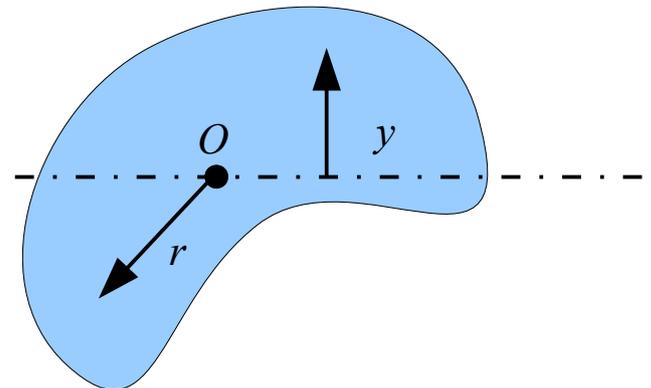
- Moment d'inertie  $I_y$  (quadratique) par rapport à un axe dans le plan de la section

$$I_y = \int_{\Omega} y^2 ds$$

- Moment d'inertie  $I_0$  polaire

$$I_0 = \int_{\Omega} r^2 ds$$

- On peut définir un centre d'inertie, qui minimise  $I_0$ , et un axe d'orientation fixée passant par le centre d'inertie, qui minimisera  $I_y$ , pour cette orientation.



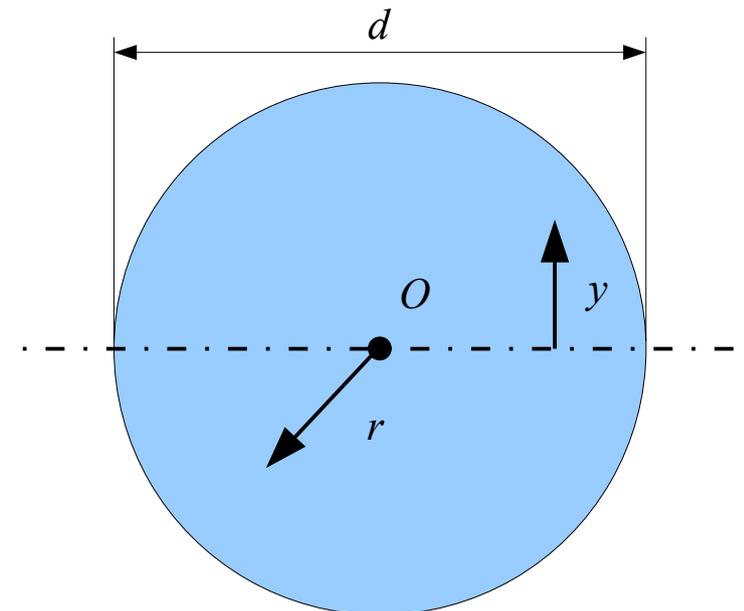
## Éléments de RDM

- Cas particulier – section circulaire
  - Centre d'inertie = centre du disque, axe d'inertie = n'importe quel diamètre.

- Aire  $S = \int_{\Omega} ds = \frac{\pi d^2}{4}$

- Moment d'inertie  $I_y = \int_{\Omega} y^2 ds = \frac{\pi d^4}{64}$

- Moment d'inertie polaire  $I_0 = \int_{\Omega} r^2 ds = \frac{\pi d^4}{32}$



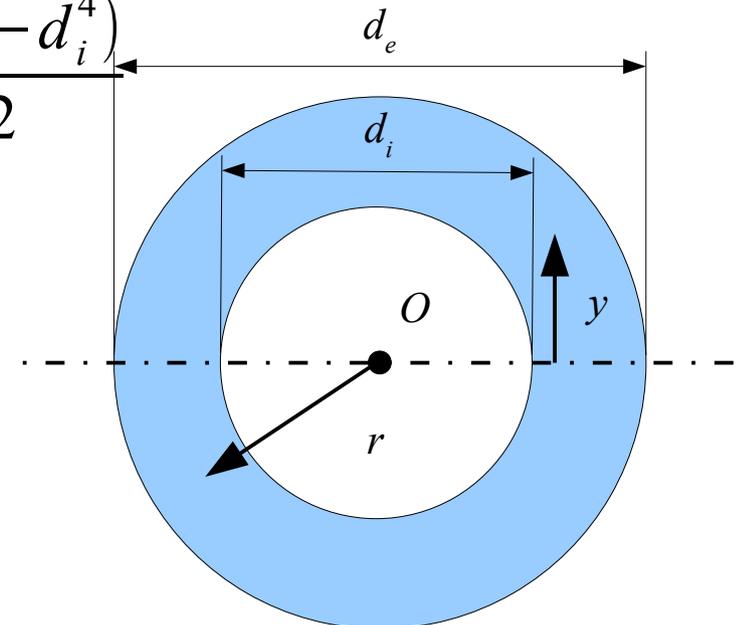
## Éléments de RDM

- Cas particulier – section circulaire creuse.

- Aire  $S = \int_{\Omega} ds = \frac{\pi(d_e^2 - d_i^2)}{4}$

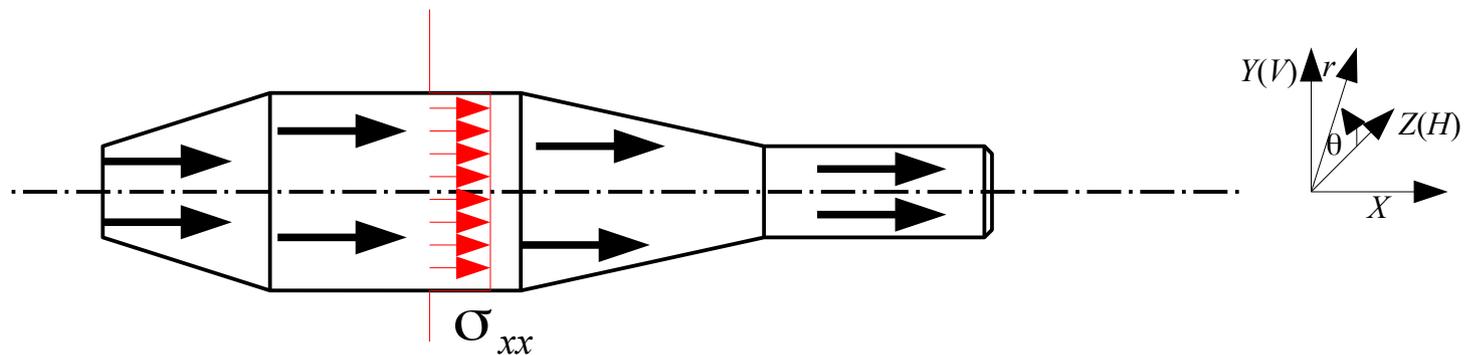
- Moment d'inertie  $I_y = \int_{\Omega} y^2 ds = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{64}$

- Moment d'inertie polaire  $I_0 = \int_{\Omega} r^2 ds = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32}$



## Éléments de RDM

- Arbre = poutre : 6 sollicitations « macroscopiques » indépendantes qui se traduisent, en chaque point, par trois états de contraintes, locaux et indépendants :
- Efforts normaux → Traction/compression  $\sigma_{xx}$  dans l'axe de l'arbre
  - Exemple de cause : poids propre d'un arbre de turbine **vertical**
  - Ils ne varieront pas en fonction de la rotation (sauf mécanisme complexe e.g. arbre de perceuse à percussion)



## Éléments de RDM

- Pour les efforts normaux, la répartition des contraintes est **uniforme**, en première approximation.
- L'intégrale des contraintes sur la section doit redonner  $N(x)$  :

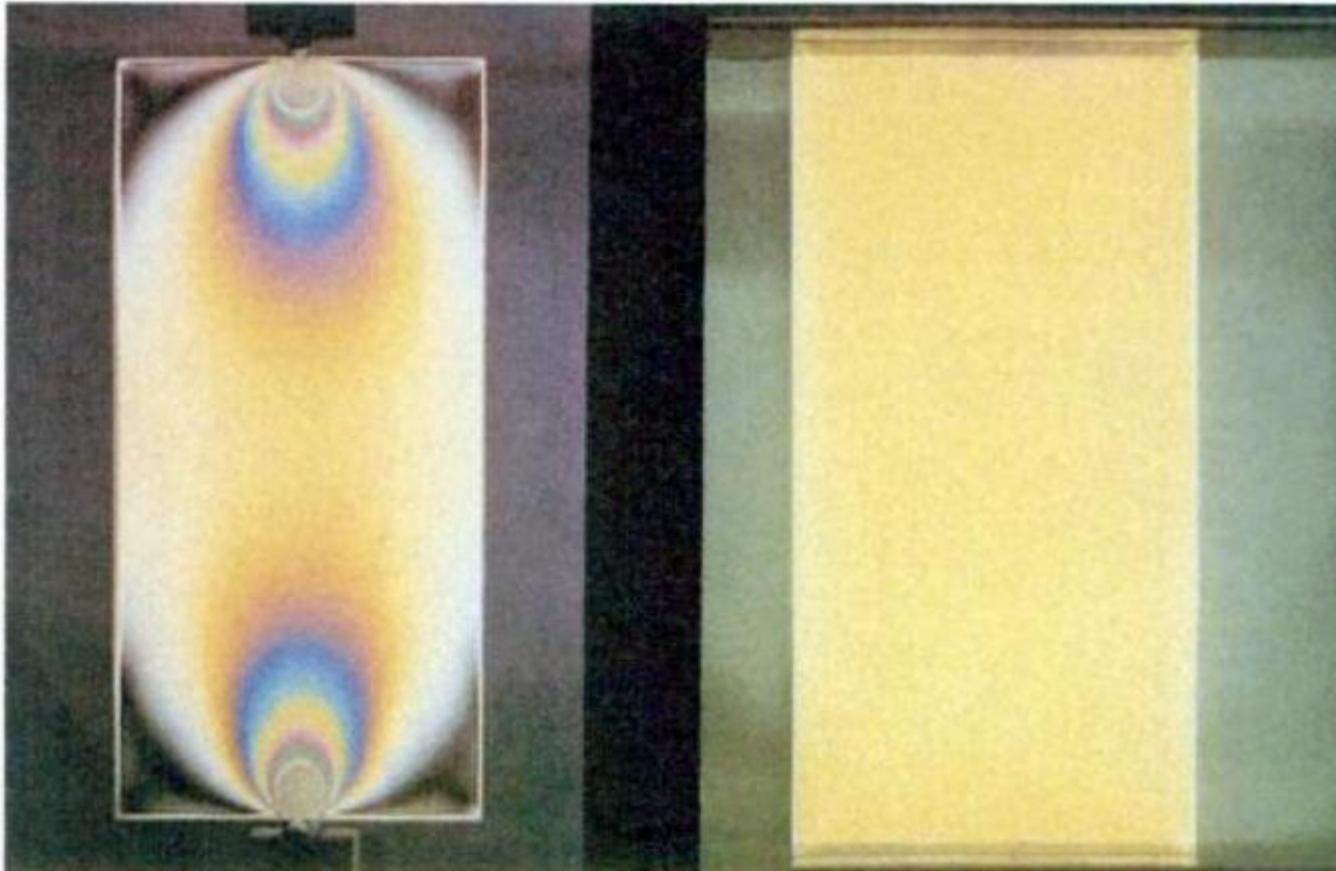
$$\int_{\Omega} \sigma_{xx}^N ds = N(x)$$

Par conséquent la contribution de  $N(x)$  est  $\sigma_{xx}^N = \frac{N(x)}{S(x)}$

- Ceci est vrai loin des points d'application des forces et des changements brutaux de section (hypotheses de Saint-Venant)
- Habituellement, un élancement supérieur à 10 permet de s'assurer que l'on est bien dans les hypotheses.

## Éléments de RDM

- Validation des hypothèses de Saint Venant (compression) ...



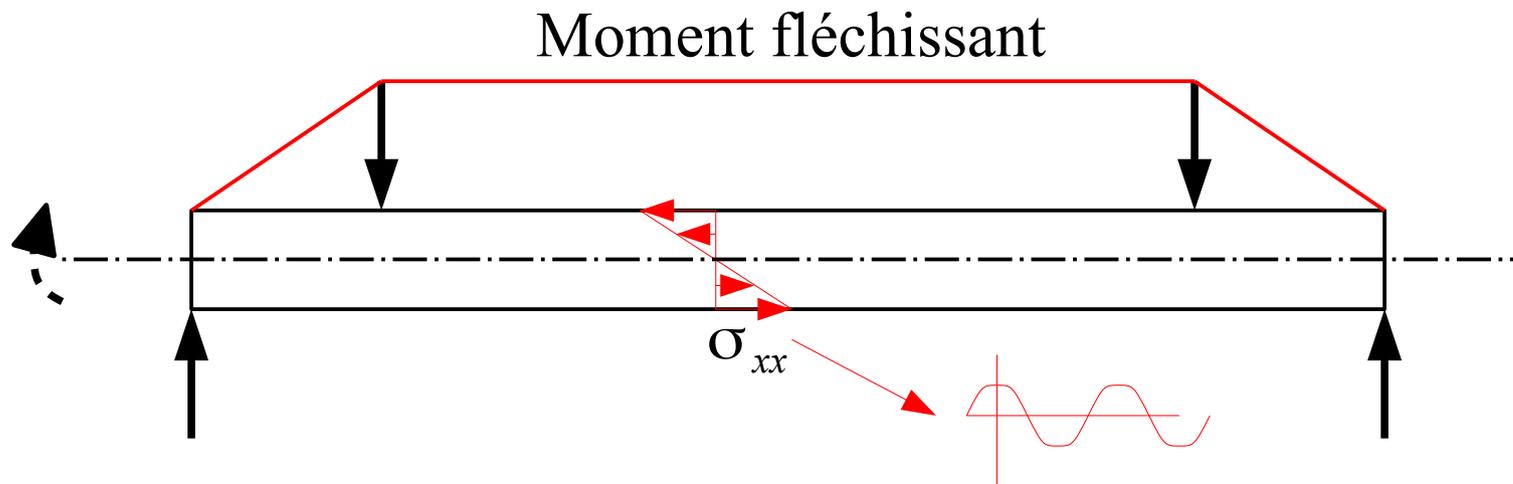
Forces ponctuelles

Clichés de photoélasticité

Forces réparties ... ou partie  
centrale d'une barre très longue !

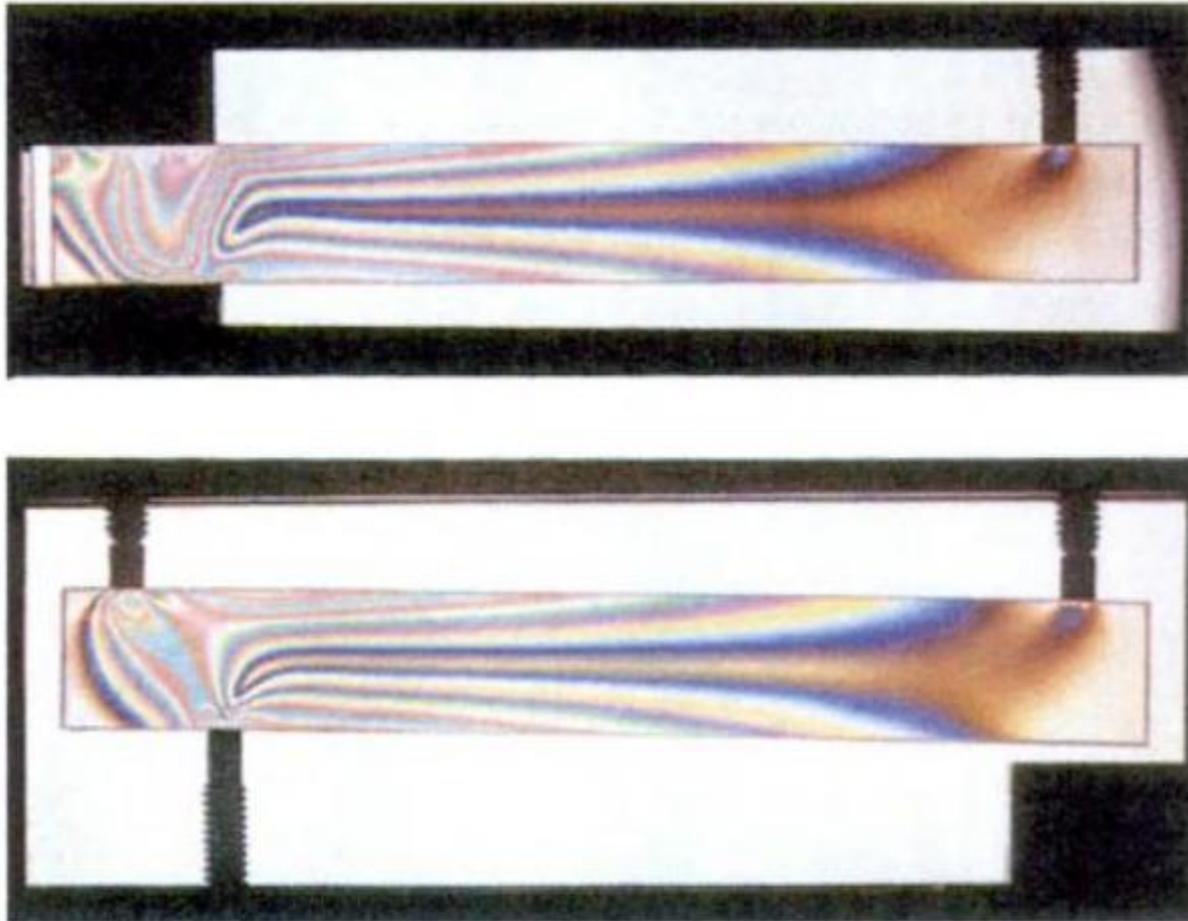
## Éléments de RDM

- Flexion (deux directions possibles) → Moment fléchissant → Traction/compression  $\sigma_{xx}$  dans l'axe de l'arbre
  - Exemple de cause : poids propre d'un arbre de turbine **horizontal**, couples exercés sur l'arbre dans un plan parallèle à l'axe
  - La répartition des efforts dépend de la section, mais ils sont globalement de signe opposés de part et d'autre du plan contenant la fibre neutre et perpendiculaire aux efforts (et parallèle à l'axe du couple induit !)
  - Si l'orientation des efforts est fixe et que l'arbre tourne, les efforts *vus du point de vue matériau* seront modulés par la rotation : ils varieront de façon sinusoïdale dans le temps : on parle de **flexion rotative**.



## Éléments de RDM

- Validation des hypothèses de Saint Venant en flexion ...



## Éléments de RDM

- La flexion génère des contraintes normales  $\sigma_{xx}$  dont la répartition est linéaire, proportionnelle à la distance à l'axe neutre de la section ( $y$ ).
- De nouveau, le bilan fait sur la section doit redonner la valeur globale du moment fléchissant...

$$\int_{\Omega} \sigma_{xx}^{Mf} \cdot y \, ds = Mf_z(x) \quad \text{avec} \quad \sigma_{xx}^{Mf} = y \cdot K$$

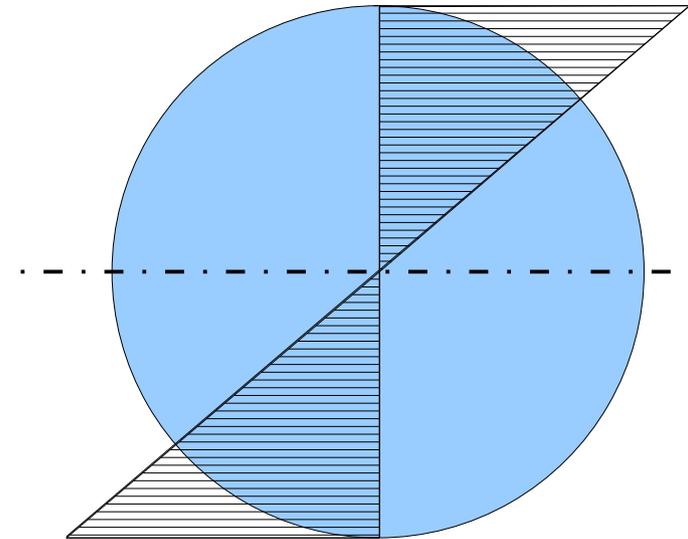
Que vaut  $K$  ?

$$\int_{\Omega} K \cdot y^2 \, ds = K \int_{\Omega} y^2 \, ds = K I_y(x) = Mf_z(x)$$

$$K = \frac{Mf_z(x)}{I_y(x)}$$

Donc la contribution du moment fléchissant est

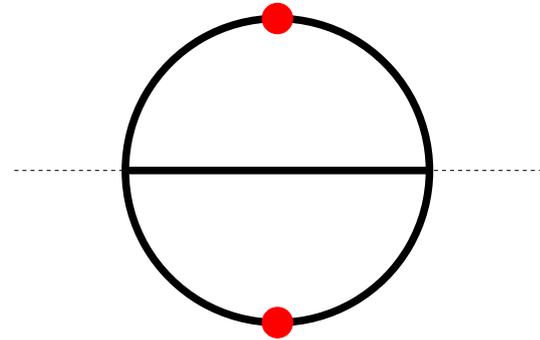
$$\sigma_{xx}^{Mf} = \frac{y \cdot Mf_z(x)}{I_y(x)}$$



## Éléments de RDM

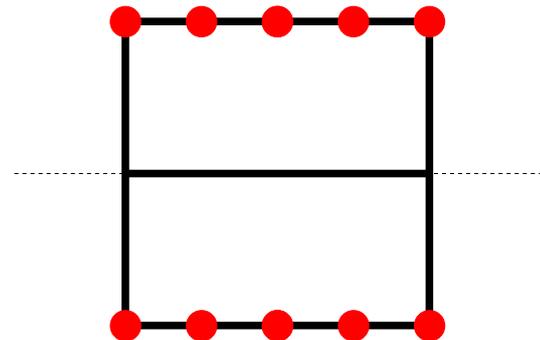
- Pour une section circulaire, la valeur maximale de la contrainte normale due à la flexion est :

$$\sigma_{max}^{Mf} = \frac{32 Mf_z}{\pi d^3}$$



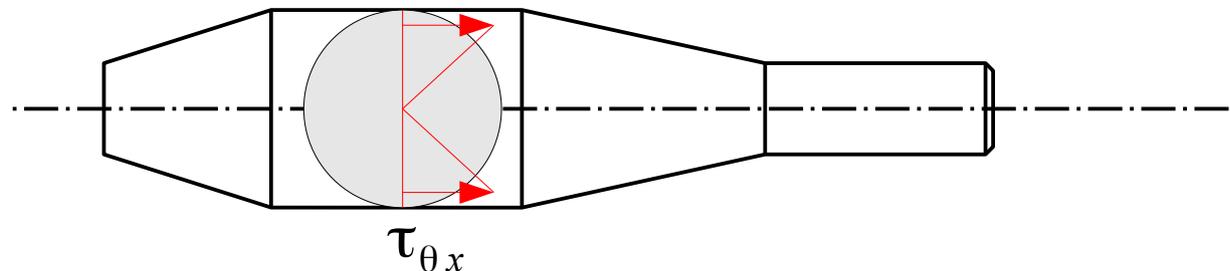
- Pour une section carrée,

$$\sigma_{max}^{Mf} = \frac{6 Mf_z}{c^3}$$



## Éléments de RDM

- Torsion → couple de torsion → efforts de cisaillement  $\tau_{\theta x}$  dans chaque section
  - Exemple de cause : couple moteur transmis.
  - La répartition des efforts de cisaillement dépend de la section. Elle est proportionnelle à la distance à l'axe de torsion (qui est confondu avec l'axe de révolution pour une géométrie de révolution...)
  - Si la section est mince (arbre creux), c'est donc quasiment constant.
  - En principe, ne varie pas avec l'angle de rotation de l'arbre, sauf mécanismes complexes e.g. moteur à pistons qui génèrent des à-coups.



## Éléments de RDM

- La torsion génère des efforts de cisaillement dans le plan de la section ( $\tau_{\theta x}$ )
- Pour des sections **de révolution**, ces efforts sont proportionnels à la distance à l'axe de torsion (= axe de rotation)
- Le bilan fait sur la section doit redonner la valeur globale du couple de torsion...

$$\int_{\Omega} \tau_{\theta x} \cdot r \, ds = M_t(x) \text{ avec } \tau_{\theta x} = r \cdot K'$$

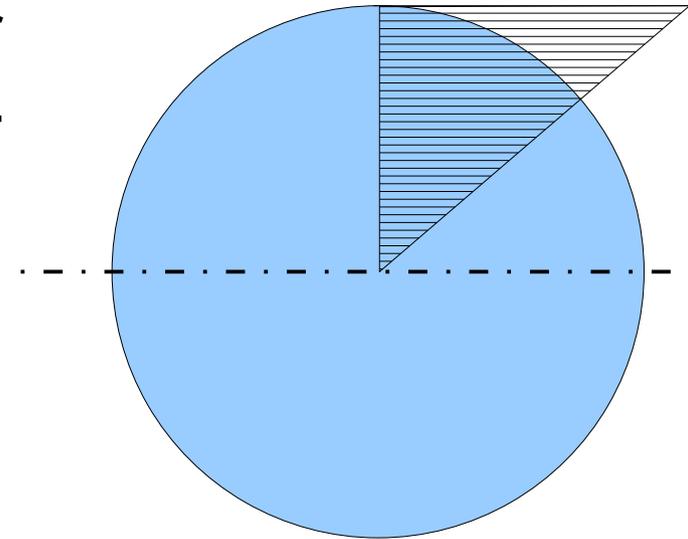
Que vaut  $K'$  ?

$$\int_{\Omega} K' \cdot r^2 \, ds = K' \int_{\Omega} r^2 \, ds = K' I_0(x) = M_t(x)$$

$$K' = \frac{M_t(x)}{I_0(x)}$$

, donc la contribution de la torsion est

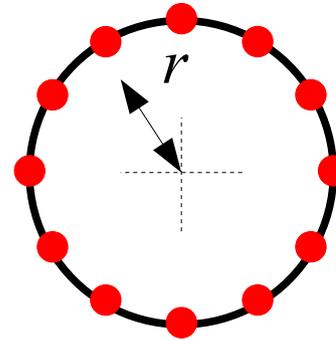
$$\tau_{\theta x} = \frac{r \cdot M_t(x)}{I_0(x)}$$



## Éléments de RDM

- Pour une section circulaire, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement due à la torsion est :

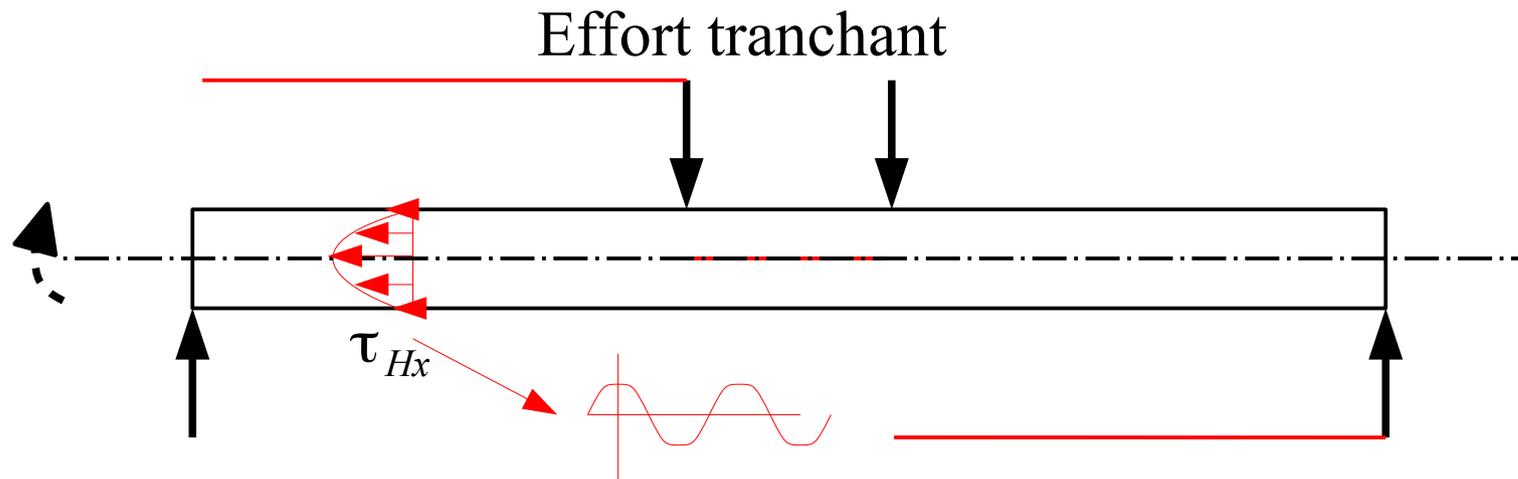
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}}$$



- Pour des sections n'ayant pas de symétrie de révolution, le calcul est beaucoup plus compliqué, mais il existe des abaques et tables pour les sections usuelles.

## Éléments de RDM

- Efforts tranchant  $\rightarrow$  cisaillements  $\tau_{Hx}$  et  $\tau_{Vx}$  dans chaque section.
  - Exemple de cause : efforts provenant des liaisons, tout comme pour le moment fléchissant (sauf couples !)
  - La répartition des efforts dépend de la section
  - Si l'orientation des efforts est fixe et que l'arbre tourne, les efforts *vus du point de vue matériau* seront modulés par la rotation au même titre que pour la flexion.



## Éléments de RDM

- L'effort tranchant est généralement associé à un moment fléchissant. Dans ce cas, la formule de Jourawski permet d'évaluer celui ci :

$$\tau_{Hx} = \frac{T_y m(y)}{I_y b(y)} \text{ avec } m(y) = \int_y^{y_{max}} t b(t) dt \text{ (moment statique)}$$

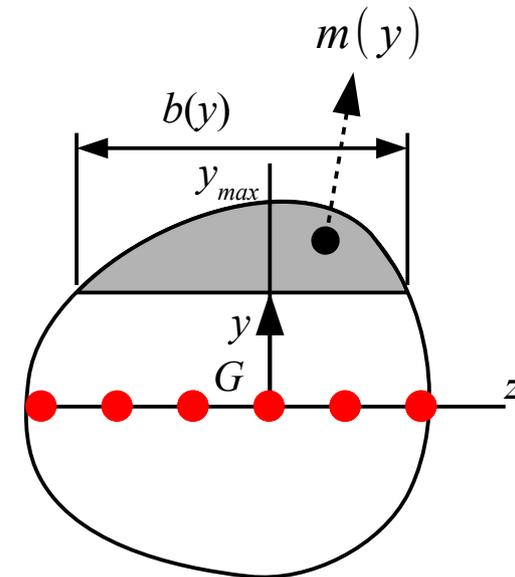
- Cela donne une répartition parabolique selon  $y$ , avec un maximum **sur la fibre neutre**.
- Cas d'une section circulaire :

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}, b(y) = \sqrt{d^2 - 4y^2}$$

$$m(y) = \int_y^{y_{max}} t \sqrt{d^2 - 4t^2} dt \rightarrow m(y) = \frac{(d^2 - 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$\tau(x, y) = \frac{(d^2 - 4y^2)^{\frac{3}{2}} T_y}{12 I_x \sqrt{d^2 - 4y^2}} = T_y \frac{d^2 - 4y^2}{12 I_x}$$

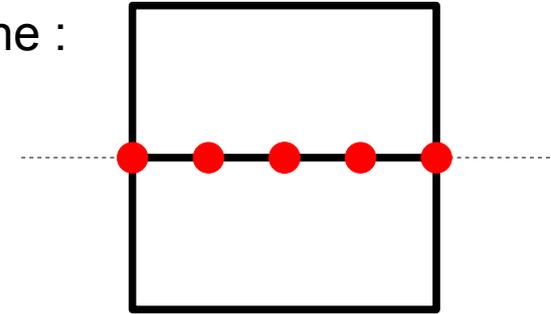
$$\tau(x, y) = \frac{16 T_y (d^2 - 4y^2)}{3 \pi d^4} \quad \tau_{max} = \frac{16 T (d^2 - 4y^2)}{3 \pi d^4} \Big|_{y=0} = \frac{16 T}{3 \pi d^2} \left( = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi d^2 / 4} = \frac{4}{3} \tau_{moy} \right)$$



## Éléments de RDM

- Pour une section carrée le calcul est plus simple et donne :

$$\tau_{max} = \frac{12(c^2 - 4y^2)}{8c^4} \Big|_{y=0} = \frac{3T}{2c^2} \quad \left( = \frac{3}{2} \tau_{moy} \right)$$

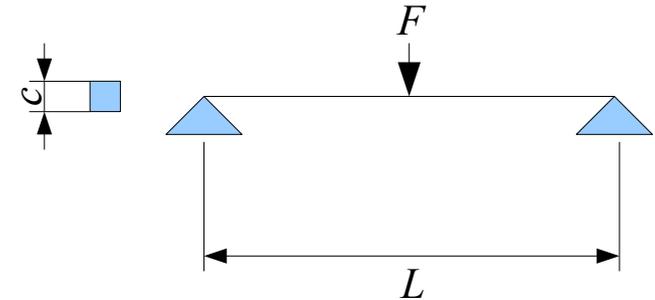


- Faisons un calcul du rapport entre la contrainte normale maximale due à la flexion et cette contrainte de cisaillement maximale, pour la flexion à 3 point d'une poutre de section carrée ...

$$M_{f_{z_{max}}} = FL/4 \quad \sigma_{max}^{Mf} = 6 \frac{M_{f_z}}{c^3} = \frac{6FL}{4c^3}$$

$$T_{y_{max}} = F/2 \quad \tau_{max} = \frac{3T}{2c^2} = \frac{3F}{4c^2}$$

$$\longrightarrow \frac{\sigma_{max}^{Mf}}{\tau_{max}} = \frac{6FL}{4c^3} \frac{4c^2}{3F} = 2 \frac{L}{c}$$



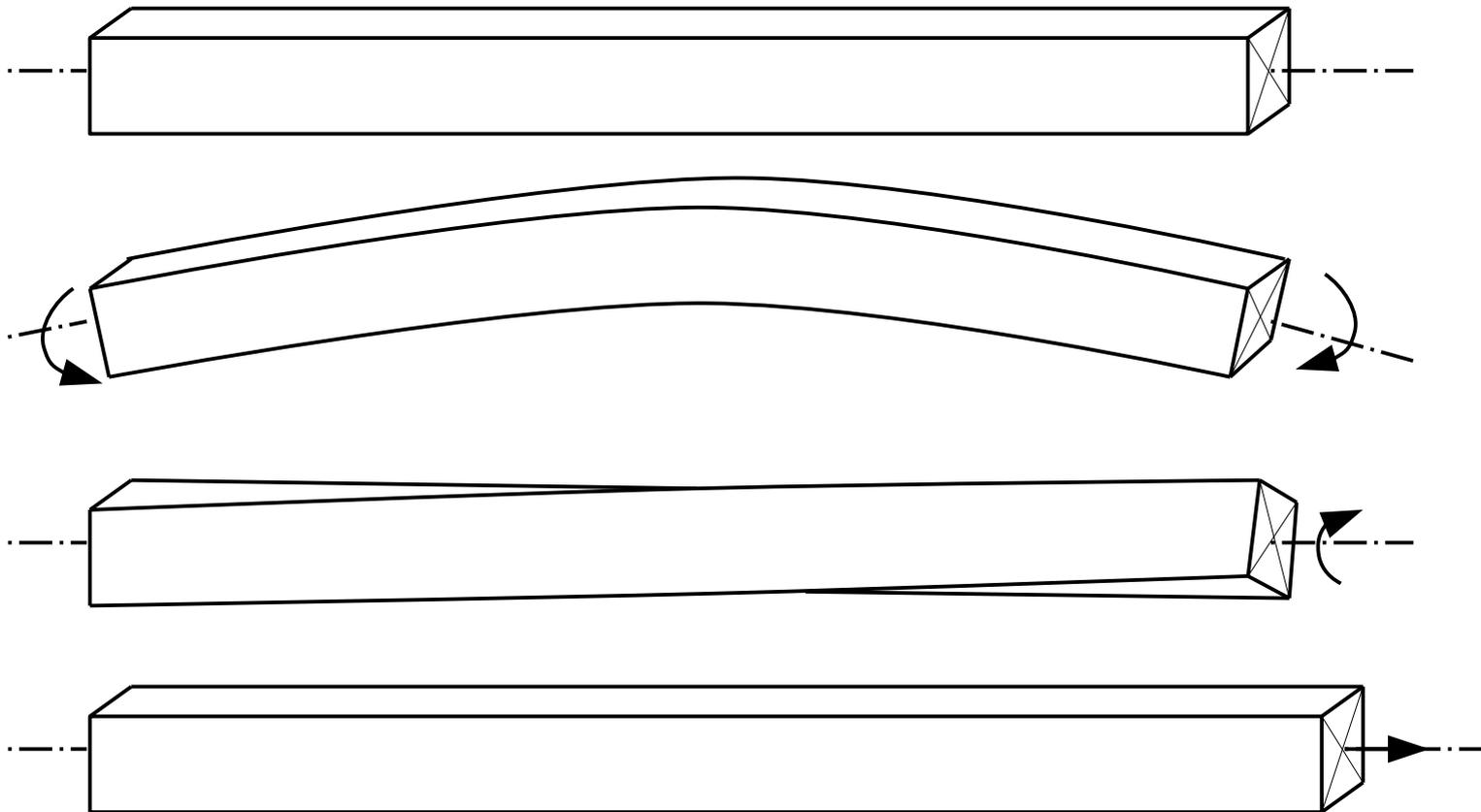
- On trouve le même genre de résultat quelque soit la forme de la section
- En pratique, pour un élancement  $L/c$  supérieur à 10, l'effet du cisaillement sur la déformation et la résistance de la poutre est faible (<5%) et souvent négligé.

## Éléments de RDM

- Déformations
  - Nous avons vu que l'influence du cisaillement dû à l'effort tranchant est souvent négligeable devant les contraintes normales dues à la flexion
  - C'est également le cas en ce qui concerne les déformations
  - Ainsi, la déformation d'une poutre dépend de trois facteurs relativement indépendants
    - Moment fléchissant → flexion et donc déviation de la ligne neutre dans un plan perpendiculaire à celle-ci. On suppose ici que les sections restent perpendiculaires à la ligne neutre et planes (théorie d'Euler-Bernoulli).
    - Torsion → rotation des sections autour de la ligne neutre.
    - Efforts normaux → élongation parallèle à la ligne neutre.
  - Bien entendu, le comportement réel diffère mais reste proche pour des poutres élancées.

## Éléments de RDM

- Modes de déformation



## Éléments de RDM

- La relation liant les contraintes aux déformations est une caractéristique du matériau.
- Dans le cas où tout est linéaire (petites déformations, petits déplacements), c'est la loi de Hooke :

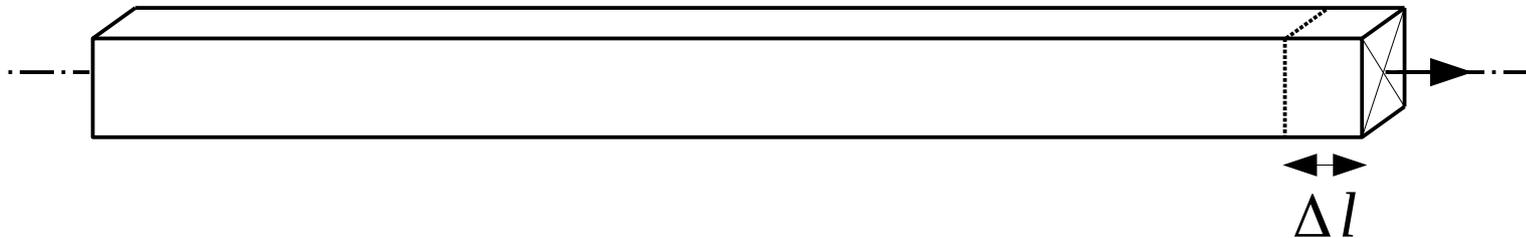
$\sigma = E \varepsilon$  . Ici,  $E$  est le module de Young du matériau.

- Prenons l'exemple des efforts normaux :

$$\sigma = E \varepsilon \quad \sigma_{xx}^N = \frac{N(x)}{S(x)} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_{xx}^N = \frac{N(x)}{E(x)S(x)}$$

- On obtient l'allongement total  $\Delta l$  en intégrant :

$$\Delta l = \int_0^{l_0} \varepsilon_{xx}^N dx = \frac{N l_0}{E S} \text{ si } N, E \text{ et } S \text{ sont constants.}$$



## Éléments de RDM

- Cas du moment fléchissant

La courbure  $\gamma$  est proportionnelle au moment fléchissant, et inversement proportionnelle à la "rigidité" de la poutre :

$$\gamma = -\frac{Mf_z(x)}{E(x)I_y(x)} \quad \text{Ici, les déflexions sont comptées positivement **vers le bas** !}$$

- En petites déformations, la courbure est très proche de la dérivée seconde de la flèche  $u(x)$  :

$$\gamma \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{Mf_z(x)}{E(x)I_y(x)}$$

- Il « suffit » d'intégrer deux fois et de tenir compte des conditions aux limites pour déterminer les constantes qui apparaissent.

$$u(x) = Ax + B + \int \int -\frac{Mf_z(x)}{E(x)I_y(x)} dx dx$$

## Éléments de RDM

- Cas de la torsion (sections à symétrie de révolution)

La torsion génère une rotation spécifique  $\alpha$  (en radian par unité de longueur) des sections qui est proportionnelle au couple de torsion, et inversement proportionnelle à la rigidité de la poutre en torsion. Ainsi :

$$\alpha = \frac{Mt(x)}{G(x)I_0(x)} \quad (\text{avec } \tau = G\gamma, \text{ loi de Hooke en cisaillement et } G \text{ le module de Coulomb})$$

Tout comme pour l'effort normal, il faut intégrer sur la longueur pour obtenir l'angle de rotation  $\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \int_0^{l_0} \alpha dx = \frac{Mt l_0}{G I_0} \quad \text{si } Mt, G \text{ et } I_0 \text{ sont constants.}$$



## Éléments de RDM

- **Énergie de déformation**
  - Chaque sollicitation peut être appliquée de façon progressive dans le temps, ainsi l'on reste dans un cadre quasi-statique (pas de dynamique, pas d'accélération)
  - L'énergie interne du système est donc exclusivement élastique.
  - On ne considère ici que le cas de déformation réversibles, pour des matériaux strictement élastiques donc sans dissipation interne
  - Dans ces cas, le travail des forces extérieures (énergie « complémentaire ») est égal à l'énergie interne due à la déformation

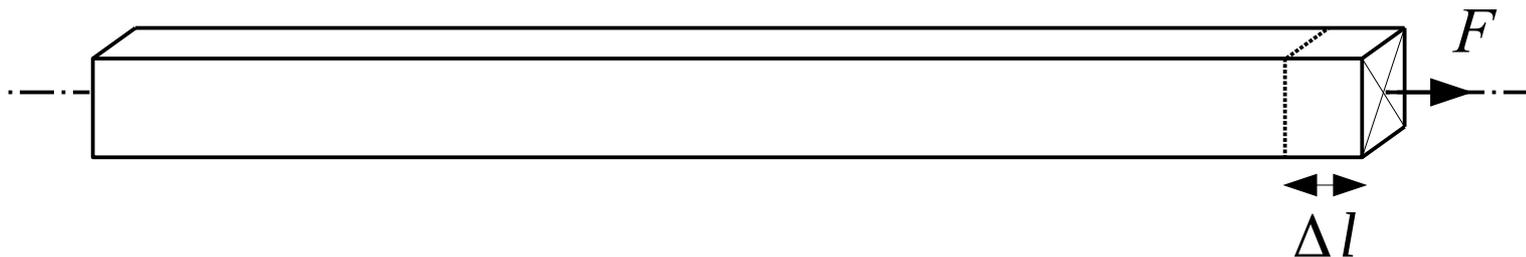
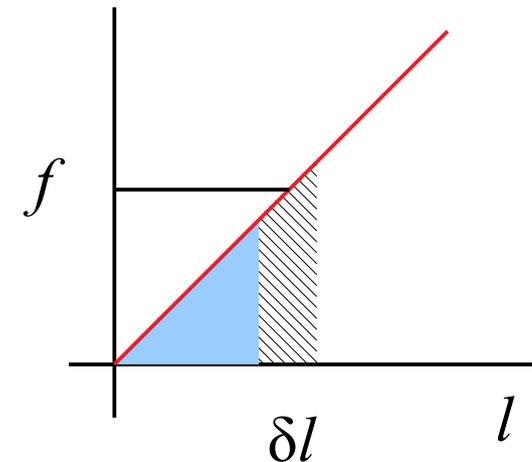
## Éléments de RDM

- Énergie de déformation

- Prenons l'exemple de la traction uniaxiale : le travail de  $f$  pour un accroissement  $\delta l$  est  $\delta E = f \delta l$  .
  - On intègre cela de 0 à F ...

$$\Delta E_e = \int_0^F f \delta l df \text{ avec } \Delta l = \int_0^{l_0} \varepsilon_{xx}^N dx = \frac{N l_0}{E S}$$

$$\Delta E_e = \frac{l_0}{E S} \int_0^F f df = \frac{L_0}{E S} \frac{F^2}{2} \quad \left( = \frac{E S}{L_0} \frac{\Delta l^2}{2} \right)$$



## Éléments de RDM

- Dans le cas général, en élasticité linéaire, on a toujours (tenseurs)

$$\Delta E_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon d\Omega$$

Si l'on fait le calcul pour une arbre de transmission, on se rend compte que les efforts qui participent le plus sont les efforts de flexion et de torsion. Les efforts tranchants peuvent être négligés dans la plupart des cas, ainsi que les efforts normaux.

## Éléments de RDM

- En somme

- Efforts normaux :  $\Delta E_N = \int_0^{L_0} \frac{N^2}{2ES} dL$

- Flexion :  $\Delta E_{Mfz} = \int_0^{L_0} \frac{Mf_z^2}{2EI_z} dL$      $\Delta E_{Mfy} = \dots$

- Torsion :  $\Delta E_{Mt} = \int_0^{L_0} \frac{Mt^2}{2GI_0} dL$

- Cisaillement :  $\Delta E_{Tz} = \int_0^{L_0} \frac{T_z^2}{2G S_r} dL = \int_0^{L_0} \int_S \frac{\tau^2}{2G} dA dL \rightarrow S_r = \frac{T^2}{\int_S \tau^2 dA}$   
 $\Delta E_{Ty} = \dots$

Note :  $S_r$  est l'aire effective de cisaillement, de façon à ce que l'énergie de déformation calculée en utilisant la distribution moyenne soit équivalente à celle utilisant la répartition réelle sur la section.  $S_r$  vaut  $5S/6$  pour une section carrée,  $9S/10$  pour un section circulaire,  $S/2$  pour un tube aux parois minces...

## Éléments de RDM

- Énergie totale de déformation

$$E_e = \Delta E_N + \Delta E_{Mfy} + \Delta E_{Mfz} + \Delta E_{Ty} + \Delta E_{Tz} + \Delta E_{Mt}$$

- Utilisation de méthodes énergétiques

Théorème de Castigliano : La dérivée de l'énergie de déformation par rapport à une force (respectivement couple) imposé en un point donné donne la flèche (resp. rotation) en ce point (on parle souvent de force généralisée et de déplacement généralisé)

$$\frac{\partial E^*}{\partial F_i} = \frac{\partial E_e}{\partial F_i} = u_i \quad (\text{cas élastique})$$

- Attention, si non linéarité, on prend l'énergie complémentaire  $E^*$  (travail des forces extérieures, et non énergie de déf.  $E_e$  !!)

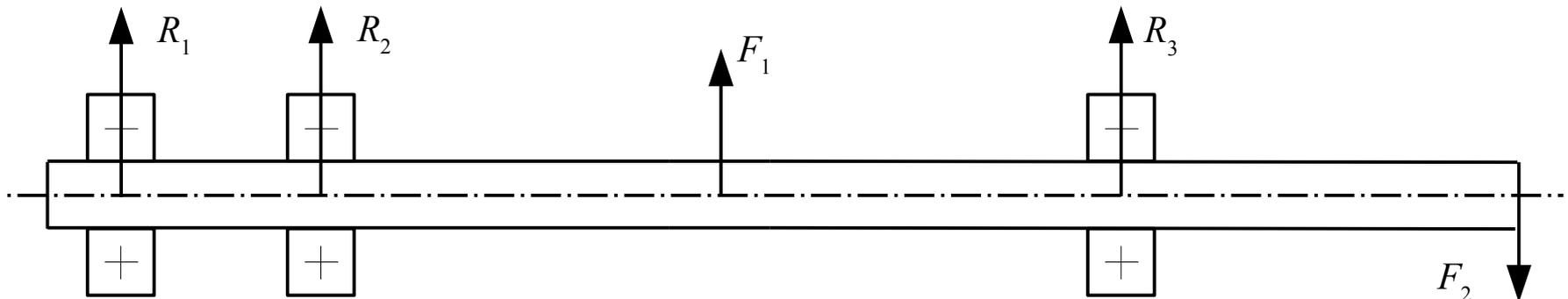
## Éléments de RDM

- Interprétation de Ménabréa

En cas de liaisons hyperstatiques, la dérivée s'annule car pas de déplacement (la force ne travaille pas...)

$$\frac{\partial E_e}{\partial F_i} = 0$$

- C'est une façon très pratique de résoudre les problèmes **hyperstatiques**... cf. exercice.



## Éléments de RDM

- Notion de contrainte équivalente
  - On a vu que les contraintes dans une poutre prennent deux formes : la contrainte normale (traction compression), et la contrainte de cisaillement.
  - Les essais de traction permettent de savoir quelle force induit des dommages irréversibles dans le matériau.
  - Des considérations expérimentales montrent qu'en pratique, la rupture se fait plutôt en cisaillement, et ce pour une grande variété de matériaux, en particulier les métaux.
  - Comme les contraintes dans une poutre sont de nature mixte, il est nécessaire de pouvoir comparer cet état de contrainte avec un essai standardisé (on ne va pas faire des milliers d'essais « mixtes »)

## Éléments de RDM

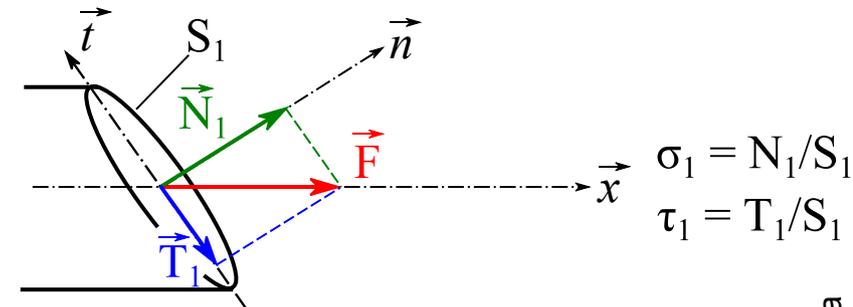
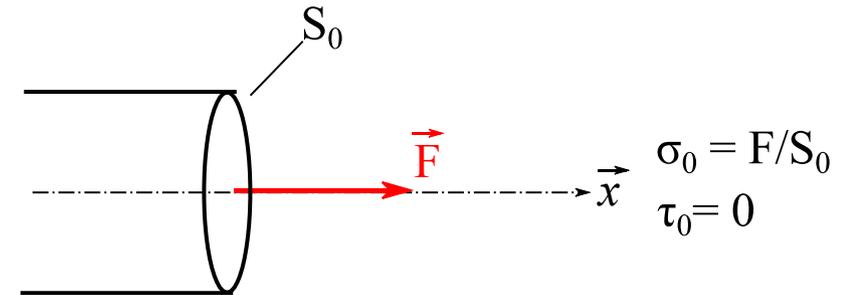
- Cercle de Mohr et contraintes principales

- Essai de traction uniaxiale :

- la première contrainte principale est celle donnée par la direction de l'essai.

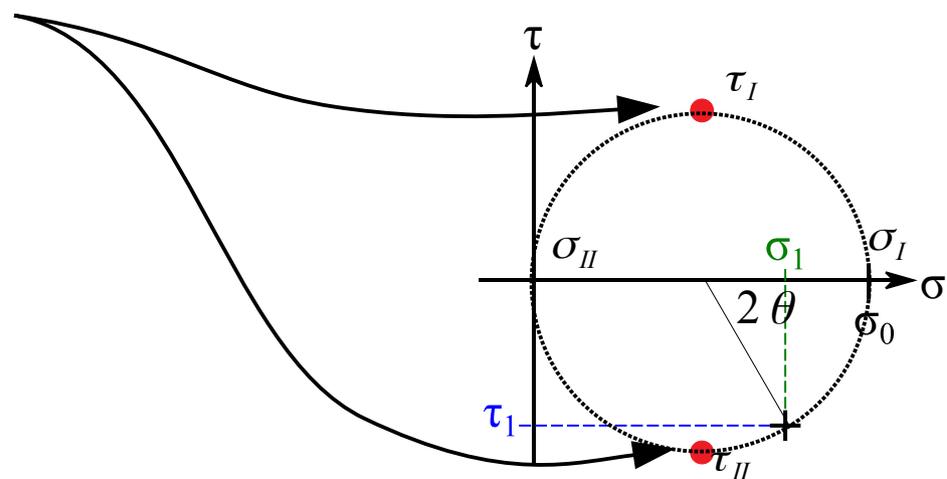
- les deux autres sont nulles.

- La rupture se fait habituellement selon un plan à 45°, là où le cisaillement est maximal



$$\sigma = \frac{N_1}{S_1} = \cos^2 \theta \sigma_0 = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \sigma_0$$

$$\tau = \frac{T_1}{S_1} = \cos \theta \sin \theta \sigma_0 = \frac{\sin 2\theta}{2} \sigma_0$$



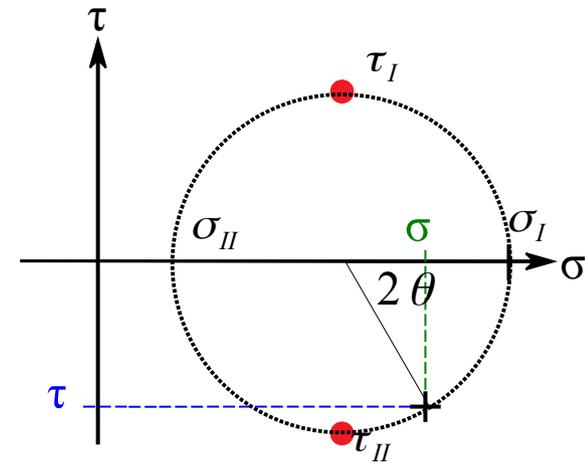
## Éléments de RDM

- En général, connaissant un état de contrainte planes donné, il est possible de déterminer les contraintes principales par la formule suivante :

$$\sigma_I, \sigma_{II} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Le cisaillement maximal est donné par :

$$\tau_I = -\tau_{II} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \left( = \frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}| \right)$$



## Éléments de RDM

- Critère de Tresca ...

- Ce critère est justement basé sur la cission (cisaillement) déterminé par le cercle de Mohr.
- Il suffit donc de construire le cercle de Mohr correspondant à l'état de contraintes calculé, et de déterminer les contraintes principales (normales).

- Le critère est que la différence maximale entre les contraintes principales n'excède pas la limite élastique :

$$\sigma_T = \max_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) \leq R_e$$

- C'est équivalent de dire que les contraintes de cisaillement maximales n'excèdent pas la moitié de la limite élastique.
  - Cf slide précédent

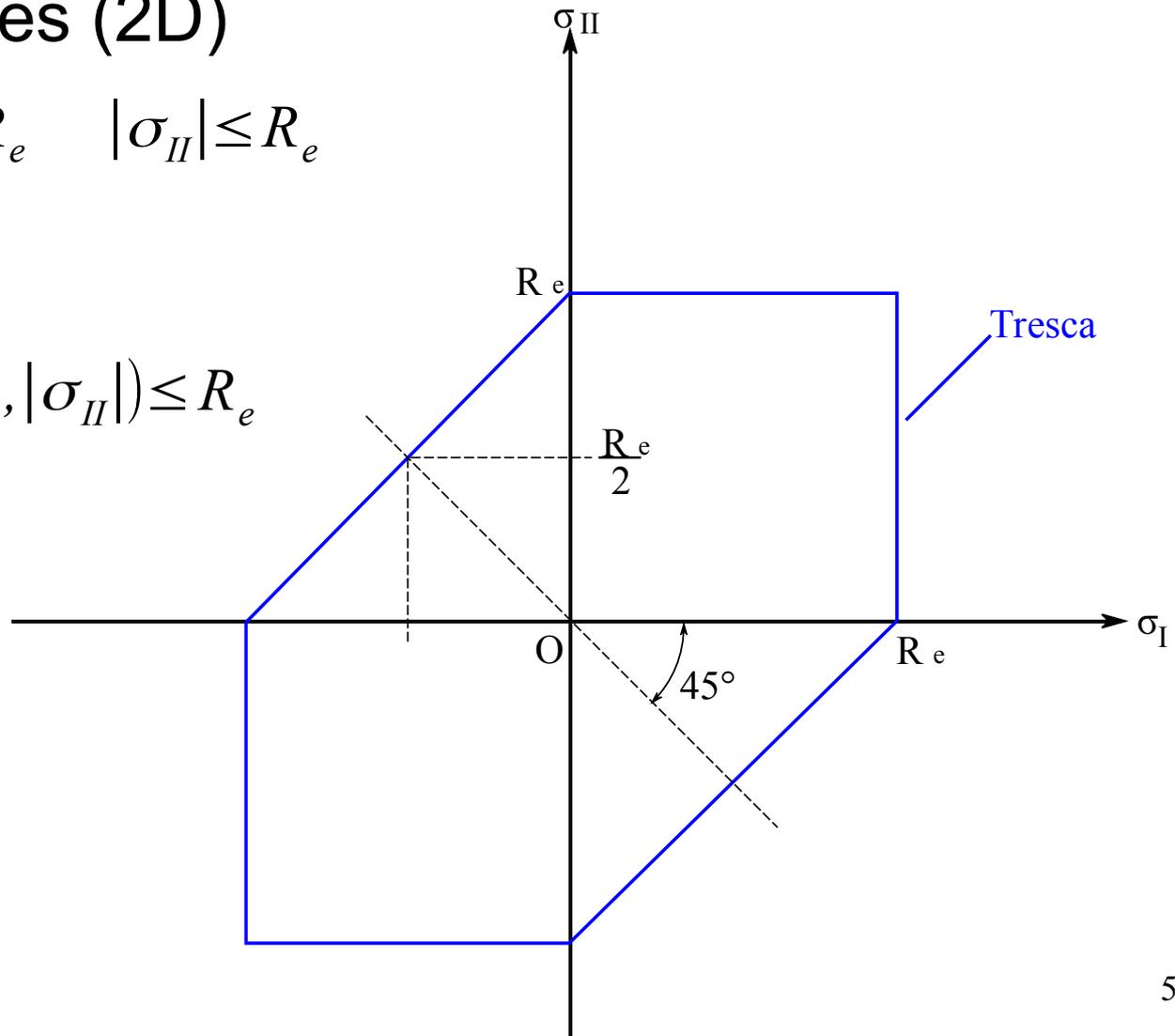
## Éléments de RDM

- Critère de Tresca dans l'espace des directions principales (2D)

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| \leq R_e \quad |\sigma_I| \leq R_e \quad |\sigma_{II}| \leq R_e$$

car  $\sigma_{III} = 0$

$$\sigma_T = \max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I|, |\sigma_{II}|) \leq R_e$$



## Éléments de RDM

- Critère de Tresca sous une autre forme pour une poutre en torsion et flexion
  - Si nous connaissons les contraintes dans un repère lié à la poutre, ici  $\sigma = \sigma_x$  et  $\tau = \tau_{x\theta}$  (les autres contraintes normales et de cisaillement sont nulles loin des appuis) alors on a :

$$\sigma_I, \sigma_{II} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

et

$$\tau_I = -\tau_{II} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

- Par conséquent, le critère devient

$$\sigma_T = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \leq R_e \quad \text{soit} \quad \sigma_T = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \leq R_e$$

- C'est un critère souvent pessimiste (conservatif).

## Éléments de RDM

- Critère de von Mises

- Basé sur des considérations énergétiques
- On décompose l'énergie de déformation en énergie de changement de volume (isotrope) et de changement de forme

$$E = \frac{1}{2} \sigma : \epsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = E_v + E_f$$

$$E_v = \frac{1}{6} \sigma_{ii} \epsilon_{jj} \quad E_f = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij}$$

- Cette dernière seule contribue  
Le critère final est obtenu après quelques manipulations tensorielles :

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right)} \leq R_e$$

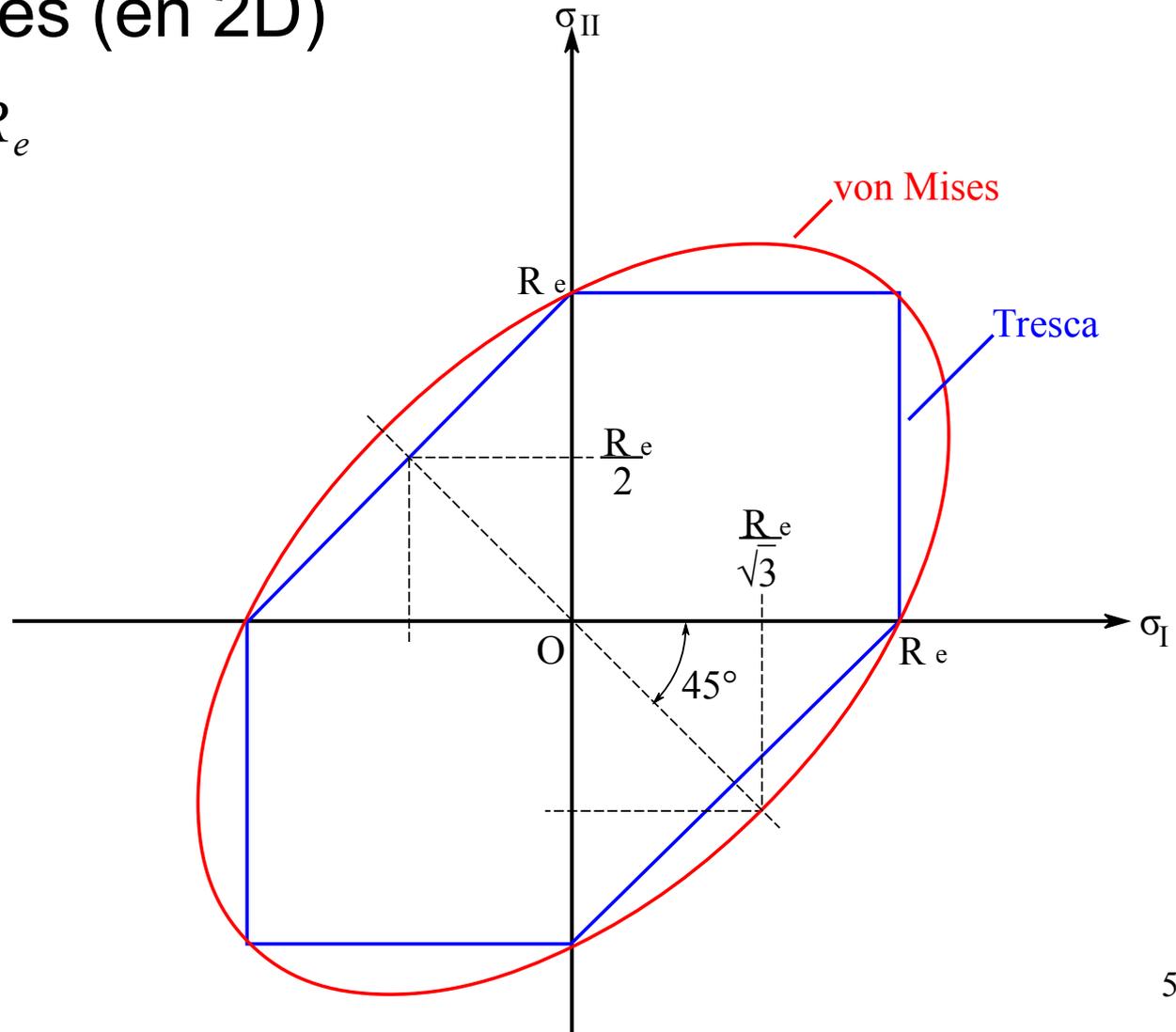
## Éléments de RDM

- Critère de von Mises dans l'espace des directions principales (en 2D)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq R_e$$

car  $\sigma_{III} = 0$

- C'est une ellipse...



## Éléments de RDM

- Critère de von Mises sous une autre forme pour une poutre en torsion et flexion

- Comme précédemment avec Tresca

$$\sigma_I, \sigma_{II} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

, que l'on remplace dans

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq R_e$$

- Cela donne le critère suivant :

$$\sigma_v = \sqrt{4\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 3\tau^2} \leq R_e \quad \text{soit} \quad \sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_e$$

- Légèrement moins conservatif que Tresca, mais plus proche de l'expérience.

## Éléments de RDM

- Critère de Mohr-Cauchy

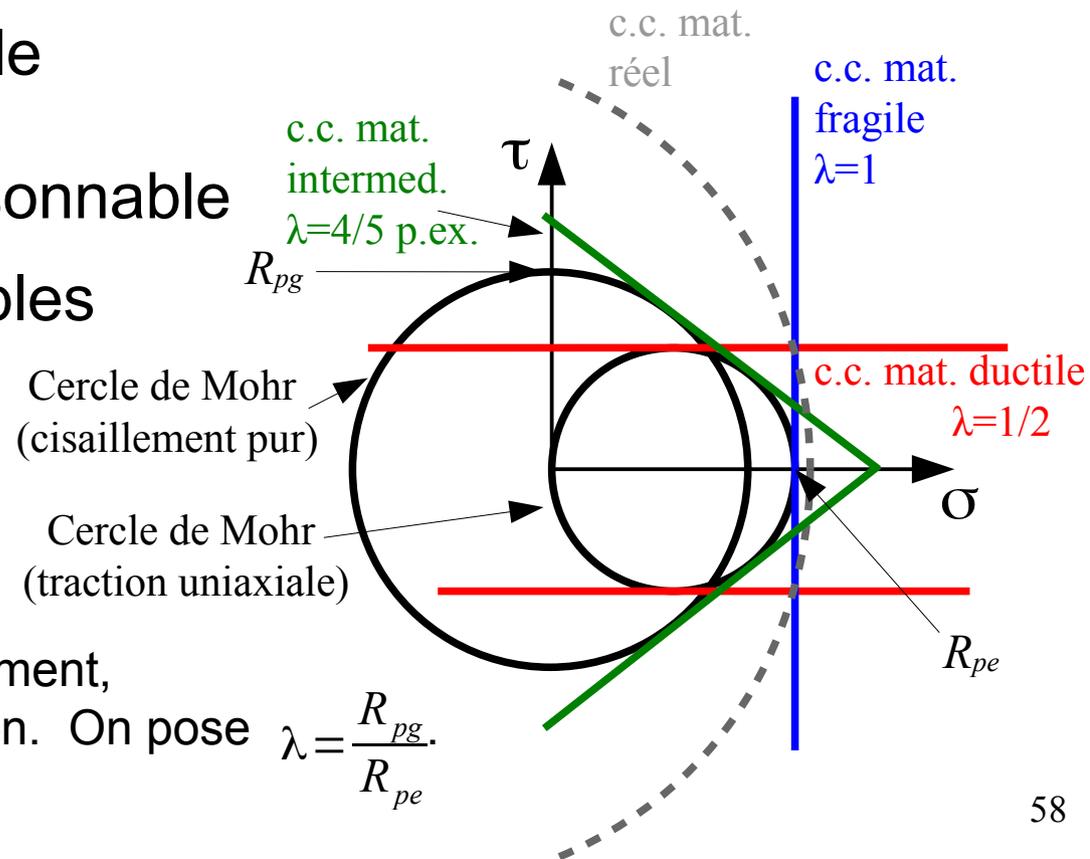
Correspond à la tangence du cercle de Mohr avec une courbe caractéristique (c.c.) du matériau. Si le cercle de Mohr dépasse, il y a rupture. La courbe limite dépend du genre de matériau.

- Cela reste un critère simple qui permet également un pré-dimensionnement raisonnable

- Les modèles les plus simples utilisent des droites  
On peut caractériser ces droites par deux paramètres :

$R_{pg}$  : résistance pratique au cisaillement,

$R_{pe}$  : résistance pratique à la traction. On pose  $\lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}}$ .



## Éléments de RDM

- Le critère de Mohr-Cauchy revient à considérer la contrainte équivalente suivante :

$$\sigma_{mc} = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)\sigma + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

- Cela signifie que partie hydrostatique des contraintes a un effet sur la rupture par cisaillement...
- Le critère de Tresca est obtenu pour  $\lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}} = \frac{1}{2}$
- Le cas  $\lambda = 1$  est souvent appliqué pour les matériaux fragiles (fontes)