

Dimensionnement des arbres I

Prof. Éric Béchet

Dimensionnement des arbres

- Intro
- Éléments de conception
- Méthodes de calcul générales
 - Arbres de manège
 - Solide d'égale résistance
- Arbres courts
- Exercices d'application

Dimensionnement des arbres



Dimensionnement des arbres



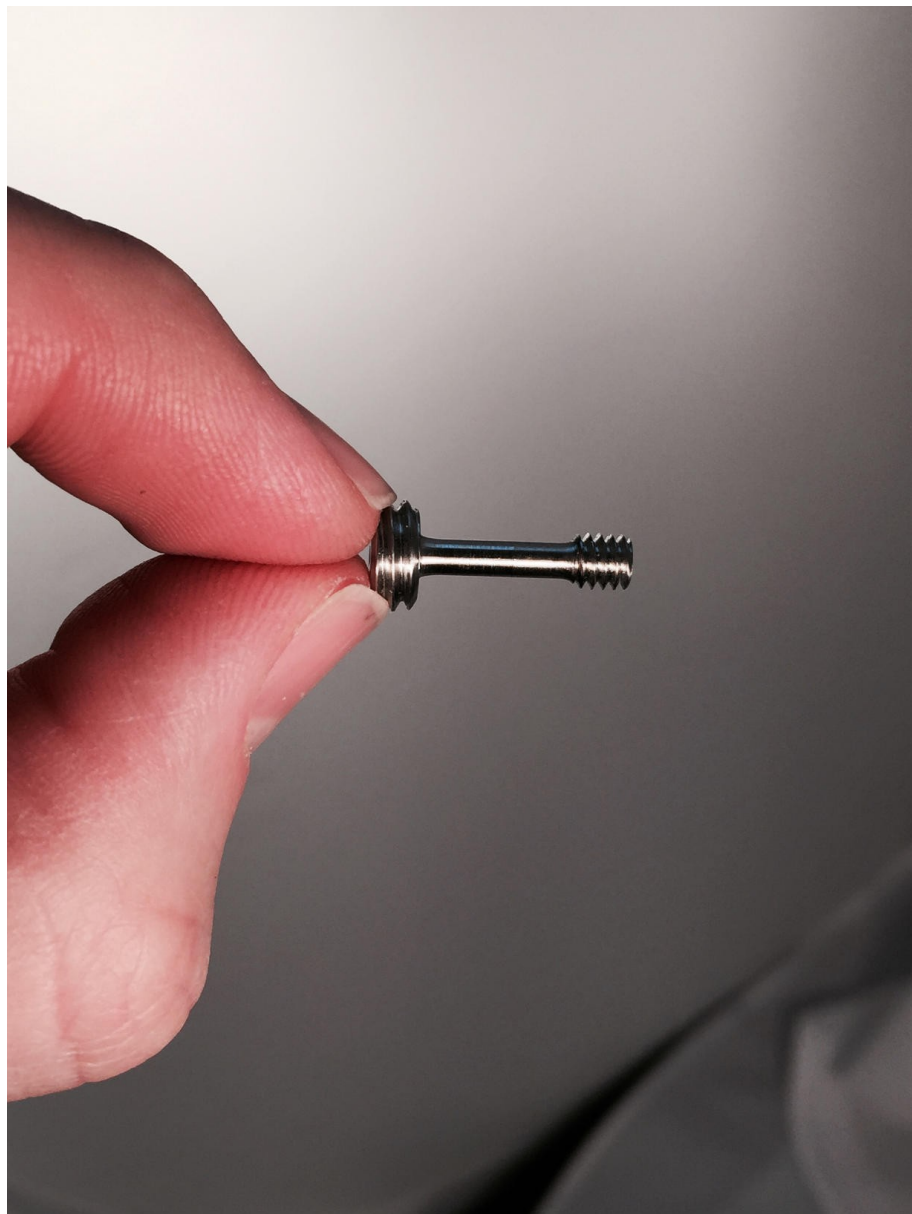
Dimensionnement des arbres



Dimensionnement des arbres



Dimensionnement des arbres



Dimensionnement des arbres

■ Intro

Un arbre est un élément de machine, tournant ou fixe, supportant engrenages, poulies, pignons, etc. Il a généralement une géométrie de révolution. C'est le cas que l'on considère dans la suite.

Il sert à transmettre une puissance, mais peut aussi servir à positionner des éléments entre eux.

Selon son usage, il peut porter plusieurs noms :

- **Arbre de transmission** : transmet un couple, généralement d'un élément moteur vers un autre élément de machine
- **Essieu ou axe** : rotatif ou non, ne transmet pas de couple mais seulement des efforts liés au positionnement.

C'est l'élément de machine - de loin - le plus courant !

Dimensionnement des arbres

- Un arbre en rotation est soumis à plusieurs sollicitations :
 - Certaines sont imposées par la fonction assurée par l'arbre dans le mécanisme, ce sont des sollicitations **externes**
 - Transmettre un couple
 - Supporter/positionner un élément interne au mécanisme
 - Reprise d'efforts externes au mécanisme
 - D'autres sont des conséquences non voulues dues à la conception du mécanisme : sollicitations **internes**
 - Efforts dues aux éléments participant à la/aux fonctions – engrenages (forces générées par le contact), poulies (tension de la courroie) etc.
 - Efforts dus aux liaisons (fretage, clavettes), paliers (en particulier paliers à rouleaux coniques)

Dimensionnement des arbres

- Matériaux les plus courants
 - **Aciers au carbone**, laminés à chaud si pas de besoins de résistance particuliers : 0.15 à 0.30 % de carbone : EN32B, DIN CK15, AISI 1015 ...
 - Pour des arbres « rapides » ou fortement sollicités, aciers autorisant des traitements thermiques 0.30 à 0.60 %C ou aciers alliés type DIN CK35, 30CrNiMo16
 - Autres matériaux :
 - **Titane** (aéronautique) TA6V : usinage plus difficile, coût élevé
 - **Aluminium** : faible limite d'endurance → pas fait pour les fortes sollicitations cycliques, donc plutôt pour du positionnement avec de faibles charges.
 - Plus rarement **composites**

Dimensionnement des arbres

- La rigidité d'un matériau ne dépend en pratique presque pas de la sa nuance : Aciers $\sim 200\text{-}220\text{ GPa}$; seule la limite d'élasticité est fortement variable : de 235 à 1450 MPa
- Même constat pour la masse volumique (aciers $7,8\text{ g/cm}^3$)
- Par conséquent, les caractéristiques d'élasticité des arbres en acier (rigidité de torsion/flexion etc.) ne dépendent que de la **géométrie**.
- Possibilité d'**arbres creux** si la rigidité est un paramètre important... à capacité de transmission égales, un arbre creux est bien plus rigide, pour un poids plus faible
 - Fréquent en aéronautique

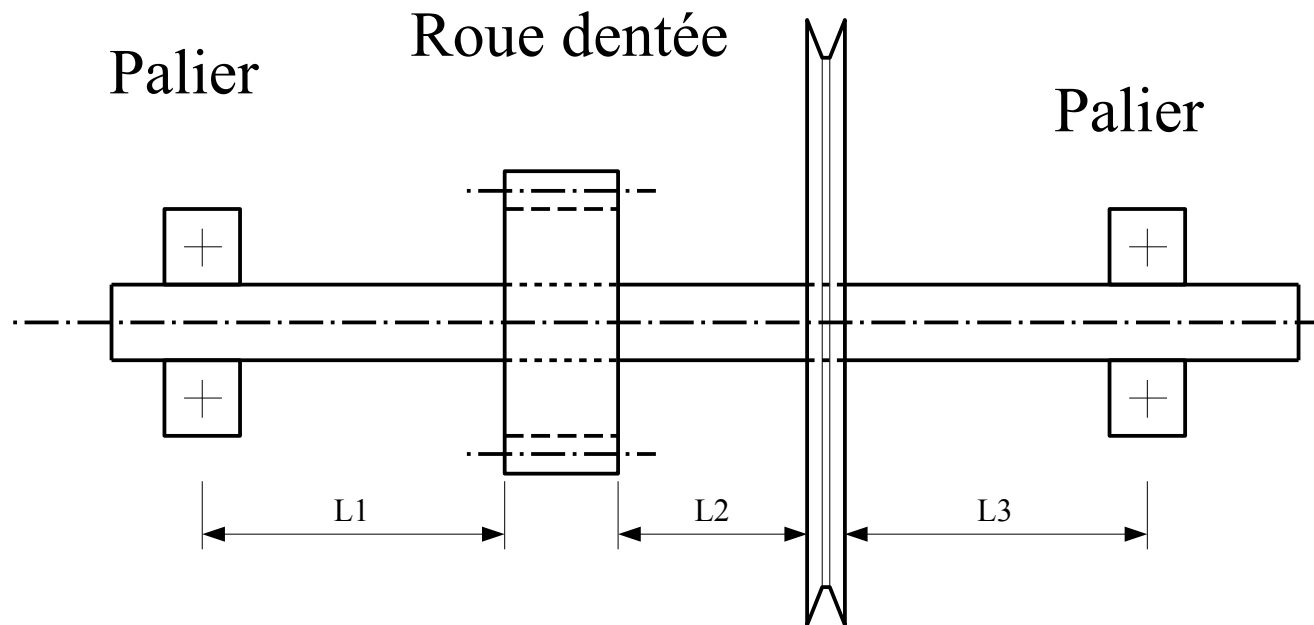
Dimensionnement des arbres

- Éléments de conception
 - But – construction la plus économique possible et la plus sûre → arbre de diamètre le plus faible possible.
 - Le facteur dimensionnant d'un arbre est un des 3 éléments suivant :
 - Résistance (en fatigue ou ultime)
 - Rigidité (pour diminuer la flèche)
 - Stabilité (augmenter la vitesse critique – traité dans la partie II)
 - Quelque soit le critère dimensionnant advenant en premier, le diamètre de l'arbre est grandement influencé par les moments fléchissants... or ceux ci dépendent directement du **positionnement des éléments le long de l'arbre.**

Dimensionnement des arbres

- Positionnement des éléments le long de l'arbre

Poulie

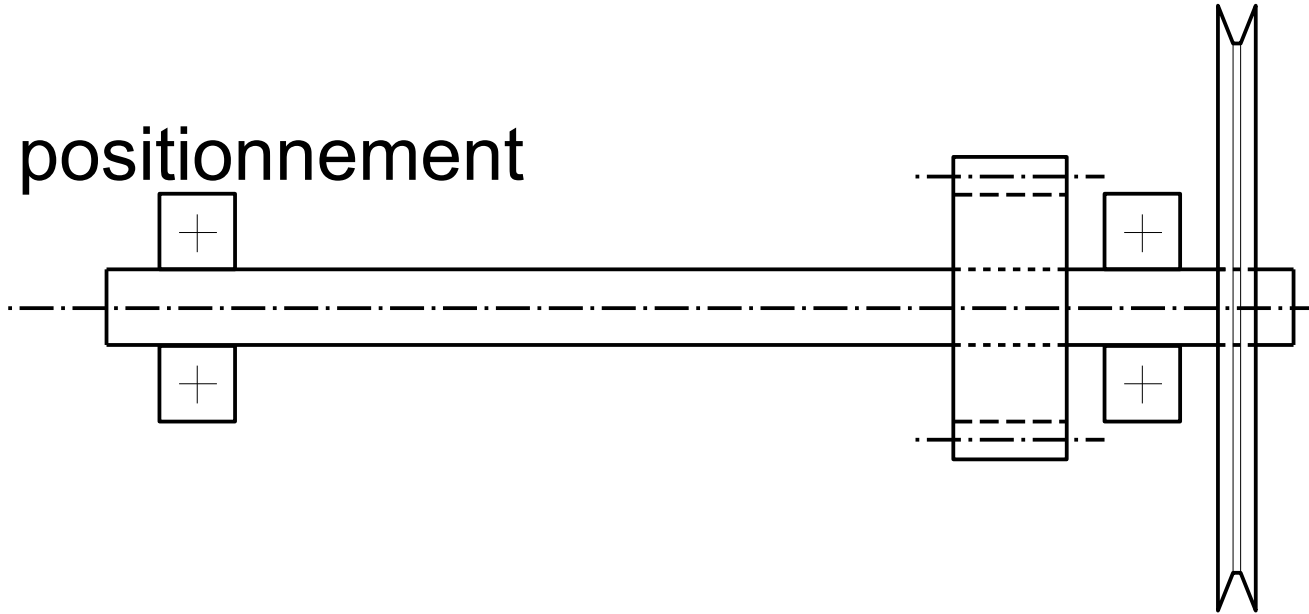


Mauvais positionnement !

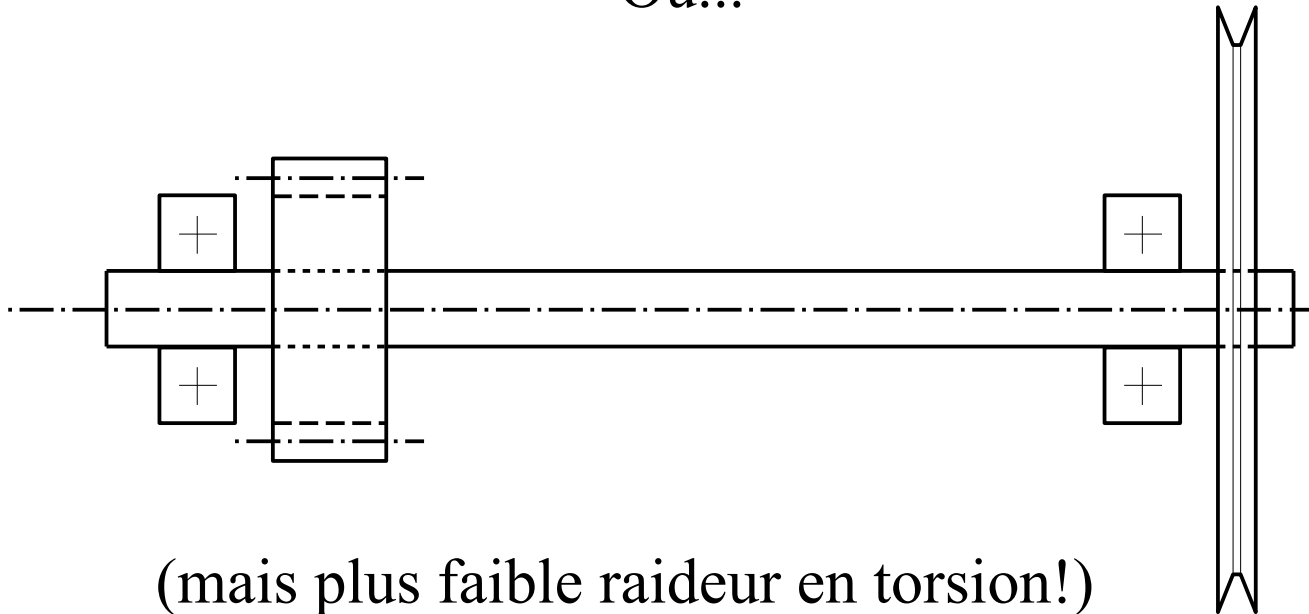
- Il est généralement préférable de positionner les éléments de machine près des liaisons...

Dimensionnement des arbres

- Bon positionnement



Ou...



(mais plus faible raideur en torsion!)

Dimensionnement des arbres

- Méthodes de calcul en prédimensionnement
 - Arbre long (parfois appelé « arbre de manège »)

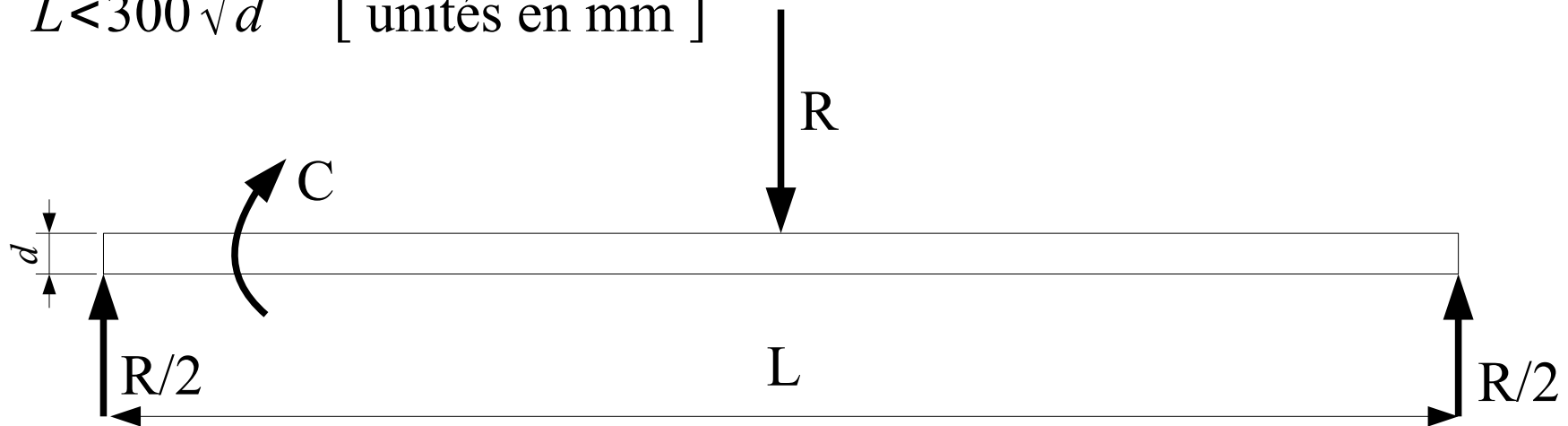
On va se mettre dans un cas le plus défavorable, soit un arbre relativement long, transmettant un couple moteur, associé à une force radiale.
 - Arbre court de section variable (tronçon de commande)

On devra tenir compte des éléments ajoutés à l'arbre et calculer plus précisément un état de contraintes section par section.

Dimensionnement des arbres

- Arbre long (parfois appelé « arbre de manège »)
 - Soit une puissance P à transmettre (en kW), à une vitesse de rotation N (en tr/min). La configuration la plus défavorable est qu'il existe une charge centrale pour un arbre en appui sur ses extrémités.
 - Cette charge peut être due à la tension d'une courroie, à l'angle de pression d'une roue dentée etc.
 - Les normes DIN proposent un entraxe maximal :

$$L < 300 \sqrt{d} \quad [\text{unités en mm}]$$



Dimensionnement des arbres

- Arbre long : trois critères sont à valider !
 - Résistance en torsion-flexion combinée
 - Raideur en flexion (flèche limitée et stabilité dynamique)
 - Raideur en torsion (stabilité de la chaîne cinématique)
- La combinaison des trois critères nous donne la formule des arbres de manèges.
- Cette formule est un outil extrêmement pratique de **pré-dimensionnement**.

Dimensionnement des arbres

- Critère de résistance aux efforts
 - Bilan des efforts :
 - Moment fléchissant M_f , contraintes normales de valeur maximale au droit du point d'application de la force F et sur les fibres les plus éloignées du plan de symétrie perpendiculaire à la force.
 - Moment de torsion M_t , contrainte de cisaillement de valeur maximale à la périphérie du profil.
 - Il existe dans la quasi-totalité des cas un facteur de proportionnalité k entre ces efforts !
 - Pour une roue dentée, la pression de contact est proportionnelle au couple à transmettre, et l'angle de pression est constant $\sim 20^\circ$
 - Pour une courroie, idem, la tension est calculée pour éviter le glissement, et dépend donc du couple transmis
 - Sabot de freinage, même raisonnement ...

Dimensionnement des arbres

- En pratique : $P = M_t \cdot \omega$

$$M_t = 10^6 \frac{60 \cdot P}{2 \pi \cdot N}$$

N.mm ← kW → tr/min →

avec $M_f = k M_t$ et $0.5 < k < 0.7$: ces valeurs sont issues de l'expérience !

- Dans la suite on va prendre $k=0.7$ par précaution.
- Unités pour la suite : mm, kW, MPa , etc...

Dimensionnement des arbres

- Il s'agit donc d'une **sollicitation composée**. On va se ramener à une sollicitation équivalente simple...

En combinant les deux moments, flexion et torsion, on obtient un moment « idéal », qui nous permettra de comparer les contraintes avec une valeur issue d'essais expérimentaux (habituellement la contrainte limite en traction).

- L'objectif est de simplifier le dimensionnement, même si l'état de contrainte est complexe.
- On peut toujours revenir sur le calcul par la suite et affiner - par exemple avec des outils numériques tels que les éléments finis.
 - Ceux ci sont des outils de validation d'un design plus que des outils de conception à proprement parler !

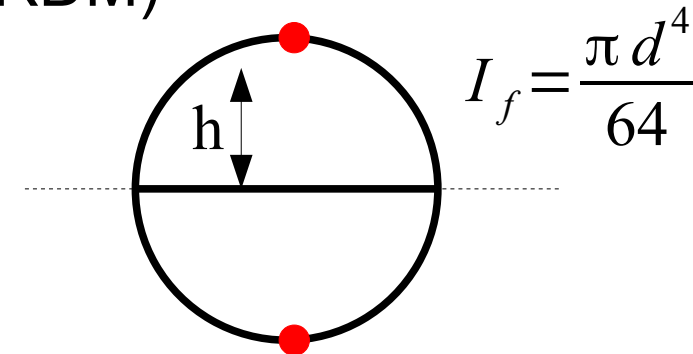
Dimensionnement des arbres

- Critère utilisé pour les matériaux métalliques, et donc l'acier en général : rester dans le domaine élastique **ET** éviter la fatigue.

- Calcul des contraintes dans la section (RDM)

$$\sigma = \frac{h \cdot M_f}{I_f} = \frac{h \cdot M_f}{\frac{\pi d^4}{64}}$$

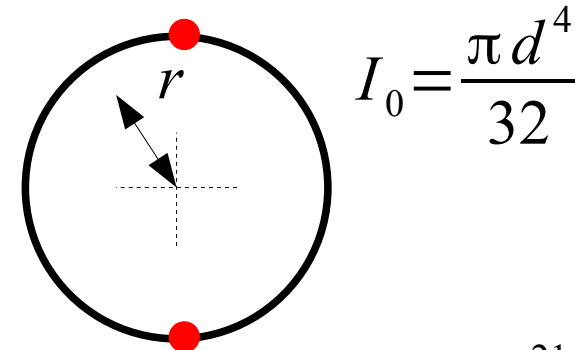
$$\tau = \frac{r \cdot M_t}{I_0} = \frac{r \cdot M_t}{\frac{\pi d^4}{32}}$$



- Les contraintes sont maximales au même endroit : en $h=d/2$ ($r=d/2$) !

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}}$$



Dimensionnement des arbres

- La notion de contrainte équivalente (cf partie RDM) permet de comparer avec un essai de traction simple ...

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{Critère de Tresca (cisaillement max)}$$

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \text{Critère de von Mises (énergie de déformation)}$$

- On va essayer de trouver un **moment idéal** (composé) tenant compte des deux sollicitations : flexion et torsion ...
 - Prenons le cas de Tresca (plus conservatif que von Mises)

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} \rightarrow \sigma_t = \sqrt{\frac{M_f^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2} + \frac{4 \cdot 1}{2^2} \frac{M_t^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2}} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{1}{2} \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{32}} \rightarrow \boxed{M_i = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}}$$

Dimensionnement des arbres

- Avec von Mises, on obtient un critère plus faible (et donc moins sécurisant)

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{M_f^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2} + \frac{3 \cdot 1}{2^2} \frac{M_t^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2}} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

→

$$M_{ivm} = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

- On constate que la formule utilisée pour définir le moment idéal dépend du matériau et *in fine*, du modèle utilisé pour ce matériau : ce n'est pas juste une question géométrique !
- D'autres modèles existent...

Dimensionnement des arbres

- Dans le critère de Mohr-Cauchot, remplaçons

$$\sigma_{mc} = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \sigma + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{\pi d^3}$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

- Le calcul du moment idéal donne dans ce cas la

Formule de Mohr-Cauchot

$$M_i = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) M_f + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

- Dans cette formule,

$\lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}}$ est un paramètre dépendant du matériau avec

R_{pg} : résistance pratique au cisaillement (Mpa)

R_{pe} : résistance pratique à la traction (Mpa).

Dimensionnement des arbres

- Matériaux métalliques ductiles (e.g. acier) $\lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}} = \frac{1}{2}$
$$M_i = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) M_f + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} = \sqrt{M_f^2 + M_t^2} : \text{Formule de Coulomb (ou Tresca !)}$$

- Fontes (classe de matériaux fragiles) $\lambda = 1$
$$M_i = \frac{1}{2} M_f + \frac{1}{2} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} : \text{Formule de Rankine}$$

- Matériaux moulés (e.g. Zamak) $\lambda = \frac{4}{5}$
$$M_i = \frac{3}{8} M_f + \frac{5}{8} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} : \text{Formule de Saint-Venant}$$

- Rappel : matériaux obéissant au critère de von Mises :

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

Dimensionnement des arbres

- Les arbres de machines sont généralement en acier, donc on utilisera ici la formule de Coulomb/Tresca, qui donne :

$$M_i = M_f \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0.7}\right)^2} \approx 1.75 M_f \quad \text{ou} \quad M_i = M_t \sqrt{1 + 0.7^2} \approx 1.225 M_t$$

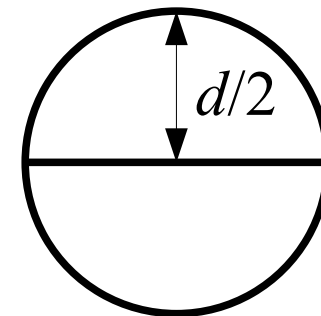
- Calcul de la contrainte max : on suppose une section circulaire. On a donc

- un moment quadratique : $I = \frac{\pi d^4}{64}$

- une distance de la fibre

la plus éloignée de l'axe neutre : $v = \frac{d}{2}$

d'où $\sigma(h) = h \cdot \frac{M_i}{I} \rightarrow \sigma_{max} = v \cdot \frac{M_i}{I}$



- Donc, $\frac{M_i}{\sigma_{max}} = \frac{I}{v} = \frac{\pi d^3}{32}$

Dimensionnement des arbres

- Calcul d'un diamètre acceptable à la contrainte maximale :

$$\frac{M_i}{\sigma_{max}} < \frac{\pi d^3}{32} \quad d > \sqrt[3]{\frac{32 M_i}{\pi \sigma_{max}}} \quad d > \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot P \cdot 1.225}{2 \pi^2 \cdot N \cdot \sigma_{max}}}$$

- d'où $d > 500 \sqrt[3]{\frac{P}{N}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sigma_{max}}} \text{ mm}$

avec N en tr/min, P en kW et σ_{max} en Mpa.

- Pour un acier avec une limite de 50 Mpa, cela donne :

$d > 135 \sqrt[3]{\frac{P}{N}}$

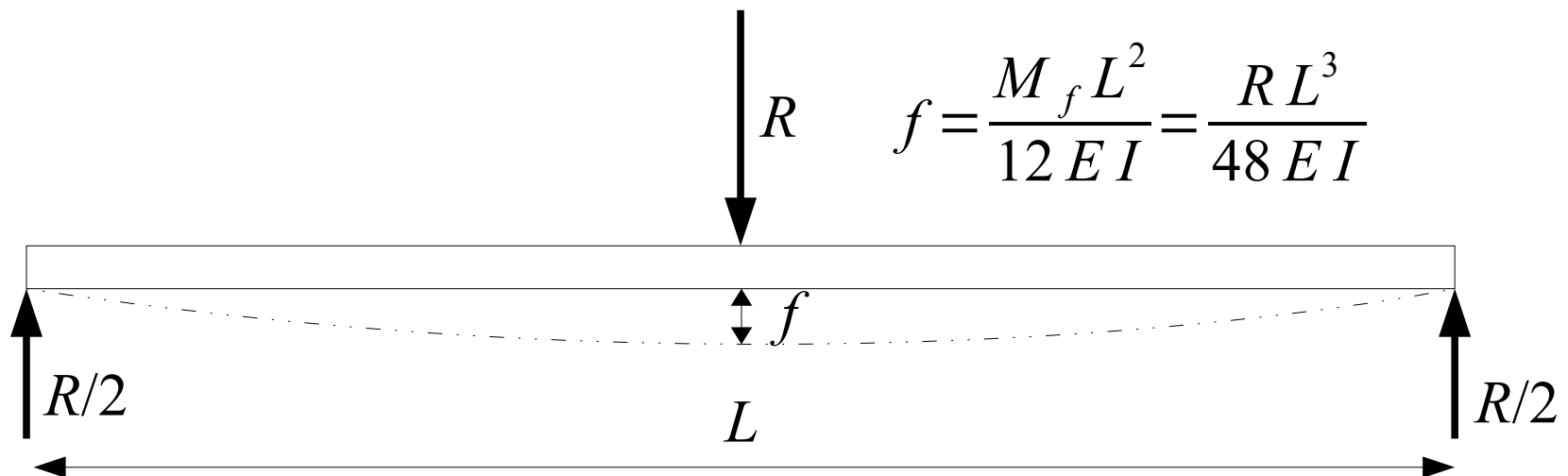
 avec les mêmes unités.

Dimensionnement des arbres

- Critère basé sur la flèche maximale
 - Souvent, on ne peut accepter des écarts trop importants (p.ex. les dentures doivent s'engrener correctement...)

On ne tient compte que du moment de flexion...

$$M_f = k M_t \text{ avec } M_t = 10^3 \frac{60 \cdot P}{2 \pi \cdot N} \text{ et } k = 0.7 .$$



Dimensionnement des arbres

- Tentons de trouver une relation entre la flèche relative $\frac{f}{L}$ et σ_{max} admissible ...

$$f = \frac{M_f L^2}{12 E I} \quad I = \frac{\pi d^4}{64} \quad \rightarrow \quad M_f = 12 E \pi d^4 \frac{f}{64 L^2}$$

$$\text{On a également } M_f = \frac{M_i}{1.75} = \frac{\pi d^3}{32 \cdot 1.75} \sigma_{max}$$

d'où

$$12 E \pi d^4 \frac{f}{64 L^2} = \frac{\pi d^3}{32 \cdot 1.75} \sigma_{max} \quad \rightarrow \quad \sigma_{max} = 1.75 \cdot 6 \cdot E \cdot \frac{f}{L} \cdot \frac{d}{L}$$

Pour $\sigma_{max} = 50$ MPa et $E = 217500$ MPa, $L = 300 \sqrt{d}$ on a :

$$\frac{f}{L} = \frac{6.57 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{d}}, \text{ soit de l'ordre de } 10^{-4} \text{ à } 10^{-3} \text{ pour des}$$

diamètres compris entre 50 et 200 mm

Dimensionnement des arbres

- Une flèche relative de 10^{-3} est assez significative - on ne peut donc pas dépasser cette valeur.
 - Pour des diamètres inférieurs à 50mm, c'est même au-delà.
- Il est en pratique inutile de considérer des résistances σ_{max} supérieures à 50 MPa pour l'acier servant à fabriquer l'arbre. Si l'on se base sur un acier plus résistant, le dimensionnement ne sera pas correct car la flexion trop prononcée (→ arbre creux !)
 - N'oublions pas que le moment de flexion est supposé proportionnel au moment de torsion... et que le module de Young ne varie pas avec σ_{max} !
 - On peut également noter que la contrainte admissible pour une durée de vie supérieure à 10^6 cycles d'un acier mi-dur en flexion rotative vaut approximativement 50 MPa :
 $R_0 = 500$ MPa (contrainte ultime) $R_e = 280$ MPa (limite élastique)
d'où $R_1 \sim 1/3 * 280 / 1.8 = 52$ MPa , avec un facteur de sécurité $K=1.8$ (méthode de Seefehlner pour la flexion alternée, cf suite du cours)

Dimensionnement des arbres

- Critère basé sur la raideur en torsion
 - L'objectif est de garantir un fonctionnement hors fréquences propres de la chaîne cinématique, donc que celles-ci soient assez élevées
 - On estime que la torsion ne doit pas dépasser environ 1/4 de degré d'angle par mètre de longueur d'arbre.

$$\theta = \frac{\pi}{4 \cdot 180} 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

$$\text{or, } \theta = \frac{M_t}{G I_p} \text{ avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \text{ et } M_t = 10^6 \frac{60 \cdot P}{2\pi \cdot N}$$

$$\theta = 10^6 \frac{60 \cdot 32 (1+\nu)}{E \pi^2 d^4} \frac{P}{N} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt[4]{10^6 \frac{60 \cdot 32 (1+\nu)}{E \pi^2 \theta} \frac{P}{N}}$$

Dimensionnement des arbres

- Avec les valeurs numériques choisies, le critère donne :

$$d = \sqrt[4]{10^6 \frac{60 \cdot 32 (1 + \nu)}{E \pi^2 \theta}} \sqrt[4]{\frac{P}{N}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4 \cdot 180} 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

$$E = 217500 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$d > 128 \sqrt[4]{\frac{P}{N}}$$

à comparer avec $d > 135 \sqrt[3]{\frac{P}{N}}$ pour les deux précédents critères.

- On choisit globalement la formule « composite » suivante :

$$d > 130 \sqrt[n]{\frac{P}{N}} \text{ avec } \begin{cases} n=3 & \text{si } P/N \geq 1 \\ n=4 & \text{si } P/N \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} P \text{ en kW} \\ N \text{ en tr/min} \\ d \text{ en mm} \end{matrix}$$

Formule dite des « arbres de manèges ».

Dimensionnement des arbres

- Que signifie cette formule ?

$$d > 130 \sqrt[n]{\frac{P}{N}} \text{ avec } \begin{cases} n=3 & \text{si } P/N \geq 1 \\ n=4 & \text{si } P/N \leq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} P \text{ en kW} \\ N \text{ en tr/min} \\ d \text{ en mm} \end{array}$$

$$L < 300 \sqrt{d} \quad (\text{en mm})$$

Elle n'est valable que pour des arbres pleins en acier.
Si on l'utilise,

- elle limite la contrainte équivalente $\sigma_{max} \leq 55 \text{ MPa}$
- elle limite la flèche relative à $\frac{f}{L} \leq \frac{6.57 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{d}}$
- elle limite l'angle de torsion à $\theta \leq \frac{1162}{d^4} \frac{P}{N} \text{ (rad/mm)}$
- En outre, connaissant les dimensions d'un arbre, le couple maximal transmissible est :

$$M_{tmax} \leq 10^7 \left(\frac{d}{130} \right)^n \text{ N.mm avec } \begin{cases} n=3 & \text{si } d/130 \geq 1 \\ n=4 & \text{si } d/130 \leq 1 \end{cases}$$

Dimensionnement des arbres

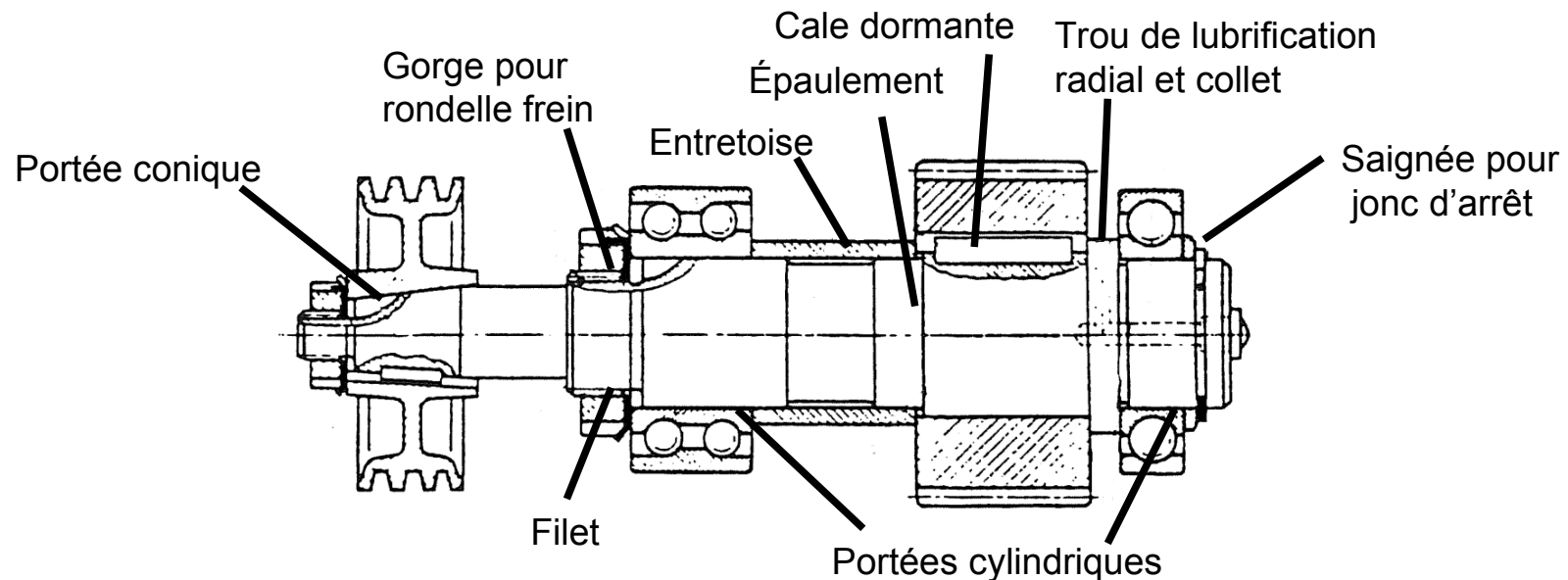
- Cas des arbres de section variable (tronçons de commande)
 - Ils sont munis de poulies, roues, de ce fait le couple n'est pas constant le long de l'arbre.
 - Ils sont relativement courts !
 - Les effets de flexion ne sont pas dominants, et le critère de la flèche n'est pas pertinent **dans un premier temps***.
 - Démarche :
 - Calcul des résultantes des efforts extérieurs (immédiat si isostatique, par itérations si hyperstatique)
 - Calcul des moments de torsions (constants) dans chaque tronçon
 - Calcul des moments fléchissants
 - Calcul du moment idéal (idem arbre de manège)
 - Calcul du diamètre local (même formule que arbres de manège, mais $n=3$ *)

Dimensionnement des arbres

- En pratique :
 - On calcule les efforts extérieurs :
 - Poulies : tension brin tendu T , brin mou t , effort périphérique Q
 - Roue dentées : efforts tangentiel F_t , radial F_r , axial F_x (si denture hélicoïdale)
 - On projette ces efforts dans deux plans perpendiculaires, notés V et H
 - Ensuite, calcul des réactions des appuis R_V , R_H (R_x axial n'est pas considéré car peu susceptible d'influence sur la géométrie de l'arbre, sauf cas particuliers)
 - Calcul des moments de flexion Mf_V , Mf_H
 - Calcul du moment résultant $Mf = \sqrt{Mf_V^2 + Mf_H^2}$
 - Calcul du moment de torsion (généralement constant par tronçons) $Mt = \frac{P}{\omega}$
 $Mt = F \cdot D/2$ $F = T - t$ (poulie) $F = Ft$ (roue dentée)
 - Calcul du moment idéal $Mi = \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$ (Tresca) ou $Mi = \sqrt{Mf^2 + 3/4 Mt^2}$ v. Mises
 - Calcul du diamètre caractéristique du solide d'égale résistance : $d_{SER} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{Mi}{R}}$
 Ce diamètre varie en fonction de la position !
 On choisit souvent $R=50$ MPa comme point de départ.

Dimensionnement des arbres

- On obtient alors un SER, Solide d'Égale Résistance, de diamètre **variable le long de l'arbre**.
- Ce SER est le noyau sur lequel vont se greffer les éléments de liaison aux roues, poulies, portées cylindriques ou coniques imposées par les roulements etc.
- Il faut y rajouter un habillage...
 - Le SER ne doit jamais être entamé (e.g. par une rainure de clavette) !



Dimensionnement des arbres

- Cas de l'arbre hyperstatique
 - Obligation d'**itérer** !
 - Considérer un arbre de section constante, puis calculer les réactions aux appuis (hyperstatiques)
 - Méthodes vues en RDM (théorème de réciprocité de Maxwell-Betti par exemple)
 - Utiliser les réactions d'appui ainsi calculées pour déterminer le premier SER, constitué de sections de diamètre non constant
 - Ce SER conduit alors à des réactions hyperstatiques différentes (car sa raideur est différente ...)
 - On calcule donc ces réactions, qui mènent à un second SER, déjà très proche de la solution.
 - Les calculs à la main sont fastidieux, mais toutes ces étapes peuvent être assez facilement automatisées.

Dimensionnement des arbres

Arbres courts

Dimensionnement des arbres

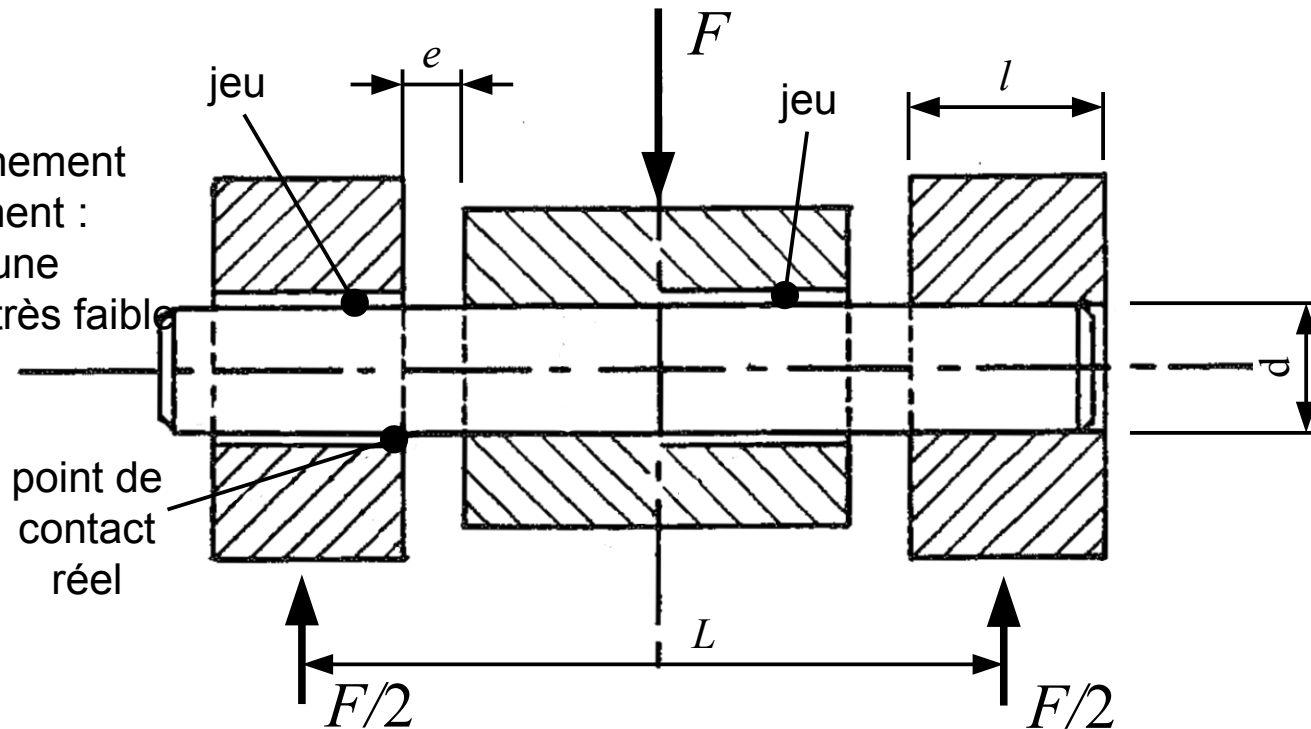
- Cas des arbres courts sans torsion (positionnement)
 - Arbre courts, points d'application des efforts proches des appuis : deux cas selon le type d'assemblage
 - On vérifie les deux cas

Cas 1

Dimensionnement
en cisaillement :
flexion sur une
longueur e très faible

**Effort
tranchant
maxi**

$$T = \frac{F}{2}$$



Cas 2

dimensionnement
à la flexion, car $L > l > e$

**Moment
fléchissant
maxi**

$$M_f = \frac{FL}{4} \text{ bi-appuyé}$$

$$M_f = \frac{FL}{8} \quad \text{bi-encastéré}$$

$$M_f = \frac{3FL}{16} \text{ encastrement imparfait }^{39}$$

Dimensionnement des arbres

■ Cas 1 : encastrement et cisaillement prépondérant

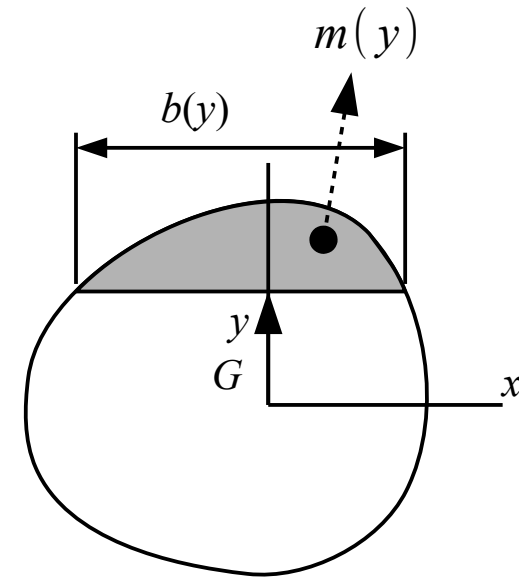
On calcule l'effort de cisaillement maxi

- On reprend la Formule de Jourawski $\tau(x, y) = \frac{m(y) T}{I_x b(y)}$
 → répartition parabolique des contraintes
 Attention, c'est valable pour du cisaillement **en présence de flexion**

(si il y a uniquement du cisaillement, on suppose une répartition uniforme...)

- Pour une section circulaire : $\tau(x, y) = \frac{16 T (d^2 - 4 y^2)}{3 \pi d^4}$

$$\tau_{max} = \frac{16 T (d^2 - 4 y^2)}{3 \pi d^4} \Big|_{y=0} = \frac{16 T}{3 \pi d^2} \quad \left(= \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi d^2 / 4} = \frac{4}{3} \tau_{moy} \right)$$



Dimensionnement des arbres

- Si l'on connaît la contrainte de cisaillement limite, on peut alors déterminer le diamètre mini :

$$d_{min} > \sqrt{\frac{16 T}{3 \pi \tau_{max}^*}}$$

- En général, τ_{max}^* est déterminée à l'aide d'essais en traction en utilisant la formule des contraintes équivalentes (e.g. von Mises ou Tresca):

$$\sigma_{eq\ vm} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \quad \tau_{max\ vm}^* = \frac{\sigma_{max}^*}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_{eq\ tr} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad \tau_{max\ tr}^* = \frac{\sigma_{max}^*}{2}$$

$$d_{min\ vm} > \sqrt{\frac{16 T}{\sqrt{3} \pi \sigma_{max}^*}}$$

$$d_{min\ tr} > \sqrt{\frac{32 T}{3 \pi \sigma_{max}^*}}$$

- Comme dans la formule des arbres de manège, σ_{max}^* dépend de la fatigue, du coefficient de sécurité etc. Dans les mêmes conditions, il vaut environ 50 Mpa – en cas d'efforts alternés (bielle), 100 Mpa (efforts non alternés), ou 150 Mpa (cas statique) ... ou plus si les alliages d'acier utilisés le permettent.

Dimensionnement des arbres

- Cas 2 : Flexion dominante

- Contraintes telles que :

$$\sigma = \frac{y \cdot M_f}{I_f} = \frac{y \cdot M_f}{\frac{\pi d^4}{64}} \quad \sigma_{max} = \frac{y \cdot M_f}{\frac{\pi d^4}{64}} \bigg|_{y=\frac{d}{2}} = \frac{32 M_f}{\pi d^3}$$

- D'où le diamètre minimal :

$$d_{min} > \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{M_f}{\sigma_{max}^*}}$$

- Attention, impossible de combiner simplement les cas 1 et 2 ici : τ_{max} ne se trouve pas au même endroit que σ_{max} en flexion

Dimensionnement des arbres

- On doit vérifier les deux cas pour la même force

- Cas 1 : $T = \frac{F}{2}$

$$d_{mintr} > \sqrt{\frac{16 F}{3 \pi \sigma_{max}^*}}$$

- Cas 2 : par exemple bi-appuyé (cas le plus défavorable)

$$M_f = \frac{FL}{4}$$

$$d_{min} > \sqrt[3]{\frac{8}{\pi} \frac{FL}{\sigma_{max}^*}}$$

- Pour quelle valeur de L arrive-t-on à la même valeur ?

$$\frac{L_{cr}}{d_{min}} = \frac{\sqrt{\frac{64}{27 \pi} \frac{F}{\sigma_{max}^*}}}{\sqrt{\frac{16 F}{3 \pi \sigma_{max}^*}}} = \frac{2}{3}$$

Dimensionnement des arbres

- Vérification : pression de contact aux appuis

- Cas 1

$$p = \frac{T}{d l} < \sigma_{max}^* \quad d = \sqrt{\frac{16 T}{\sqrt{3} \pi \sigma_{max}^*}} \quad d^2 = \frac{16 T}{\sqrt{3} \pi \sigma_{max}^*} \quad T = \frac{\sqrt{3} \pi d^2 \sigma_{max}^*}{16}$$

$$\frac{l}{d} > \frac{\sqrt{3} \pi}{16} = 0.34 \quad \longrightarrow \text{En général vérifié : } l > d \text{ pour des raisons pratiques}$$

- Cas 2

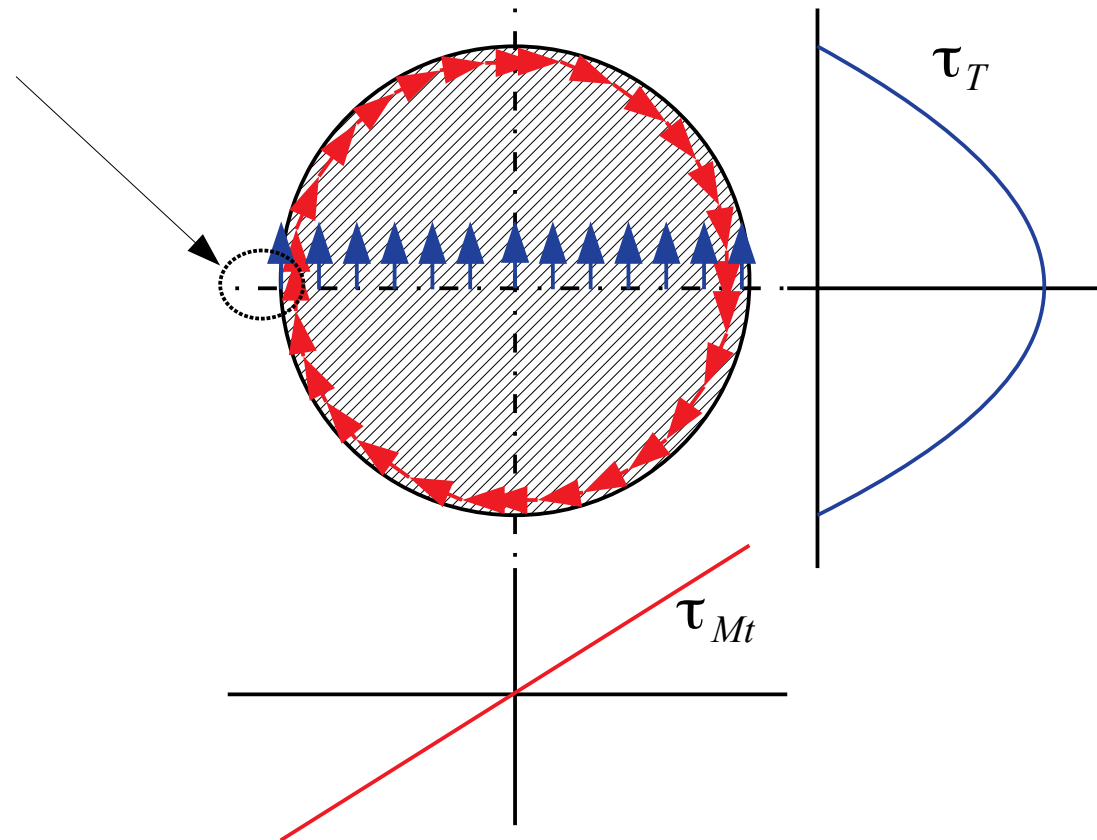
$$p = \frac{F}{2 d l} < \sigma_{max}^* \quad d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{M_f}{\sigma_{max}^*}} \quad d^3 = \frac{32}{\pi} \frac{F L}{4 \sigma_{max}^*} \quad F = \frac{4 \pi d^3 \sigma_{max}^*}{32 L}$$

$$\frac{L l}{d^2} > \frac{\pi}{16} = 0.19 \quad \longrightarrow \text{En général vérifié : } l > d \text{ (cf plus haut)} \\ L > d \text{ (même raisonnement)}$$

Dimensionnement des arbres

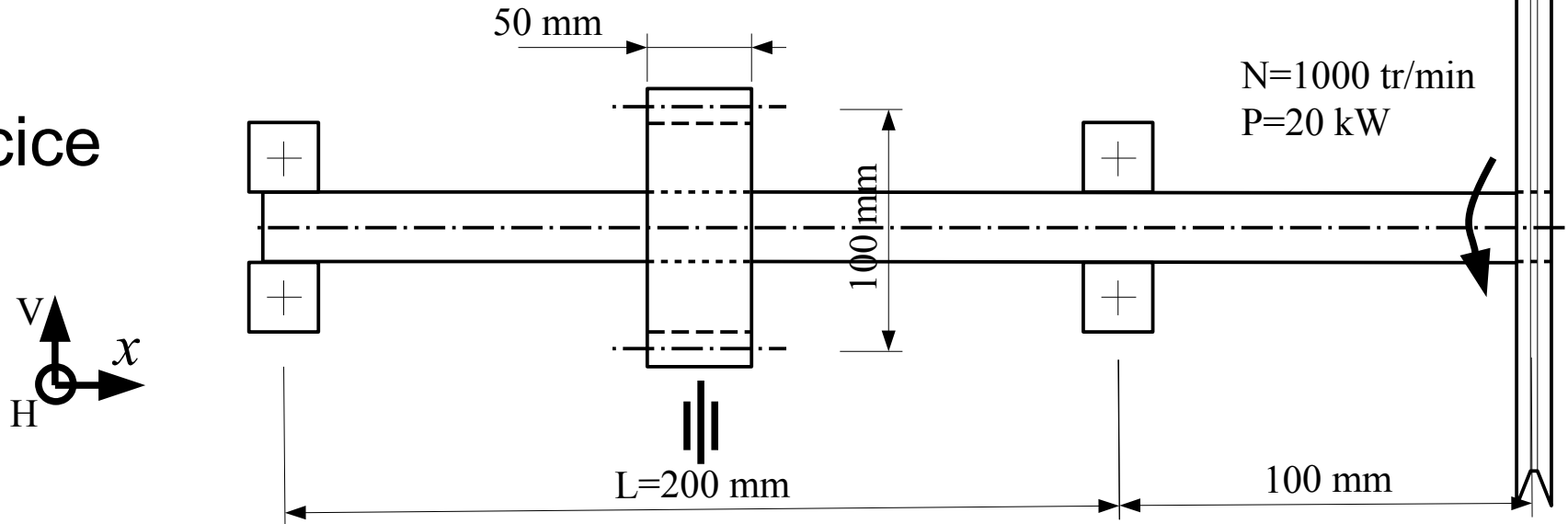
- Et si on y ajoute de la torsion ?
- Trouver l'endroit pour lequel les contraintes de cisaillement dus à la torsion et celles dues à l'effort tranchant se combinent de façon « additive »

$$\tau_{max} = \frac{16|M_t|}{\pi d^3} + \frac{16|T|}{3\pi d^2}$$



Dimensionnement des arbres

■ Exercice



- Un arbre transmet un mouvement d'une poulie vers une roue dentée droite ($\alpha : 20^\circ$). La roue dentée entraîne une autre située en dessous (non dessinée).
 - 1) Calculer le diamètre de l'arbre à l'aide de la formule des arbres de manèges.
 - 2) Calculer toutes les réactions, les moments fléchissants, les couples, et en déduire un SER (calculer les diamètres pour $x = 0, 25, 50, 100, 150, 200, 250, 300 \text{ mm}$). Qu'en concluez vous par rapport à la formule des arbres de manèges ?

Note : tous les éléments sont en acier, $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$, contrainte limite 50 MPa , $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ selon V , $E = 210000 \text{ MPa}$