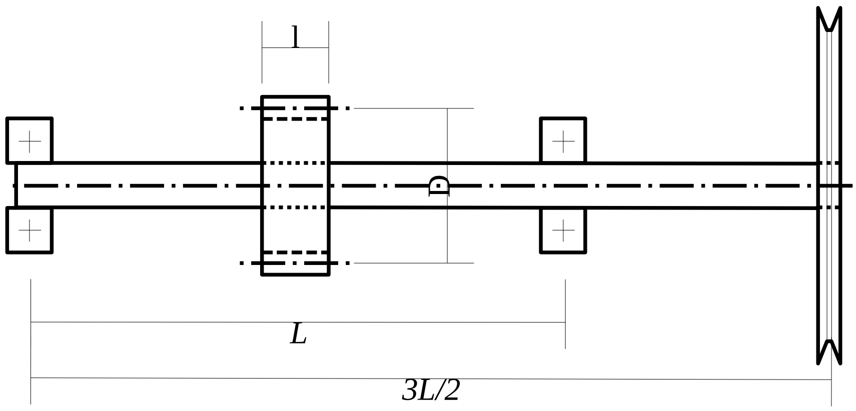
Données

$N = 1000 \quad tr.min^{-1}$
$P = 20000 \quad W$
$M = 100 \quad Kg$
$g = 9.81 \quad m.s^{-2}$
$L = 0.2 \quad m$
$D = 0.1 \quad m$
$\alpha = 20° = 0.3490 \quad rad$
$l = 0.05 \quad m$
$\rho = 7800 \quad kg.m^{-3}$
$E = 210.10^9 \quad Pa$
$R = 50.10^6 \quad Pa$



Calcul des vitesses critiques de rotation

d_{max}=40 mm $\quad I = \frac{\pi d_{max}^4}{64} = 1.2566.10^{-7} \quad m^4$

Volume et masse de la roue dentée

$$V_R = \frac{l}{4}(\pi D^2 - \pi d_{max}^2) = 330 \quad cm^3 \qquad m_R = \rho V_R = 2.573 \quad Kg$$

Masse de l'arbre

$$V_A = \frac{3L}{8}(\pi d_{max}^2) = 377 \quad cm^3 \qquad m_A = \rho V_A = 2.940 \quad Kg$$

Masse linéique

$$ml_a = \frac{\rho}{4}(\pi d_{max}^2) = 9.8 \quad kg.m^{-1}$$

Pulsation propre de la roue dentée

$$\omega_R = \sqrt{\frac{48 EI}{m_R L^3}} = 7844.6 \quad rad.s^{-1}$$

Pulsation propre du poids en bout d'arbre

Déflexion en bout d'arbre : il faut calculer la déformée et prendre la valeur en bout d'arbre. Soit par des méthodes énergétiques, soit par double intégration du moment fléchissant.
Avec les méthodes énergétiques , on doit simplement écrire l'énergie de déformation et dériver celle ci en fonction de la force en bout d'arbre.

$$y\left(\frac{3L}{2}\right) = \frac{\partial E_e}{\partial F} \qquad E_e = \int_0^{3L2} M_f^2 dx \qquad M_f = -\frac{F}{2}x + \frac{3F}{2}(x-L)^+$$

On obtient $y\left(\frac{3L}{2}\right) = \frac{FL^3}{8EI}$.

Au final :

$$\omega_P = \sqrt{\frac{8 EI}{m_R L^3}} = 513.7 \quad rad.s^{-1}$$

Pulsation propre de l’arbre

On doit recalculer les pulsations propres pour les CL particulières…

Solution générale :

$$y(x)=C_1 y_1(ax)+C_2 y_2(ax)+C_3 y_3(ax)+C_4 y_4(ax)$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(L)=0 \\ y''(0)=0 \\ y''(3L/2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3=0 \\ C_4=0 \end{cases}$$

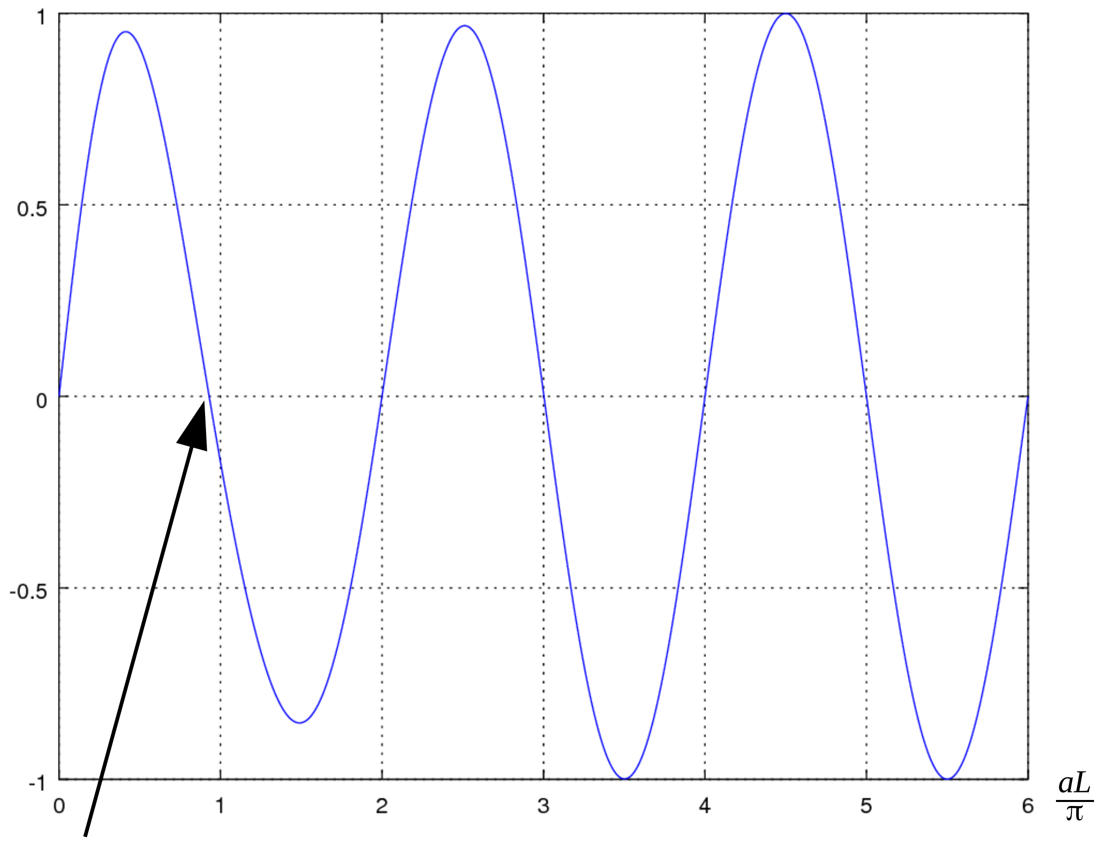
Solution non triviale :det K=0

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ f_1(aL) & f_2(aL) & f_3(aL) & f_4(aL) \\ f_2(3aL/2) & f_1(3aL/2) & f_4(3aL/2) & f_3(3aL/2) \end{pmatrix}=0$$

au final :

$$\sin aL \sinh\frac{3aL}{2}+\sin\frac{3aL}{2}\sinh aL=0$$

Racines de $\dfrac{\sin aL \sinh\frac{3aL}{2}+\sin\frac{3aL}{2}\sinh aL}{\sinh aL+\sinh\frac{3aL}{2}}$:



Première racine (excepté 0) : $aL \approx 0.929745\pi = 2.92088$

Racines suivantes : $aL \approx n\pi$, $n>1$ (le terme en sinh3aL/2 est dominant pour aL>=2pi, donc les racines sont celles de sin aL ...)

$$\omega_I=\frac{[aL]^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{ml_A}}=11067 \quad \text{rad.s}^{-1}$$

Première pulsation propre de l’ensemble

$$\frac{1}{\Omega^2}=\frac{1}{\omega_R^2}+\frac{1}{\omega_P^2}+\frac{1}{\omega_I^2}$$

$\Omega = 512\,\text{rad.s}^{-1}$ (correspond à 4890 tr.min^{-1})