

## Dimensionnement des arbres II

Prof. Éric Béchet

## Dimensionnement des arbres

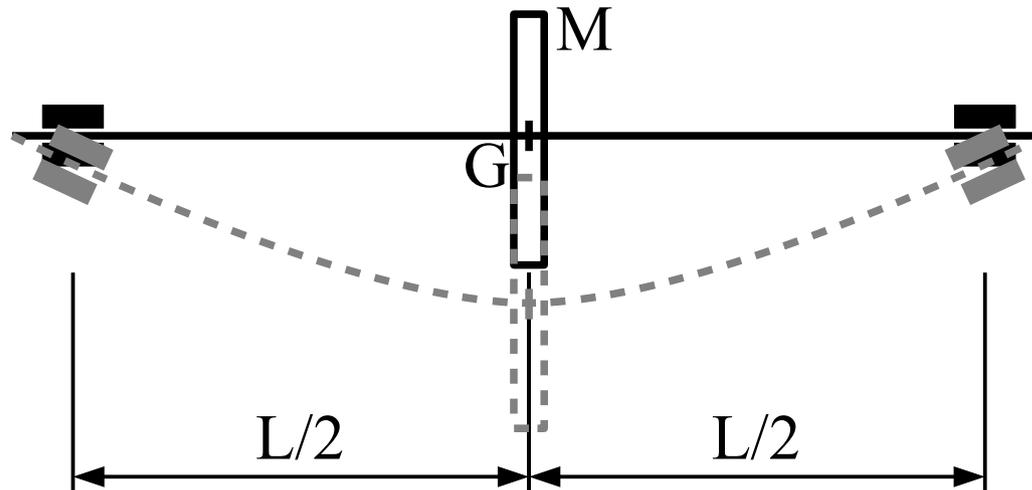
Aspects dynamiques

## Dimensionnement des arbres

- Vitesse(s) critique d'un arbre
  - Comme tout élément de machine, les arbres sont soumis à des sollicitations cycliques. Celles ci sont susceptibles d'exciter un ou plusieurs modes vibratoires, et par conséquent, d'induire des niveaux de vibrations tels que la fonction de l'arbre n'est plus assurée, voire la destruction de l'arbre par fatigue.
  - Nous allons étudier cela en partant d'un cas simple, puis étendre aux cas plus courants.

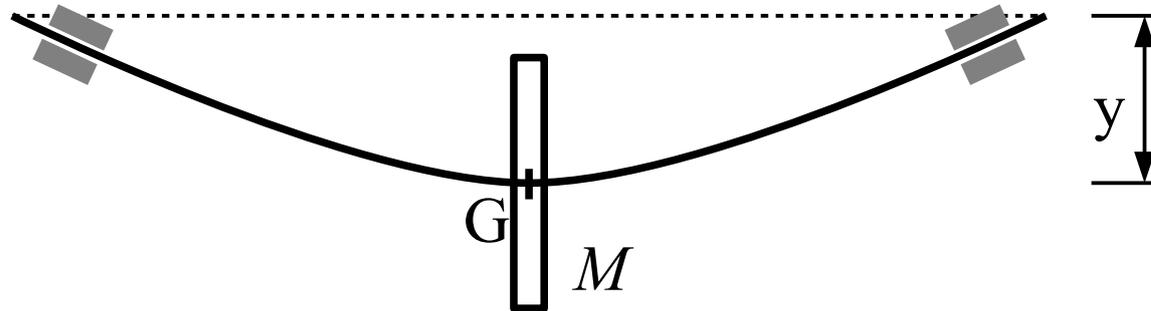
## Dimensionnement des arbres

- Cas simple : arbre sans masse pourvu d'un disque, tournant à vitesse constante



- Soit  $I$  le moment quadratique de l'arbre,  $M$  la masse du disque.
- Supposons qu'une flèche «  $y$  » apparaisse fortuitement (perturbation infinitésimale)

## Dimensionnement des arbres



- Supposons qu'une flèche «  $y$  » apparaisse fortuitement (suite à une perturbation infinitésimale), on a alors une force centrifuge due à la perte de symétrie du problème :

$$F = M \omega^2 \cdot y$$

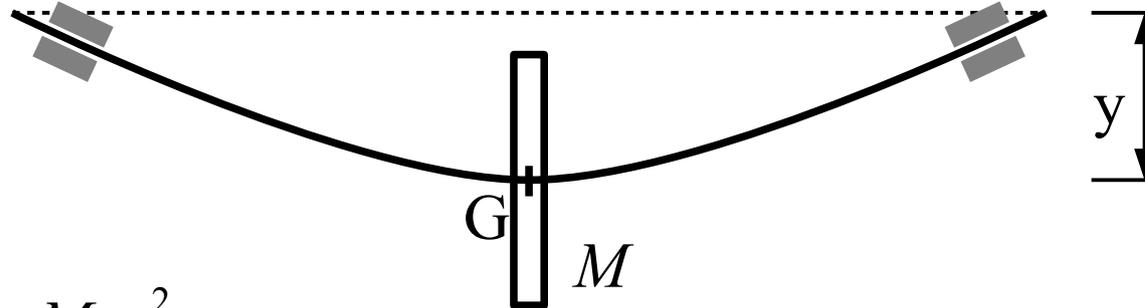
- La poutre va réagir élastiquement à cette force. Calculons la déflexion « élastique » (positive vers le bas), due à une telle force  $F$  :

$$y'' = -\frac{M}{EI} \quad M(x) = x \frac{F}{2} - \left(x - \frac{L}{2}\right)^+ F \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(L/2) = 0 \end{cases} \text{ par symétrie}$$

- entre 0 et  $L/2$  :

$$y(x) = -\frac{F x^3}{12 EI} + Ax + B \quad \begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ y'(L/2) = 0 \rightarrow A = L^2 F / 2 \end{cases} \quad y(L/2) = \frac{F L^3}{48 EI} \quad 5$$

## Dimensionnement des arbres



$$F = M \omega^2 \cdot y$$

$$y = \frac{F L^3}{48 EI}$$

- Éliminons  $F$ , il vient  $M \omega^2 = \frac{48 EI}{L^3}$ , d'où  $\omega = \sqrt{\frac{48 EI}{M L^3}}$ .
- Il existe donc une vitesse, unique au sens de rotation près, pour laquelle il y a équilibre entre la force centrifuge et la force de rappel élastique.

## Dimensionnement des arbres

- Vitesse critique, pour laquelle il y a équilibre entre la force centrifuge et la force de rappel élastique :

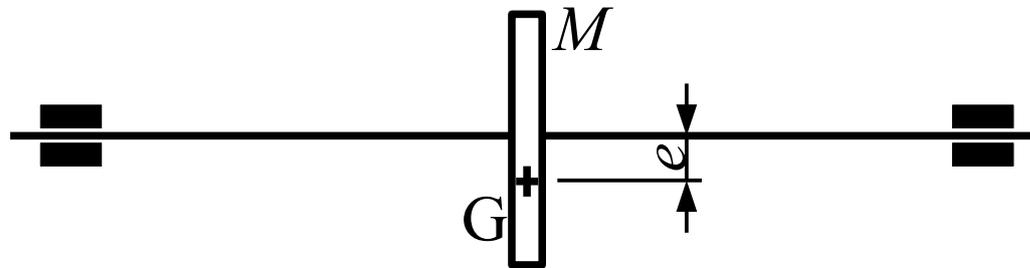
$$\omega_c = \sqrt{\frac{48 EI}{M L^3}}$$

Que se passe-t-il si  $\omega < \omega_c$  ?

- La force de rappel élastique est plus grande, donc l'arbre revient dans sa position initiale, sans déformation, après amortissement des oscillations.

Et si  $\omega \geq \omega_c$  ?

- Divergence et destruction de l'arbre... ou autocentrage !
- Introduisons un léger *balourd*, ce qui revient à décaler le centre de gravité d'une distance  $e$  (excentricité) :



## Dimensionnement des arbres

- Avec un balourd :  $F = M \omega^2 \cdot (y + e)$  et  $y = \frac{F L^3}{48 EI}$   
d'où :

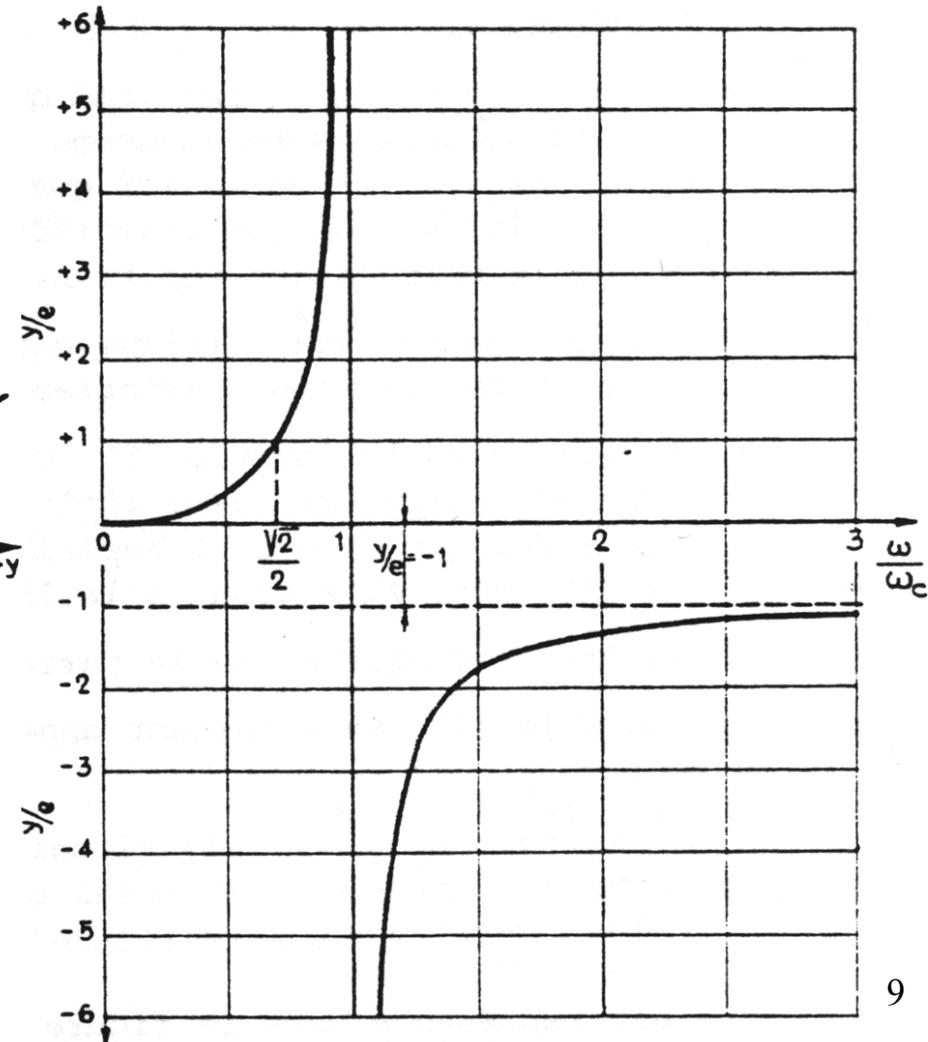
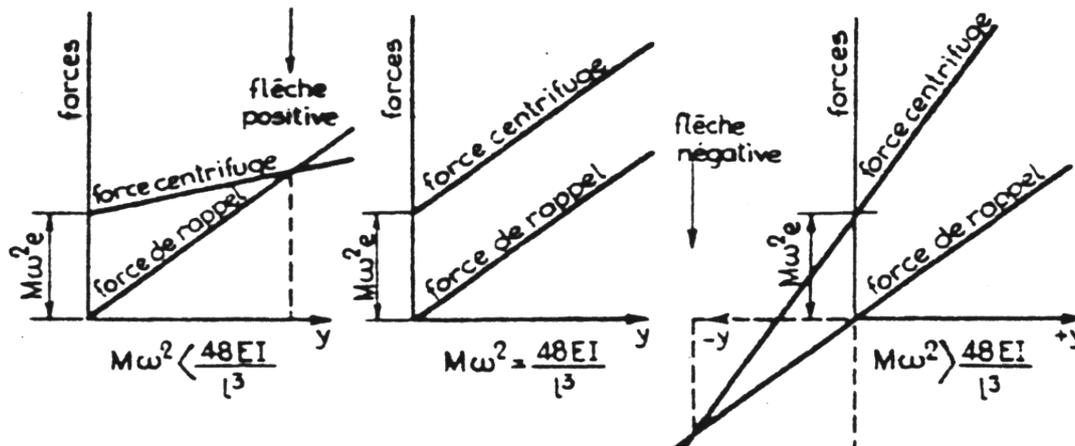
$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{48 EI}{M L^3} - \omega^2}$$

- Posons  $\omega_c = \sqrt{\frac{48 EI}{M L^3}}$ , il vient  $y = \frac{\omega^2 e}{\omega_c^2 - \omega^2}$

- Ici, gros changement : à chaque valeur de vitesse  $\omega < \omega_c$  correspond une valeur de flèche positive, proportionnelle à l'excentricité  $e$ .
- Pour  $\omega = \omega_c$ , le dénominateur s'annule et la flèche diverge.
- Pour  $\omega > \omega_c$ , la flèche à l'équilibre est négative tend vers ...  $-e$  !  
(On parle d'autocentrage - c'est stable grâce aux effets **gyroscopiques** )

## Dimensionnement des arbres

- Force centrifuge :  $F = M \omega^2 \cdot (y + e)$
- Force de rappel :  $F = \frac{48 EI}{L^3} y$



## Dimensionnement des arbres

- Deux possibilités de design pour une application pratique:
  - 1- Soit  $\omega_c$  est très grand
    - Dans ce cas on peut supposer que  $\omega \ll \omega_c \dots$
    - Aucun risque d'instabilité, mais les efforts sont directement transmis au bâti (pour le bonheur des voisins !)
      - Cas le plus courant dans l'industrie
  - 2- Soit  $\omega_c$  est faible (liaison flexible)
    - Dans ce cas,  $\omega \gg \omega_c$  - mais grâce à l'autocentrage les efforts transmis au bâti sont quasiment éliminés (et les voisins sont contents)
    - Problème : avant d'atteindre cette vitesse, on passe par  $\omega = \omega_c \dots$
- La seconde solution est parfois retenue malgré tout
  - Mais il faut accélérer vite, et/ou s'assurer d'un amortissement suffisant.
  - On retrouve parfois ce cas de figure sur de grandes installations industrielles pour lesquelles les puissances en jeu font que l'on a  $\omega \gg \omega_c$ .
  - Anecdotiquement, c'est le cas des machines à laver le linge en phase d'essorage !

## Dimensionnement des arbres

- Analogie avec le comportement vibratoire...

Écartons l'arbre au repos de l'équilibre, on a alors :

Force de rappel élastique :  $F_k = 48 EI / L^3 \cdot y = ky$

Force due à l'amortissement :  $F_a = C \dot{y}$

Force d'inertie :  $F_i = M \ddot{y}$

- Équilibre :  $M \ddot{y} + C \dot{y} + k y = 0$  soit  $\ddot{y} + 2n \dot{y} + p^2 y = 0$

avec  $2n = \frac{C}{M}$  et  $p^2 = \frac{k}{M} = \frac{48 EI}{ML^3}$

- Solution générale :  $y_1(t) = A e^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2} \cdot t - \phi)$

Déterminés  
par les  
conditions  
initiales

## Dimensionnement des arbres

$$y_1(t) = A e^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2} \cdot t - \phi)$$

Supposons l'amortissement très faible :  $n \rightarrow 0$ , alors on a :

$$y_1(t) = A \sin(p \cdot t - \phi)$$

et le mouvement est périodique de période  $\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{ML^3}{48EI}}$

et de pulsation  $p = \sqrt{\frac{48EI}{ML^3}}$

- On constate que  $p = \omega_c$  !

## Dimensionnement des arbres

## ■ Cas des vibrations forcées

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p^2 y = E \sin \omega t$$

- Une solution particulière est :

$$y_2(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$C_1 = E \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}$$

$$C_2 = -E \frac{2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}$$

$$y_2(t) = \frac{E}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2} [(p^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t]$$

La solution générale s'amortit, ne reste que la solution particulière après un certain temps. L'amplitude est alors

$$|y_{max}| = \frac{E}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}$$

## Dimensionnement des arbres

- Si de plus l'amortissement est très faible, alors on a  $n \rightarrow 0$

donc 
$$|y_{max}| = \frac{E}{p^2 - \omega^2} = \frac{E}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

- Si on pose  $E = \omega^2 e$  (c'est un choix arbitraire!), alors on

retombe exactement sur 
$$\frac{\omega^2 e}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

- On voit donc une grande analogie entre le phénomène vibratoire et les phénomènes de stabilité en rotation de l'arbre.
  - L'analogie n'est pas totale : les contraintes générées ne sont pas identiques (flexion alternée vs. flexion ordinaire)
  - L'arbre doit être un solide de révolution ! (problème unidimensionnel)

## Dimensionnement des arbres

- La recherche des pulsations critiques peut donc se faire de trois façons différentes :
  - 1- Équilibre dynamique indifférent, par imposition d'une déformation et vérification de l'égalité des force d'inertie et élastiques
  - 2- Utilisation d'une excentricité due à un balourd, et recherche de la pulsation pour laquelle les déformations tendent vers l'infini
  - 3- Recherche des pulsations propres du problème vibratoire associé
- La condition habituellement choisie est que la raideur de l'arbre soit suffisante pour que la vitesse critique soit au moins 1,5 fois plus élevée que la vitesse de rotation prévue.

## Dimensionnement des arbres

## ■ Cas utiles

- Vitesse critique d'un arbre sans masse portant un seul disque au milieu :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{48 EI}{M L^3}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{M L^3}{48 EI}}}$$

- ici,  $\frac{L^3}{48 EI} = a_{11}$  est la flèche résultante de l'application d'une force unitaire au droit du disque. C'est aussi le **coefficient d'influence** de la force.

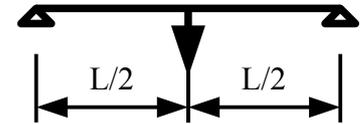
$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{M a_{11}}}$$

La formule est valable pour n'importe quel cas comportant un seul disque, pour autant que la masse de l'arbre soit négligeable.

## Dimensionnement des arbres

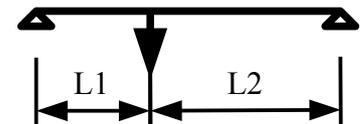
2 appuis simples, disque centré

$$a_{11} = \frac{L^3}{48 EI}$$



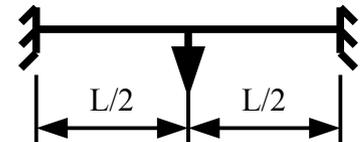
2 appuis simples, disque excentré

$$\left( I = \frac{\pi d^4}{64} \right) \quad a_{11} = \frac{L_1^2 L_2^2}{3 EI (L_1 + L_2)}$$



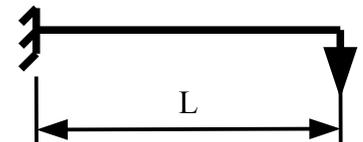
2 appuis encastrés, disque centré

$$a_{11} = \frac{L^3}{192 EI}$$



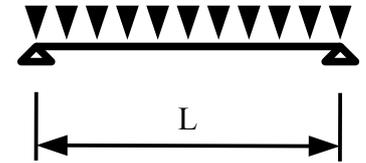
Console, disque à l'extrémité

$$a_{11} = \frac{L^3}{3 EI}$$



## Dimensionnement des arbres

- Arbre réel : la masse est répartie !



Prenons le cas d'un arbre simplement appuyé

La force centrifuge répartie vaut (vers le bas) :

$$f(x) = m \omega^2 y \quad \text{d'où la variation d'effort tranchant : } \frac{\partial T}{\partial x} = -m \omega^2 y$$

- L'équation de la déformée est :  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}$

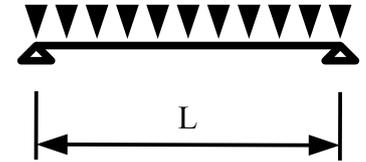
$$\text{Dérivons une fois : } \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{\partial M}{\partial x} \frac{1}{EI} = -\frac{T}{EI}$$

$$\text{Puis encore : } \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{EI} \longrightarrow \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = m \frac{\omega^2}{EI} y$$

- D'où l'équation différentielle  $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - a^4 y = 0$  avec  $a^4 = \frac{m \omega^2}{EI}$

## Dimensionnement des arbres

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - a^4 y = 0 \quad \text{avec} \quad a^4 = \frac{m \omega^2}{EI}$$



- Solution générale :

$$y(x) = C_1 f_1(ax) + C_2 f_2(ax) + C_3 f_3(ax) + C_4 f_4(ax)$$

avec  $f_1(\xi) = \sinh \xi + \sin \xi$

$$f_2(\xi) = \sinh \xi - \sin \xi$$

$$f_3(\xi) = \cosh \xi + \cos \xi$$

$$f_4(\xi) = \cosh \xi - \cos \xi$$

**Fonctions  
de Duncan**

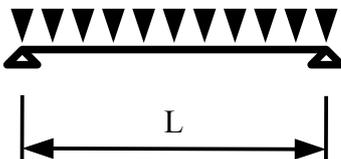
- Conditions aux limites :

Ici, on a  $y(0) = 0$  et  $y(L) = 0$  d'une part (position fixée)

$y''(0) = 0$  et  $y''(L) = 0$  d'autre part (moment nul)

- On obtient un système linéaire **homogène**, pour lequel la solution triviale est toujours  $C_n = 0$  sauf dans le cas où le déterminant est nul. **C'est ce qui nous intéresse ici.**

## Dimensionnement des arbres

- Conditions aux limites  $y(0)=0$   $y(L)=0$   
 $y''(0)=0$   $y''(L)=0$  

$$y(x) = C_1 f_1(ax) + C_2 f_2(ax) + C_3 f_3(ax) + C_4 f_4(ax)$$

$$f_1(\xi) = \sinh \xi + \sin \xi \quad f_1''(\xi) = \sinh \xi - \sin \xi = f_2(\xi)$$

$$f_2(\xi) = \sinh \xi - \sin \xi \quad f_2''(\xi) = \sinh \xi + \sin \xi = f_1(\xi)$$

$$f_3(\xi) = \cosh \xi + \cos \xi \quad f_3''(\xi) = \cosh \xi - \cos \xi = f_4(\xi)$$

$$f_4(\xi) = \cosh \xi - \cos \xi \quad f_4''(\xi) = \cosh \xi + \cos \xi = f_3(\xi)$$

$$y''(x)/a^2 = C_1 f_2(ax) + C_2 f_1(ax) + C_3 f_4(ax) + C_4 f_3(ax)$$

$$y(0)=0 \rightarrow C_3 f_3(0)=0$$

$$y''(0)=0 \rightarrow C_4 f_3(0)=0$$

$$y(L)=0 \rightarrow C_1 f_1(aL) + C_2 f_2(aL) + C_3 f_3(aL) + C_4 f_4(aL) = 0$$

$$y''(L)=0 \rightarrow C_1 f_2(aL) + C_2 f_1(aL) + C_3 f_4(aL) + C_4 f_3(aL) = 0$$

Posons  $f_n(aL) = f_n$  et notons que  $f_3(0) = 2$

## Dimensionnement des arbres

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_1 & f_4 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_3 = C_4 = 0, C_1 = -C_2 = K$$

Soit  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$  ... Solution triviale inintéressante.

$$\text{Soit } \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_1 & f_4 & f_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 4 \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow f_1^2 - f_2^2 = 0$$

$$a^4 = \frac{m \omega^2}{EI}$$

$$(\sinh aL + \sin aL)^2 - (\sinh aL - \sin aL)^2 = 0$$

$$\sinh^2 + \sin^2 + 2 \sinh \sin - \sinh^2 - \sin^2 + 2 \sinh \sin = 0$$

$$\sinh \sin = 0$$

$$\sin aL = 0$$

$$aL = n\pi \quad (n > 0)$$

$$\sqrt{\frac{m \omega^2}{EI}} L^2 = n^2 \pi^2$$

$$\omega_{cn} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

## Dimensionnement des arbres

- En définitive, on retrouve une infinité de vitesses critiques, correspondant à l'infinité de degrés de liberté dans le problème ...

$$\omega_{cn} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (n > 0) \quad a^4 = \frac{m \omega^2}{EI} \quad a = \frac{n \pi}{L}$$

- Ces vitesses critiques correspondent à des modes de déformation particuliers (modes propres) : il suffit de reporter dans  $y(x) = C_1 f_1(ax) + C_2 f_2(ax) + C_3 f_3(ax) + C_4 f_4(ax)$

$$y(x) = K \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad \text{car } C_1 = -C_2 = K ; C_3 = C_4 = 0 \text{ avec les C.L.}$$

- On peut encore montrer que ces modes propres sont identiques aux modes propres vibratoires « habituels » d'une poutre (avec symétrie de révolution) en flexion...

## Dimensionnement des arbres

■ Cas utiles	Conditions aux limites	Valeur propre $\mu_n$			
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n > 3$
$\omega_{cn} = \frac{(\mu_n)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ <p>libre – aucun déplacement imposé <math>M=0, T=0</math></p> <p>guidée – orientation fixée mais position libre <math>y'=0, T=0</math></p> <p>articulée – position fixée mais orientation libre <math>y=0, M=0</math></p> <p>encastrée – position et orientation fixées <math>y=0, y'=0</math></p>	libre - libre	0	4.730	7.853	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
	libre - guidée	0	2.365	5.498	$(4n - 5)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
	libre - articulée	0	3.927	7.069	$(4n - 3)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
	guidée - guidée	0	3.142	6.283	$(n - 1)\pi$ (exact)
	guidée - articulée	1.561	5.712	7.854	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (exact)
	encastrée - libre	1.875	4.694	7.855	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
	bi - articulée	3.142	6.283	9.425	$n\pi$ (exact)
	encastrée - articulée	3.927	7.069	10.210	$(4n + 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
	encastrée - guidée	2.365	5.498	8.639	$(4n - 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
	bi - encastrée	4.730	7.853	10.996	$(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)

## Dimensionnement des arbres

- Méthodes approchées de détermination des pulsations propres
  - Les géométries complexes empêchent de calculer analytiquement ces valeurs : en fait on n'a habituellement besoin de ne connaître que la première pulsation propre.  
Il existe plusieurs approches :  
Éléments finis  
Méthode de Dunkerley ( généralement par défaut )  
( Méthode de Rayleigh ( généralement par excès ) )  
( Méthode de Stodola )  
...

## Dimensionnement des arbres

- Éléments finis

- Pour une détermination exhaustive et relativement précise, à condition de connaître précisément la géométrie.

Pour le dimensionnement **préliminaire**, on ne peut se baser sur cette technique car :

- Elle est bien trop coûteuse.
- On ne connaît pas précisément la forme de l'arbre et la position des roues
- Elle nous donne une analyse « ponctuelle » : pour une tendance, il faut faire plusieurs calculs en variant la géométrie !

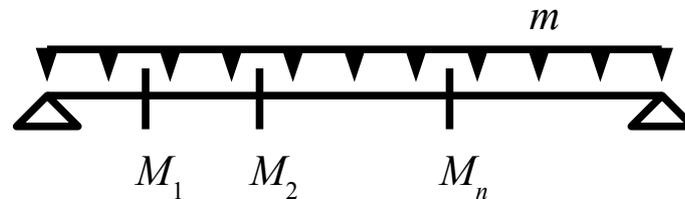
## Dimensionnement des arbres

- Approche de Dunkerley

Méthode « légère » donnant les tendances

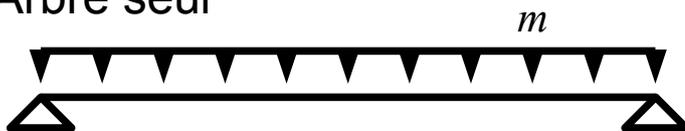
- Vieille comme le monde : publiée en 1894, sur des bases expérimentales

Principe : déterminer la première pulsation propre du système complexe connaissant les 1<sup>ères</sup> pulsations propres d'éléments plus simples...

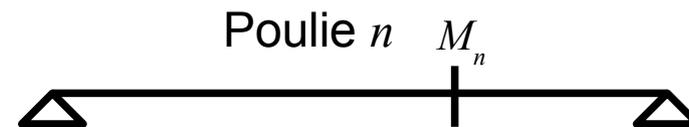


- Le cas typique : arbre de section constante portant des masses ponctuelles correspondant à des poulies.
- Il convient de calculer les (premières) pulsations propres de chaque cas **indépendamment** :

Arbre seul



$$\omega_{cI} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$



$$\omega_{cn} = \sqrt{\frac{1}{M_n a_{1n}}} \quad \text{avec} \quad a_{nn} = \frac{L_{1n}^2 L_{2n}^2}{3EI(L_{1n} + L_{2n})}$$

## Dimensionnement des arbres

- Formule de Dunkerley

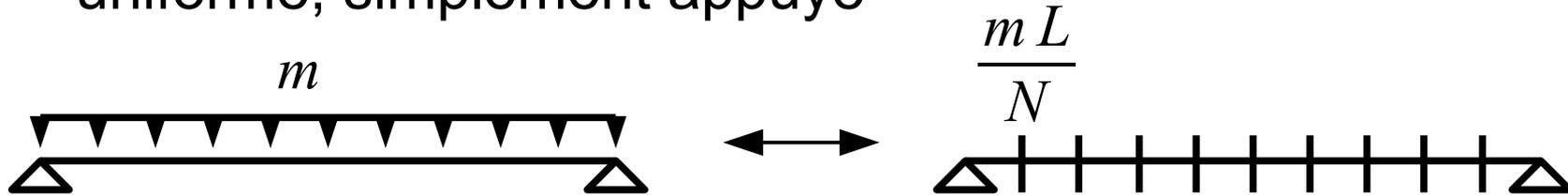
$$\frac{1}{\Omega_{c1}^2} = \frac{1}{\omega_{cI}^2} + \sum_1^n \frac{1}{\omega_{cn}^2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\Omega_{c1}^2} = \frac{1}{\omega_{cI}^2} + \sum_1^n M_n a_{nn}$$

Approximation d'autant plus précise que les pulsations propres d'indice 2 et 3 suivantes **de l'ensemble du système** sont éloignées de  $\Omega_{c1}$  (première p.p.)

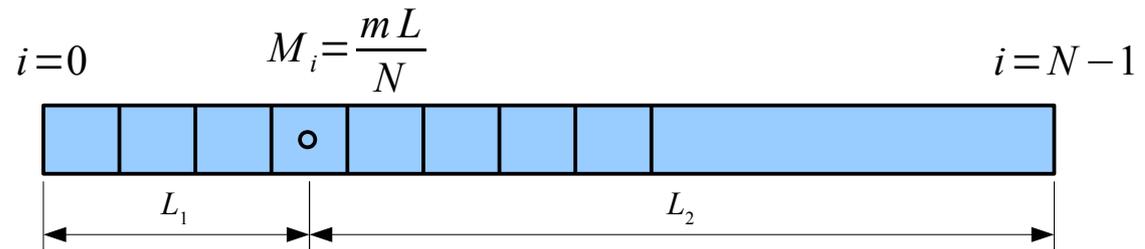
- L'erreur est commise **par défaut** :  $\Omega_{c1} < \Omega_{c1}^{\text{exact}}$   
et est de l'ordre de 3 à 4 % pour les applications envisagées  
→ c'est donc une approche conservatrice (sécuritaire) si le but est de travailler **en deçà** de la valeur calculée.
- Permet une estimation rapide et donne des indices sur ce qu'il faut faire pour atteindre un objectif donné...

## Dimensionnement des arbres

- Formule de Dunkerley appliquée à un arbre de section uniforme, simplement appuyé



$$\frac{1}{\Omega^2} = \sum_{i=0}^{N-1} M_i a_{ii}$$



$$a_{ii} = \frac{L_1^2 L_2^2}{3 EI (L_1 + L_2)}$$

$$L_1 = \frac{L(1+2i)}{2N}$$

$$L_2 = \frac{L(1+2(N-1-i))}{2N}$$

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{mL^4}{EI} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+2i)^2 (1+2(N-1-i))^2}{48 N^5}$$

## Dimensionnement des arbres

- Comparaison avec la valeur exacte :

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{mL^4}{EI} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+2i)^2 (1+2(N-1-i))^2}{48 N^5} \qquad \Omega = \frac{K}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\text{avec } K = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1+2i)^2 (1+2(N-1-i))^2}{48 N^5}}}$$

$$N=2 \quad K=13.064$$

$$N=5 \quad K=9.7190$$

$$N=10 \quad K=9.5187$$

$$N=20 \quad K=9.4910$$

$$N \rightarrow \infty \quad K \rightarrow \sqrt{90} \approx 9.4868 \quad \text{à comparer avec } \pi^2 \approx 9.8696$$

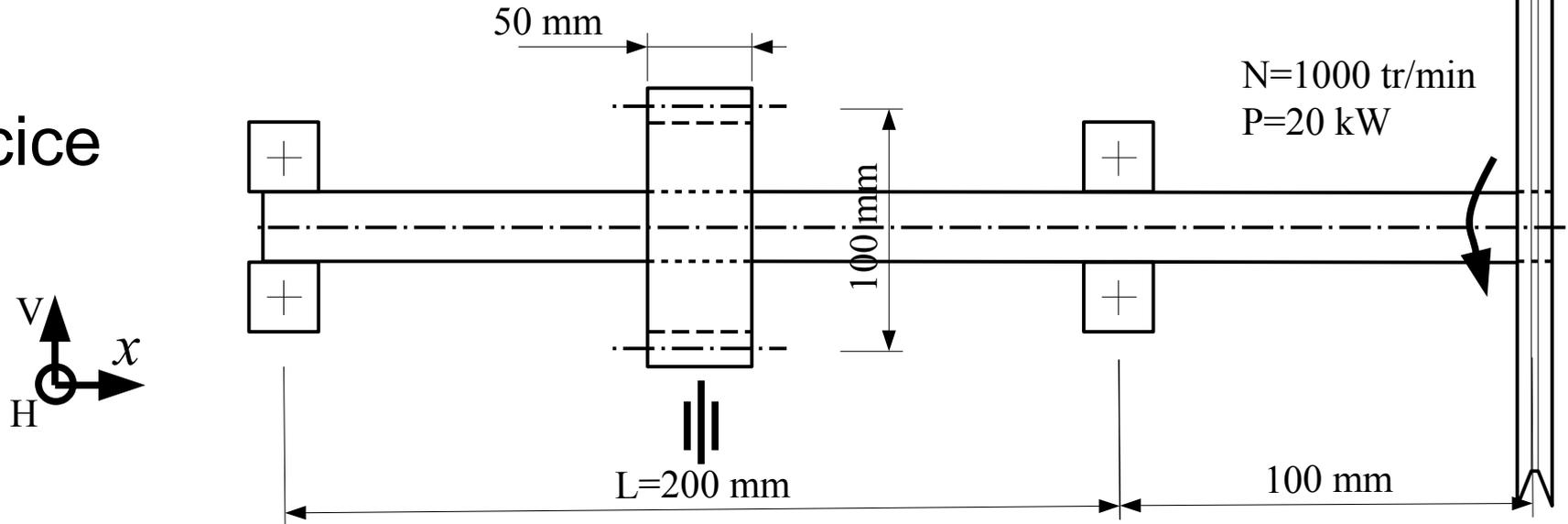
$$\text{valeur exacte : } \omega = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

## Dimensionnement des arbres

- Que faire si l'arbre envisagé a une forme plus complexe ?  
Déterminer les modes propres (et autres grandeurs) à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis ...

## Dimensionnement des arbres

### ■ Exercice



- Un arbre transmet un mouvement d'une poulie vers une roue dentée droite ( $\alpha : 20^\circ$ ). La roue dentée entraîne une autre située en dessous (non dessinée).

#### Suite de l'exercice de la partie I :

- En considérant un diamètre de l'arbre constant = 40mm, calculer les pulsations propres des éléments séparés (arbre sans masse + engrenage, puis poulie, enfin arbre pesant sans les éléments de machine. Calculer la pulsation de l'ensemble. Conclusion ?

Note : tous les éléments sont en acier,  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ , contrainte limite 50 Mpa,  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$  selon V,  $E = 210000 \text{ Mpa}$