TENSIONS ADMISSIBLES
Exercices

Nayan Levaux
Pierre Duysinx

Aérospatiale & Mécanique
Année académique 2020-2021

EXERCICE 1

- Calculer R_{adm} pour un arbre en acier St 60 en rotation uniforme reposant sur deux appuis avec une charge concentrée en son milieu. Cet arbre a les caractéristiques suivantes :
  - diamètre : 20 mm
  - longueur : 500 mm
- En déduire également la charge maximale et la flèche maximale.

- Données :
  - La limite élastique du St 60 vaut 340 N/mm².

EXERCICE 1

- La limite admissible dépend du matériau et du mode de sollicitation en présence.

- La limite élastique du St 60 vaut 340 N/mm².

- En flexion rotative, la tension de chaque fibre varie de σ_{max} à σ_{min} à chaque demi-tour. Il s'agit donc d'une sollicitation alternée. $\Rightarrow \phi = -1$

$$R_\phi = \frac{2}{3}(1 + \frac{\phi}{2})R$$

$$R_\phi|_{\phi=-1} = \frac{2}{3}(1 + \frac{-1}{2})R = \frac{R}{3}$$

EXERCICE 1

- Pas de choc: $K_{choc}=1.0$
- Sécurité : $K_s = 1.3$
- Il vient

$$R_{adm} = R_e \frac{1}{K_{choc}} \frac{1}{K_\phi} \frac{1}{K_s} = 340 \, \frac{1}{1} \frac{1}{3} \frac{1}{1,3} = 87,18 \, \mathrm{MPa}$$

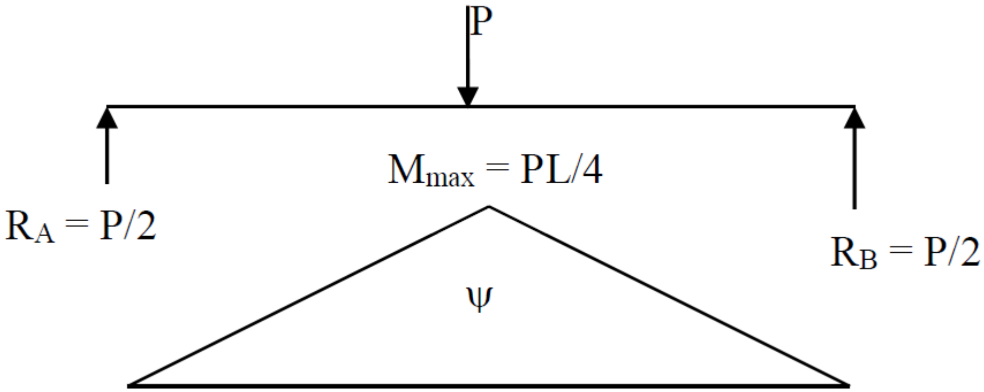
- Cette tension admissible doit être comparée à la tension maximale qui peut apparaître dans la structure. Nous en déduirons alors la condition sur la charge à supporter.

EXERCICE 1

- Calcul de la contrainte σ_{max}:
- En flexion: $$\sigma = \frac{M\, y}{I}$$
- Elle sera maximale pour M et y maximaux, I est constant

$$y_{max} = \frac{d}{2} = 10\,\text{mm} \qquad I = \frac{\pi\, d^4}{64} = 7854,98\, mm^4$$

$$M_{max} = \frac{P\, L}{4} = 125\, P\, M.mm$$



EXERCICE 1

- Soit la contrainte

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I} = \frac{P\,L}{4}\,\frac{d}{2}\,\frac{64}{\pi\,d^4} = \frac{8\,P\,L}{\pi\,d^3}$$

- La contrainte maximale ne pouvant pas dépasser la limite admissible, nous avons :

$$\sigma_{max} \leq R_{adm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{8\,P\,L}{\pi\,d^3} \leq 87.18\,MPa$$

$$P_{max} \leq \frac{87.18\,\pi\,d^3}{8\,L} = 547,76\,N$$

EXERCICE 1

- La flèche maximale pour un arbre sur deux appuis simples d'extrémités est donnée par:

$$f_{max} = \frac{P\,L^3}{48\,E\,I} = \frac{547.76\;500^3}{48\;217500\;\pi\;\frac{20^4}{64}} = 0.835\;mm$$

EXERCICE 2

- Soit un arbre de transmission sur deux appuis d'extrémité ayant en son centre une roue dentée, source d'effort tangentiel et radial. La vitesse de rotation de cet arbre est de 1500 tr/min. Il doit transmettre une puissance de 7 kW. Ses caractéristiques géométriques sont les suivantes :
  - diamètre de l'arbre : 20 mm
  - longueur : 200 mm
  - diamètre de la roue dentée : 200 mm
- Quelle doit être la qualité de l'acier pour résister?

EXERCICE 2

- Il s'agit ici d'une sollicitation composée d'une flexion et d'une torsion. Dès lors, c'est la contrainte de comparaison σ_c qui sera limitée à la valeur admissible R_{adm}

- Calculons R_{adm}:

$$R_{adm} = R_e \frac{1}{K_{choc}} \frac{1}{K_\phi} \frac{1}{K_s}$$

  - Choc: pas de choc K_{choc}=1.0
  - Sécurité K_s = 1.8
  - Fatigue: sollicitation alternée: ϕ=-1: K_ϕ=3

$$R_{adm} = \frac{R_e}{5.4}$$

EXERCICE 2

- Calculons la contrainte de comparaison σ_c:

- En utilisant la DIN (Techniques d'avant projet), on a

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3\,(\alpha\tau)^2}$$

- Avec

$$\alpha = 0.7$$

- Car σ est alterné et τ est constant.

- La détermination des deux termes de la racine carrée se ferra à leur valeur maximale.

$$\sigma = \frac{32\,M_f}{\pi\,d^3} \text{ avec } M_{f\,max} = \frac{F\,L}{4} \qquad F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$$

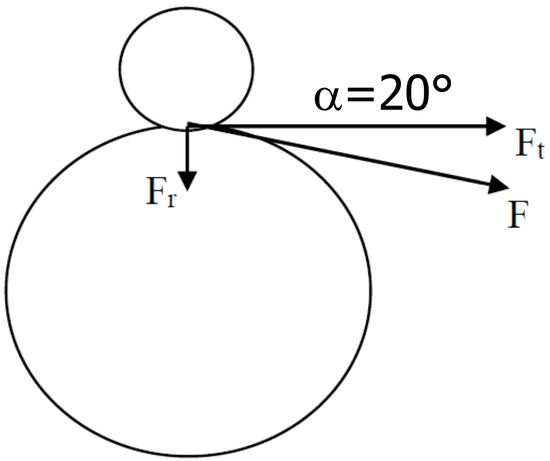
$$\tau = \frac{16\,M_t}{\pi\,d^3} \text{ avec } M_{t\,max} = F_t\,\frac{d_0}{2}$$

EXERCICE 2

- Quant aux efforts F_r et F_t, ils sont déterminés en se basant sur le schéma simplifié de l'engrènement des deux roues dentées ci-après :

$$C = F_t \frac{d_0}{2}$$

$$F_t = \frac{C}{d_0/2} = \frac{C}{0.2/2} = 10\,C$$



- Or le couple peut également être évaluée en considérant la vitesse de rotation de l'arbre pour une puissance donnée.

$$C = \frac{P}{2\pi \frac{N}{60}} = \frac{7000}{2\pi \frac{1500}{60}} = 44,586\ N.m \qquad F_t = \frac{44.586}{0.2/2} = 445.86\ N$$

EXERCICE 2

- L'angle entre F_t et F vaut α_0 = 20°, donc

$$F_r = F_t \tan 20^\circ$$

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = 474.4\ N$$

- Par conséquent

$$M_f = \frac{F\ L}{4} = 23720\ Nmm$$

$$M_t = F_t\,\frac{d_0}{2} = 44586\ Nmm$$

- D'où

$$\sigma = \frac{32\ M_f}{\pi\ d^3} = \frac{32 \cdot 23720}{\pi\ 20^3} = 30.2\ N/mm^2$$

$$\tau = \frac{16\ M_t}{\pi\ d^3} = \frac{16 \cdot 44586}{\pi\ 20^3} = 28.39\ N/mm^2$$

EXERCICE 2

- En introduisant ces valeurs dans la formule d'avant-projet, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sqrt{\sigma^2 + 3\,(0.7\,\tau)^2} \\ &= \sqrt{(30.2)^2 + 3\,(0.7\;28.39)^2} = 45.79\;N/mm^2 \end{aligned}$$

- La condition

$$\sigma_c \leq R_{adm}$$

- nous donne la valeur de la limite élastique

$$R_e \geq 45.79 \;\times\; 5.4 \;=\; 247.26\;N/mm^2$$

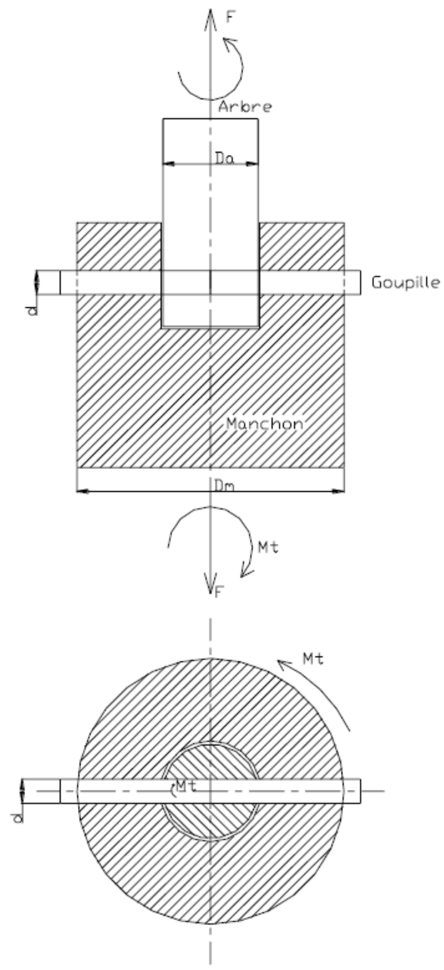
- Par conséquent il faut choisir un acier St 50 ou St 60

EXERCICE 3

- On demande d'étudier la transmission d'un effort de traction au travers d'une cale dormante.

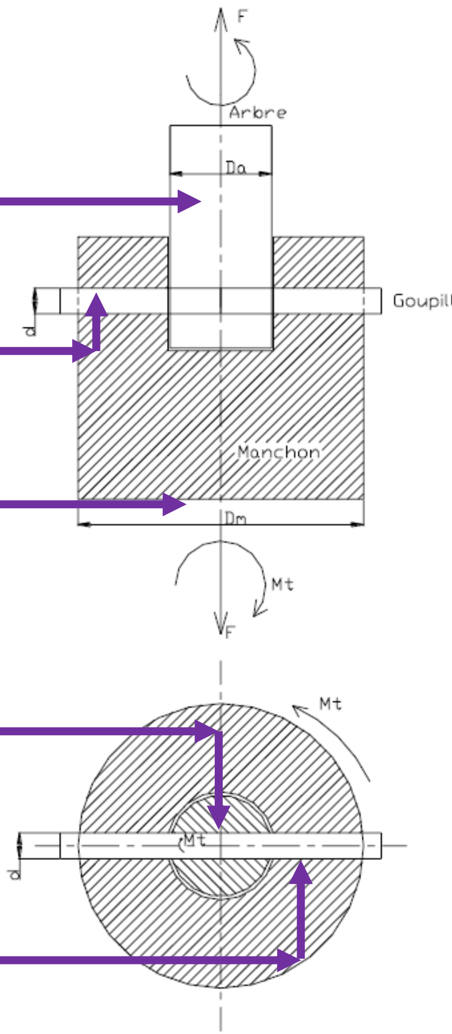
- On a les données suivantes :
  - $D_a = 20$ mm
  - $D_m = 35$ mm
  - $d = 6$ mm
  - ST60 ➔ Re = 340 N/mm²

- Calculer l'effort maximum transmissible.



EXERCICE 3

- Vu la géométrie 5 endroits peuvent être critiques:
  - L'arbre
  - La goupille
  - Le manchon
  - Le contact goupille-arbre
  - Le contact goupille-manchon



EXERCICE 3

- Calculons pour chaque situation l'effort maximal à ne pas dépasser compte tenu de la limite admissible

- <u>Traction sur l'arbre:</u>

$$\Omega_a = \frac{\pi D_a^2}{4} - D_a\, d = 314\ -\ 120 = 194\, mm^2$$

$$R_{adm} = \frac{R_e}{1.3\,1.\,1.} = 261,5385\, N/mm^2$$

$$F_a\ \leq\ \Omega_a\, R_{adm}\ =\ 50,734\, kN$$

- <u>Traction sur le manchon:</u>

$$\Omega_m = \frac{\pi D_m^2}{4} - D_m\, d - \Omega_a = 558\, mm^2$$

$$F_m\ \leq\ \Omega_m\, R_{adm} = \Omega_m \frac{R_e}{1.3\,1.\,1.}\ =\ 145,938\, kN$$

EXERCICE 3

- Cisaillement dans la goupille:

$$\Omega_g = \frac{\pi\, d^2}{4} = 28,3mm^2$$

$$R_{adm} = \frac{R''_{\perp}}{1.3\;1.\;1.} = \frac{4}{5}\,\frac{R_e}{1.3} = 209,23\;N/mm^2$$

$$F_g \leq \Omega_g\, R_{adm} = 5,921\,kN$$

- Pression de contact entre la goupille et l'arbre:

$$\Omega_{a/g} \;=\; D_a\, d \;=\; 120\,mm^2$$

$$R_{adm} = \frac{R^{\star}}{1.\;1.\;1.} = \;R_e = 340\;N/mm^2$$

$$F_{a/g} \;=\; \Omega_{a/g}\, R_{adm} = 40,800\,kN$$

EXERCICE 3

- <u>Pression de contact goupille / manchon:</u>

$$\Omega_{a/m} = (D_m - D_a)\, d = 90\, mm^2$$

$$R_{adm} = \frac{R^\star}{1.\,1.\,1.} = R_e = 340\, N/mm^2$$

$$F_{a/g} = \Omega_{a/g}\, R_{adm} = 30,600\, kN$$

- Toutes les conditions sont réalisées lorsque l'on ne dépasse pas le plus petit des efforts calculés ci-dessous. L'effort maximal admissible est régi le cisaillement dans la cale dormante (goupille)

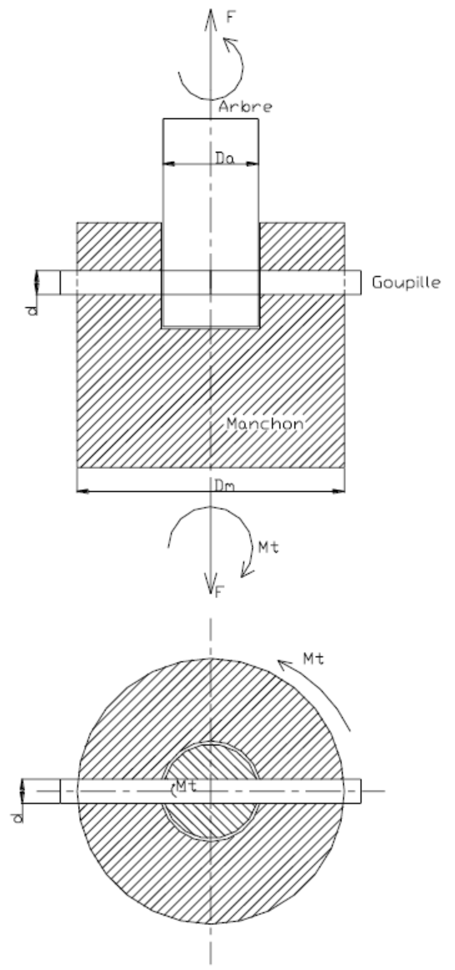
$$F_{adm}^{max} = 5,921\, kN$$

EXERCICE 4

- On demande d'étudier la transmission d'un effort de torsion au travers d'une cale dormante.

- On a les données suivantes :
  - D_a = 20 mm
  - D_m = 35 mm
  - d = 6 mm
  - ST60 ➔ Re = 340 N/mm²

- Calculer l'effort maximum transmissible en torsion.



EXERCICE 4

- Comme dans l'exercice précédent, le moment de torsion maximum est évalué dans les cinq situations. Nous retiendrons la situation la plus défavorable.

- <u>Arbre:</u>

$$\tau_{max} = \frac{M_t\,\rho_{max}}{I_p} \leq R_{adm}$$

  – avec

$$R_{adm} = \frac{R''}{1.3\,1.\,1.} = \frac{2}{5}\,\frac{R_e}{1.3} = 174,3590\;N/mm^2$$

$$\rho_{max} = D_a/2 = 10\,mm$$

$$I_{p,a} = \frac{\pi D_a^4}{32} - \frac{d\,D_a^3}{12} = 11707,96\,mm^4$$

$$M_t \leq \frac{2}{3}\,\frac{340}{1.3}\left[\frac{\pi\,20^4}{32} - \frac{6\,20^3}{12}\right]\frac{2}{20} = 204138\,Nmm$$

EXERCICE 4

- Manchon:
  – Même raisonnement que pour l’arbre, mais avec un moment d’inertie polaire approprié

$$I_{p,m} = \frac{\pi D_m^4}{32} - I_{p,a} - \frac{d\,D_m^3}{12} = 114.178\,mm^4$$

$$M_t \leq \frac{2}{3}\,\frac{340}{1.3}\,114178\,\frac{2}{35} = 1.137.597\,Nmm$$

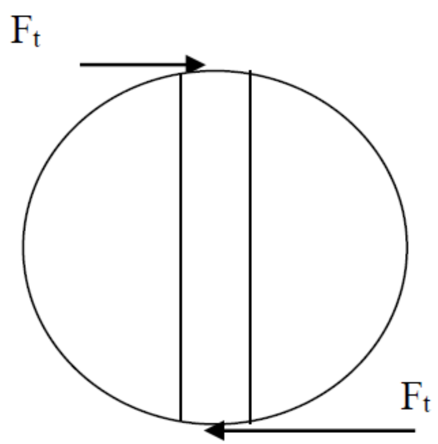
EXERCICE 4

- <u>Cisaillement dans la goupille:</u>
  - La force de cisaillement maximal

$$F_t \;=\; \frac{\pi\, d^2}{4}\, R_{adm}$$

$$R_{adm} = \frac{R''_{\perp}}{1,3} = \frac{R_e}{1,3}\,\frac{4}{5} = 209,23\; N/mm^2$$

$$F_t \leq \frac{\pi\, 6^2}{4}\, 209,23 \;=\; 5.915,86\; N$$

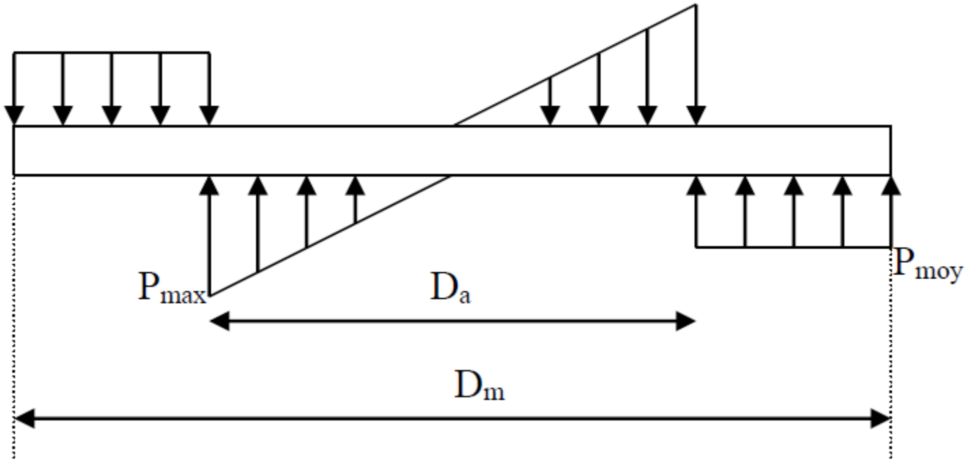


  - Le moment de torsion correspondant

$$M_t \;=\; F_t\, D_a \;\leq\; 118.317,2126\; Mmm$$

EXERCICE 4

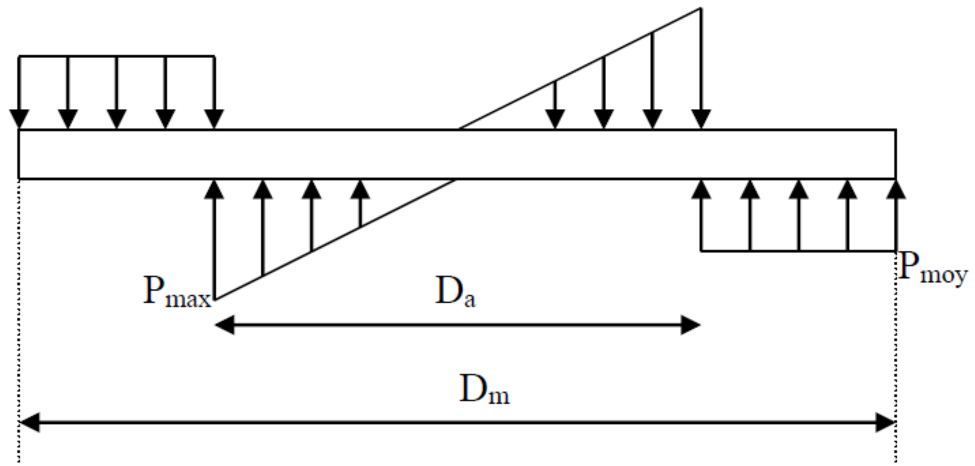
- <u>Pression de contact arbre / goupille:</u>
  - Etant donné que le moment de torsion est appliquée à l'arbre, la répartition de pression sera bitriangulaire tout au long du contact arbre / goupille et restera uniforme le long du contact manchon / goupille



  - On peut calculer le moment de torsion due à la charge bitriangulaire repartie sur le contact arbre goupille

EXERCICE 4

- <u>Pression de contact arbre / goupille:</u>



- Une répartition triangulaire peut être vue comme une charge unique agissant au centre de gravité du triangle (au 2/3)

$$M_t = 2\left[\frac{p_{max}\,\frac{D_a}{2}\,d}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\,\frac{D_a}{2}\right)$$

$$p_{max} = \frac{6\,M_t}{d\,D_a^2}$$

EXERCICE 4

- <u>Pression de contact arbre / goupille:</u>
  - La pression de contact maximale ne doit pas dépasser la limite élastique. On en déduit le moment maximale de torsion admissible

$$R_{adm} = R^{\star} = R_e$$

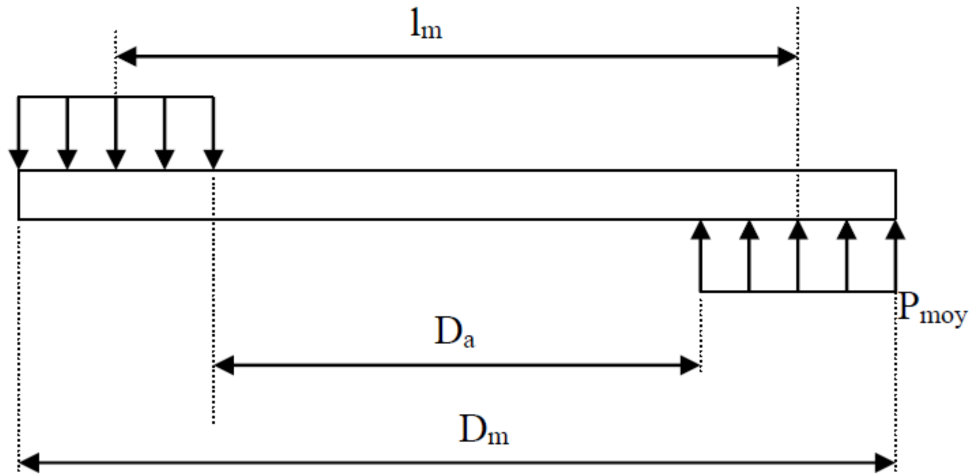
$$p_{max} \leq R_e$$

$$\frac{6\,M_t}{d\,D_a^2} \leq R_e$$

$$M_t \leq \frac{d\,D_a^2}{6}\,R_e = 136.000\,Nmm$$

EXERCICE 4

- <u>Pression de contact goupille / manchon:</u>
  - La répartition de pression au contact goupille / manchon est supposée uniforme

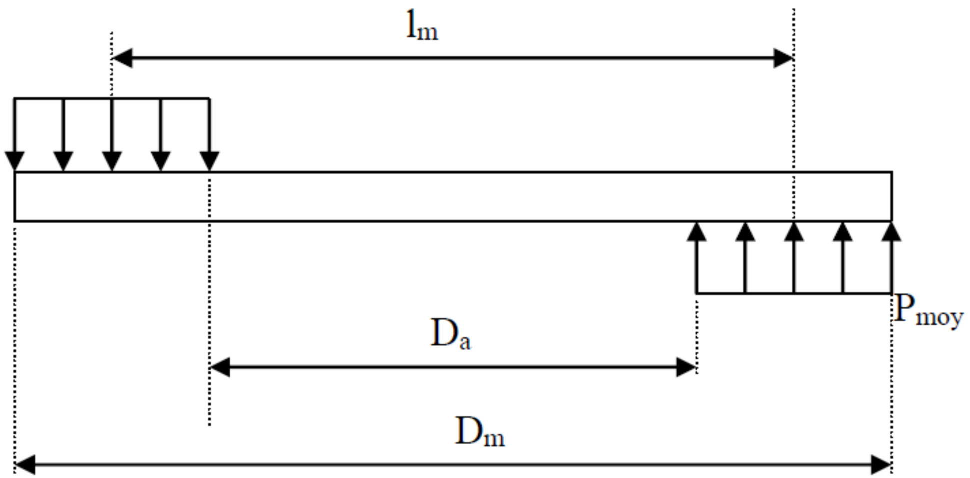


  - Une répartition uniforme peut être remplacée par une force unique équivalente au milieu du rectangle

$$M_t = 2\left[p_{moy}\frac{D_m - D_a}{2}\, d\, \frac{l_m}{2}\right] \qquad l_m = D_a + \left(2\,\frac{\frac{D_m - D_a}{2}}{2}\right)$$

EXERCICE 4

- Pression de contact goupille / manchon:



$$M_t = 2\left[p_{moy}\,\frac{D_m - D_a}{2}\,d\,\frac{l_m}{2}\right] \qquad p_{moy} = \frac{2\,M_t}{l_m\,d\,(D_m - D_a)}$$

$$l_m = D_a + \left(\frac{D_m - D_a}{2}\right) = 27,5\,mm$$

EXERCICE 4

- <u>Pression de contact goupille / manchon:</u>
  - La pression de contact ne pouvant dépasser la limite élastique, nous déduisons le moment de torsion admissible

$$p_{moy} = \frac{2\,M_t}{l_m\, d\,(D_m - D_a)} \;\leq\; R_e$$

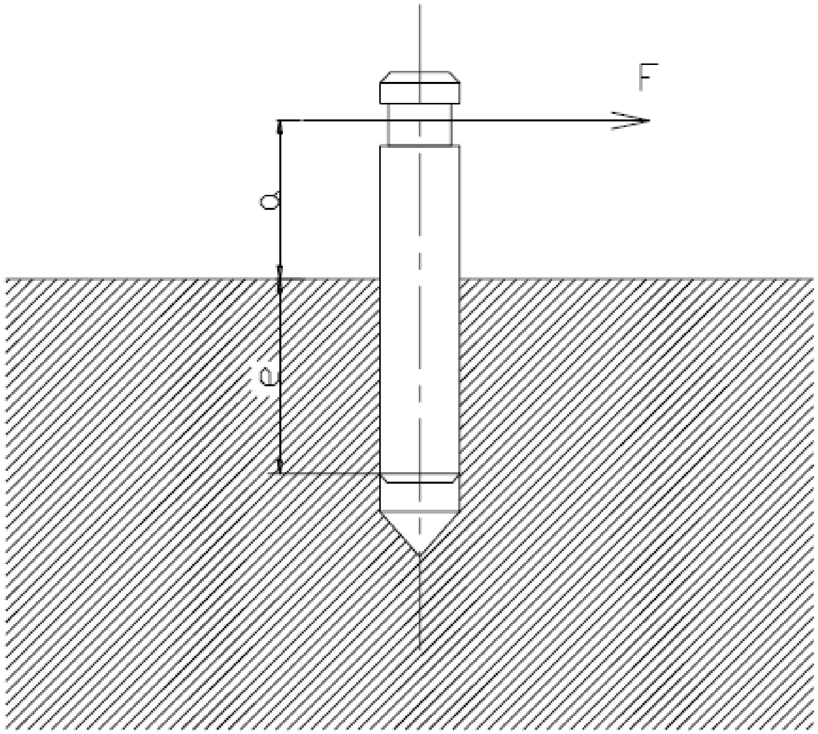
$$M_t \;\leq\; 420.750\; Nmm$$

- <u>Moment admissible par le système:</u> le plus grand moment de torsion que l'on puisse transmettre est dès lors le moment transmis par le cisaillement de la goupille

$$M_t^{max} \;\leq\; 118.317\; Nmm$$

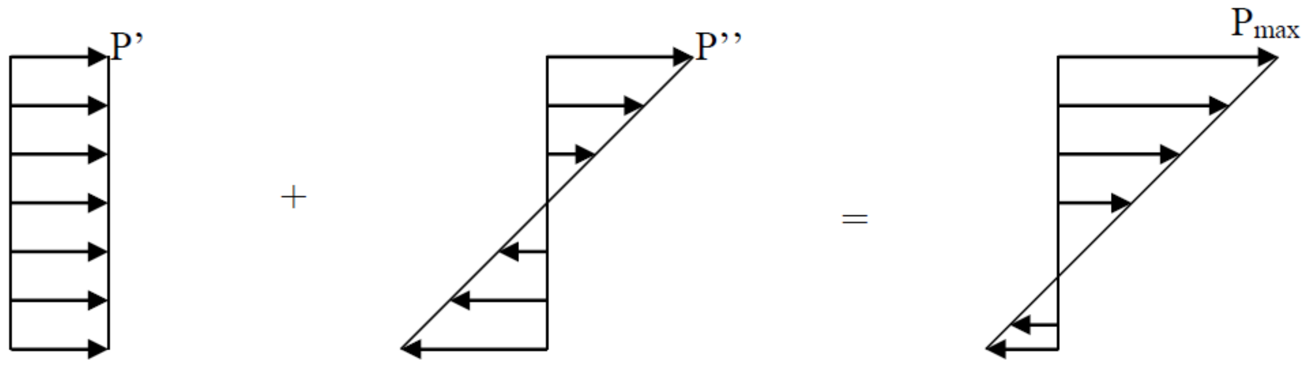
EXERCICE 5

- Une goupille encastrée cylindrique est soumise à une charge pulsante F de 200 N.
- Quelles sont la pression et la contrainte de flexion si e=a=20 mm, d=8 mm.
- La goupille et l'encastrement sont en acier St 60.
- Vérifier que les contraintes dues à la pression et à la flexion sont inférieures à la limite admissible.
- On suppose que la sollicitation est appliquée de manière répétée.



EXERCICE 5

- Le long de la distance e, la force d'encastrement doit rependre une force de traction et un moment. La pression de contact peut donc se décomposer en un distribution uniforme p' et une distribution bi triangulaire p''



$$p = p' + p''$$

$$p' = \frac{F}{e\,d}$$

$$p''\,(d\,\frac{e}{2})\,(\frac{2}{3}\,\frac{e}{2})\,2 \;=\; F\,\left(a + \frac{e}{2}\right)$$

EXERCICE 5

- Il vient

$$p' = \frac{F}{e\,d}$$

$$p'' = \frac{F}{e\,d}\,\frac{3}{e}\,\left(a + \frac{e}{2}\right)$$

- Soit

$$p_{max} = p' + p'' = \frac{F}{e\,d}\left[1 + \frac{3(a + e/2)}{e}\right]$$

$$p_{max} = \frac{200}{20\;8}\left[1 + \frac{3(20+10)}{20}\right] = 6,8750\;N/mm^2$$

- On est en présence d'une sollicitation répétée avec ϕ=0

$$R_\phi = \frac{2}{3}(1 + \frac{\phi}{2})R \qquad R_\phi|_{\phi=0} = \frac{2}{3}(1 + \frac{0}{2})R = \frac{2}{3}\,R$$

$$R_{adm} = \frac{2}{3}\,\frac{R_e}{1.} = 226,67\;N/mm^2$$

EXERCICE 5

- Vérification à la pression de contact.
  – On vérifie aisément que

$$p_{max} = 6,87 \ \leq \ p_{adm} = 226 \ N/mm^2$$

- Vérification à la flexion de la goupille:
  – Le moment de flexion à l'encastrement est donné par

$$M_f \ = \ 20 \ \times \ 200 \ = \ 4000 \ Nmm$$

  – La contrainte de flexion vaut

$$\sigma = \frac{M_f \ y}{I} \ = \ \frac{M_f \ d/2}{\frac{\pi d^4}{64}} \ = \ \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

EXERCICE 5

- Il vient

$$\sigma = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{4000\,32}{\pi\,8^3} = 79,5775\ N/mm^2$$

- La contrainte admissible vaut

$$R_{adm} = \frac{1}{K_\phi}\frac{R_e}{1,3} = \frac{1}{3}\frac{340}{1,3} = 174,3590\ N/mm^2$$

- Nous constatons que la contrainte de flexion est inférieure à la contrainte admissible.