FATIGUE
Exercices

Pierre Duysinx

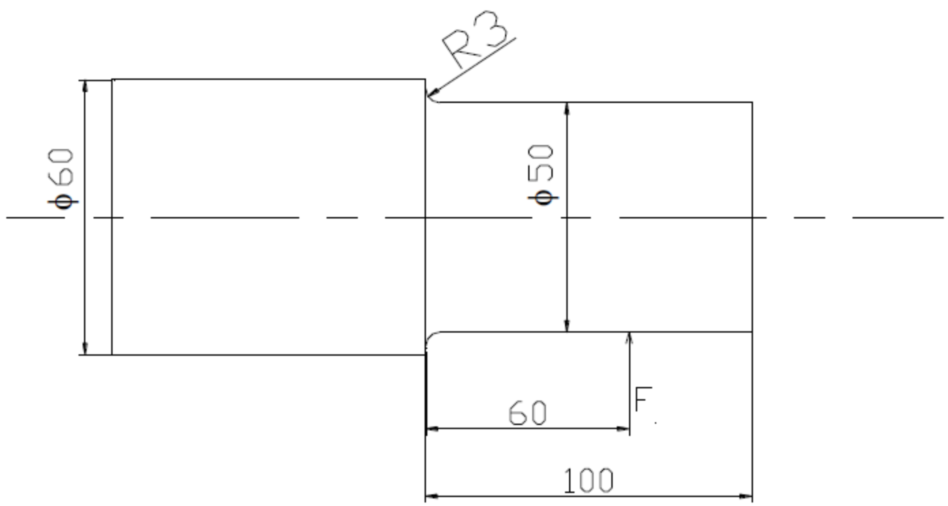
Aérospatiale & Mécanique

Année académique 2019-2020

DUREE DE VIE ILLIMITEE

EXERCICE 1

- Déterminer la sécurité à la fatigue de l'arbre suivant :



- Données :
  – Une force F de 10 000 N crée un moment de flexion au niveau de l'épaulement ;
  – L'arbre est en acier St 50 ;
  – L'état de surface est N6 au niveau du congé .

EXERCICE 1

- Le coefficient de sécurité en fatigue est donné par :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2$$

- Lorsque seules les contraintes de normales sont à prendre en compte, le deuxième terme est nul et le coefficient vaut :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a . k_{f\sigma}}{b_1 . b_2 . R_\pm} + \frac{\bar{\sigma}}{R_e}\right)^2 + (0)^2$$

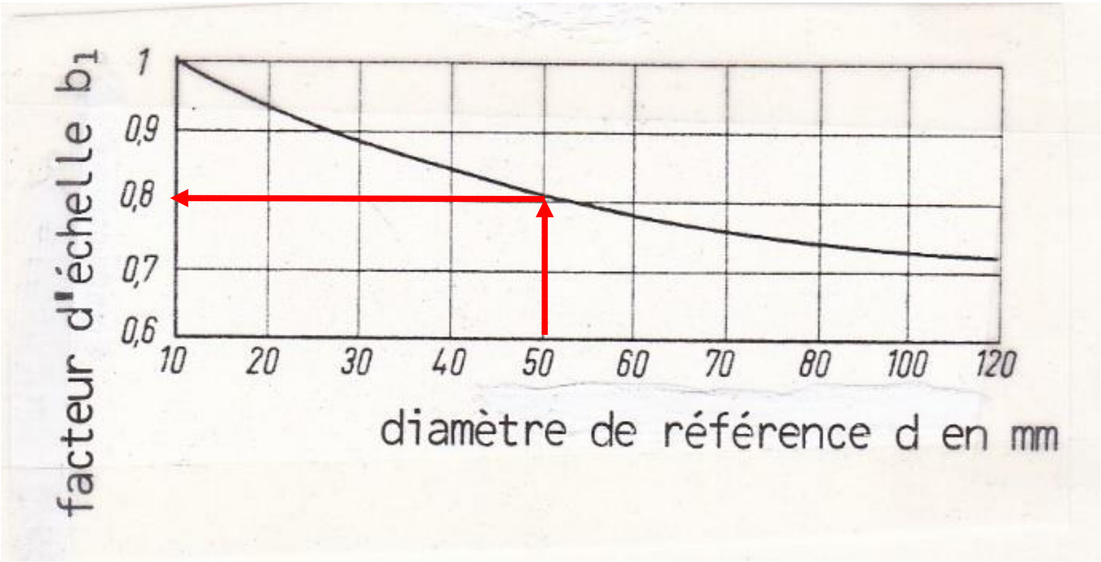
- En flexion rotative, la sollicitation est alternée. D'où

$$\bar{\sigma} = 0 \qquad \sigma_{\max} = \frac{32.M_f}{\pi . d_i^3} = \frac{32 * 600 * 1000}{\pi . 50^3} = 49 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} \qquad \Leftrightarrow \sigma_a = \sigma_{\max} = 49 \text{ N/mm}^2$$

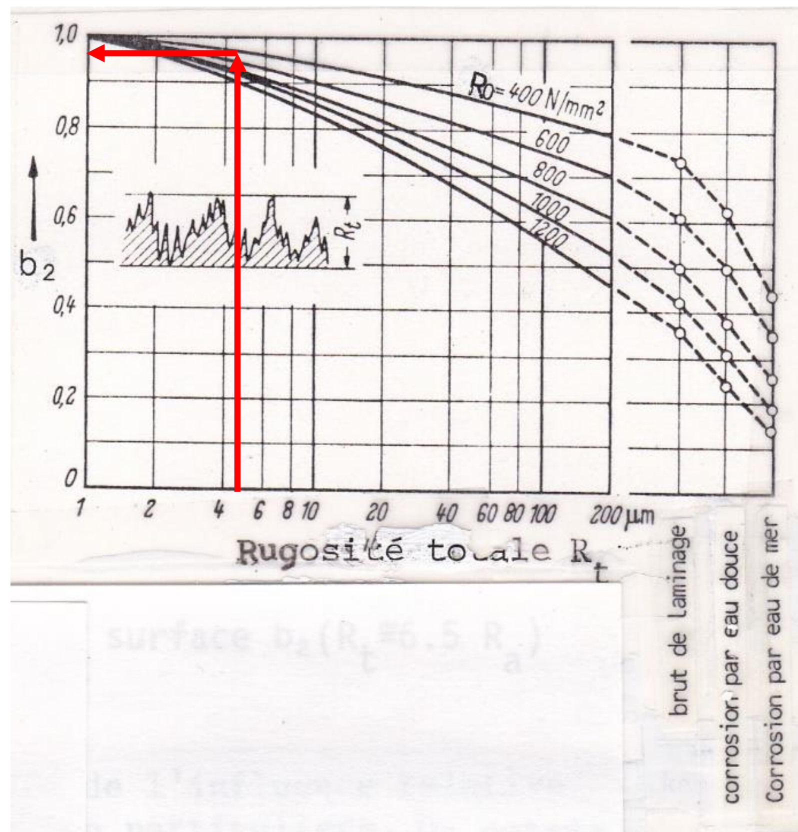
EXERCICE 1

- Déterminons toutes les autres grandeurs intervenant dans cette expression:
  - Facteur d'échelle b_1 = ? d = 50 mm $b_1 = 0.82$



EXERCICE 1

- Déterminons toutes les autres grandeurs intervenant dans cette expression:
  - Facteur d'échelle b_2 = ?
  - N6 ➔ R_a=0.8 µm
  - ➔ R_t=6.5 R_a= 5.2 µm
  - St 50
  - ➔ R_0=500 N/mm²
  - Facteur b_2= 0.95



EXERCICE 1

- Le facteur d'entaille se détermine par l'équation

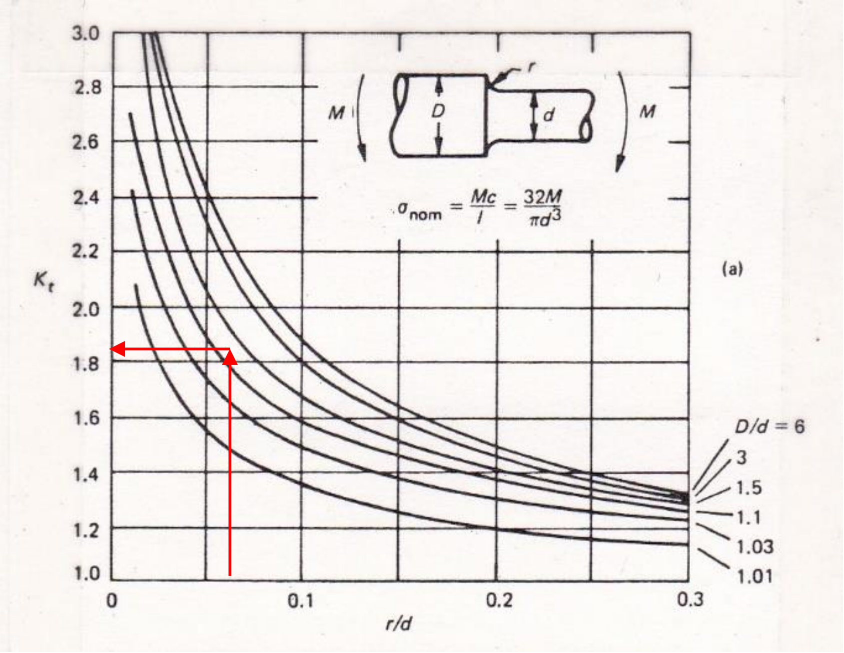
$$k_{f\sigma} = 1 + q.(k-1)$$

- Le coefficient de concentration de contrainte k est trouvé dans les abaques de Peterson en fonction de la géométrie de l'épaulement et du mode de sollicitation (flexion).

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{3}{50} = 0.06$$

$$\Leftrightarrow k = 1.86$$



EXERCICE 1

- quant à l'indice de sensibilité à l'entaille, on le détermine par :

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{\sqrt{r}}}$$

- où a = f(R_0) et r, représente le rayon de raccordement à l'entaille
  - R_0=500 N/mm²
  - a = 0.443
  - r = 3 mm
  - ➔ q = 0.796

FIGURE 3.38 – Coefficient q de sensibilité à l'entaille

Résistance de l'acier R_0 en daN/mm^2	Paramètre a dans formule (r en mm)
32	0,63
42	0,50
56	0,40
70	0,31
98	0,19
140	0,079

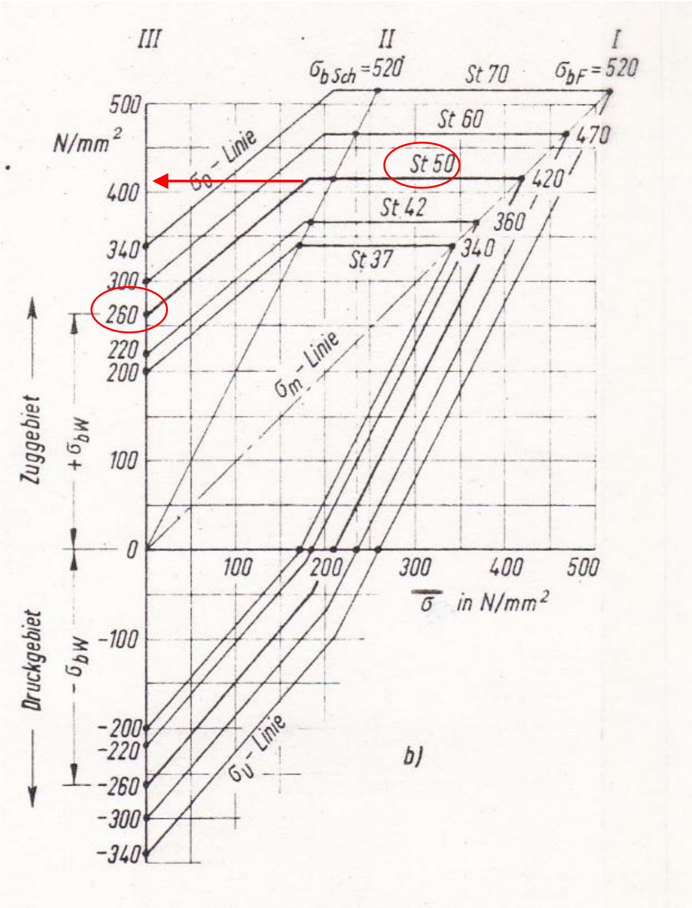
$$\boxed{k_{f\sigma} = 1. + 0.796\,(1.86 - 1.) = 1.685}$$

EXERCICE 1

- La limite d'endurance et la limite élastique en flexion alternée de l'acier considéré sont données par le diagramme de Goodman

$$R_{\pm} = 260 \text{ N/mm}^2$$

$$R_e = 420 \text{ N/mm}^2$$



EXERCICE 1

- Au final il vient

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{49*1.685}{0.82*0.95*260}$$

- Conclusion

$$K_\sigma = 2.45 > 2$$

- La charge maximale peut être appliquée au bareau.
- Il peut fonctionner 100% du temps de fonctionnement.

EXERCICE 1

- Si nous désirons modifier la sécurité à la fatigue, nous pouvons jouer sur les diverses grandeurs :

- 1. Admettons maintenant que le congé de raccordement ait un rayon de 1mm au lieu de 3mm. Il s'en suivra donc un changement de diamètre beaucoup plus brusque au niveau de l'épaulement ; donc une sécurité moins grande.

$$k_{f\sigma} = 2.06$$

- et

$$K_{\sigma} = 2.01$$

- 2. Logiquement, si le congé de raccordement augmente et devient 5mm, l'aptitude à rompre en fatigue diminue, la sécurité sera plus élevée

$$K_{\sigma} = 2.72$$

EXERCICE 1

- Si nous désirons modifier la sécurité à la fatigue, nous pouvons jouer sur les diverses grandeurs :

- 3. Un autre moyen d'augmenter la sécurité est d'améliorer l'état de surface. Admettons que l'état de surface vaut N5 avec un congé de rayon 3 mm.

- En recalculant les différents coefficients, nous trouvons :
  - Ra = 0.4 µm
  - R_t= 6.5 R_a= 2.6 µm
  - b_2 = 0.96

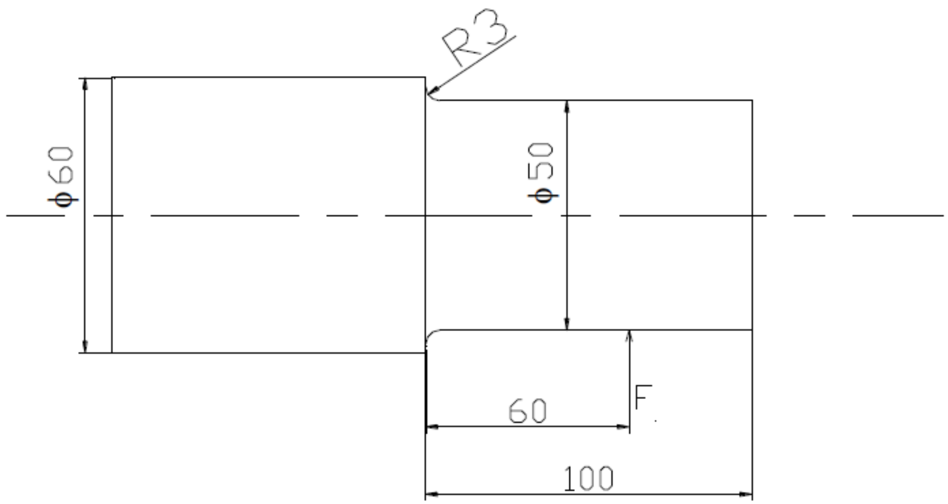
  et enfin

  $$K_\sigma = 2.48 > 2$$

  (logique car l'état de surface est amélioré)

EXERCICE 2

- Déterminer la sécurité à la fatigue de l'arbre suivant :



- On ajoute de la torsion à la flexion existante. Etudier ce que devient la sécurité dans ce cas de sollicitation composée.
  - Le moment de torsion constant et égal à 600 Nm.
  - Le moment de torsion est répété et égal à 600 Nm.

EXERCICE 2

- Supposons d'abord le moment de torsion constant et égal à 600 Nm.
- La flexion alternée étant conservée, le coefficient de sécurité K_σ est le même que lors de l'exercice précédent.
- Quant à la sécurité par rapport aux contraintes tangentielles K_τ, elle vaut

$$\frac{1}{K_\tau} = \left(\frac{\tau_a . k_{\tau\sigma}}{b_1 . b_2 . R''_\pm} + \frac{\bar{\tau}}{\Psi Re} \right)$$

- Lorsque la sollicitation est constante

$$\tau_\mathrm{a} = 0$$

$$\tau_{moy} = \tau_{\max}$$

- avec

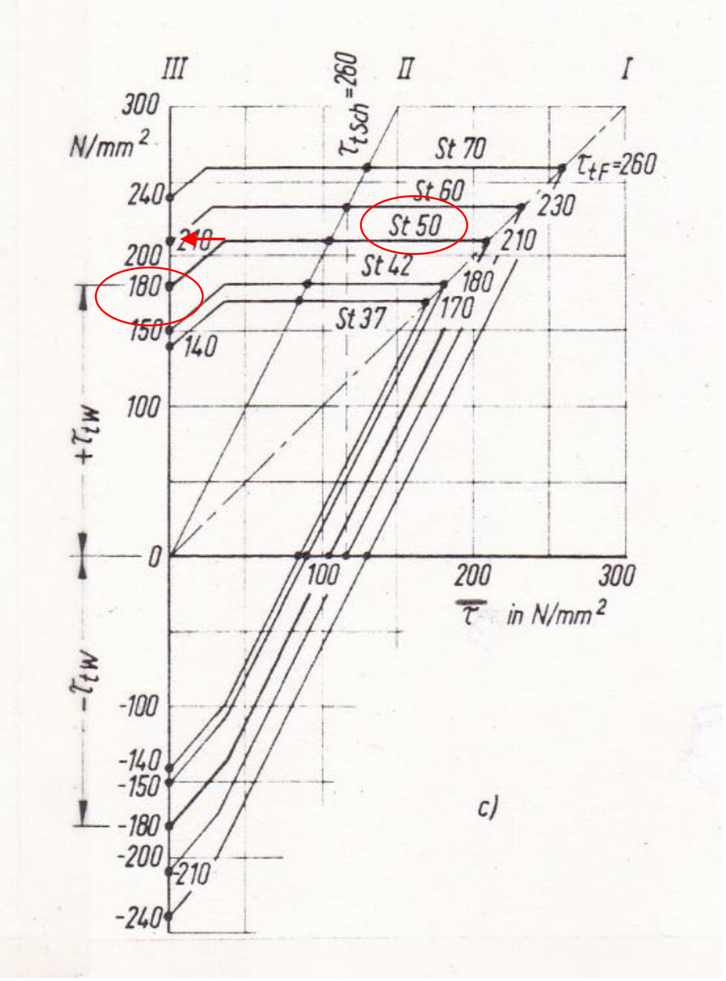
$$\tau_{\max} = \frac{16.M_t}{\pi . d^3} = 24.45\ \mathrm{N/mm}^2$$

EXERCICE 2

- D’après le diagramme de Goodman (Acier St50 en torsion), on a

$$R_e^{''} = 210 \text{ N/mm}^2$$

$$R_t^{''} = 180 \text{ N/mm}^2$$



EXERCICE 2

- En utilisant la formule de Gough and Pollard, on trouve la sécurité équivalente

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{K_\sigma^2} + \frac{1}{K_\tau^2}$$

- avec

$$\Leftrightarrow K = 2.35$$

EXERCICE 2

- Supposons maintenant que le moment de torsion est répété. Le moment de torsion maximale est de 600 Nm.
- En répétée, nous avons

$$\bar{\tau} = \tau_a = \frac{\tau_{\max}}{2} = 12.23\ \mathrm{N/mm^2}$$

- Le coefficient de sécurité en torsion vaut

$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{\tau_a . k_{f\tau}}{b_1 . b_2 . R''_{\pm}} + \frac{\bar{\tau}}{R''_e}$$

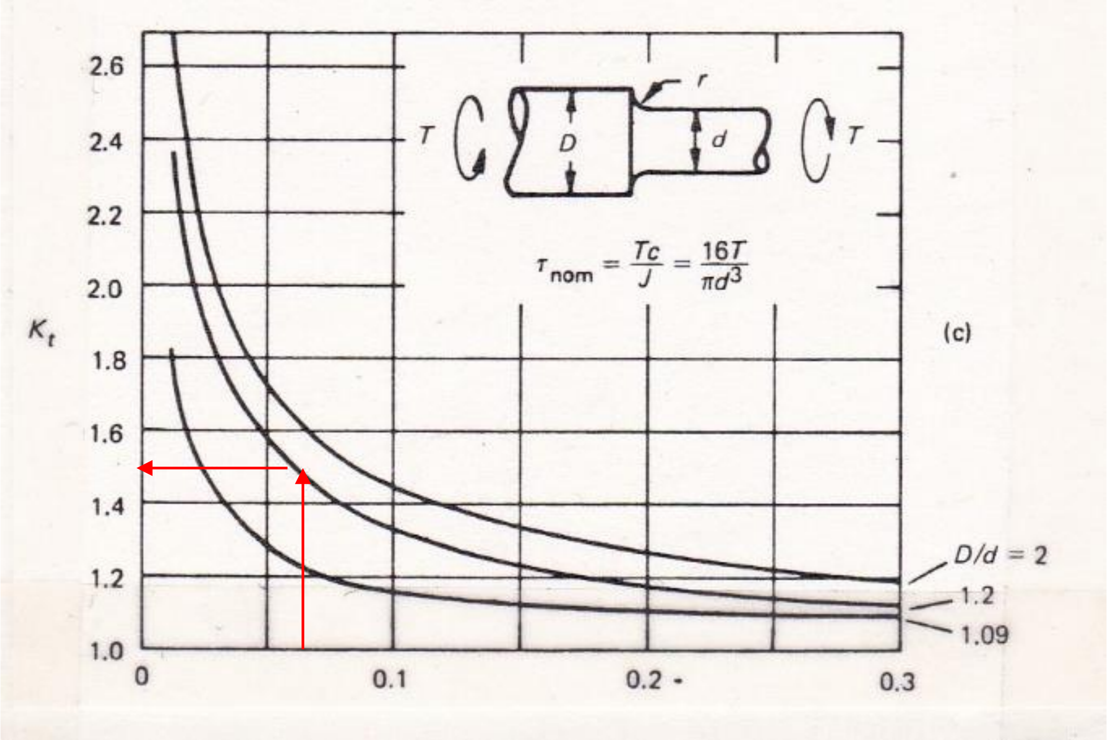
EXERCICE 2

- b_1 et b_2 restent inchangés par rapport à l'exercice n° 1 alors que le coefficient de sensibilité à l'entaille est évaluée par une expression analogue à celle de l'exercice n°1 :

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{3}{50} = 0.06$$

$$\Leftrightarrow k = 1.5$$



EXERCICE 2

- q est inchangé

➔ q = 0.796

➔ k_{f_τ}*=1.4*

- Il vient

$$\Leftrightarrow \frac{1}{K_\tau} = \frac{12.23*1.4}{0.82*0.95*180} + \frac{12.23}{210}$$

$$\Leftrightarrow K_\tau = 5.54$$

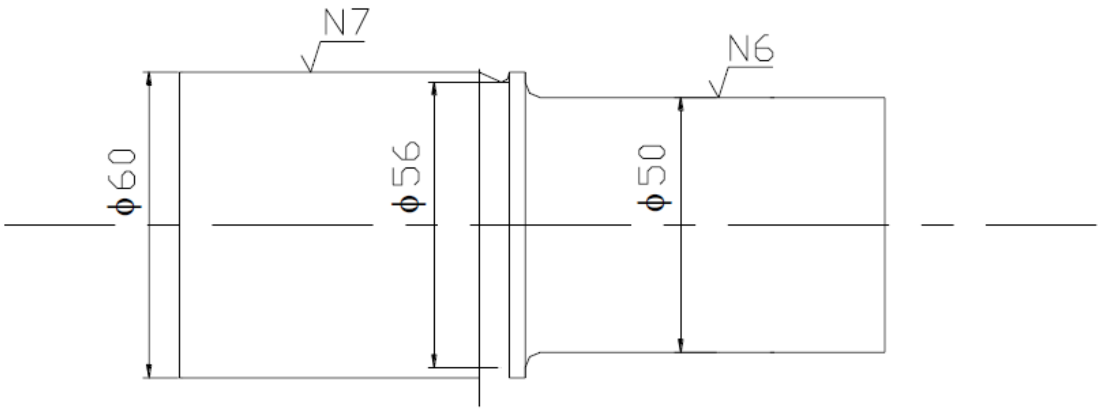
- En combinant avec K_σ:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{K^2} = \frac{1}{2.45^2} + \frac{1}{5.54^2}$$

$$\Leftrightarrow K = 2.24$$

EXERCICE 3

- Modification de l’épaulement de l’exercice 1 en ajoutant <u>une gorge de décharge</u> en vue d’améliorer la sécurité.

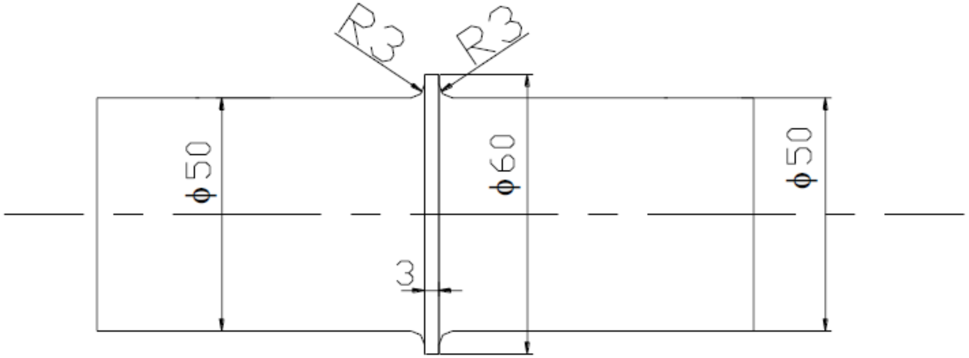


- Nous réaliserons nos calculs pour un mode de sollicitation en flexion alternée et torsion répétée.

EXERCICE 3

- Afin de calculer le coefficient de sécurité, nous devons considérer que nous avons un collet lorsque nous regardons aussi bien de droite que de gauche.

- Calculer la sécurité à droite du collet.



$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2$$

EXERCICE 3

- Les données concernant les moments de flexion et torsion ainsi que de l'état de surface N6 ne varient pas

- **TORSION**
- Le coefficient de concentration de contrainte lors d'une sollicitation en torsion est le même qu'il s'agisse d'un collet de largeur infinie (exercice précédent) ou d'un collet de largeur finie de même dimension.

- Le facteur d'entaille k_{f_τ} ne change pas.

- Puisque toutes les autres grandeurs intervenant dans le calcul de K_τ sont les mêmes que celles de l'exercice précédent, le coefficient de sécurité en torsion reste le même.

EXERCICE 3

- **FLEXION**
- Par contre, lors d'une sollicitation <u>en flexion</u>, le facteur d'entaille $k_{f\sigma}$ <u>n'est plus le même</u> qu'il s'agisse d'un épaulement ou d'un collet.

$$k_{f\sigma} = 1 + q.(k - 1) \qquad q = 0.79$$

- La détermination du coefficient de concentration de contrainte dans le cas d'un collet de largeur finie, <u>nous devons considérer que l'effet de la discontinuité de la barre plate est le même que celle de la barre ronde</u>

$$\frac{k_l - 1}{k_\infty - 1} = \frac{k_l^b - 1}{k_\infty^b - 1}$$

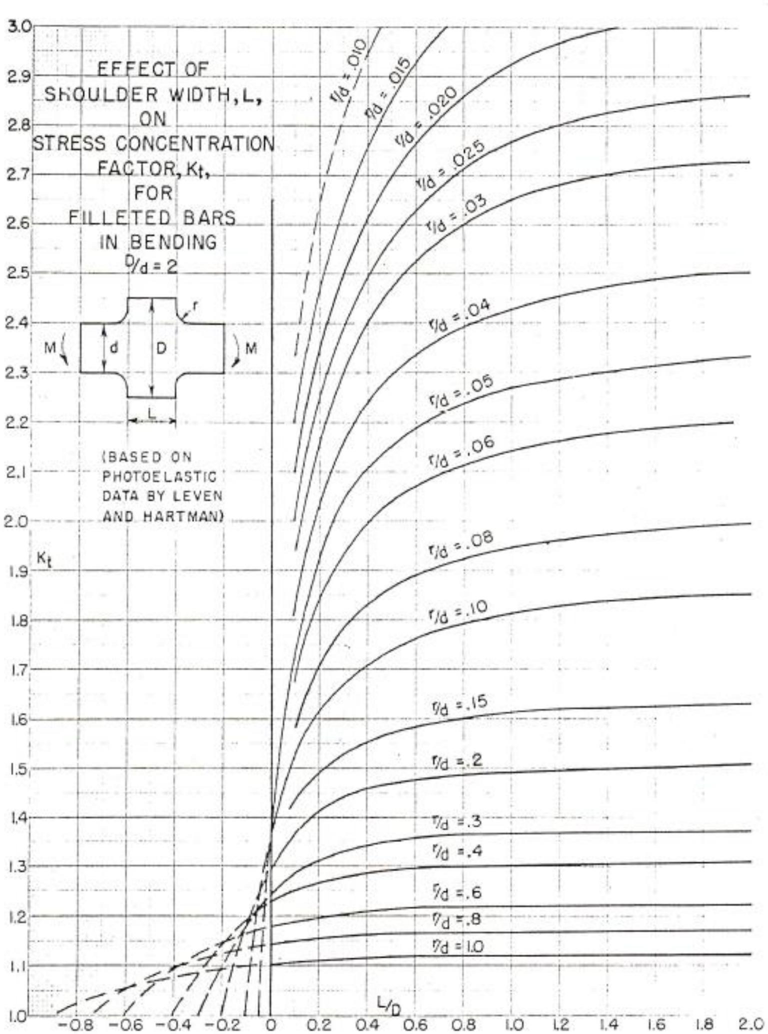
EXERCICE 3

- Coefficient de concentration de contrainte en flexion dans le cas d'un collet de largeur finie

$$\frac{k_l - 1}{k_\infty - 1} = \frac{k_l^b - 1}{k_\infty^b - 1}$$

  – klb : coefficient de concentration de contrainte de la barre plate de largeur b finie
  – k∞b : coefficient de concentration de contrainte de la barre plate de largeur infinie(épaulement)
  – kl : coefficient de concentration de contrainte de la barre ronde de largeur finie.
  – k∞ coefficient de concentration de contrainte de la barre ronde de largeur infinie (épaulement)

EXERCICE 3

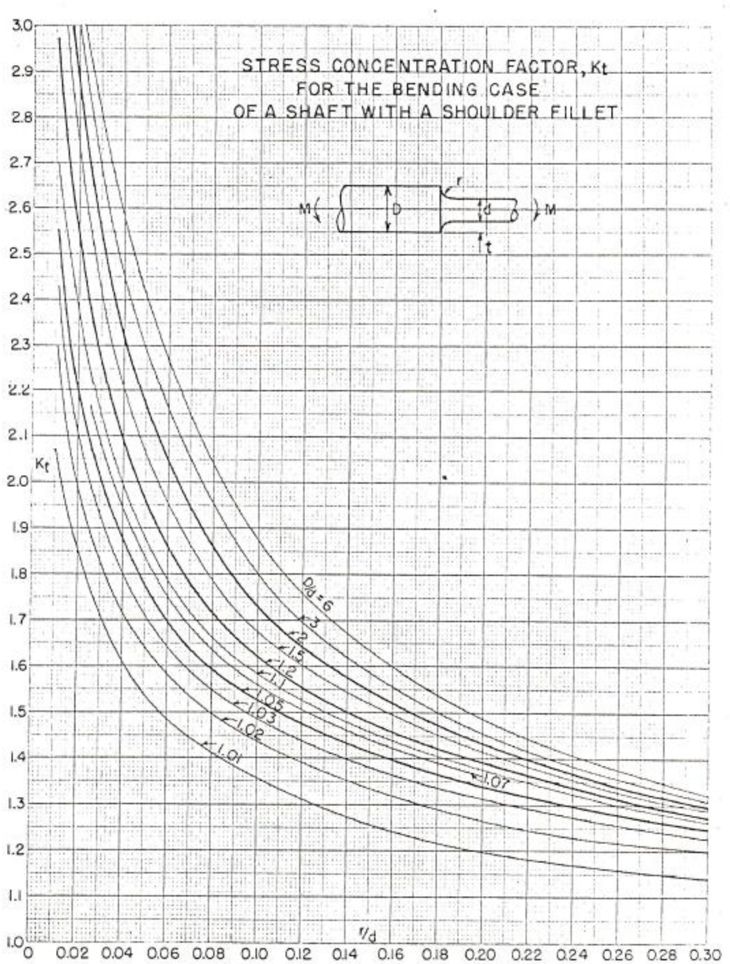


- Klb est déterminé barre plate sollicitée en flexion grâce aux abaques de Peterson
  - r/d = 3/50=0,06
  - L/D = (3/60)=0,05

$$k_l^b = 1.5$$

$$k_\infty^b = 2 \ \text{(asymptote de la courbe r/d=0.06)}$$

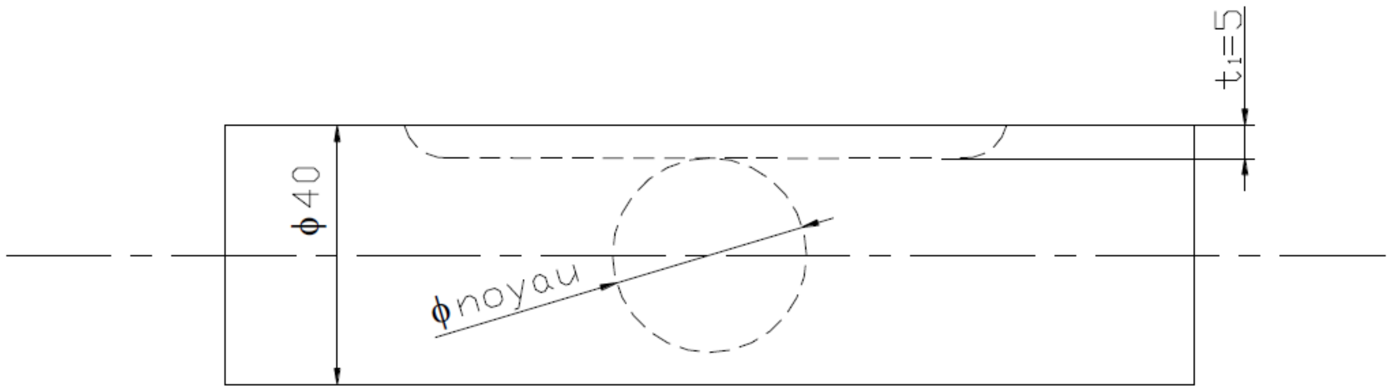
EXERCICE 3



- Pour <u>la barre ronde de longueur infinie</u> (épaulement), nous avons déjà calculé le coefficient de concentration de contrainte ; Il vaut :

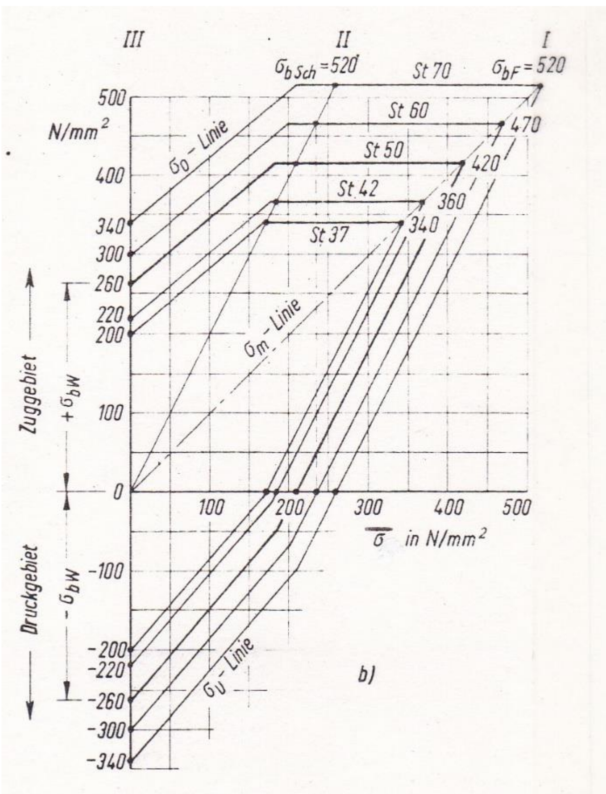
EXERCICE 4

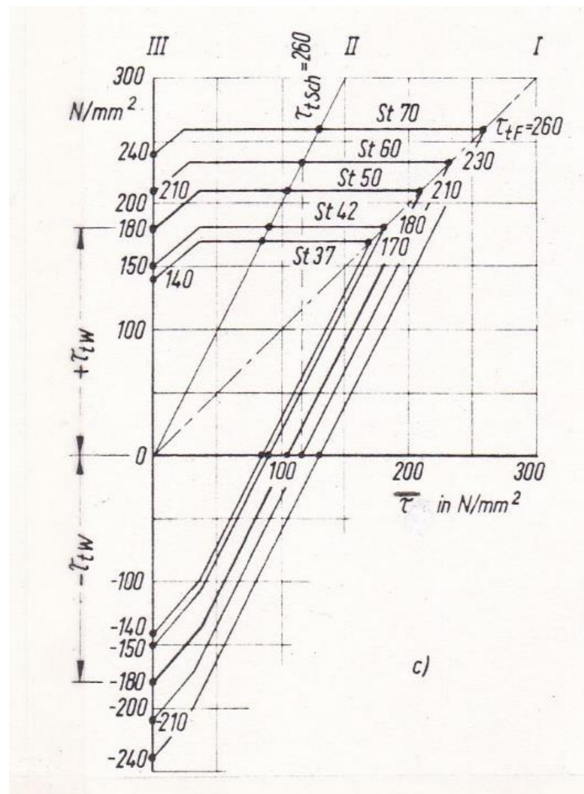
- Soit un arbre en acier St 70, de diamètre 40 avec une rainure de cale ordinaire.
- L'état de surface à fond de la rainure est de N7.
- Les moments de flexion et de torsion constante valent respectivement M_f=150 et M_t=100 N.m.



EXERCICE 4

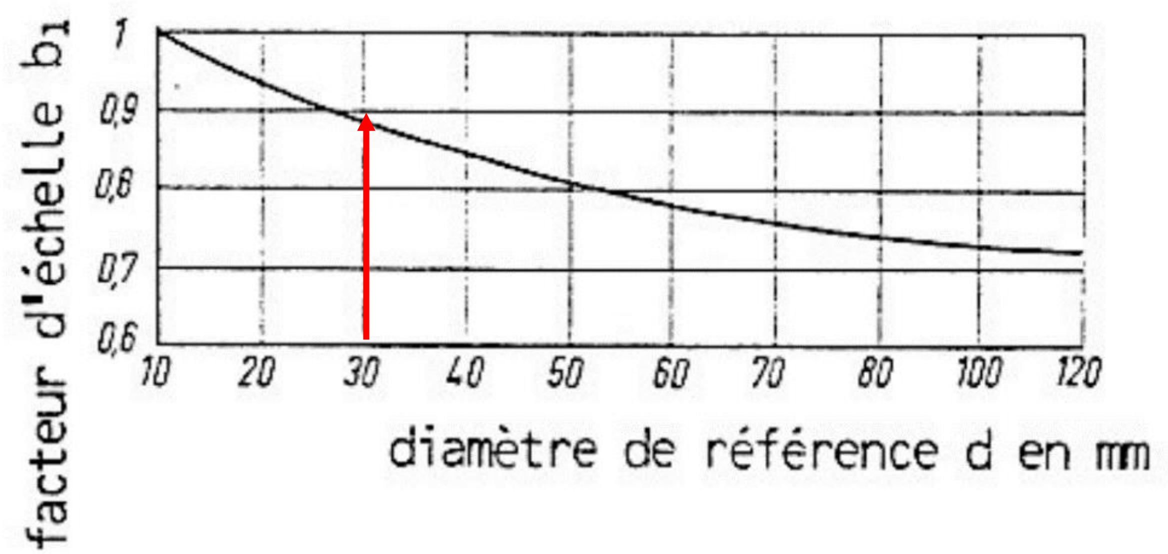
- St 70 $\Rightarrow$ digramme de Goodman en flexion et en torsion
- Flexion : R_e = 520 N/mm² ; $R_\pm$ = 340 N/mm² ;
- Torsion : R_e'' = 260 N/mm² ; $R_\pm''$ = 240 N/mm² ;





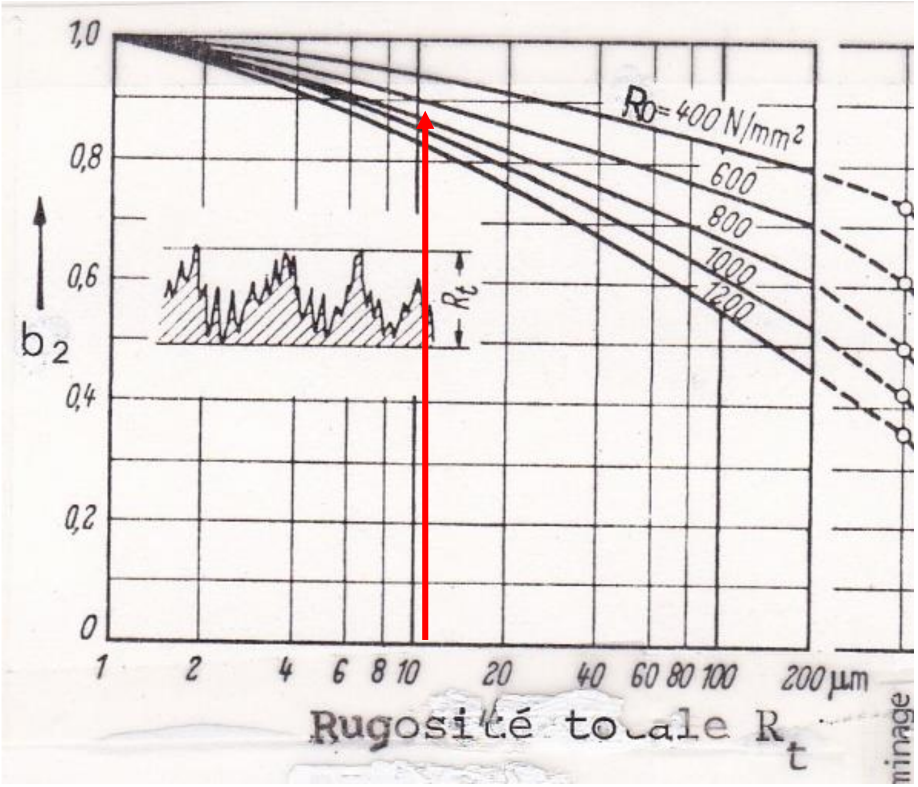
EXERCICE 4

- d = 30 mm $\Rightarrow$ $b_1 = 0.88$



EXERCICE 4

- N7 $\Rightarrow$ R_a = 1.6 µm $\Rightarrow$ R_t = 6.5*1.6 = 10.4 µm ;
- St70 : R_0=700 MPa et N7 $\Rightarrow$ b_2 = 0.88 ;



EXERCICE 4

- M_f = 150 Nm. D'où

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = \frac{32 * 150 * 10^3}{\pi * (30)^3} = 56.6\ N / mm^2$$

$$\bar{\sigma} = 0$$

- M_t = 100 Nm. D'où

$$\bar{\tau} = \tau_{\max} = \frac{16 * 100 * 10^3}{\pi * (30)^3} = 18.9\ N / mm^2$$

$$\tau_a = 0$$

EXERCICE 4

- facteurs d'entaille : par le tableau du cours, on a
  - $k_{f_\sigma} = 1.6$
  - $k_{f_\tau} = 1.5$

Forme de l'entaille	**Matière**	k_σ	k_τ
Gorge de dégagement circulaire	St 37-60	1.5 - 2.2	1.3 - 1.8
Saignée pour jong d'arrêt	St 37-60	2.5 - 3.0	2.5 - 3.0
Epaulement raccordé	St 37-60	1.5 - 2.0	1.3 - 1.8
Rainure de cale (bouts ronds)	St 37-60	1.7	1.6
	$R_0 > 600\ N/mm^2$	2.0	1.8
Rainure de cale ordinaire	St 37-60	1.5	1.4
	$R_0 > 600\ N/mm^2$	1.6	1.5
Rainure de cale de type Woodruff (demi-lune)	St 30 - 60	2.0 - 3.0	2.0 - 3.0
Arbres cannelés	St 37 - 60	-	2.0 - 2.5
Frettage sans précaution spéciale	St 37 - 60	2.0	1.5
Trou radial dans un arbre	St 37 - 60	1.4 - 1.7	1.4 - 1.7

TABLE 3.3 – Valeurs approchées des facteurs d'entaille dans le cas de géométries non calculables

EXERCICE 4

- Coefficient de sécurité :
  - Pour la contrainte de flexion

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{56.6*1.6}{0.88*0.88*340} = 0.344$$

  - Pour la contrainte de cisaillement

$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{18.9}{260} = 0.0727$$

- Soit selon Gough et Pollard

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2 = (0.344)^2 + (0.0727)^2$$

- Soit le coefficient de sécurité

$$\boxed{K = 2.83}$$

EXERCICE 4

REMARQUE

- En général, pas de problème pour les rainures de cale normalisées choisies à partir de d_{SER} et de R = 50 N/mm².
- Soit

$$M_i = \sqrt{(150)^2 + 0.75(100)^2} = 173.2$$

- Il vient

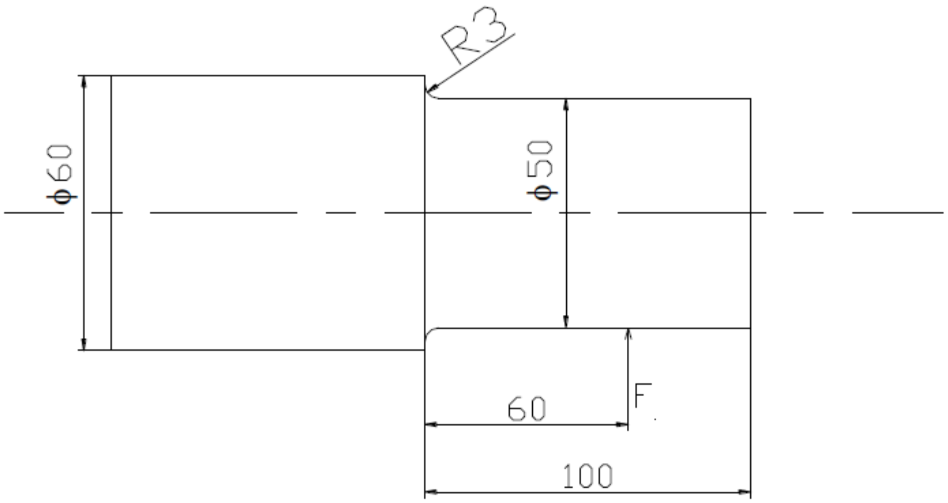
$$d_{SER} = \sqrt[3]{\frac{32M_i}{\pi * 50}} = \sqrt[3]{\frac{32 * 173.2 * 10^3}{\pi * 50}} = 32.8$$

- d_{noyau} = 30 mm < d_{SER} ?? $\Rightarrow$ Ok fatigue ??

DUREE DE VIE LIMITEE

EXERCICE 3

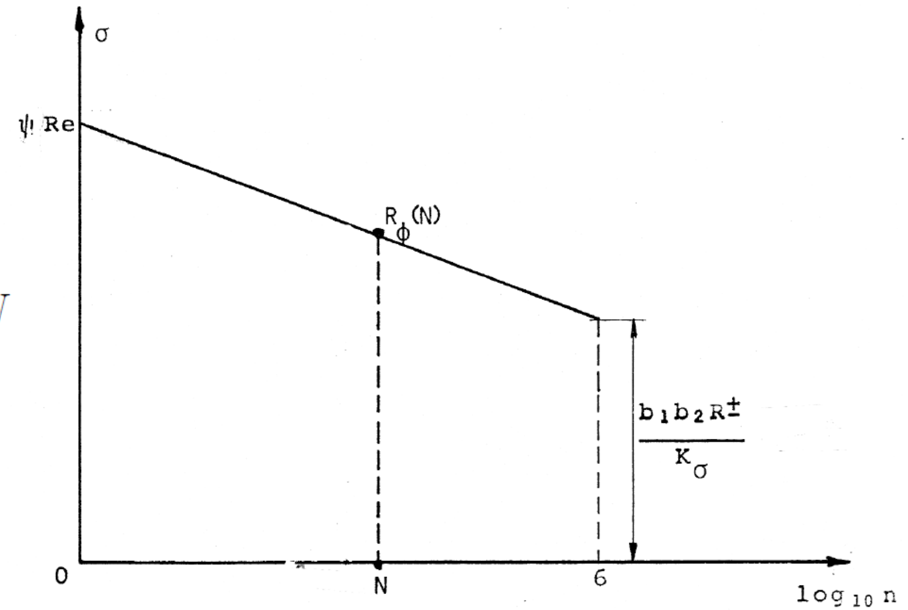
- Nous demandons de calculer le nombre de cycles conduisant à une sécurité de 2.5 pour la géométrie de l'exercice 1 de la séance passée dans deux cas de sollicitation :
  - a) flexion alternée et torsion constante ;
  - b) flexion alternée et torsion répétée.



EXERCICE 3

- Droite de Wohler

$$R_\phi(N) = \psi\, R_E - \frac{1}{6}\left(\psi\, R_e - \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma}\right) \log_{10} N$$



- Sécurités partielles

$$\frac{1}{K_{\sigma,N}} = \frac{\bar{\sigma}}{\psi R_e} + \frac{\sigma_a}{\psi\, R_e - \frac{1}{6}\,(\psi\, R_e - R_\phi)\,\log_{10} N} \qquad R_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma}$$

$$\frac{1}{K_{\tau,N}} = \frac{\bar{\tau}}{\psi R_e''} + \frac{\tau_a}{\psi_c\, R_e'' - \frac{1}{6}\,(\psi_c\, R_e'' - R_\phi'')\,\log_{10} N} \qquad R_\phi'' = \frac{b_1 b_2 R_\pm''}{k_\tau}$$

- Soit

$$\log_{10} N = \frac{6(\psi R_e - \sigma_{max})}{(\psi R_e - \bar{\sigma})(1 - \frac{R_\phi}{\psi R_e})}$$

EXERCICE 3

- Rappel des résultats trouvés :
  - $b_1 = 0.82$
  - $b_2 = 0.95$
  - $k_{f\sigma} = 1.685$
  - $k_{f\tau} = 1.4$
  - Re = 420 N/mm²
  - R± = 260 N/mm²
  - Re″ = 210 N/mm²
  - Re± = 180 N/mm²

EXERCICE 3

- <u>Flexion alternée et torsion constante (Mt = 600 Nm) :</u>

- On a trouvé les valeurs suivantes

$$\sigma_a = 49\ N/mm^2$$

$$\bar{\sigma} = 0\ N/mm^2$$

- Et

$$\bar{\tau} = \tau_{\max} = 24.45\ N/mm^2$$

- Le coefficient de sécurité totale est donné par

$$\left(\frac{1}{2.5}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{\left[R_e - \frac{1}{6}.\left(R_e - R_\phi^\infty\right)\right].\log_{10} N}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}}{R_e^{"}}\right)^2$$

EXERCICE 3

- Dans cette dernière expression, nous pouvons sans peine tirer la valeur de la durée de vie N.
- ➔ $\log_{10}N = 5.843$.
- ➔ N = 696 600 Cycles.

EXERCICE 3

- Flexion alternée et torsion répétée:

- On a $\sigma_a = 49\ N/mm^2$

  $\bar{\sigma} = 0\ N/mm^2$

- Et

  $\tau_a = \bar{\tau} = 12.23\ N/mm^2$

- En tenant compte de la composante alternée en torsion, le coefficient de sécurité totale est:

$$\left(\frac{1}{2.5}\right)^2 = 0.16 = \left(\frac{\sigma_a}{\left[R_e - \frac{1}{6}.\left(R_e - R_\phi^\infty\right)\right].\log_{10} N}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\left[R_e'' - \frac{1}{6}.\left(R_e'' - R_\phi''^\infty\right)\right].\log_{10} N} + \frac{\bar{\tau}}{R_e''}\right)^2$$

EXERCICE 3

- L'expression analytique de $\log_{10}N$ est très lourde mathématiquement parlant. Une méthode itérative sera suffisante :
  - si $\log_{10}N = 5.5$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.143$
  - si $\log_{10}N = 5.4$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.135$
  - si $\log_{10}N = 5.6$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.152$
  - si $\log_{10}N = 5.67$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.1589$
  - si $\log_{10}N = 5.68$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.1599$
- Dès lors pour $\log_{10}N = 5.5$ nous avons un nombre de cycles
- N = 478630 cycles.