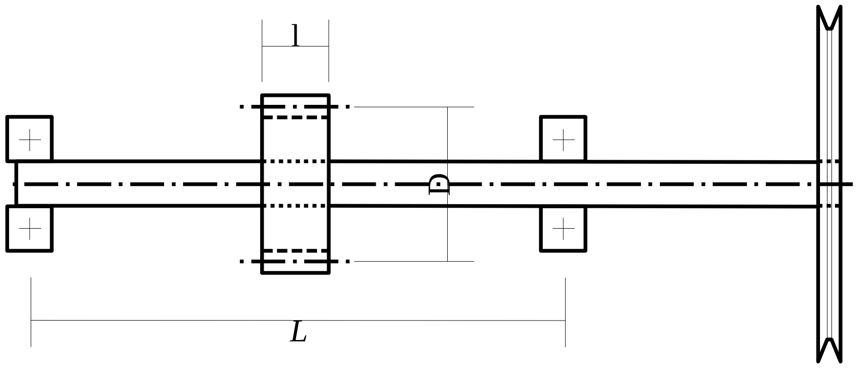
Données

$N = 1000 \ \ \mathrm{tr.min^{-1}}$
$P = 20000 \ \ \mathrm{W}$
$M = 100 \ \ \mathrm{Kg}$
$g = 9.81 \ \ \mathrm{m.s^{-2}}$
$L = 0.2 \ \ \mathrm{m}$
$D = 0.1 \ \ \mathrm{m}$
$\alpha = 20° = 0.3490 \ \ \mathrm{rad}$
$l = 0.05 \ \ \mathrm{m}$
$\rho = 7800 \ \ \mathrm{kg.m^{-3}}$
$E = 210.10^{9} \ \ \mathrm{Pa}$
$R = 50.10^{6} \ \ \mathrm{Pa}$



Couple moteur

$\omega = N \cdot \frac{2\pi}{60} = 104.72 \ \ \mathrm{rad.s^{-1}}$ $\quad C = \frac{P}{\omega} = 190.99 \ \ \mathrm{N.m}$

Force sur les dents de la roue dentée

$F_T = \frac{C}{D/2} = 3819.72 \ \ \mathrm{N}$ $\quad F_R = F_T \tan\alpha = 1390.26 \ \ \mathrm{N}$
$F = \frac{F_T}{\cos\alpha} = 4064.86 \ \ \mathrm{N}$

Formule des arbres de manèges

$d_{\mathrm{am}}[\mathrm{mm}] = 130 \sqrt[n]{\frac{P[\mathrm{kW}]}{N[\mathrm{tr.min^{-1}}]}} = 48.89$ (n=4 car $\frac{P[\mathrm{kW}]}{N[\mathrm{tr.min^{-1}}]} < 1.0$)

Réactions aux appuis

$P = Mg = 981.0 \ \ \mathrm{N}$
$R_{AV} = -\frac{F_R}{2} - \frac{P}{2} = -1185.63 \ \ \mathrm{N}$ $\quad R_{BV} = -\frac{F_R}{2} + \frac{3P}{2} = 776.37 \ \ \mathrm{N}$
$R_{AH} = \frac{F_T}{2} = 1909.86 \ \ \mathrm{N}$ $\quad R_{BH} = \frac{F_T}{2} = 1909.86 \ \ \mathrm{N}$

Moment fléchissants

Entre A et R :
$M_{fV}(x) = R_{AV}\, x = -1185.63\, x \ \ \mathrm{N.m}$
$M_{fH}(x) = R_{AH}\, x = 1909.86\, x \ \ \mathrm{N.m}$
Entre R et B :
$M_{fV}(x) = R_{AV}\, x + F_R(x - L/2) = 204.63\, x - 139.03 \ \ \mathrm{N.m}$
$M_{fH}(x) = R_{AH}\, x - F_T(x - L/2) = -1909.86\, x + 381.97 \ \ \mathrm{N.m}$
Entre B et P :
$M_{fV}(x) = R_{AV}\, x + F_R(x - L/2) + R_{BV}(x - L) = 981\, x - 294.3 \ \ \mathrm{N.m}$
$M_{fH}(x) = R_{AH}\, x - F_T(x - L/2) + R_{BH}(x - L) = 0 \ \ \mathrm{N.m}$

Moment résultant

$$M_f(x)=\sqrt{M_{fV}(x)^2+M_{fH}(x)^2}$$

Entre A et R :

$$M_f(x)=\sqrt{M_{fV}(x)^2+M_{fH}(x)^2}=2247.95\,x \quad \text{N.m}$$

Entre R et B :

$$M_f(x)=\sqrt{M_{fV}(x)^2+M_{fH}(x)^2}=100\sqrt{368.9\,x^2-151.6\,x+16.52} \quad \text{N.m}$$

Entre B et P :

$$M_f(x)=\sqrt{M_{fV}(x)^2+M_{fH}(x)^2}=-1185.63\,x \quad \text{N.m}$$

Moment de torsion

Entre A et R :

$$M_t(x)=0 \quad \text{N.m}$$

Entre R et B :

$$M_t(x)=C=190.99 \quad \text{N.m}$$

Entre B et P :

$$M_t(x)=C=190.99 \quad \text{N.m}$$

Moment idéal (Tresca)

$$M_i(x)=\sqrt{M_f(x)^2+M_t(x)^2}$$

Entre A et R :

$$M_i(x)=2247.95\,x \quad \text{N.m}$$

Entre R et B :

$$M_i(x)=100\sqrt{368.9\,x^2-151.6\,x+20.17} \quad \text{N.m}$$

Entre B et P :

$$M_i(x)=100\sqrt{96.2\,x^2-57.7\,x+12.3} \quad \text{N.m}$$

Diamètre SER

$$d_{SER}(x)=\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\frac{M_i(x)}{R}}=5.884\sqrt[3]{M_i(x)\ [\text{N.m}]} \quad \text{mm}$$

Entre A et R :

$$d_{SER}(x)=77.08\sqrt[3]{x} \quad \text{mm}$$

Entre R et B :

$$d_{SER}(x)=5.884\sqrt[3]{100\sqrt{368.9\,x^2-151.6\,x+20.17}} \quad \text{mm}$$

Entre B et P :

$$d_{SER}(x)=5.884\sqrt[3]{100\sqrt{96.2\,x^2-57.7\,x+12.3}} \quad \text{mm}$$

(d_{max}=40 mm)

x [m]	d_{SER}[mm]
0.0	0.0
0.025	22.5
0.05	28.4
0.1^-	35.8
0.1^+	39.2
0.15	36.5
0.2	35.2
0.25	34.2
0.3	33.9

Vitesses critiques de rotation

d_{max}=40 mm $I=\frac{\pi d_{max}^4}{64}=1.2566.10^{-7}$ m^4

Volume et masse de la roue dentée

$$V_R=\frac{l}{4}(\pi D^2-\pi d_{max}^2)=330 \text{ cm}^3 \quad m_R=\rho V_R=2.572 \text{ Kg}$$

Masse de l'arbre

$$V_A=\frac{3L}{8}(\pi d_{max}^2)=377 \text{ cm}^3 \quad m_A=\rho V_A=2.940 \text{ Kg}$$

Masse linéique

$$ml_a=\frac{\rho}{4}(\pi d_{max}^2)=9.8 \text{ kg.m}^{-1}$$

Pulsation propre de la roue dentée

$$\omega_R=\sqrt{\frac{48EI}{m_R L^3}}=7844.6 \text{ rad.s}^{-1}$$

Pulsation propre du poids en bout d'arbre

Déflexion en bout d'arbre :

$$y\left(\frac{3L}{2}\right)=\frac{FL^3}{8EI}$$

Au final :

$$\omega_P=\sqrt{\frac{8EI}{m_R L^3}}=513.7 \text{ rad.s}^{-1}$$

Pulsation propre de l'arbre

On doit recalculer les pulsations propres pour les CL particulières…
Solution générale :

$$y(x)=C_1 y_1(ax)+C_2 y_2(ax)+C_3 y_3(ax)+C_4 y_4(ax)$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(L)=0 \\ y''(0)=0 \\ y''(3L/2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3=0 \\ C_4=0 \end{cases}$$

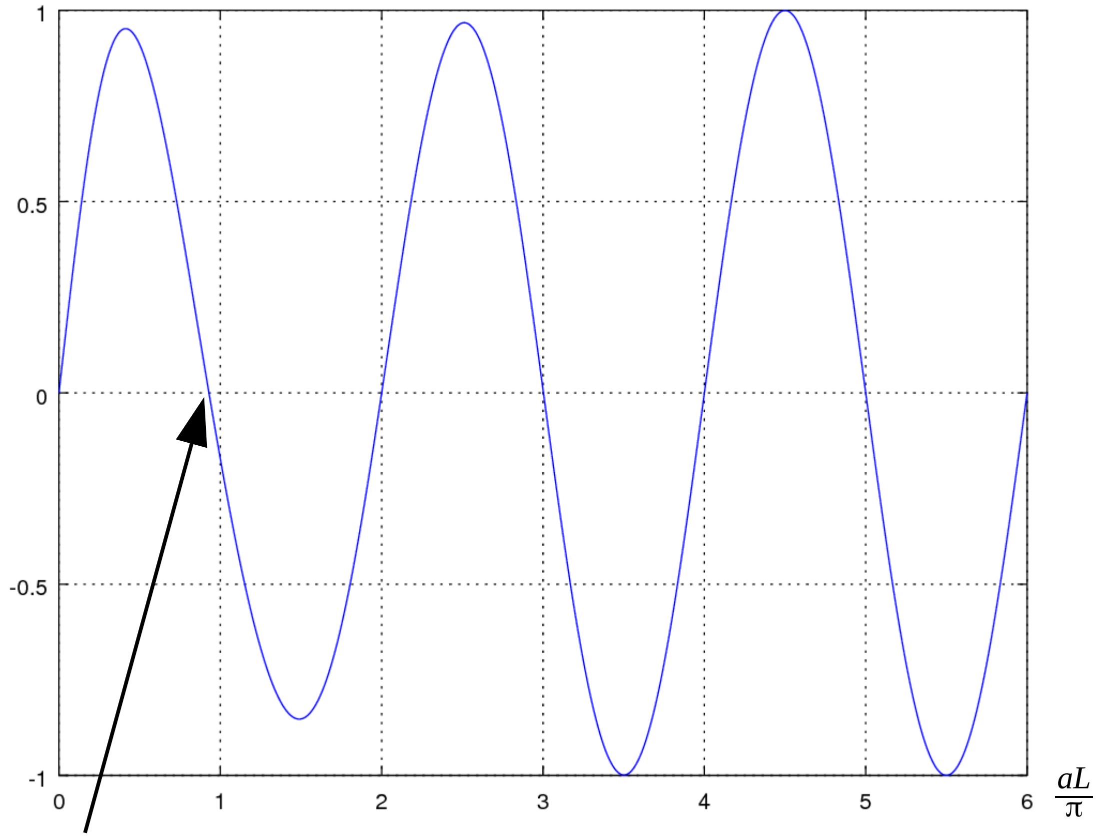
Solution non triviale :det K=0

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_1(aL) & f_2(aL) & f_3(aL) & f_4(aL) \\ f_2(3aL/2) & f_1(3aL/2) & f_4(3aL/2) & f_3(3aL/2) \end{pmatrix}=0$$

au final :

$$\sin aL \sinh\frac{3aL}{2}+\sin\frac{3aL}{2}\sinh aL=0$$

Racines de $\dfrac{\sin aL \sinh \frac{3aL}{2} + \sin \frac{3aL}{2} \sinh aL}{\sinh aL + \sinh \frac{3aL}{2}}$:



Première racine (excepté 0) :

$aL \approx 0.929745\pi = 2.92088$

Racines suivantes

$aL \approx n\pi \quad , \quad n > 1$

(le terme en sinh3aL/2 est dominant pour aL>=2pi, donc les racines sont celles de sin aL ...)

$$\omega_I = \frac{[aL]^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{ml_A}} = 11067 \ \ \text{rad.s}^{-1}$$

Première pulsation propre de l’ensemble

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\omega_R^2} + \frac{1}{\omega_P^2} + \frac{1}{\omega_I^2}$$

$\Omega = 512\,\text{rad.s}^{-1}$ (correspond à 4890 tr.min^{-1})