

# CONCEPTION A LA FATIGUE

---

Pierre Duysinx

Aérospatiale & Mécanique  
Année académique 2020-2021

# LAY-OUT

- Introduction
- Partie I : Le phénomène de fatigue
  - Introduction
  - Diagramme de Wohler
  - Diagramme d'endurance
  - Diagrammes de Haigh et de Goodman
  - Diagrammes de Soderberg
  - Sécurité par rapport à la droite de Soderberg
  - Dommages cumulatifs

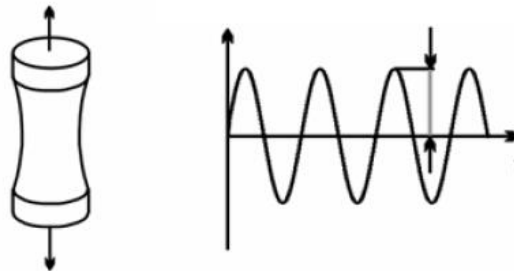
# LAY-OUT

- Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - Pièces réelles soumises à niveaux de contrainte variables
  - Valeur du coefficient de sécurité
- Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

# INTRODUCTION

# INTRODUCTION

- La rupture de pièces peut survenir à des niveaux de chargement beaucoup plus faibles qu'en statique lorsque l'on applique les efforts de manière variable et répétée dans le temps.
- Rôle essentiel de la formation et de la propagation de fissures
- En mécanique des machines et en aéronautique, on estime que 80% des ruptures sont dues au phénomène de fatigue

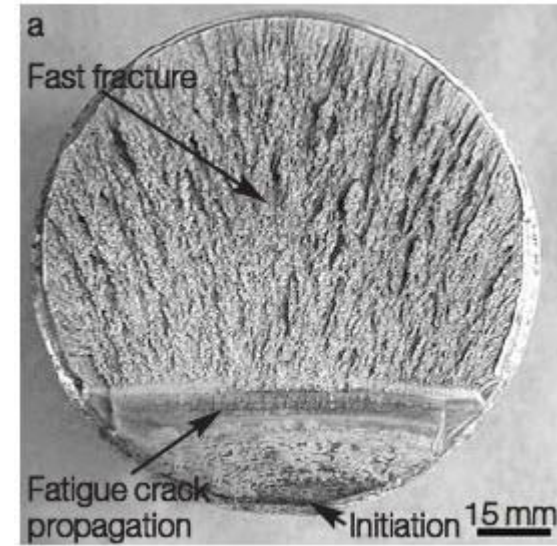
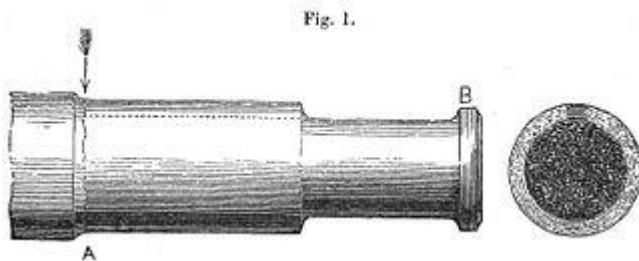


# INTRODUCTION

## □ Historique du problème



Accident de train de Meudon, 1842

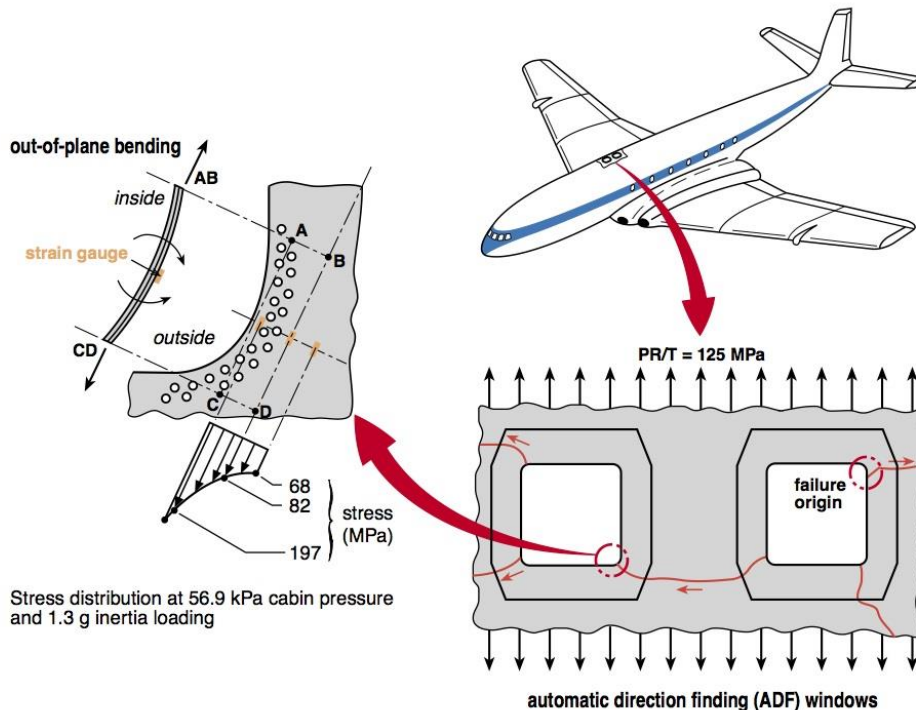


Faciès typique de rupture



# INTRODUCTION

- 1953-1954, deux avions à réaction De Havilland DH 106 COMET disparaissent mystérieusement
- Identification de l'origine de l'accident : propagation de fissures au départ des trous de rivet dans le coin des hublots
- ➔ **fatigue oligocyclique**





# INTRODUCTION

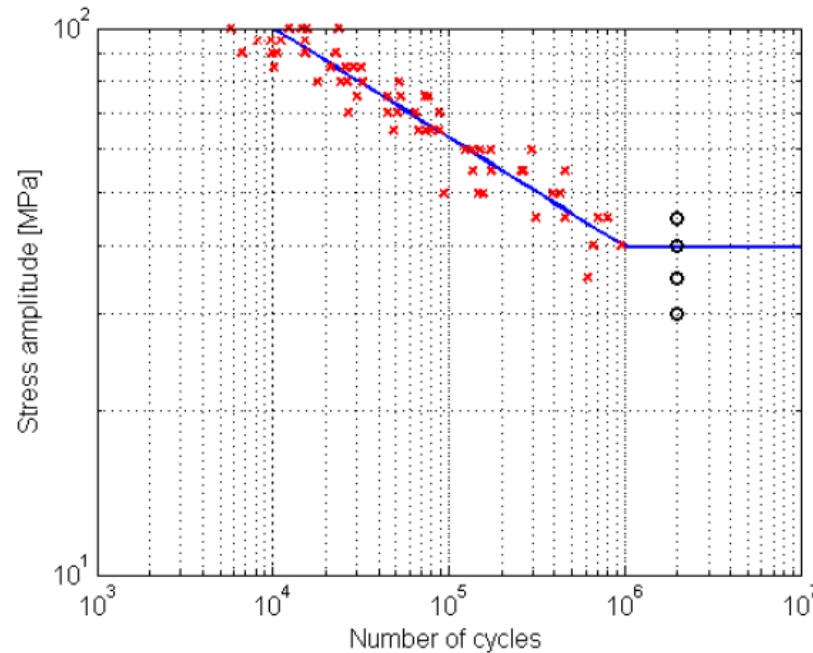
- ❑ Accident du vol ALOHA 243: Le 28 avril 1988, le Boeing B737-200 D'Aloha Airlines, perd une partie importante de son fuselage suite à la propagation d'une fissure le long de lignes de rivets.
- ❑ Bilan une hôtesse disparue, 65 passagers blessés.





# INTRODUCTION

- En 1852, le ministre prussien du commerce charge le savant **August Wöhler** de travailler sur les ruptures d'axes d'essieux de trains.
- Wöhler expose ses travaux à l'exposition universelle de 1867 de Paris.



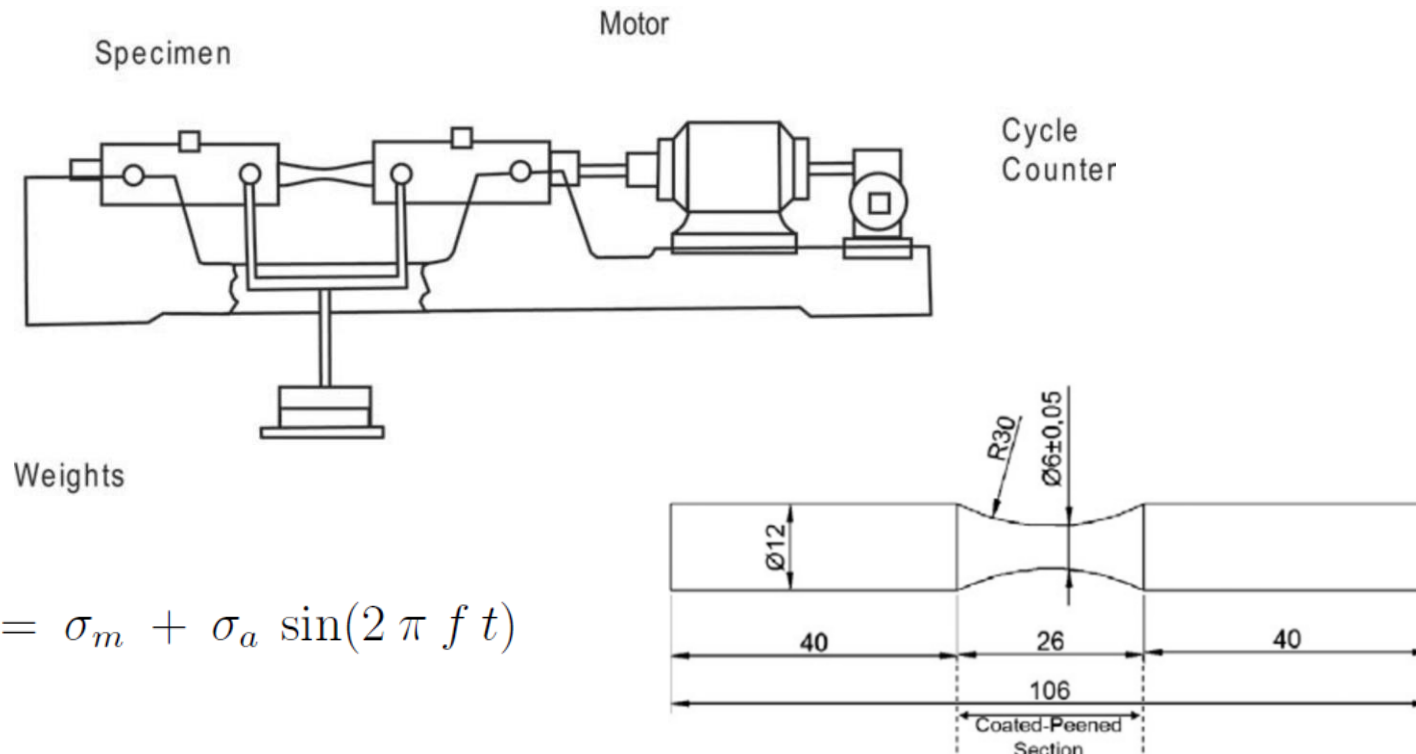
# PARTIE I: LE PHENOMENE DE FATIGUE

# LAY-OUT

- Introduction
- **Partie I : Le phénomène de fatigue**
  - **Introduction**
  - Diagramme de Wöhler
  - Diagramme d'endurance
  - Diagrammes de Haigh et de Goodman
  - Diagrammes de Soderberg
  - Sécurité par rapport à la droite de Soderberg
  - Dommage cumulatif

# ESSAIS D'ENDURANCE

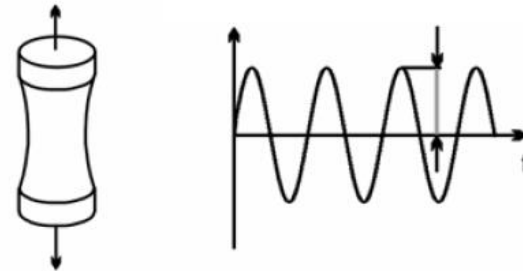
- **Essais d'endurance** sur éprouvettes polies et normalisées soumises à une sollicitation cyclique (flexion alternée, torsion, traction compression)



$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(2 \pi f t)$$

# SOLLICITATIONS CYCLIQUES

- Chargements simples:
  - Périodique
  - Amplitude et fréquence constante



$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(2 \pi f t)$$

- Paramètres principaux du chargement caractérisant la forme du signal et capable de juger de la sévérité de la sollicitation.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

$$\phi = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{avec} \quad -1 \leq \phi \leq 1$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

$$\varpi = \frac{\sigma_a}{\sigma_{max}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varpi \leq 1$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

# SOLLICITATIONS CYCLIQUES

## □ Quelques cas particuliers importants

### – Sollicitation statique

$$\sigma_{max} = \sigma$$

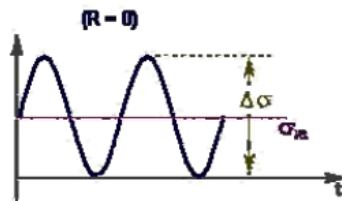
$$\sigma_{min} = \sigma$$

$$\sigma_a = 0$$

$$\sigma_m = \sigma$$

$$R = \phi = +1 \quad \varpi = 0 \quad A = 0$$

### – Sollicitation répétée



$$\sigma_{max} = \sigma$$

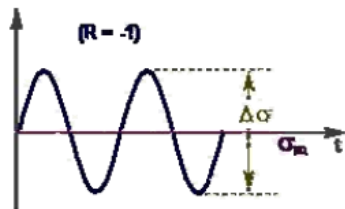
$$\sigma_{min} = 0$$

$$\sigma_a = \sigma/2$$

$$\sigma_m = \sigma/2$$

$$R = \phi = 0 \quad \varpi = 1/2 \quad A = 1$$

### – Sollicitation alternée



$$\sigma_{max} = \sigma$$

$$\sigma_{min} = -\sigma$$

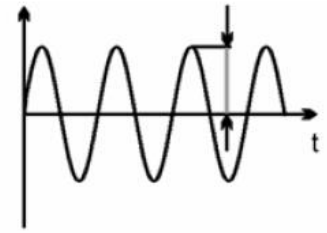
$$\sigma_a = \sigma$$

$$\sigma_m = 0$$

$$R = \phi = -1 \quad \varpi = +1 \quad A = \infty$$

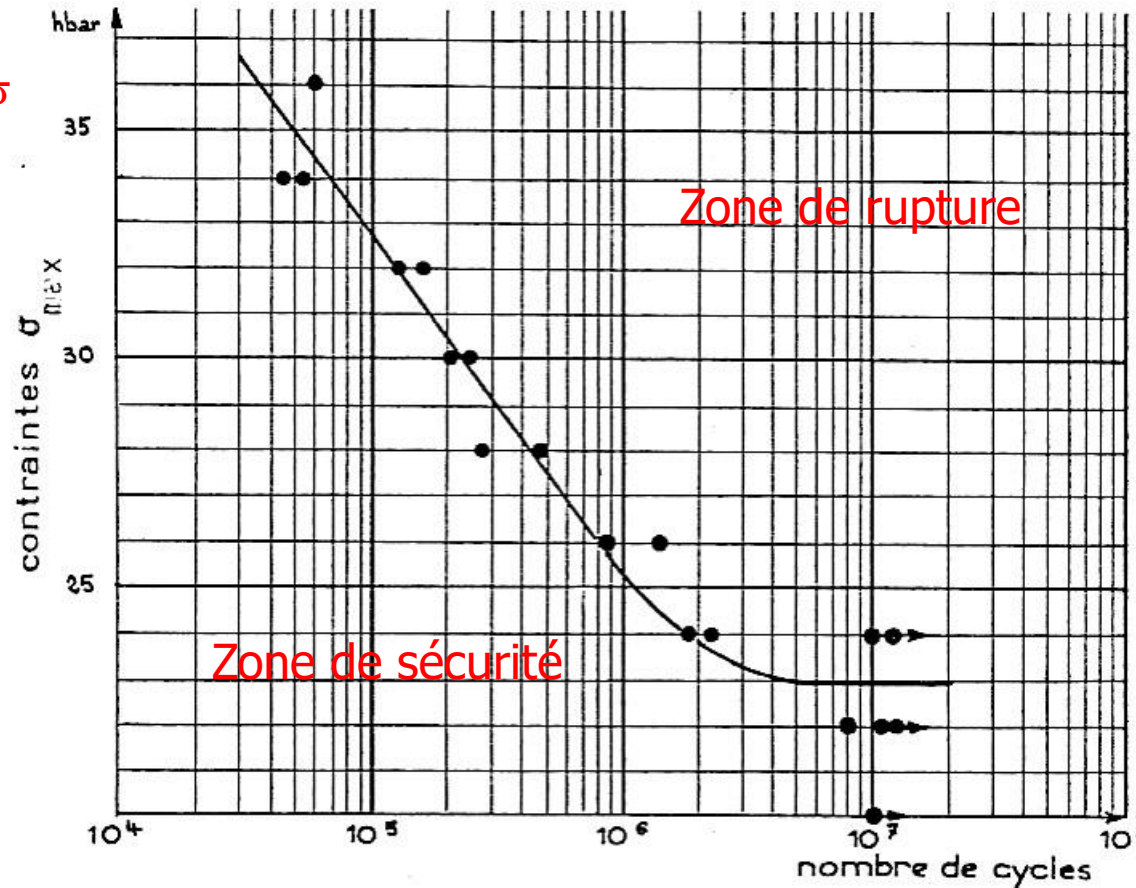


# COURBE DE WOHLER



- Définie généralement (mais pas toujours) pour  $\sigma_m=0$

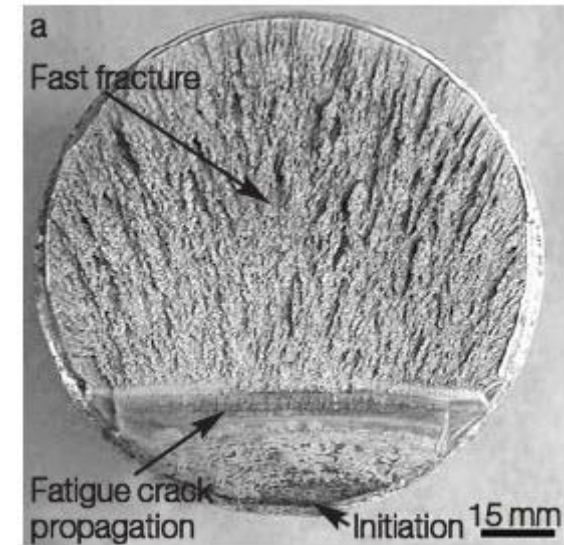
Contrainte  $\sigma$



# LES TROIS PHASES DE LA RUPTURE PAR FATIGUE

□ Trois phases dans le processus de rupture  
Par fatigue

- PHASE I : Amorçage (initiation) de la fissure
- PHASE II : Propagation de la fissure
- PHASE III : Rupture finale

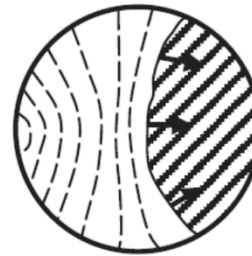


Phase I



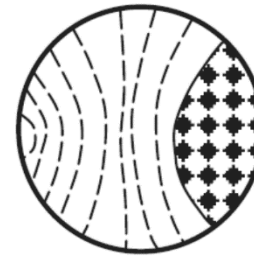
Nucleation

Phase II



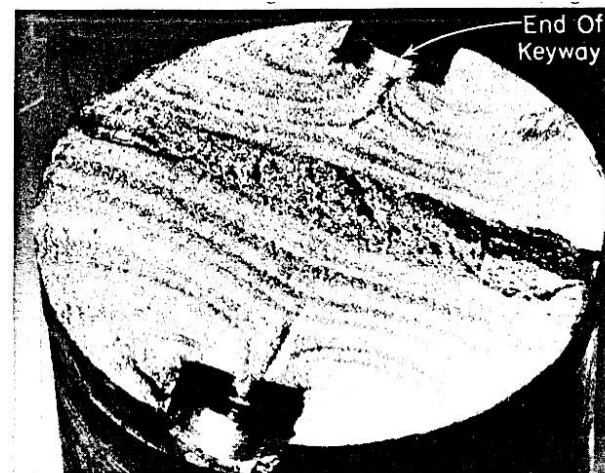
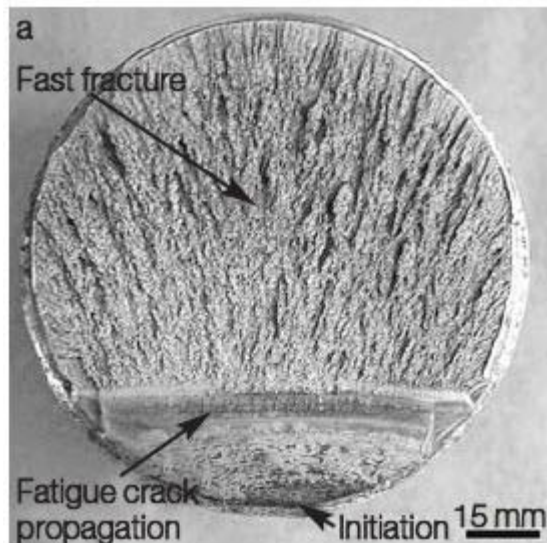
Crack Growth

Phase III



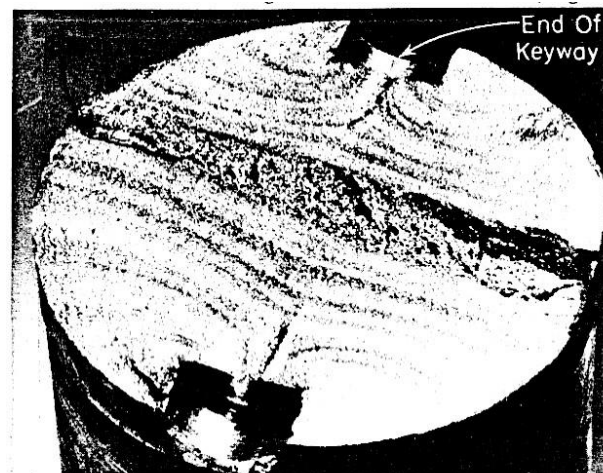
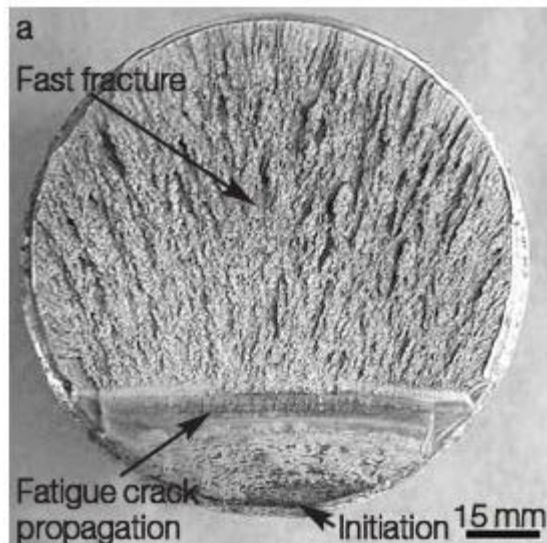
Final Failure

- **PHASE I : Amorçage (initiation) de la fissure**
  - Peut représenter 80 à 90% de la durée de vie.
  - Germination et croissance de multiples **micro-fissures**, leur coalescence aboutissant à la formation d'une macrofissure.
  - Toute discontinuité de surface favorise cette germination (piqûres de corrosion, entailles, congés de raccordement, usinages, inclusions de surface).



## □ PHASE II : Propagation de la fissure

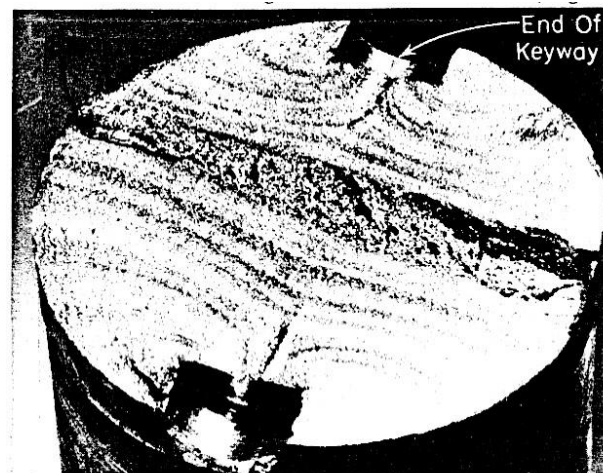
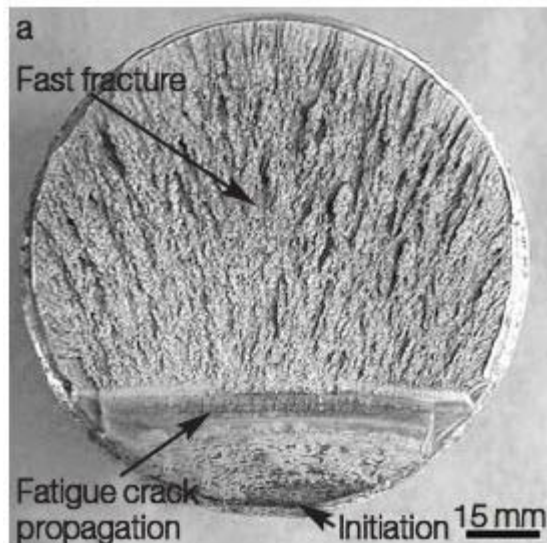
- La fissure macroscopique se propage selon les lois de la mécanique de la rupture.
- Phase clairement visible dans le facies de rupture. Elle se repère à la multitude de lignes d'arrêt bien identifiables.
- La partie de la section correspondant à la phase II présente un **aspect soyeux** dû aux frottements entre les deux faces





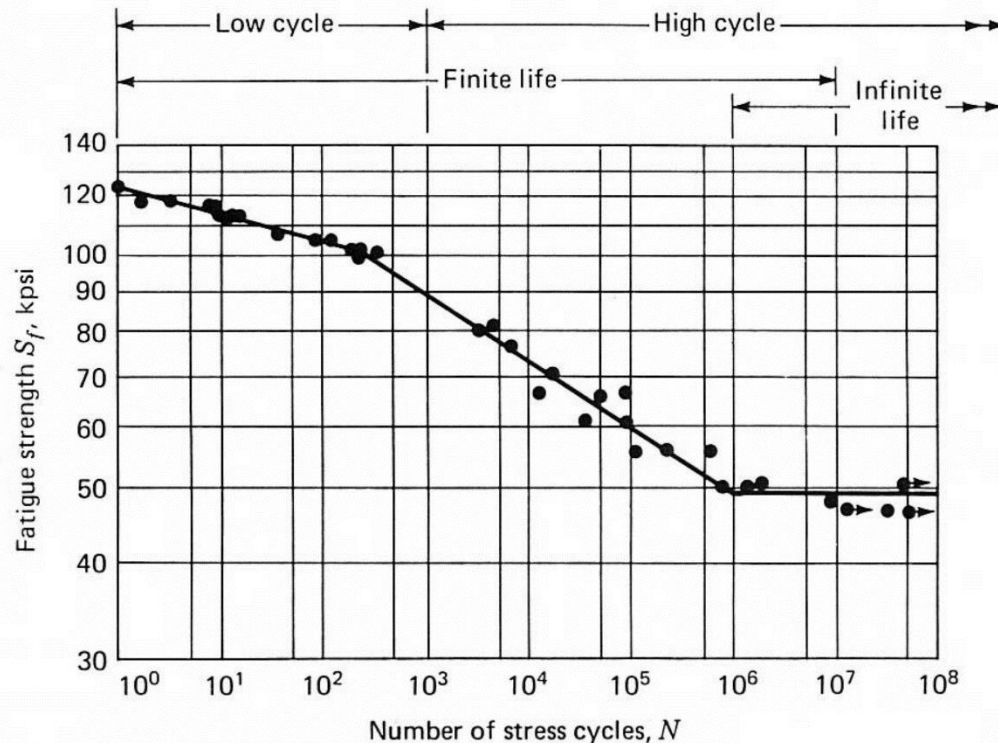
## □ PHASE III : Rupture finale

- La rupture finale **survient brutalement**. La fissure se propage et déchire la section droite.
- Généralement elle survient parce que la contrainte de rupture est dépassée dans la section résiduelle.
- Cette dernière partie présente un aspect rugueux typique de la rupture ductile des grains de matière.



# COURBE DE WOHLER

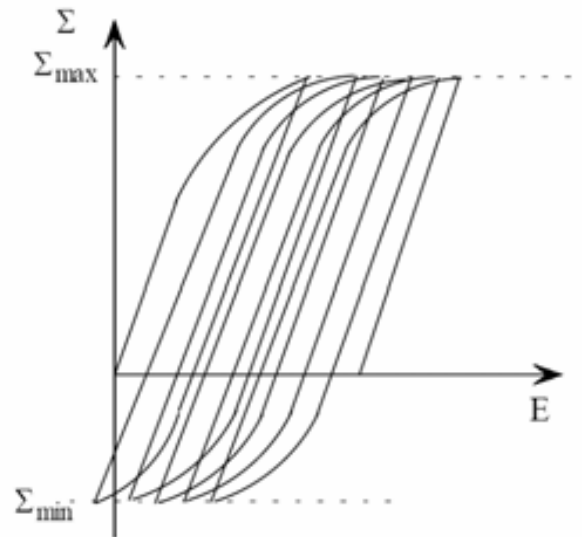
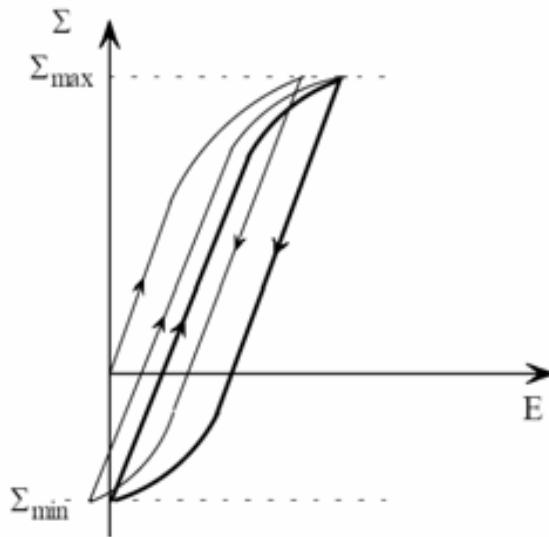
- Trois domaines:
  - Fatigue oligo cyclique (low cycle fatigue)
  - Fatigue d'endurance limitée
  - Fatigue d'endurance illimitée } (high cycle fatigue)





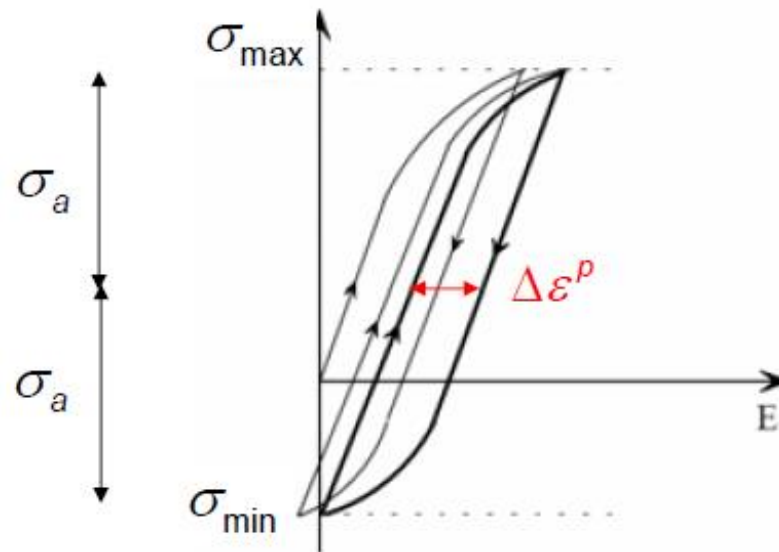
# FATIGUE OLIGO CYCLIQUE

- Correspond aux contraintes les plus grandes ( $>R_e$ ) où le **nombre de cycles à la rupture inférieurs à  $10^4$  ou  $10^5$**  (pour les aciers doux).
- L'éprouvette atteint généralement un état d'accommodation plastique ou un rochet élasto plastique :



# FATIGUE OLIGO CYCLIQUE

- Loi de Masson-Coffin : 
$$N = \left[ \frac{\Delta \epsilon^p}{C} \right]^{-\gamma}$$



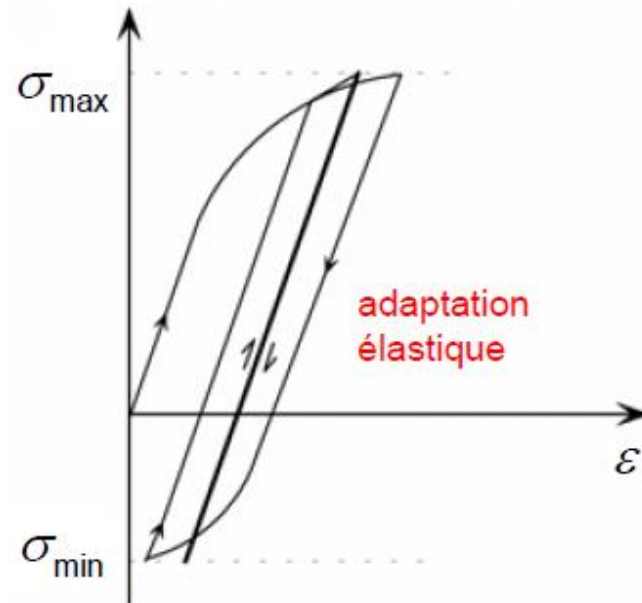
- Autres lois

- Weibull 
$$N = (\sigma_{\max} - \sigma_D)^n$$

- Bastenaire 
$$N = \frac{A}{\sigma_a - \sigma_D} \exp \left( - \left[ \frac{\sigma_a - \sigma_D}{B} \right]^b \right)$$

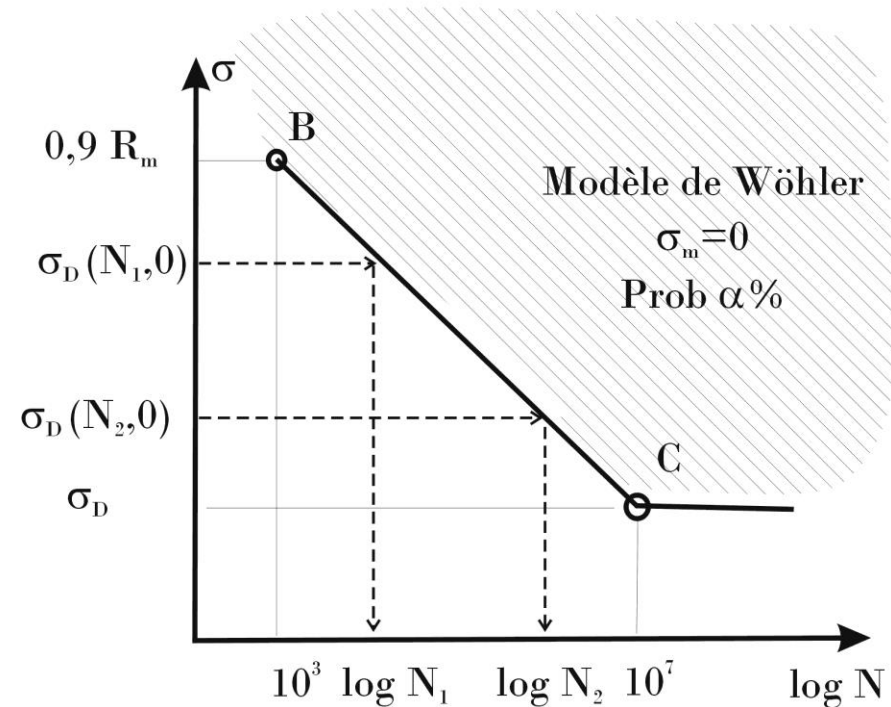
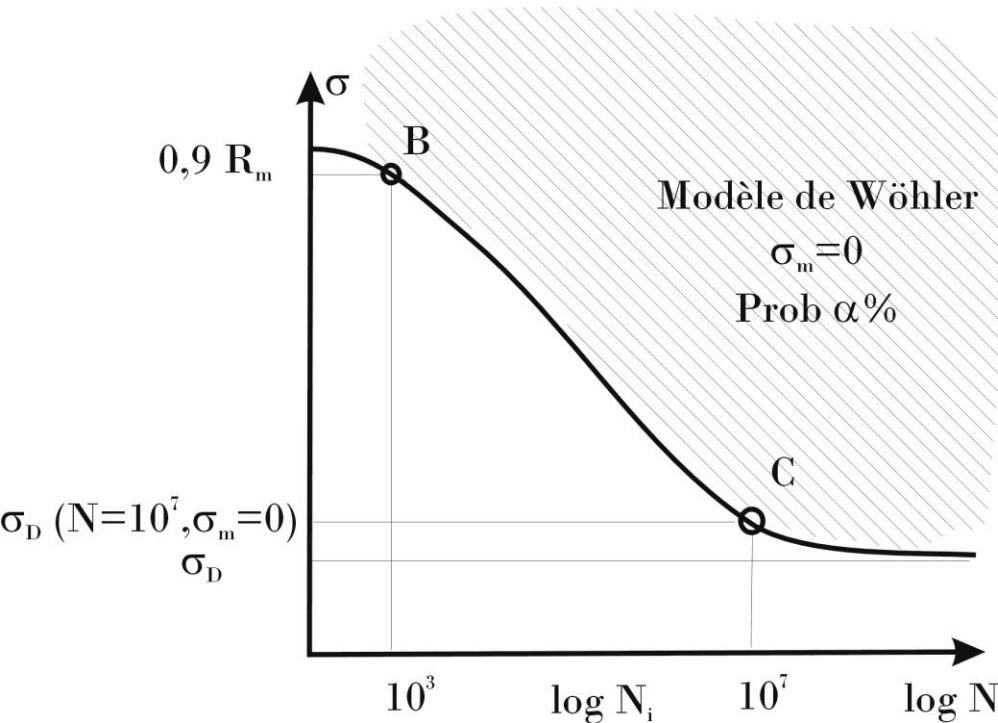
# DOMAINE D'ENDURANCE LIMITEE

- Domaine où la rupture est **atteinte après un nombre limité de cycles compris approximativement entre  $10^5$  à  $10^7$ .**
- La rupture n'est pas accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble mesurable.
- La réponse de l'éprouvette atteint dans ce cas un régime adapté élastique, il peut y avoir de la déformation plastique due aux premiers cycles, mais au bout d'un certain nombre de cycles, elle reste constante.



# DOMAINE D'ENDURANCE LIMITEE

- Courbe de Wöhler ou diagramme S-N:
  - A une contrainte alterne correspond un nombre de cycles à la rupture



# DOMAINE D'ENDURANCE LIMITEE

## □ Modèle de la loi de Basquin (1910)

$$\log(N) = \log(C) - m \log(\sigma_a)$$

$$N = \frac{C}{(\sigma_a)^m} \quad \sigma_a = \left( \frac{C}{N} \right)^{1/m}$$

$$\sigma_a = A N^b$$

$$A = C^{1/m} \quad b = -1/m$$

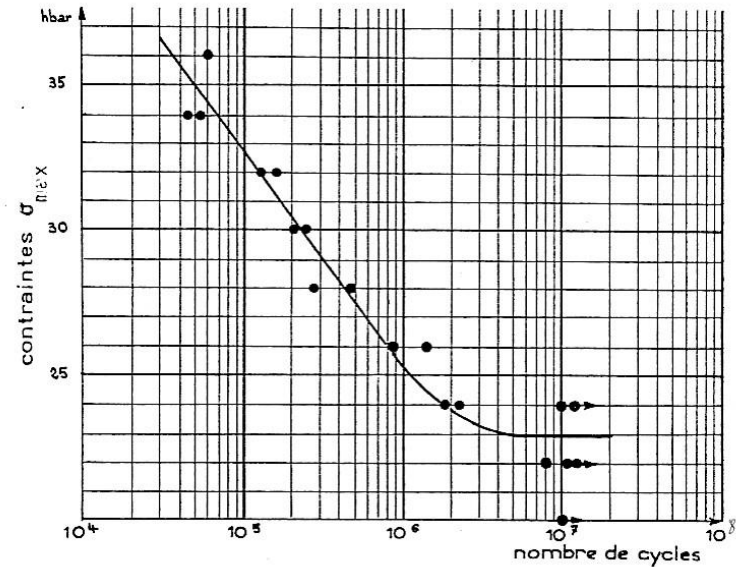
## □ Modèle de Strohmeier

– Donne la relation avec l'asymptote finale

$$N(\sigma_a - \sigma_D)^m = C$$

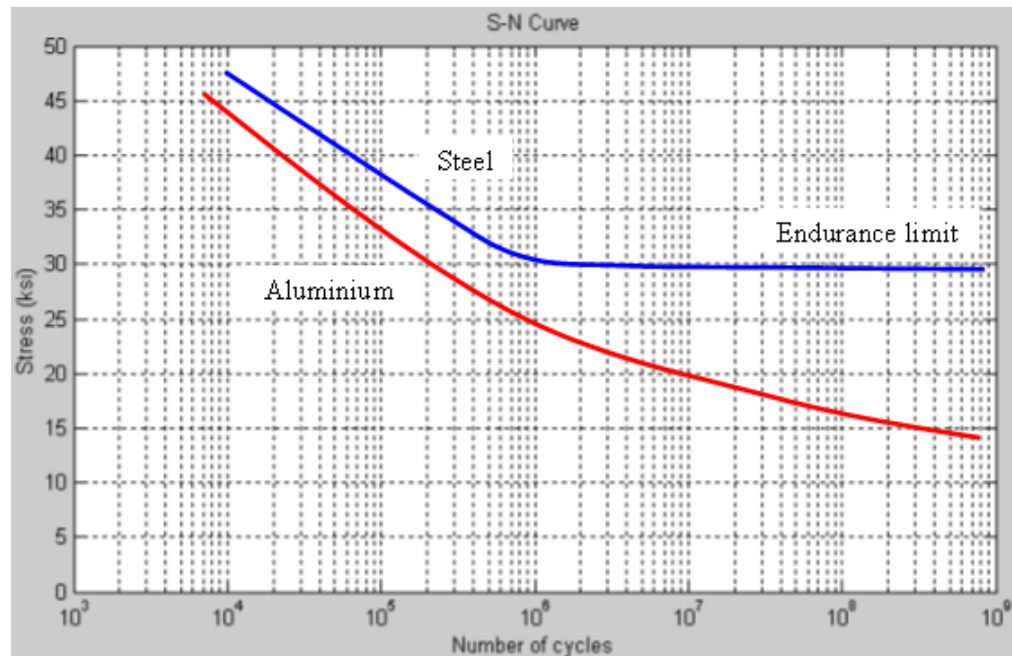
$$N = \frac{C}{(\sigma_a - \sigma_D)^m}$$

$$\sigma_a = \sigma_D + \left( \frac{C}{N} \right)^{1/m}$$



# DOMAINE D'ENDURANCE ILLIMITEE

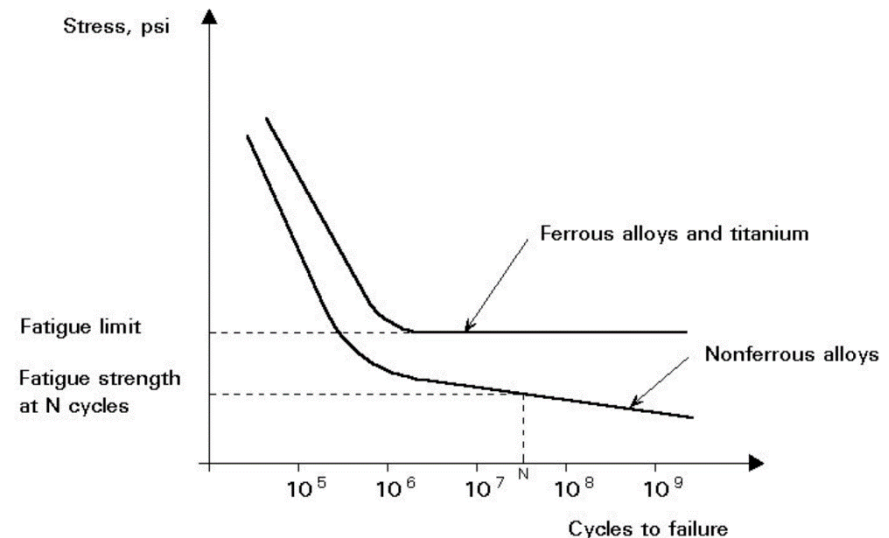
- Dite également **zone de sécurité**. La courbe de Wöhler présente généralement (mais pas toujours) **une limite asymptotique parallèle à l'axe des N**.
- En dessous de cette valeur limite  $\sigma_D$ , il n'y a « jamais » rupture par fatigue quel que soit le nombre de cycles appliqués.
- $\sigma_D$  est la **limite de fatigue**.





# DOMAINE D'ENDURANCE ILLIMITEE

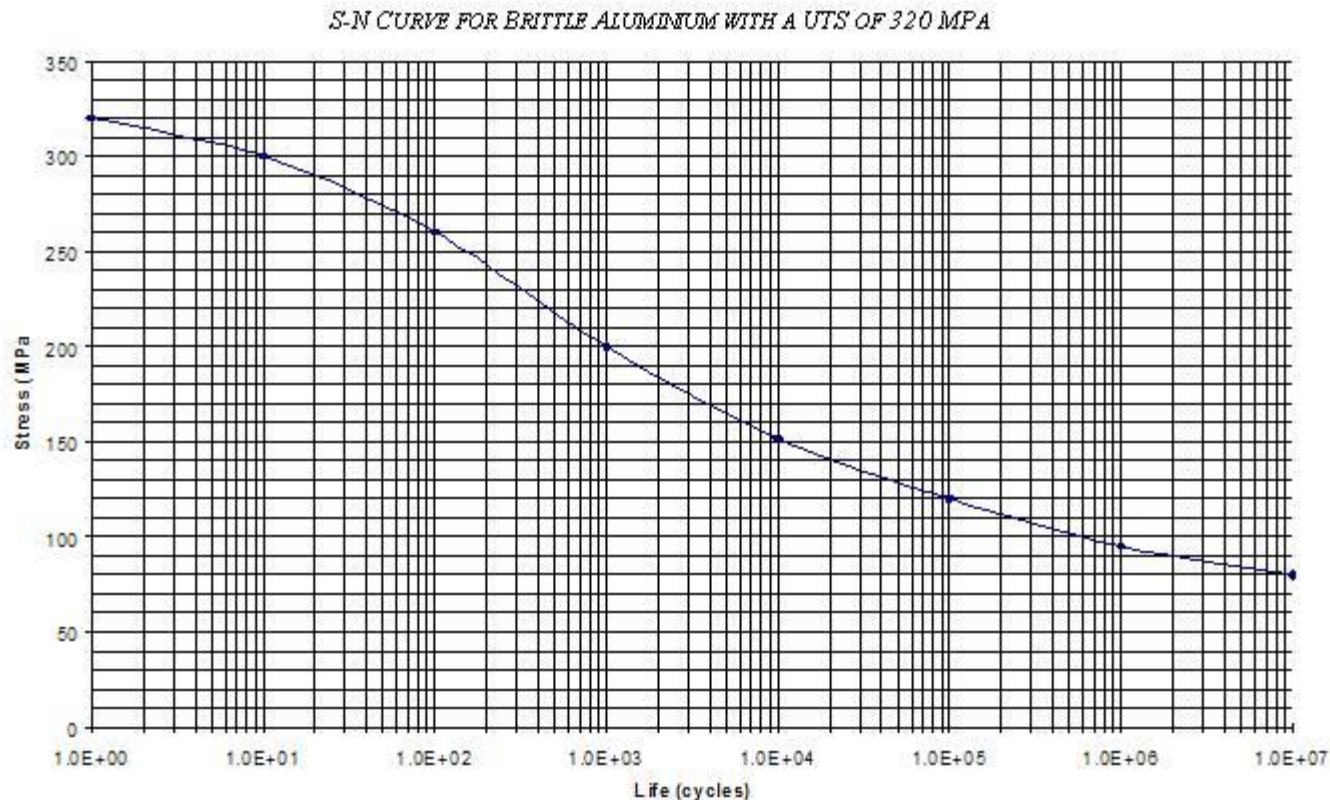
- Pour certains matériaux, il est difficile d'évaluer la limite de fatigue  $\sigma_D$ , on introduit la notion de **limite de fatigue conventionnelle  $\sigma_D(N)$**  (ou limite d'endurance).
- Il s'agit de la plus grande amplitude de la contrainte pour laquelle on constate **50% de ruptures après N cycles** de la sollicitation.
- Selon les cas, **N varie entre  $10^6$  à  $10^9$  cycles** (>supérieur à la durée de vie envisagée pour la pièce).



S-N curves with and without fatigue limits (schematic)

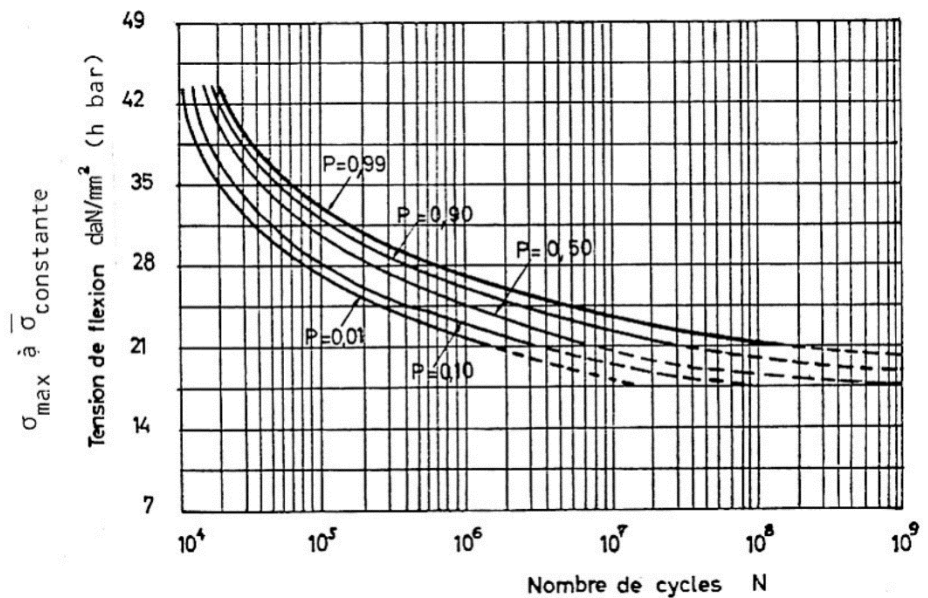
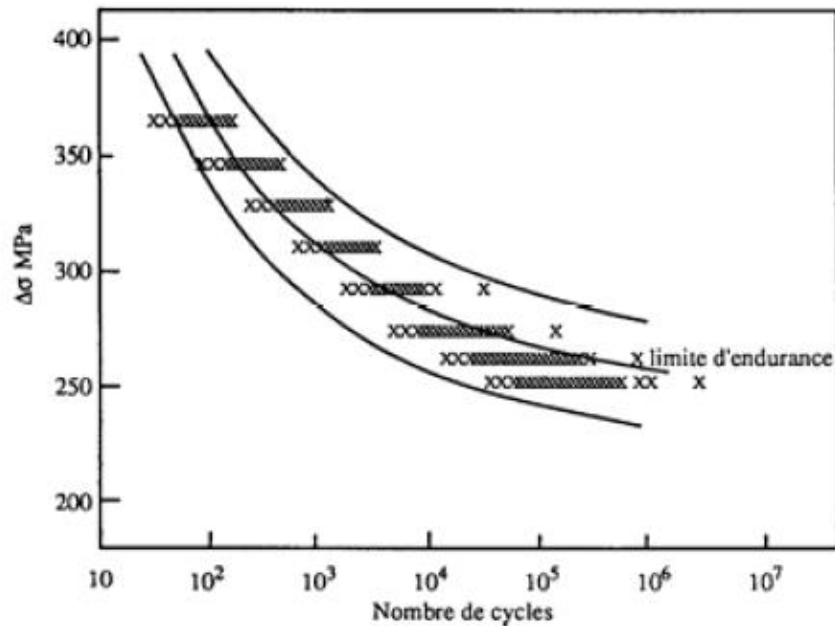
# DOMAINE D'ENDURANCE LIMITEE

- Courbe de Wöhler ou diagramme S-N:
  - A une contrainte alternée correspond un nombre de cycles à la rupture



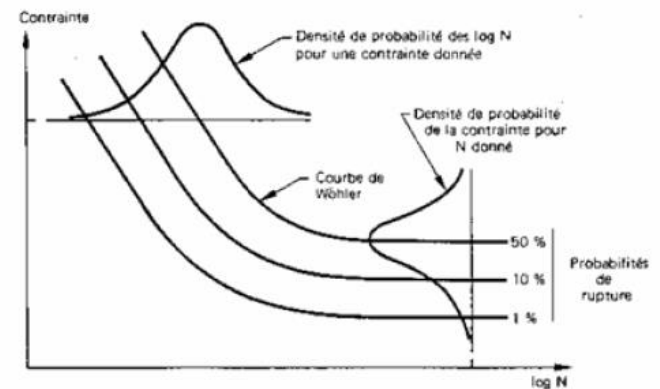
# NATURE STATISTIQUE DE LA FATIGUE

- La dispersion des résultats des essais de fatigue est un fait d'expérience. Cette dispersion statistique existe malgré les efforts des expérimentateurs
- Construction de **courbes d'iso probabilité de rupture**



# NATURE STATISTIQUE DE LA FATIGUE

- La courbe de Wöhler étant la courbe médiane à 50%. Il est couramment admis, et vérifié très souvent par l'expérience que:
- La **distribution de la contrainte** suit une **loi normale** pour un nombre donné de cycles sur l'étendue des deux domaines d'endurance limitée et illimitée
- La **distribution du logarithme des nombres de cycles ( $\log N$ )** suit une **loi normale** pour un effort donné dans le domaine d'endurance limité



# PARAMETRES D'INFLUENCE

- ❑ **Accidents de forme (discontinuité dans la géométrie) :**  
Un accident de forme augmente localement le niveau de contrainte.
- ❑ **Effet d'échelle :** A niveau de contrainte égale, deux pièces de même géométrie mais de dimensions différentes n'auront pas la même tenue en fatigue. Plus les dimensions d'une pièce croissent, plus sa résistance à la fatigue diminue.
- ❑ **Qualité de l'usinage :** Généralement, l'endommagement par fatigue apparaît en premier lieu à la surface des pièces.
- ❑ La prise en compte des deux aspects suivants est important en fatigue:
  - L'état de surface
  - Les contraintes résiduelles

## PARAMETRES D'INFLUENCE

- **Environnement** : Un milieu agressif (températures élevées, milieux corrosifs...) aggrave le phénomène de fatigue. Il apparaît des phénomènes comme le fluage ou la corrosion. Leur action est proportionnelle au temps d'exposition.
- **Taille des grains** : Les structures à grains fins présentent une meilleure tenue en fatigue que les structures à gros grains.
- **Orientation du fibrage par rapport à la direction des efforts** : L'orientation générale des grains (fibrage) confère au matériau une anisotropie plus ou moins marquée. Les caractéristiques statiques et la tenue en fatigue seront meilleures dans le sens long du fibrage que dans les autres sens (travers long et travers court).

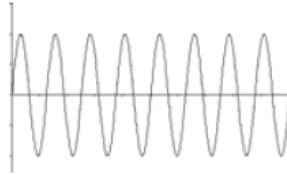


## PARAMETRES D'INFLUENCE

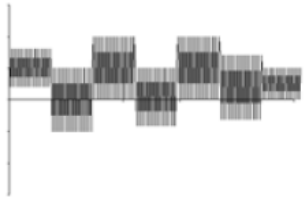
- **Taux d'écrouissage** : L'écrouissage résultant des opérations de formage a pour effet de consolider le matériau (augmentation de la limite d'élasticité), et par suite, améliore la tenue en fatigue.
- **Traitement thermique** : Suivant que le traitement thermique provoque un adoucissement ou un durcissement du matériau, la tenue en fatigue sera diminuée ou augmentée. De plus, le traitement thermique peut modifier la taille des grains.
- **Les défauts métallurgiques** : Lacunes, défauts interstitiels, précipités et inclusions peuvent être à l'origine de l'endommagement par fatigue.

# PARAMETRES D'INFLUENCE

- **La nature du chargement :** Le chargement peut être
  - de nature périodique de pulsation et d'amplitude constantes,



- variable par bloc



- variable de manière aléatoire.

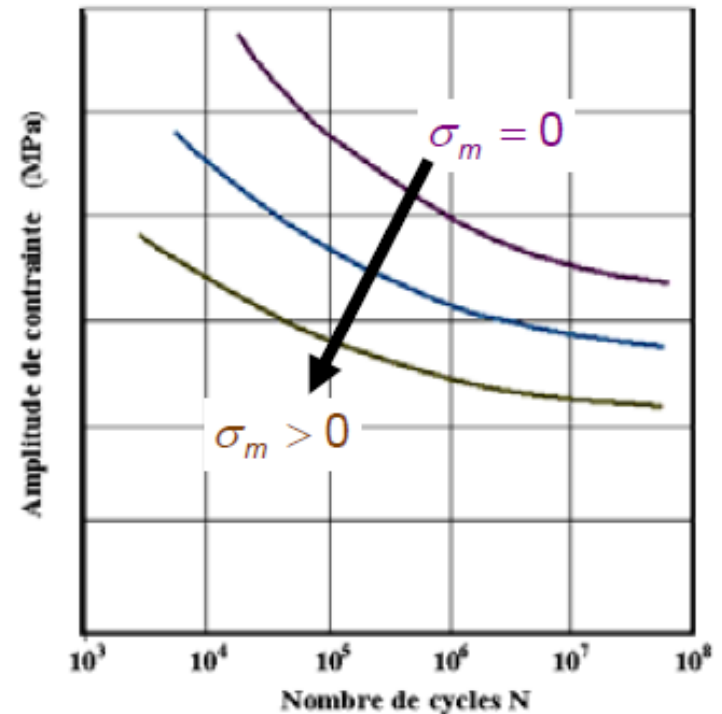


# PARAMETRES D'INFLUENCE

- **La nature du chargement :**
- Signal périodique:
  - influence de la forme du signal (sinusoïdal, triangulaire, rectangulaire...), du **rapport R** et de la **contrainte moyenne** sur la tenue en fatigue.
  - la fréquence a peu d'influence sauf si on se situe dans les cas de fatigue par fluage, de fatigue-corrosion, ou de fatigue thermique.
- Signaux de chargement par bloc ou aléatoire, l'endurance est affectée par la **présence de surcharges et l'ordre d'apparition des cycles**. En particulier il est connu que la répétition périodique d'une surcharge peut retarder la propagation de fissures.

# PARAMETRES D'INFLUENCE

- Lorsque les essais de fatigue sont réalisés à **contrainte moyenne  $\sigma_m$  non nulle** (et constante), la durée de vie est modifiée, en particulier quand cette contrainte moyenne est relativement grande par rapport à la contrainte alternée.
  - Une contrainte de traction diminue la durée de vie
  - Une contrainte de compression l'augmente
- La limite d'endurance  $\sigma_D$  est aussi modifiée par la superposition d'une contrainte moyenne non nulle.



# LAY-OUT

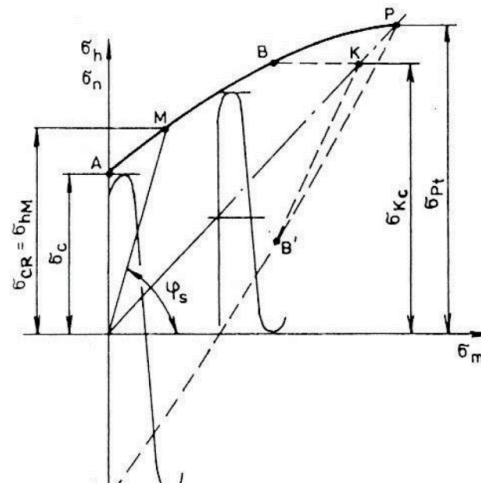
- Introduction
- Partie I : Le phénomène de fatigue
  - Introduction
  - **Diagramme d'endurance**
    - Diagramme de Wohler
    - Diagrammes de Haigh et de Goodman
    - Diagrammes de Soderberg
  - Sécurité par rapport à la droite de Soderberg
  - Dommage cumulatif

# Diagrammes d'endurance

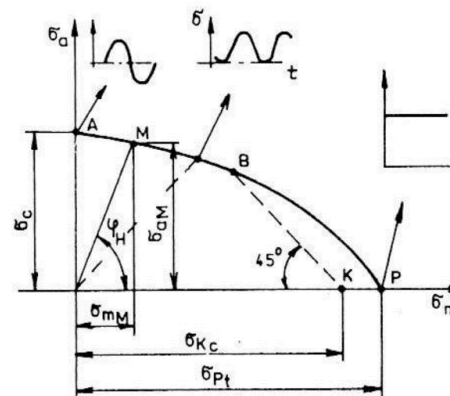
# DIAGRAMMES D'ENDURANCE

- A l'endurance la composante alternée limite  $\sigma_a$  dépend de la composante moyenne  $\sigma_m$  et réciproquement.
- La courbe d'interaction entre ces deux composantes s'appelle le **diagramme d'endurance**.
- Les données d'endurance sont représentées selon deux méthodes
  - Diagramme de Goodman-Smith (Allemagne):  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_{\min}$  en fonction de  $\sigma_m$
  - Diagramme de Haigh (Anglo-saxonne):  $\sigma_a$  en fonction de  $\sigma_m$ .

□



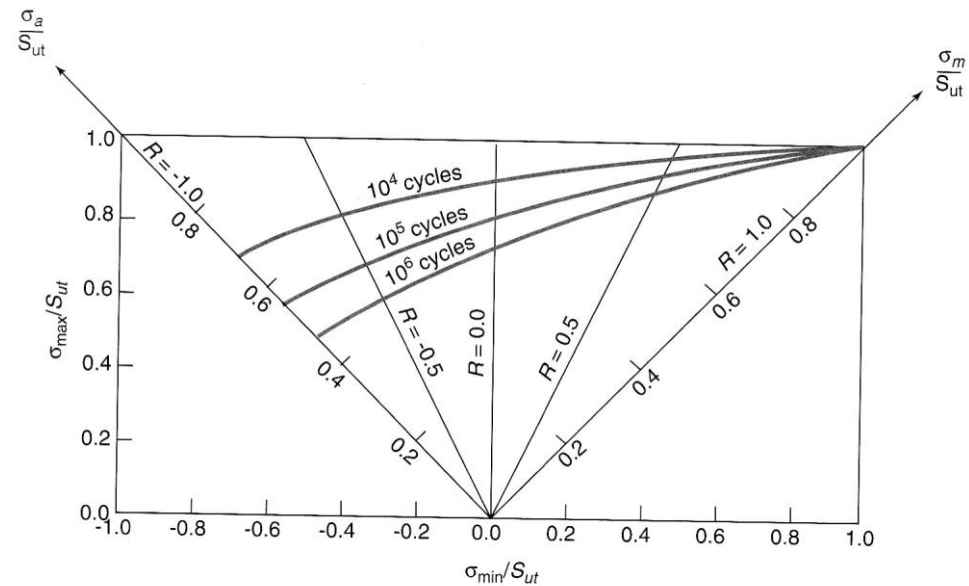
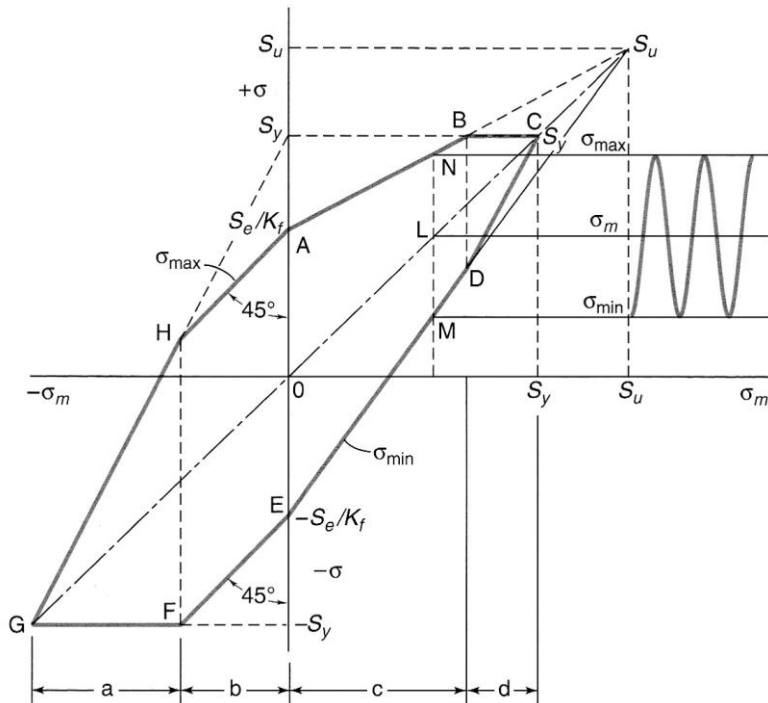
A/ Goodman-Smith



B/ Haigh

# DIAGRAMME D'ENDURANCE

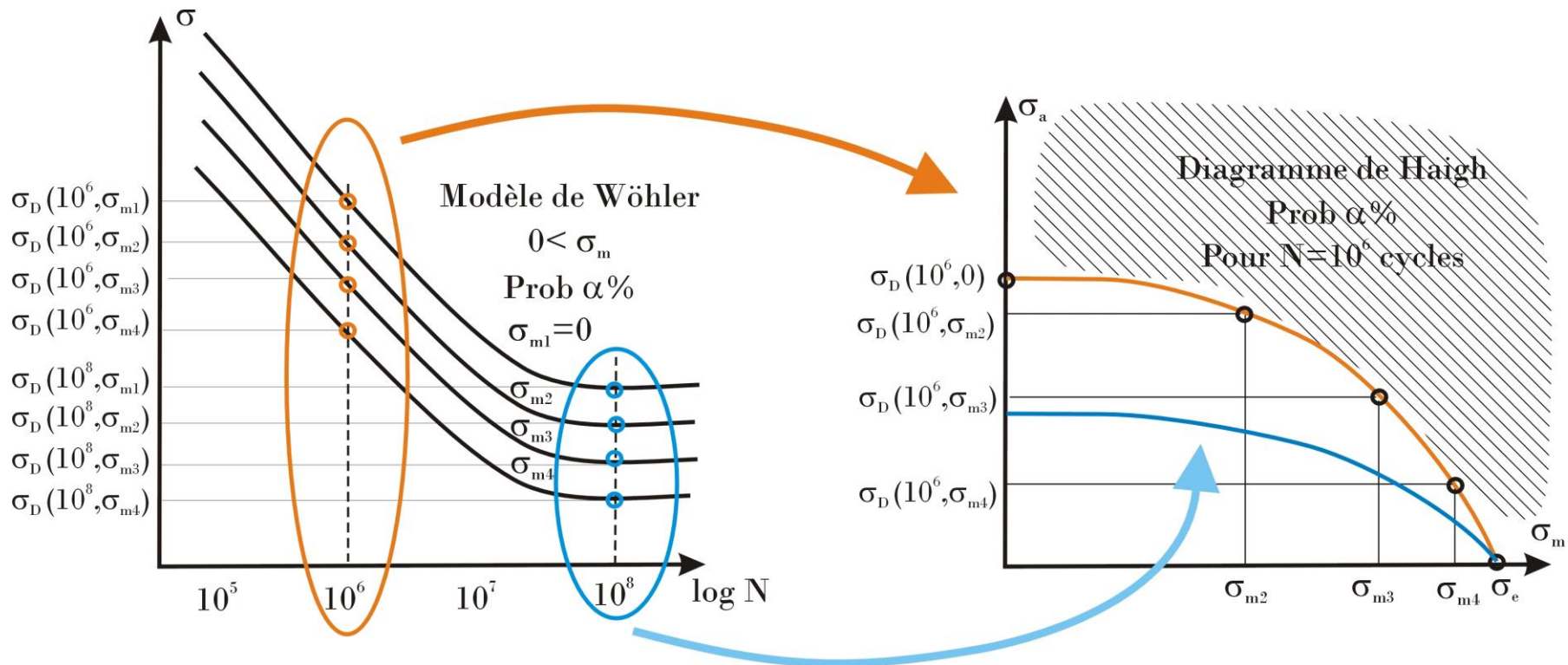
□ Diagramme de Goodman vs diagramme de Haigh





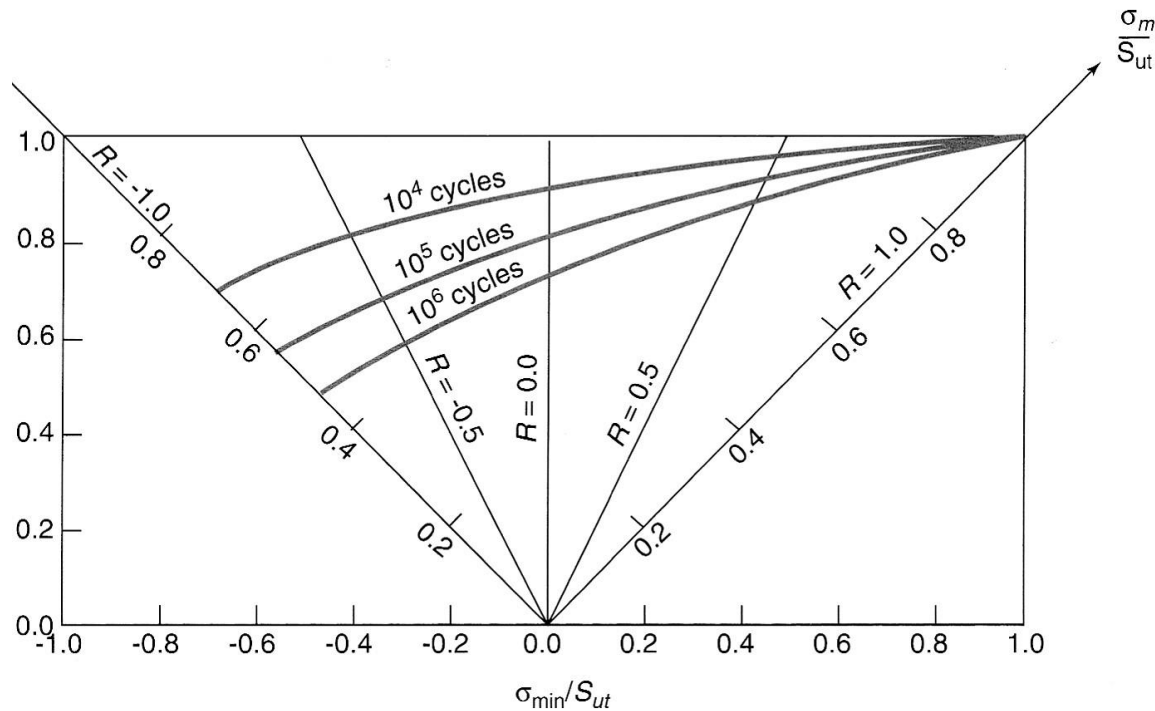
# DIAGRAMMES D'ENDURANCE

- Pour construire le diagramme d'endurance, on reporte les données des courbes de S-N pour différents contraintes moyennes et un même nombre de cycles



# DIAGRAMMES D'ENDURANCE

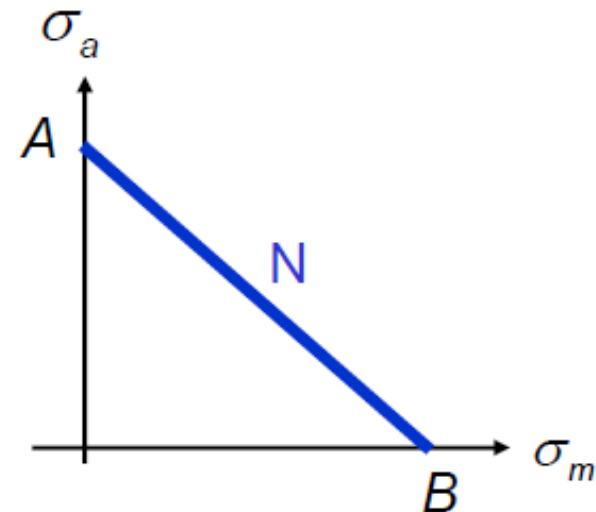
- La caractérisation complète d'un matériau est très rare et demande beaucoup de ressources



- Elle est généralement remplacée par des modèles approchés

# DIAGRAMME DE HAIGH

- Sur le **diagramme de Haigh**, l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  est portée en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  à laquelle a été réalisé l'essai de fatigue.
- Deux points particuliers sont à considérer :
  - Point A représente la limite d'endurance  $\sigma_D(N)$  en sollicitation purement alternée
  - Point B représente le comportement limite du matériau pour une contrainte alternée nulle.
- L'ensemble des limites d'endurance observées pour diverses valeurs de la contrainte moyenne se placent alors sur la courbe AB ajustée en fonction des résultats d'essais.



# DIAGRAMME DE HAIGH

- Différents modèles mathématiques de la courbe d'endurance

- Goodman

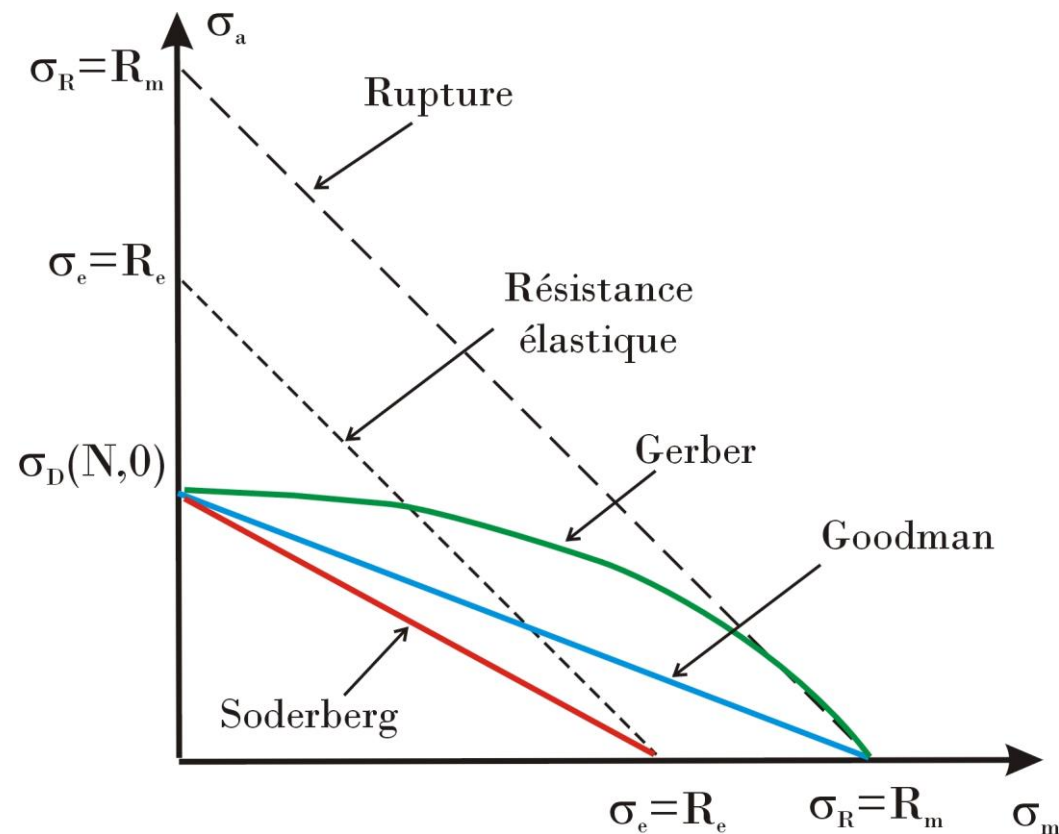
$$\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right)$$

- Gerber

$$\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right)$$

- Soderberg

$$\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_e} \right)$$

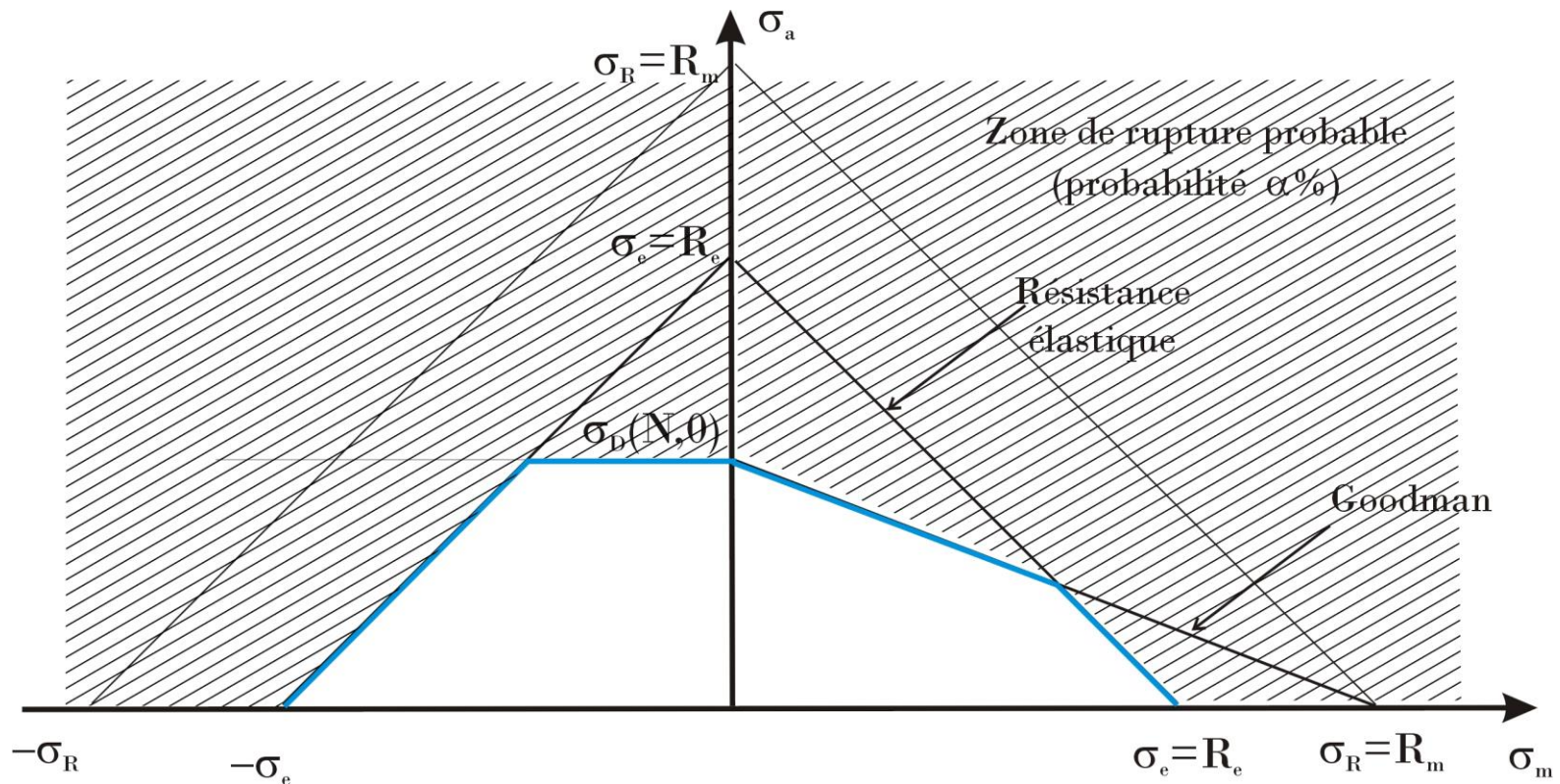


# DIAGRAMME DE HAIGH

- Les résultats de tests pour des **matériaux ductiles** montrent généralement une meilleure concordance avec le modèle parabolique de Gerber.
- A cause de la **dispersion des résultats d'expérience** des tests de fatigue et le fait que les données sur des éprouvettes entaillées coïncident de meilleure manière avec le modèle linéaire de Goodman, il est courant dans la pratique de conception **d'adopter la droite de Goodman plus conservative**.
- Si la conception de la pièce est basée sur un **design élastique** à la place d'un design à la rupture, chose courante en conception d'éléments de machine, alors on se tourne vers la **droite de Soderberg** qui modélise la limite d'endurance en fonction de la contrainte moyenne comme une droite entre les limites d'endurance  $\sigma_a = R \pm$  et la contrainte de plasticité

# DIAGRAMME DE HAIGH

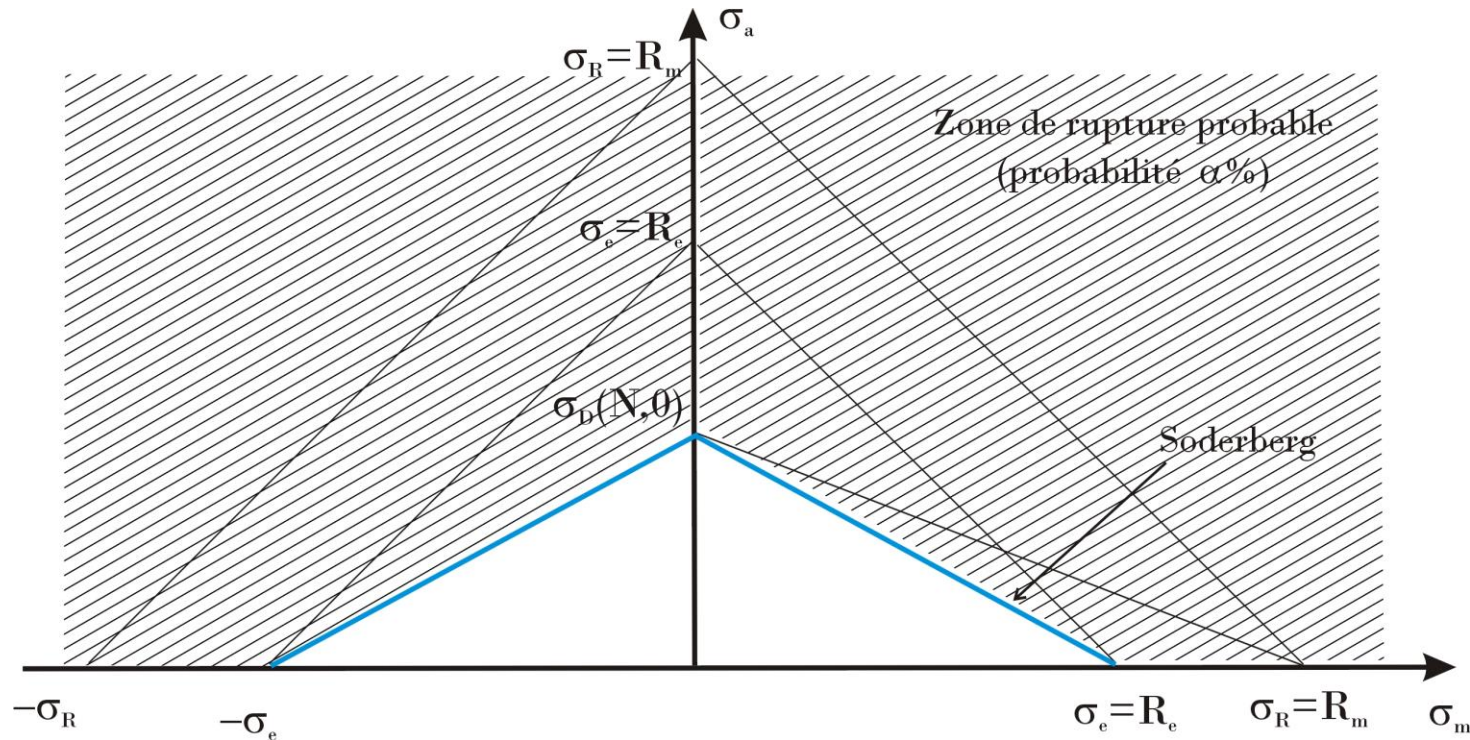
- En accord avec l'expérience, la meilleure forme de diagramme de Haigh suit la **droite de Goodman**





# DIAGRAMME DE HAIGH

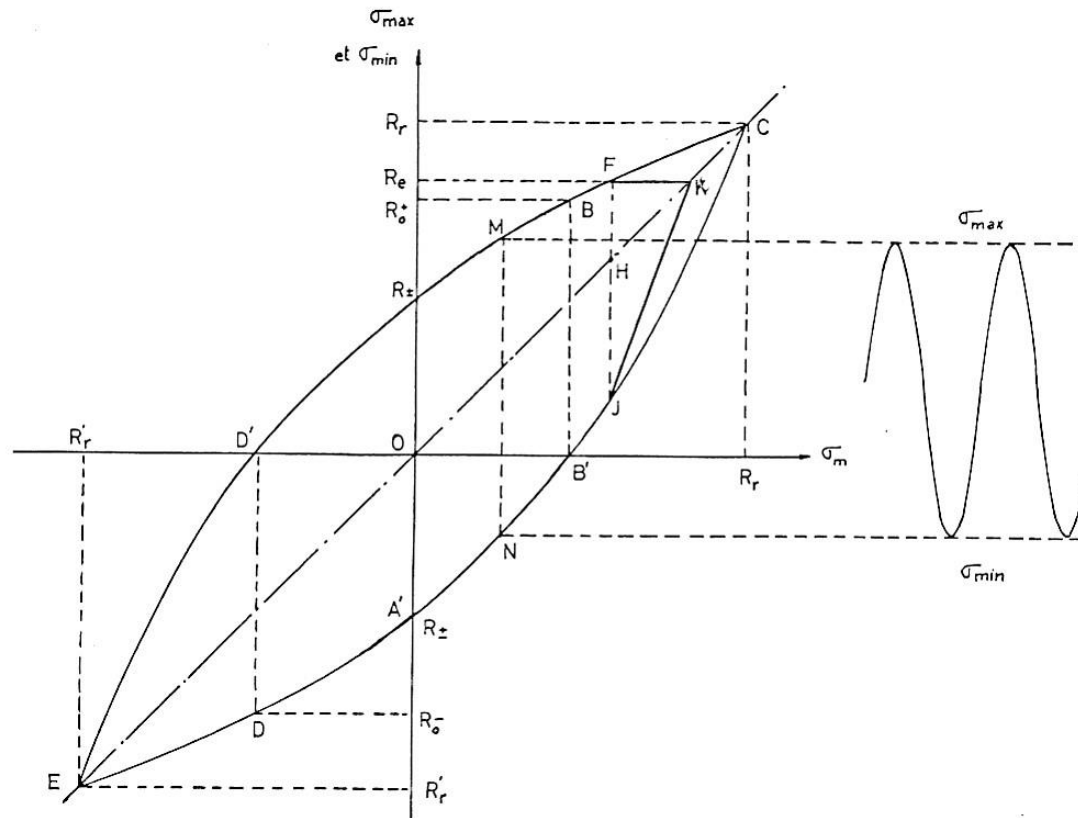
- En conception des machines, on se place souvent en sécurité en adoptant la **droite de Soderberg**, car on veut éviter la plastification





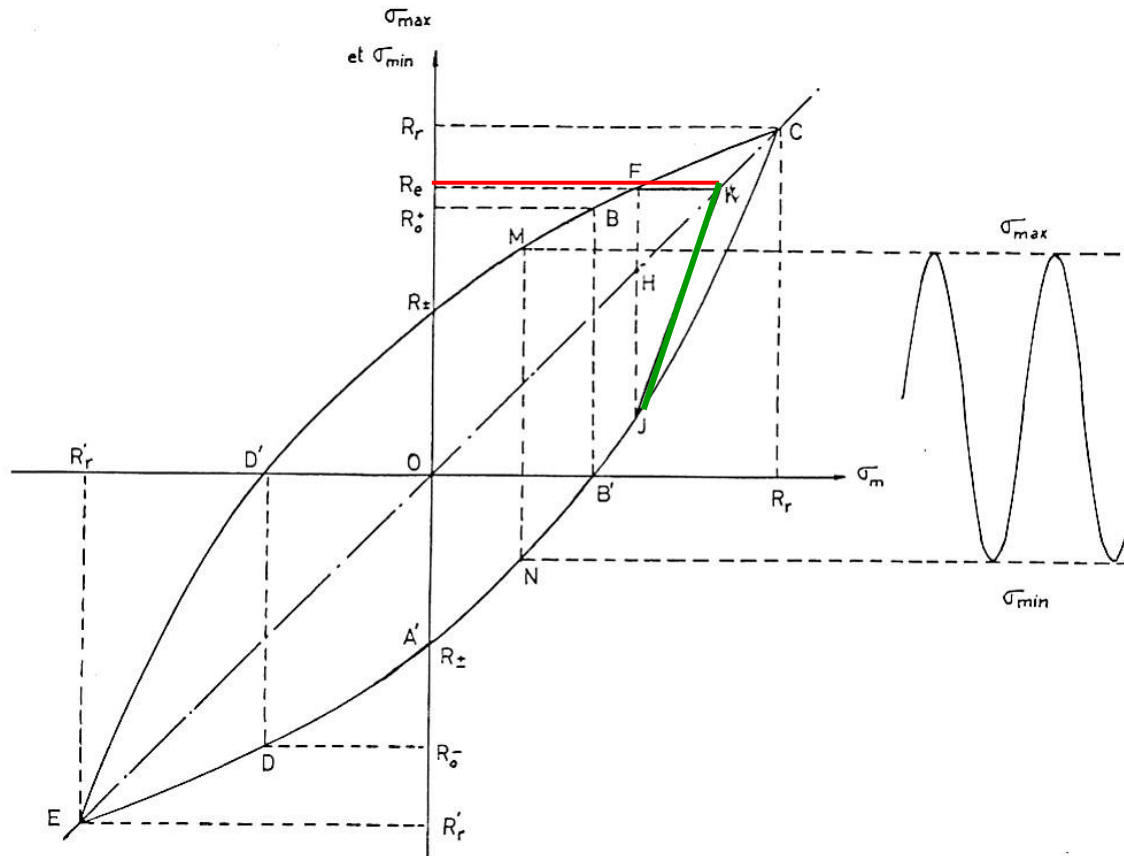
# DIAGRAMME DE GOODMAN-SMITH

- Dans le **diagramme de Goodman-Smith**, les contraintes maximales  $\sigma_{\max}$  et les contraintes minimales  $\sigma_{\min}$  admissibles sont représentées en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ .



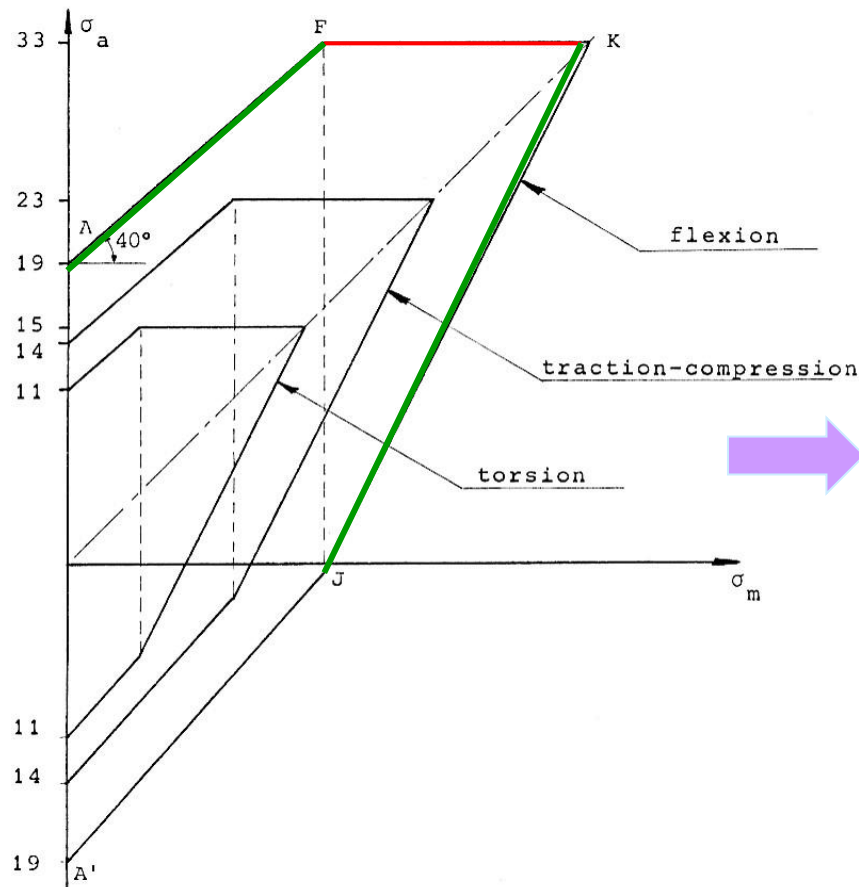
# DIAGRAMME DE GOODMAN-SMITH

- Les contraintes maximales  $\sigma_{\max}$  et les contraintes minimales  $\sigma_{\min}$  sont représentées en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ .

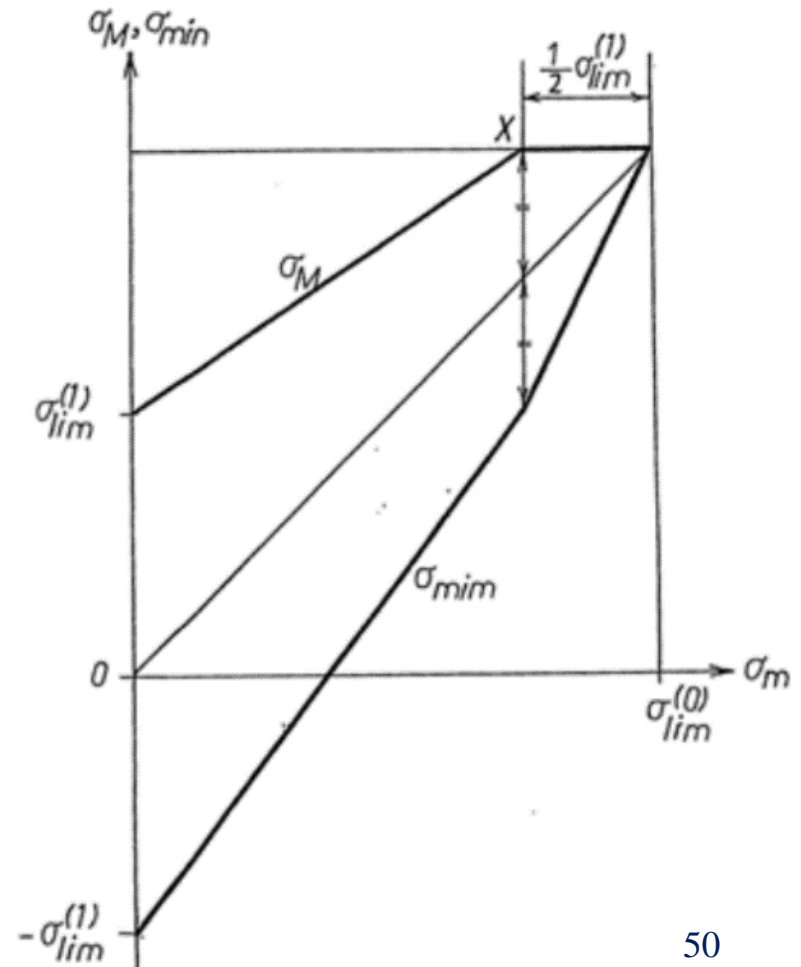


# DIAGRAMME DE GOODMAN-SMITH

□ Diagramme de Goodman-Smith simplifié



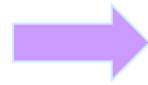
□ Diagramme VDI



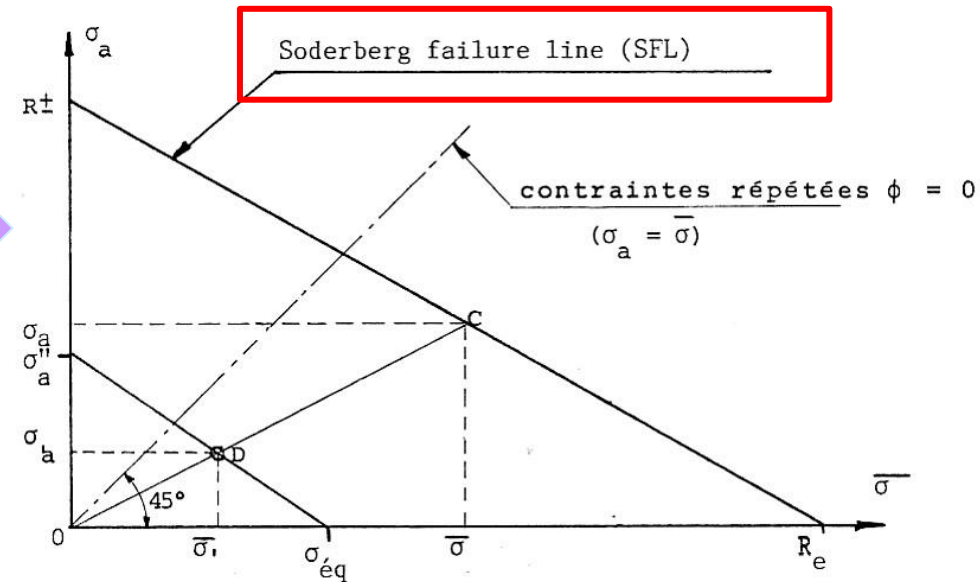
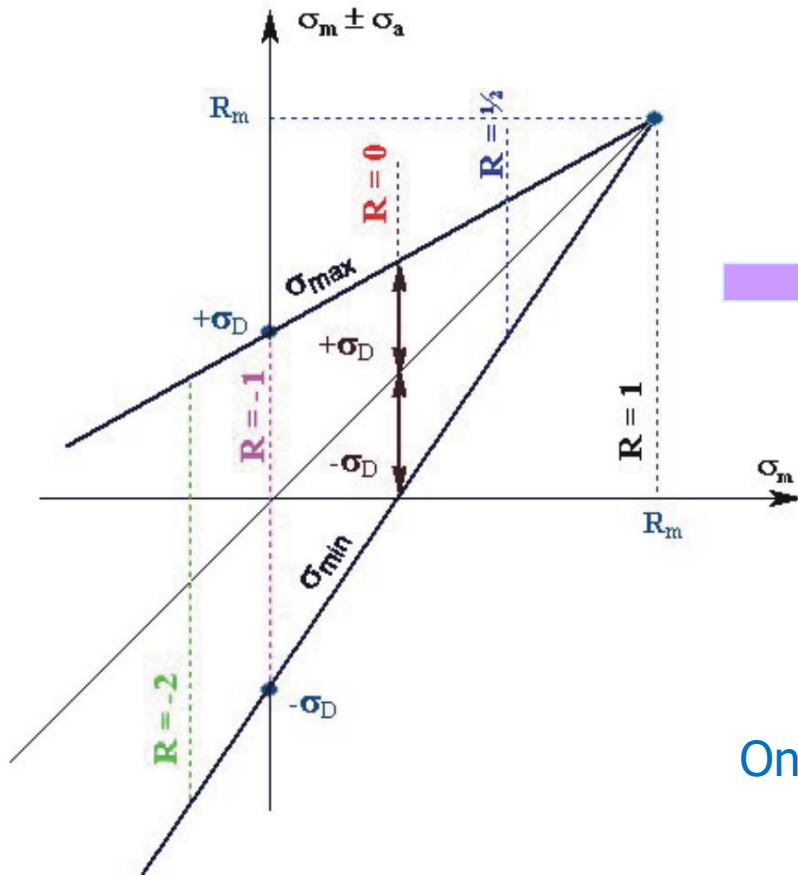


# DIAGRAMME DE GOODMAN-SMITH

□ Diagramme Goodman-Smith simplifié



□ Diagramme de Soderberg



On retrouve le diagramme de Haigh linéarisé!

# LAY-OUT

- Introduction
- Partie I : Le phénomène de fatigue
  - Diagramme d'endurance
    - Diagramme de Wohler
    - Diagrammes de Haigh et de Goodman
    - Diagrammes de Soderberg
  - Sécurité par rapport à la droite de Soderberg
  - Dommage cumulatif

# SECURITE PAR RAPPORT A LA SODERBERG FAILURE LINE (SFL)



- Soit un point D représentant un état de contrainte  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$ .
- Quel est la **sécurité par rapport à la rupture en fatigue**?

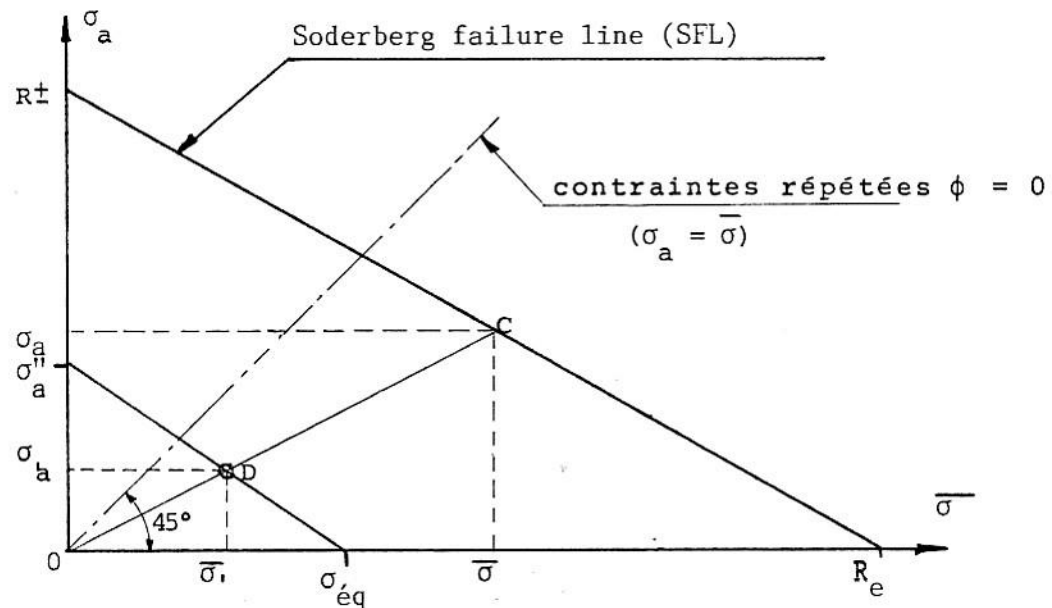
□ Démonstration:  
triangles semblables →

$$\frac{\sigma''_{a,eq}}{R_{\pm}} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{R_e} = \frac{OD}{OC} = \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a}$$

$$\frac{1}{K_{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{R_e} = \frac{\sigma''_{a,eq}}{R_{\pm}}$$

- Idem en torsion

$$\frac{1}{K_{\tau}} = \frac{\bar{\tau}_{eq}}{R''_e} = \frac{\tau_{a,eq}}{R''_{\pm}}$$



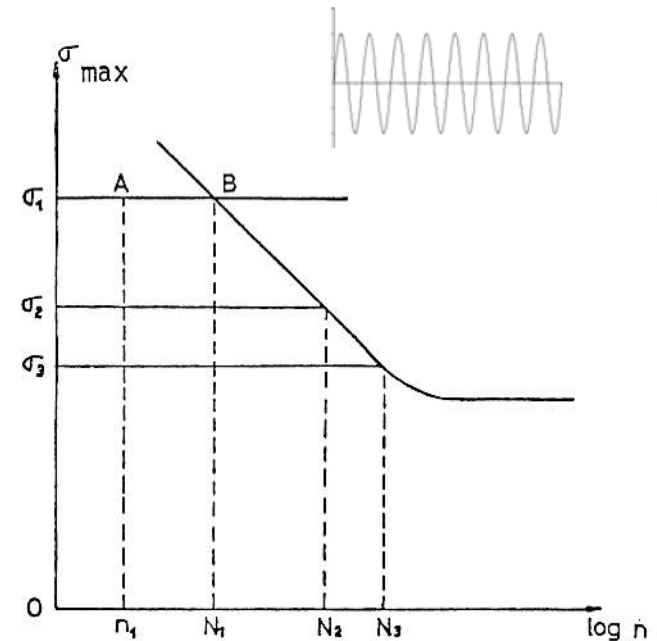


# LAY-OUT

- Introduction
- Partie I : Le phénomène de fatigue
  - Introduction
  - Diagramme d'endurance
    - Diagramme de Wohler
    - Diagrammes de Haigh et de Goodman
    - Diagrammes de Soderberg
  - Sécurité par rapport à la droite de Soderberg
  - **Domage cumulatif**

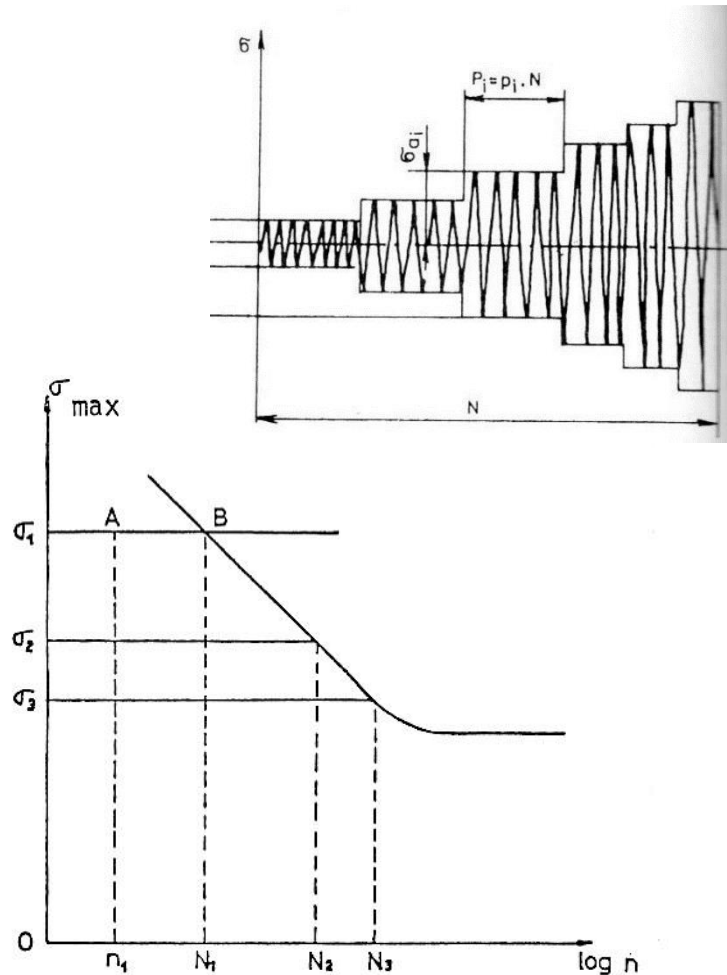
- Le niveau de charge d'un organe ne reste généralement pas constant au long de sa vie. Il est donc important de pouvoir évaluer l'effet de cycles de charge d'amplitude variable sur la résistance de l'éprouvette normalisée.
- Soit un chargement d'amplitude  $\sigma_1$  pendant  $n_1$  cycles
- Soit  $N_1$  le nombre de cycles conduisant à la rupture pour ce chargement
- On estime le dommage pour ce cycle à

$$D_1 = \frac{n_1}{N_1}$$



- Supposons la pièce sollicitée au niveau  $\sigma_1$  pendant  $n_1$  cycles, puis  $\sigma_2$  pendant  $n_2$  cycles, etc.
- Le **critère de dommage de Palmgren-Miner** suppose que les dommages se cumulent de façon additive.
- Dans le cas de plusieurs niveaux de sollicitation constants, la rupture survient lorsque le dommage cumulé devient unitaire

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i} = 1$$



# PARTIE II: LE DIMENSIONNEMENT A PLUS D'UN MILLION DE CYCLES

# LAY-OUT

- Partie I Le phénomène de fatigue
- **Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles**
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - Pièces réelles soumises à des niveaux de contrainte variables
- Valeur du coefficient de sécurité
- Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

# Pièces réelles soumises à des sollicitations uni-axiales (flexion ou torsion)

# DIMENSIONNEMENT DE PIÈCES REELLES

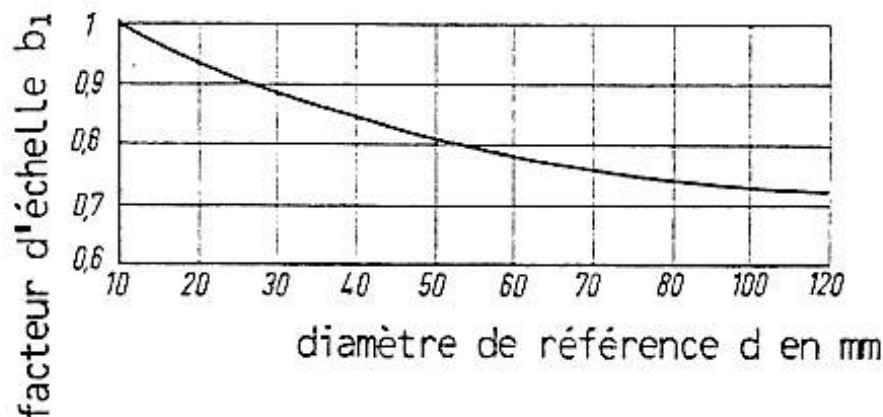
- Considérons maintenant des **pièces réelles**:
- Les pièces réelles diffèrent des éprouvettes normalisées:
  - Diamètres et tailles
  - Fini de surface
  - Présence de concentrations de contrainte...
- Introduction d'une série de coefficients pour se ramener au cas des éprouvettes normalisées.
- Endurance réduite pour la pièce réelle

$$K_{\sigma} = \frac{b_1 b_2 R_{\pm}}{k_{\sigma} \sigma_a}$$



## EFFET D'ÉCHELLE: COEFFICIENT $b_1$

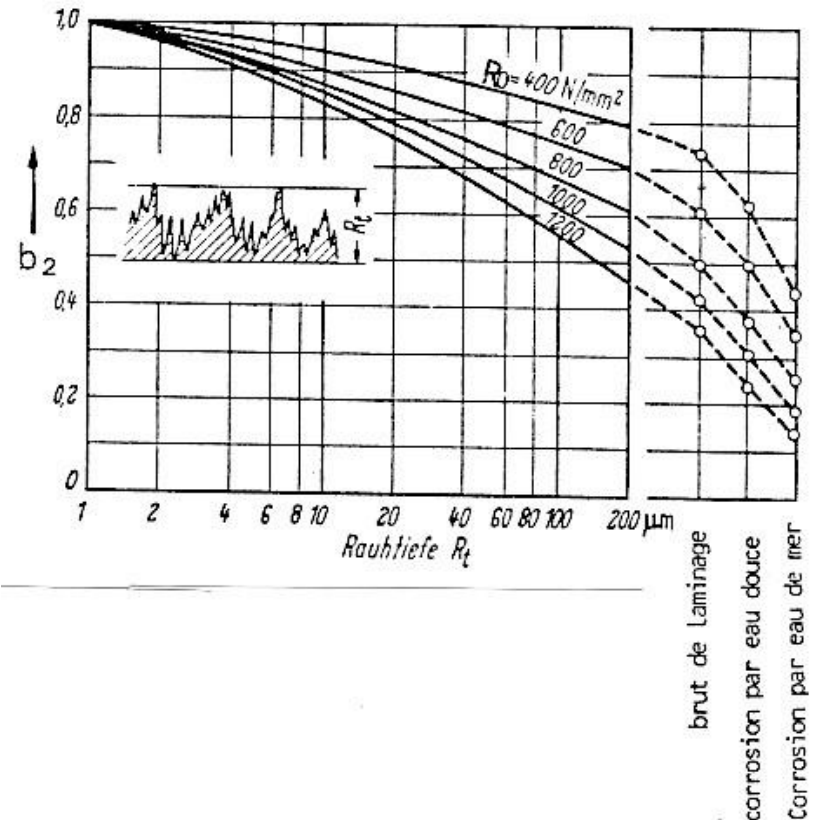
- On constate expérimentalement que la limite d'endurance est plus élevée en flexion rotative  $R_{\pm}$  qu'en traction – compression alternée  $(R_{\pm})_{tc}$  et **qu'elle diminue quand le diamètre de l'éprouvette augmente.**
  - Motivation physique: une grande pièce contient un plus grand nombre de défauts de surface et donc une plus grande probabilité de départ de fissure
- Coefficient de correction  $b_1$  pour la flexion rotative de barreaux ronds



## ETAT DE SURFACE: COEFFICIENT $b_2$

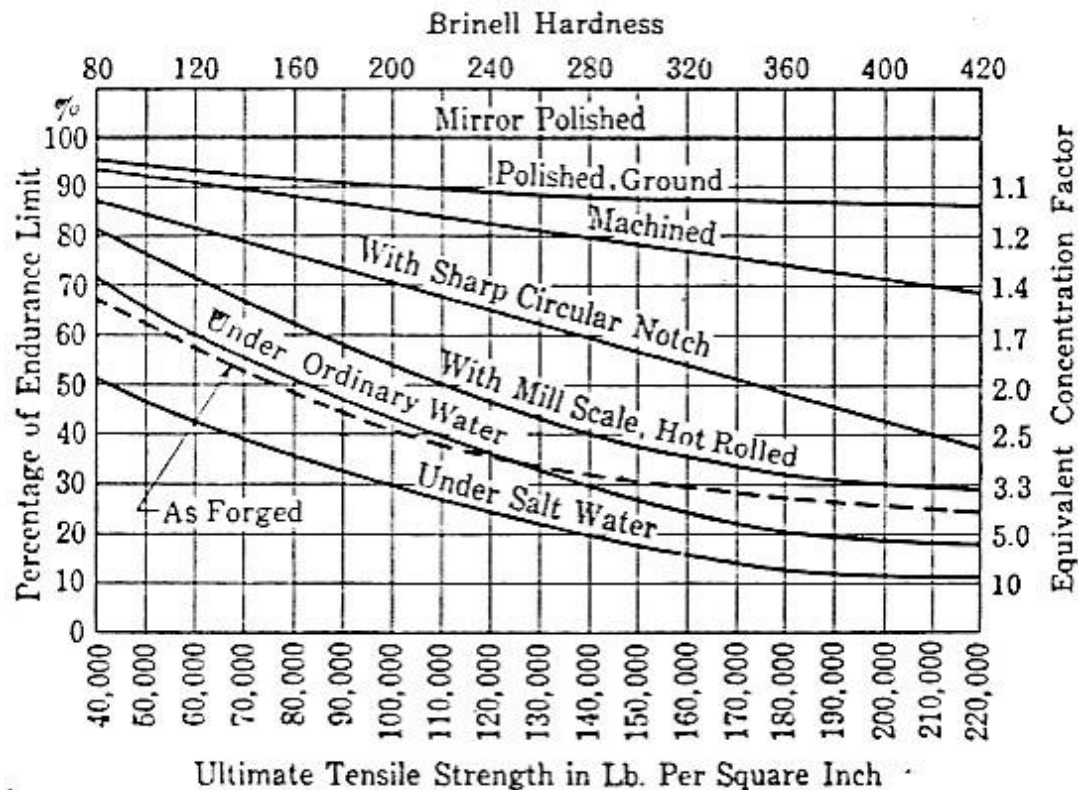
- La limite d'endurance dépend considérablement du **degré de finition de la surface** de l'éprouvette ainsi que du sens des rayures d'usinage.
- Le standard de mesure d'état de surface est généralement le  $R_a$ , la **rugosité** moyenne arithmétique ISO, ou le  $R_t$ , la rugosité totale utilisée par la DIN.

$$R_t = 6,5 R_a$$

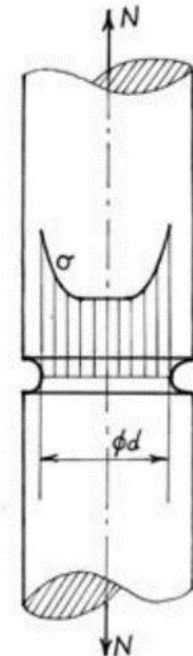


## ETAT DE SURFACE: COEFFICIENT $b_2$

- Du point de vue fatigue, ce seul paramètre ne peut être suffisant pour qualifier l'influence de l'état de surface: aussi la forme et la direction des stries, ainsi que la méthode utilisée pour la préparation de la pièce.



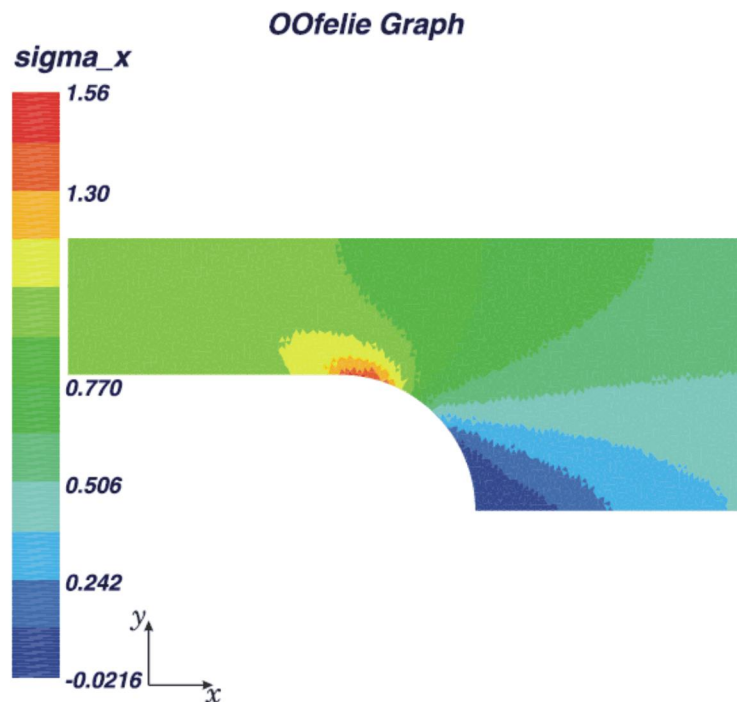
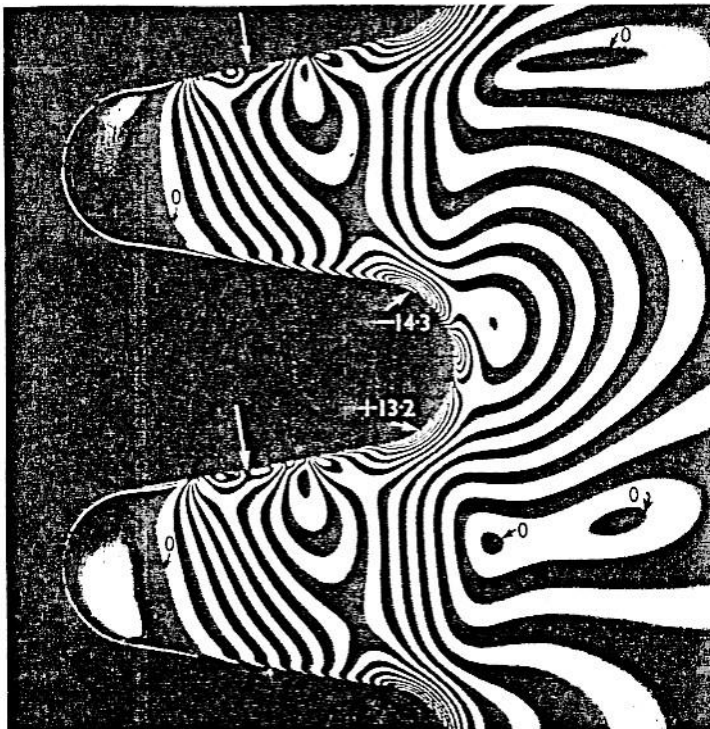
- Si la pièce est entaillée et présente de ce fait une **concentration de contrainte** (congés, gorges, rainures de cales, trous de graissage, etc.), il apparaît une baisse considérable de la limite d'endurance.
- Définissons le coefficient théorique de **concentration de contrainte**  $k_c$  comme étant le rapport entre la contrainte réelle maximale dans la section entaillée et la contrainte moyenne dans cette section



$$\sigma_{\max} = k_c \sigma_{\text{moyen}}$$

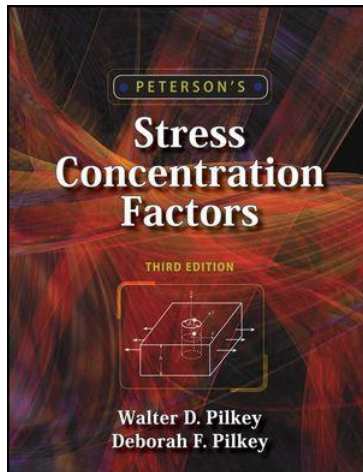
$$\sigma_{\text{moyen}} = \frac{N}{A}$$

- Le coefficient  $k_c$  est le plus généralement déterminé par une méthode expérimentale comme la photoélasticité ou bien une méthode numérique comme la méthode des éléments finis

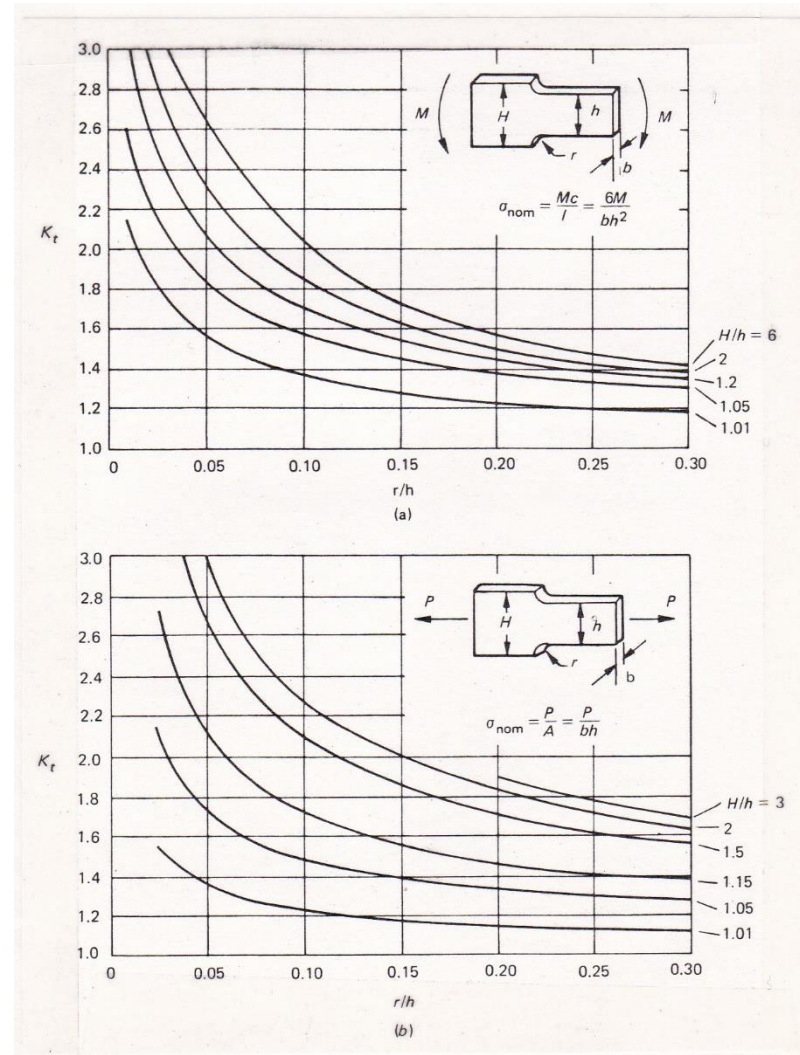




- Facteur de concentration de contraintes → abaques de Peterson



- **Peterson's Stress Concentration Factors, 3rd Edition.** Walter D. Pilkey, Deborah F. Pilkey. J. Wiley, 2008. ISBN: 978-0-470-04824-5



- Définissons également le **facteur d'entaille** (à la fatigue)  $k_f$  comme étant le **rapport entre les limites d'endurance de la pièce lisse et la limite d'endurance de la pièce entaillée déterminée expérimentalement**.

$$k_f = \frac{R_{\text{pièce lisse}}^{\pm}}{R_{\text{pièce entaillée}}^{\pm}} \geq 1$$

- On a pu constater que la diminution de résistance à la fatigue est moindre que celle indiquée par  $k_c$ .
- C'est pourquoi on a introduit la notion **d'indice de sensibilité à l'entaille  $q$** :

$$q = \frac{k_f - 1}{k_c - 1}$$

$$k_f = 1 + q (k_c - 1)$$



- Les matériaux ductiles ont capacité à réduire la sensibilité à l'entaille à cause de la plastification locale.
- Le facteur d'entaille  $k_f$  ne s'applique que à la composante alternée  $\sigma_a$ :

$$\sigma_{\max}^{\text{réel}} = \bar{\sigma} + k_f \sigma_a$$

- $k_f$  dépendant de la géométrie de l'entaille et des caractéristiques du matériau.
- $k_f$  n'est jamais supérieur à 4.0 ; il dépasse quelquefois 3.0.

- Le coefficient  $k_f$  doit être déterminé de préférence par des essais directs.
- En l'absence de tels renseignements expérimentaux, on déduit  $k_f$ , en fonction du coefficient théorique de concentration de contrainte  $k_c$  et de l'indice de sensibilité à l'entaille  $q$ .
  - Détermination de  $q$
  - Détermination de  $k_c$ 
    - dans le cas **d'entailles calculables** : barreaux avec trous, changement de section, gorges...
    - dans le cas **d'entailles non calculables** : entailles vives, rainures de cale, frettage, ...

# INDICE DE SENSIBILITE A L'ENTAILLE q

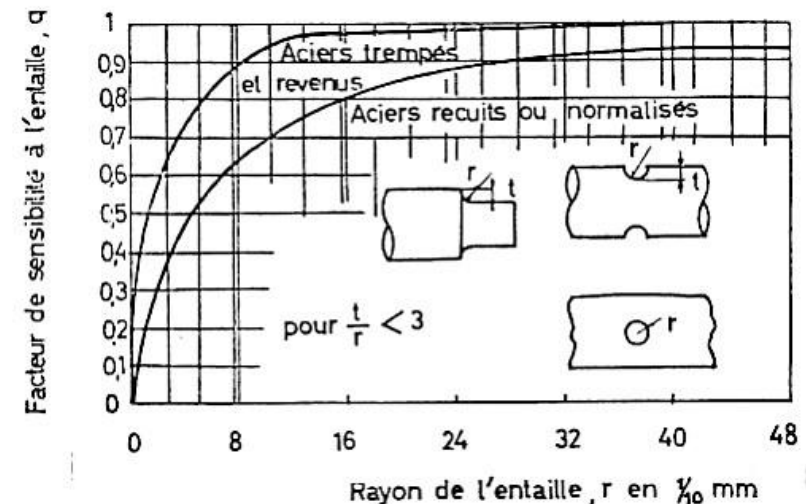
- Sur la base d'essais nombreux, Peterson a proposé de faire varier q en fonction du rayon r de l'entaille suivant la loi:

$$q = \frac{1}{1 + a / \sqrt{r}}$$

a: coefficient de Neuter

FIGURE 1.38 – Coefficient q de sensibilité à l'entaille

Résistance de l'acier $R_0$ en $daN/mm^2$	Paramètre a dans formule (r en mm)
32	0,63
42	0,50
56	0,40
70	0,31
98	0,19
140	0,079

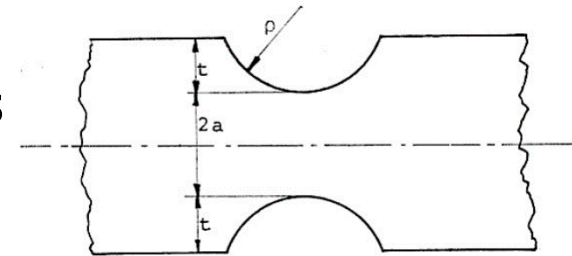


- **Peterson** a établi deux formules approchées permettant de calculer le **coefficient**  $k_c$  avec une précision suffisante, dans le cas de barres entaillées et de changements brusques de section
- Pour les barres rondes ou plates

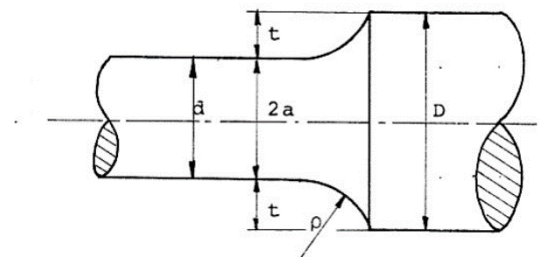
$$k_c = 1 + \frac{1}{\sqrt{A (\rho/t) + B (1 + (\rho/a))^2 (\rho/a)}}$$

- Pour la flexion et la torsion d'arbre de révolution à changement brusque de section, meilleurs résultats avec

$$k_c = 1 + \frac{1}{\sqrt{A (\rho/t) + B (1 + (\rho/a))^2 + C (\rho/t)^n d/D}}$$

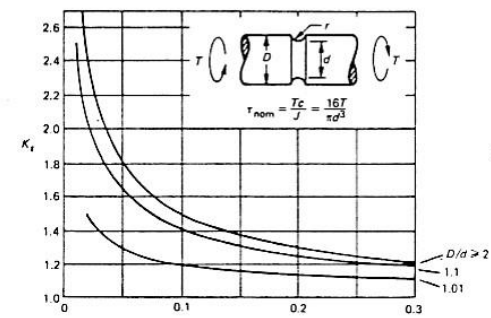
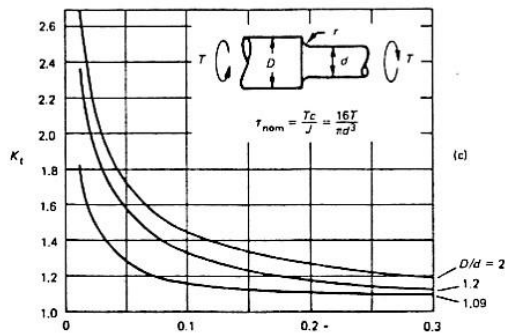
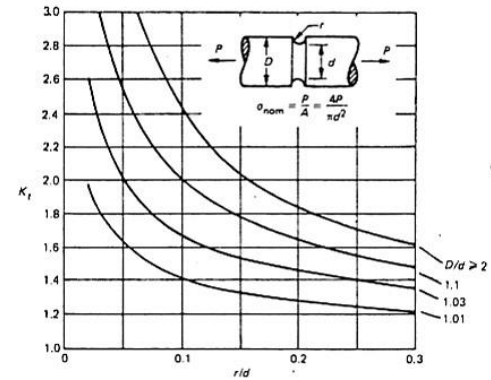
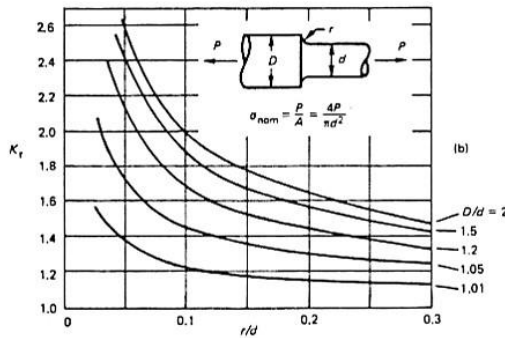
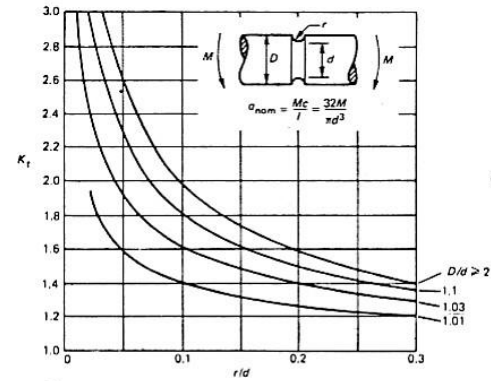
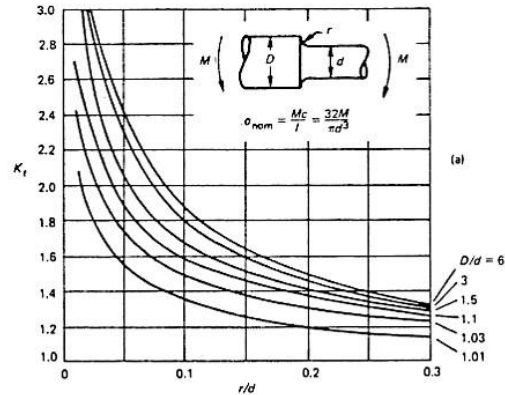
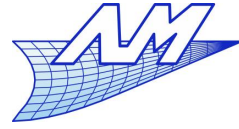


A/ Barre plate (type I)

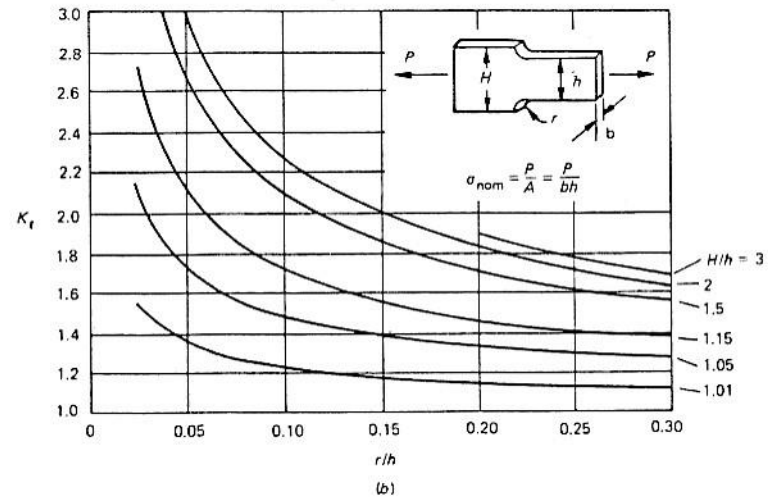
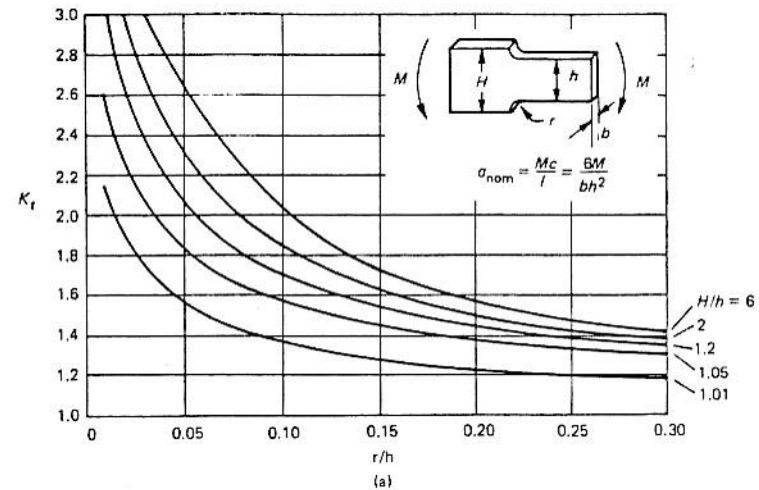
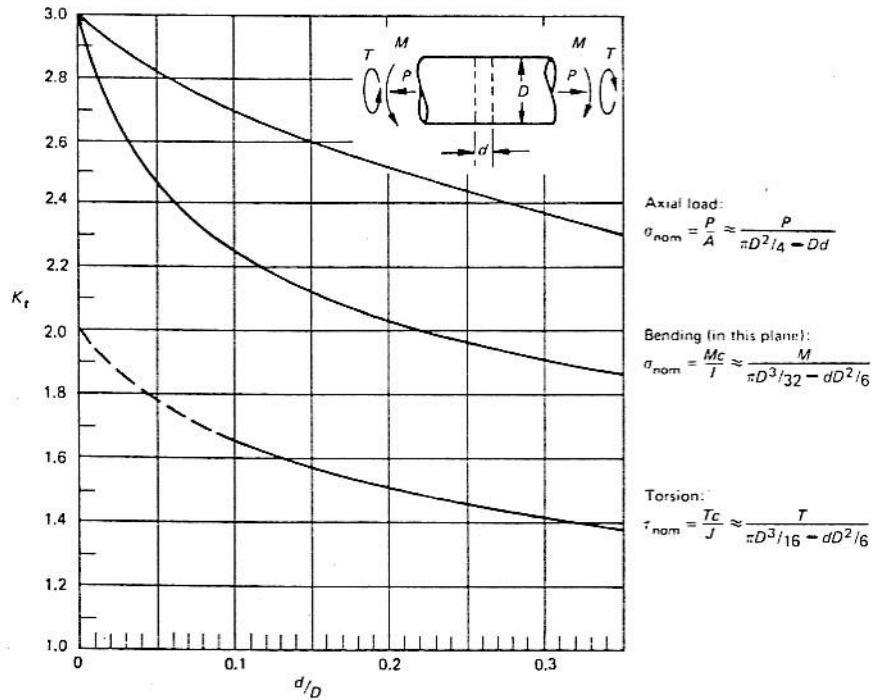


B/ Barre ronde (type II)

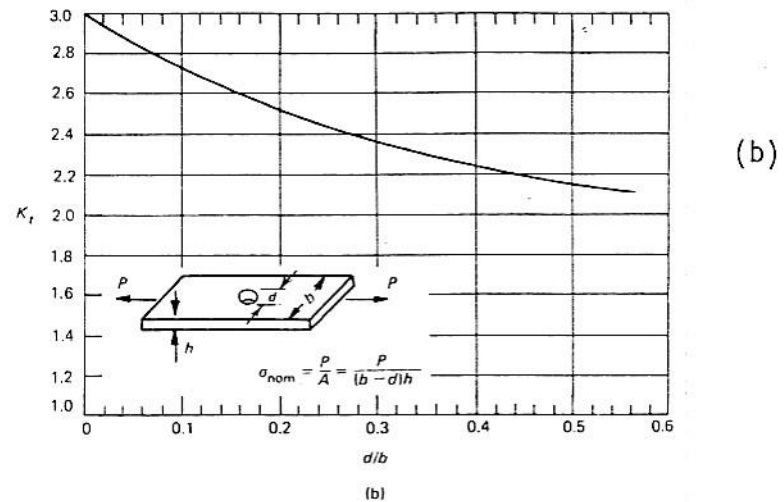
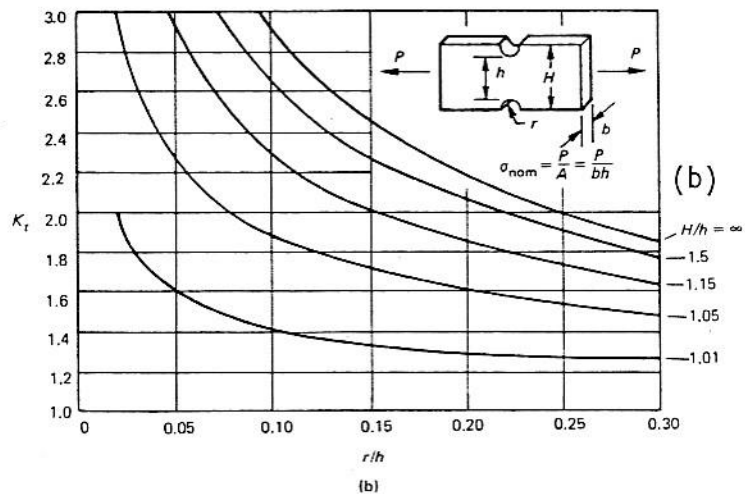
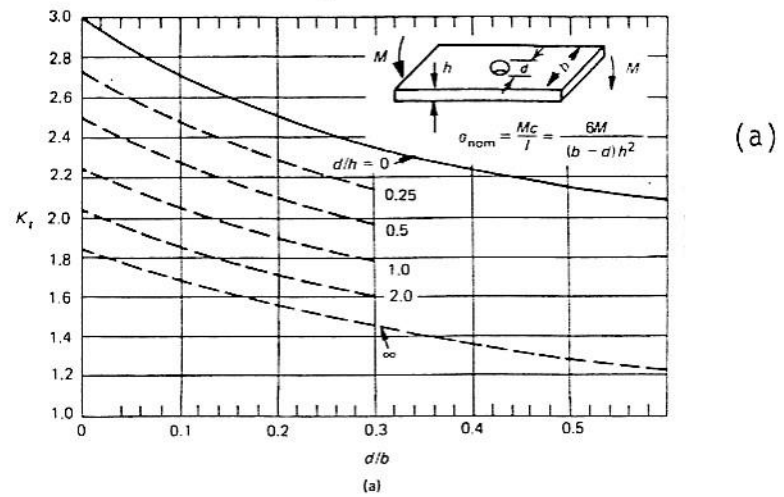
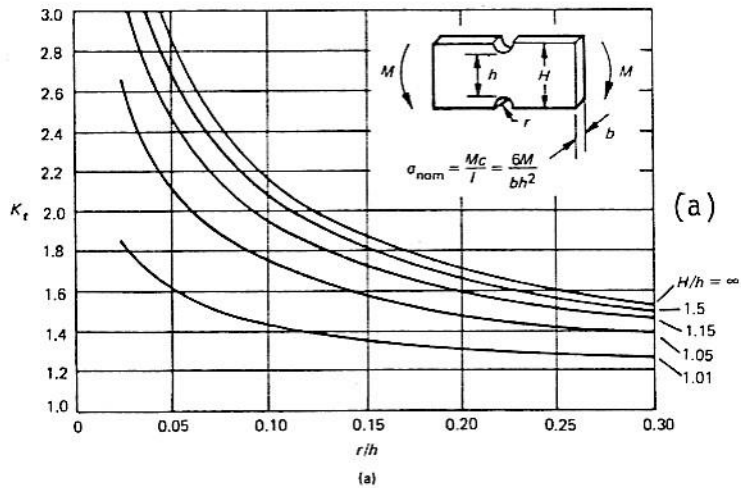
# COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE



# COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE

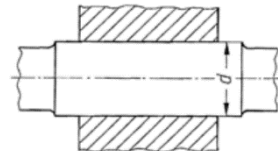
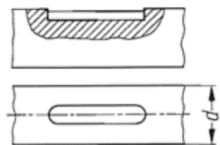


# COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE





- Pour un grand nombre d'entailles de la pratique, on est dans l'impossibilité de calculer directement le coefficient concentration de contrainte:
  - Entailles vives, pour lesquelles on ne connaît pas d'expression analytique du coefficient de concentration de contrainte.
  - Une série d'entailles pour lesquelles les données sont insuffisantes, ou dont le rayon à fond d'entaille est mal défini: rainures de clavettes, cannelures, des cannelures sur arbre, etc.
  - Assemblages frettés, dans lesquels l'état de contrainte est complexe et n'est nullement régi par un quelconque rayon.
- Ces entailles sont non calculables!





# COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE

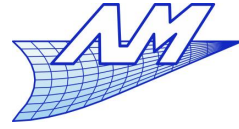


- Le tableau fournit en outre un ordre de grandeur des facteurs d'entaille  $k_f$  pour les accidents géométriques les plus courants, en fonction de la nuance d'acier choisie pour élaborer la pièce.

$$k_{\sigma/\tau} = 1 + q (k_{s/t} - 1)$$

Forme de l'entaille	Matière	$k_{\sigma}$	$k_{\tau}$
Gorge de dégagement circulaire	St 37-60	1.5 - 2.2	1.3 - 1.8
Saignée pour jong d'arrêt	St 37-60	2.5 - 3.0	2.5 - 3.0
Epaulement raccordé	St 37-60	1.5 - 2.0	1.3 - 1.8
Rainure de cale (bouts ronds)	St 37-60	1.7	1.6
	$R_0 > 600 \text{ N/mm}^2$	2.0	1.8
Rainure de cale ordinaire	St 37-60	1.5	1.4
	$R_0 > 600 \text{ N/mm}^2$	1.6	1.5
Rainure de cale de type Woodruff (demi-lune)	St 30 - 60	2.0 - 3.0	2.0 - 3.0
Arbres cannelés	St 37 - 60	-	2.0 - 2.5
Frettage sans précaution spéciale	St 37 - 60	2.0	1.5
Trou radial dans un arbre	St 37 - 60	1.4 - 1.7	1.4 - 1.7





# PIECES REELLES SOUMISES A DES SOLLICITATIONS PULSATOIRES



- On considère la loi linéaire de Soderberg qui lie les sollicitations de rupture  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$ .
- Le diagramme de Soderberg est modifiée pour tenir compte des différents coefficients  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $k_\sigma$ , introduits plus haut.

$$\frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma \sigma_a}$$

- L'abscisse peut être multipliée par un coefficient  $\psi$  tenant compte du fait que l'on peut éventuellement tolérer que le moment élastique soit dépassé d'une quantité telle que la zone plastifiée reste faible et que la flèche résiduelle de flexion reste très petite comparativement à la flèche élastique.

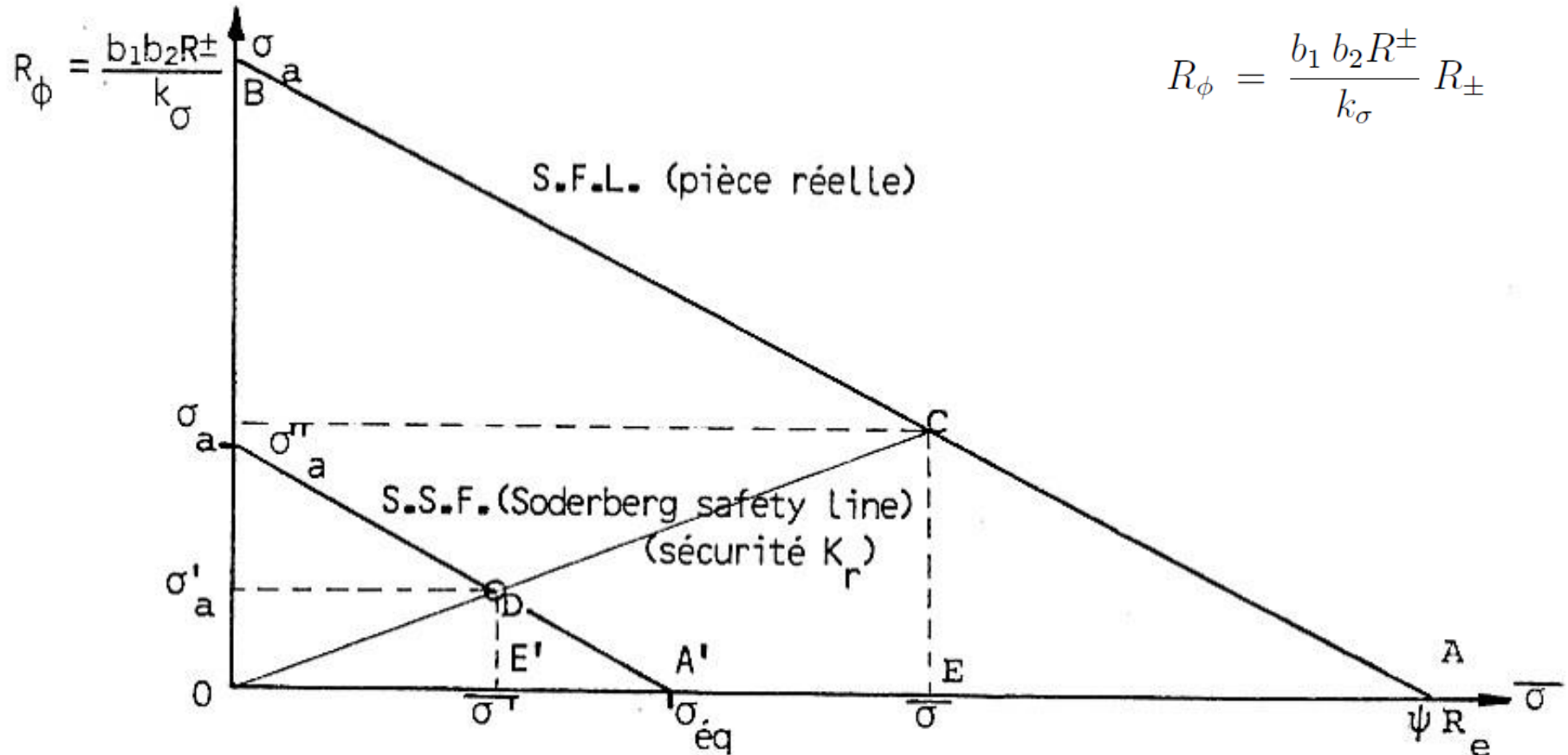
Section				
$\psi$	1,425	1,3	1,2	1,1

# Coefficient de sécurité pour une sollicitation uniaxiale (flexion & torsion)

# LAY-OUT

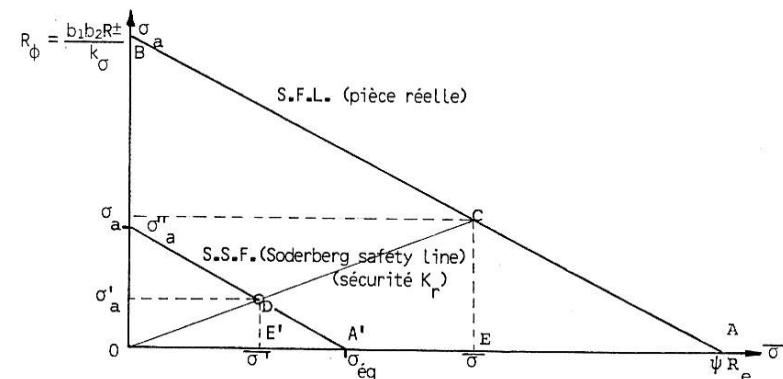
- Partie I Le phénomène de fatigue
- Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - Pièces réelles soumises à niveaux de contrainte variables
- Valeur du coefficient de sécurité
- Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

# PIECES REELLES SOUMISES A DES SOLLICITATIONS PULSATOIRES



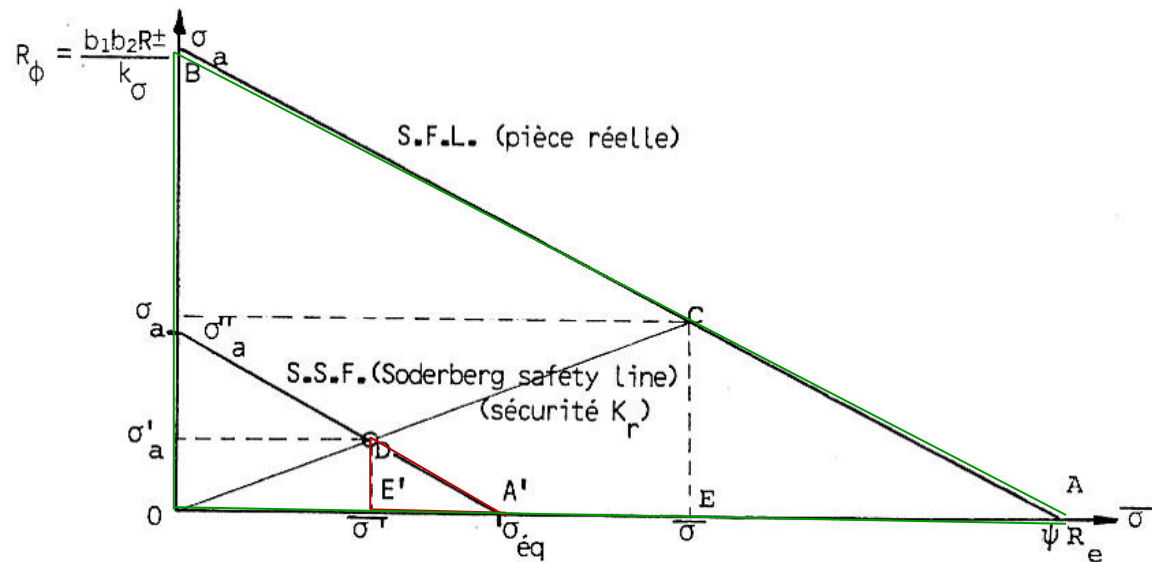
# PIECES REELLES SOUMISES A DES SOLLICITATIONS PULSATOIRES

- Le point D représente l'état des sollicitations réelles caractérisées par l'état de contrainte  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$ .
- Le point D est intérieur au triangle OAB. Il lui correspond donc un coefficient de sécurité  $K_\sigma$ .
- La Soderberg Safety Line (SSL) qui caractérise l'état de sollicitation est la droite parallèle à la Soderberg Failure Line passant par le point D.
- Compte tenu des nouvelles abscisses et ordonnées à l'origine, le coefficient de sécurité suivant Soderberg vaut :



$$K_\sigma = \frac{\psi R_e}{\sigma_{eq}} = \frac{OC}{OD}$$

- Les triangles E'DA et OBA' sont semblables. En conséquence on peut écrire:



$$\frac{E'D}{OB} = \frac{E'A'}{OA}$$

$$\frac{\sigma'_a}{R_\phi} = \frac{\sigma_{eq} - \bar{\sigma}'}{\psi R_e}$$

$$\frac{\sigma_{eq}}{\psi R_e} = \frac{\sigma'_a}{R_\phi} + \frac{\bar{\sigma}'}{\psi R_e} = \frac{1}{K_\sigma}$$

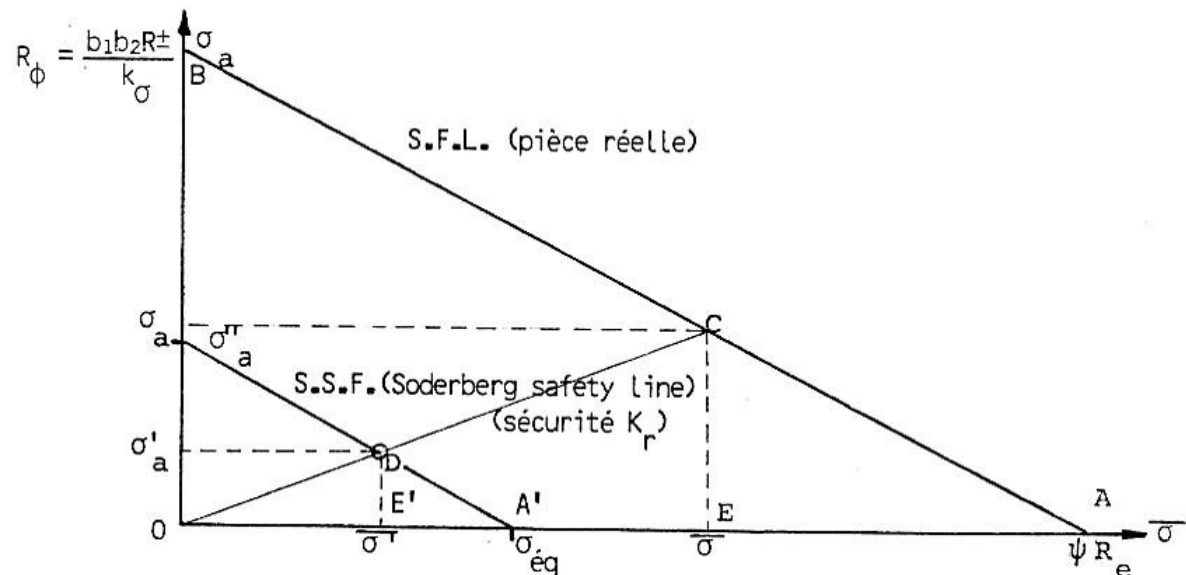
$$\boxed{\frac{1}{K_\sigma} = \frac{k_\sigma \sigma'_a}{b_1 b_2 R_\pm} + \frac{\bar{\sigma}'}{\psi R_e}}$$

- En compression, on peut se contenter de

$$\frac{1}{K_{\sigma}} = \frac{k_{\sigma} \sigma'_a}{b_1 b_2 R_{\pm}}$$

- En torsion

$$\frac{1}{K_{\tau}} = \frac{k_{\tau} \tau'_a}{b_1 b_2 R'_{\pm}} + \frac{\bar{\tau}'_m}{\psi R''_e}$$





# Pièces soumises à des sollicitations multiaxiales (flexion & torsion)

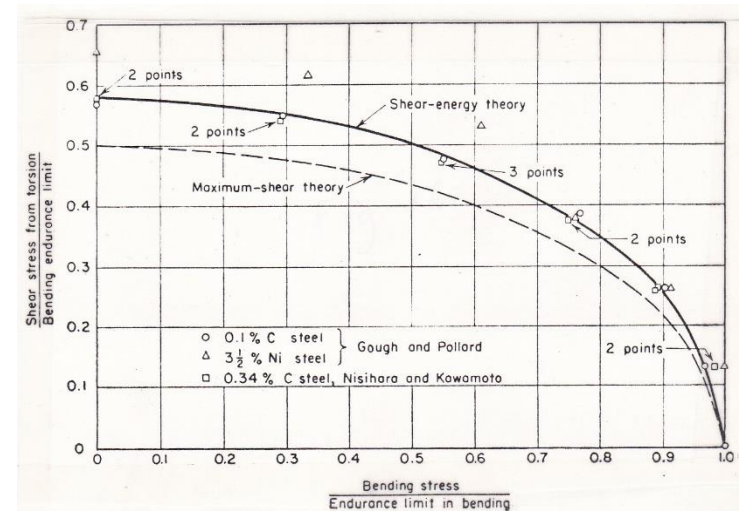
# LAY-OUT

- Partie I Le phénomène de fatigue
- Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - Pièces réelles soumises à niveaux de contrainte variables
- Valeur du coefficient de sécurité
- Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

- Sur base de résultats expérimentaux, on a constaté que pour l'acier et l'acier coulé

$$R''_{\pm} = 0,58 R_{\pm} \simeq \frac{1}{\sqrt{3}} R_{\pm}$$

- Pour des pièces en acier soumises à **torsion et flexion alternée** agissant en phase, Gough et Pollard proposent un critère empirique de forme elliptique basé sur l'expérience



$$\left( \frac{\sigma_a}{R_{\pm}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_a}{R''_{\pm}} \right)^2 = 1$$

- Cela semble indiquer que le critère de la contrainte tangentielle octaédrale reste applicable aux **sollicitations alternées** agissant en phase dans le cas des aciers et matériaux ductiles.

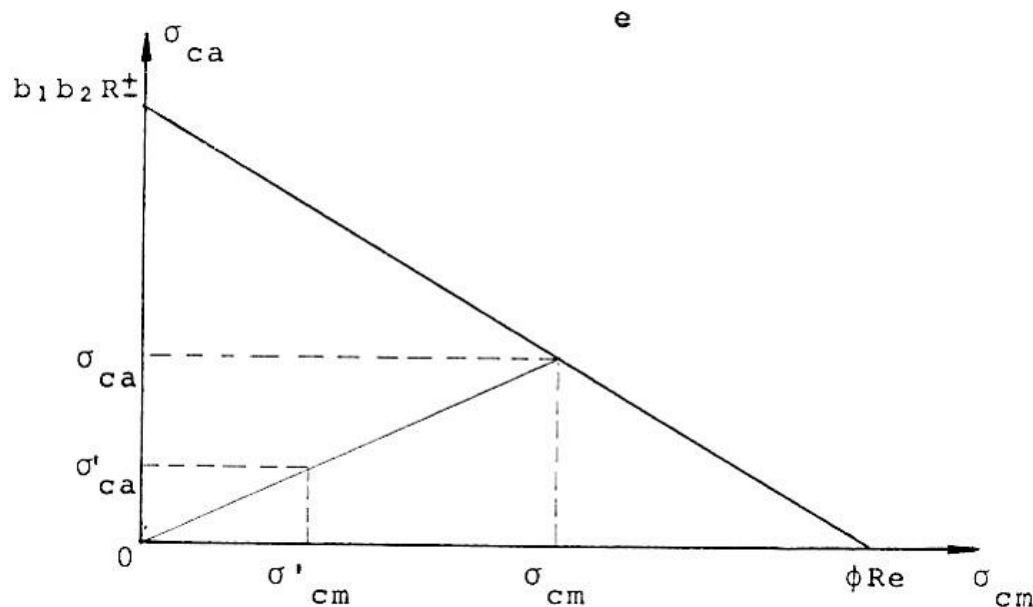
$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3 \tau_a^2} = R_{\pm}$$

- Dans le cas de **sollicitations pulsatoires quelconques**, des essais développés par Gough ont pu montrer que la loi liant les contraintes limites de flexion et de torsion restait elliptique et avait pour équation:

$$\left( \frac{\sigma_a}{R_{\pi}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_a}{R''_{\pi}} \right)^2 = 1$$

- Avec cette fois des  $R_{\pi}$  et  $R''_{\pi}$  **limites d'endurance calculées respectivement pour chacune des contraintes de tension et de cisaillement moyennes généralement indépendantes.**

- De multiples essais en laboratoire ont prouvé qu'il était acceptable d'extrapoler les résultats de Gough et Pollard obtenus sur des pièces lisses **au cas des pièces entaillées** à condition d'adopter **la droite de Soderberg relative à la pièce réelle**.



- L'écriture de la formule fondamentale n'est pas modifiée mais les limites d'endurance sont cette fois relatives à la pièce réelle.

# PIECES REELLES SOUMISES A DES SOLLICITATIONS MULTIAXIALES



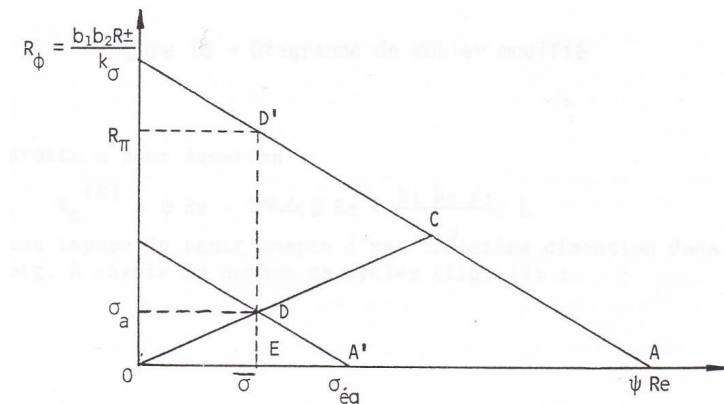
- La pièce réelle travaille donc en sécurité aussi longtemps que la relation suivante est vérifiée:

$$\left(\frac{\sigma_a}{R_\pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{R''_\pi}\right)^2 \leq 1$$

- Avec

$$R_\pi = R_\phi - C \bar{\sigma} \quad R_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma} \quad C = \frac{R_\phi}{\psi R_e}$$

$$R''_\pi = R''_\phi - C'' \bar{\tau} \quad R''_\phi = \frac{b_1 b_2 R''_\pm}{k_\tau} \quad C'' = \frac{R''_\phi}{\psi R''_e}$$



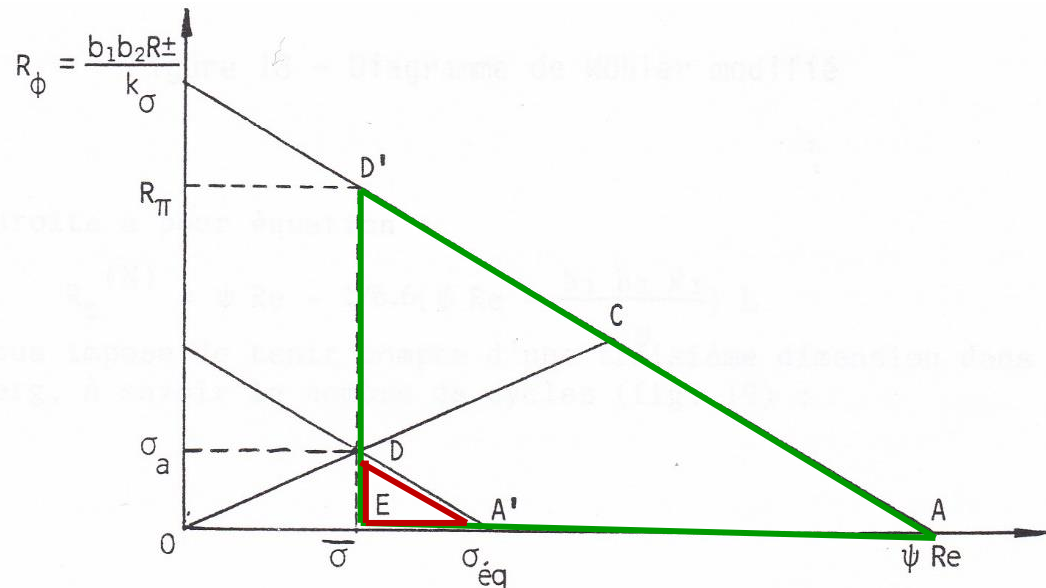
- Si ce premier membre reste inférieur à l'unité, on dit que le système travaille en sécurité et que le régime de sollicitation est caractérisé par un coefficient de sécurité K:

$$\left(\frac{\sigma_a}{R_\pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{R''_\pi}\right)^2 = \frac{1}{K^2} \leq 1$$

- Evaluons maintenant chacun des termes de l'expression à l'aide du diagramme de Soderberg
- Les triangles EDA' et ED'A sont semblables

$$\frac{\sigma_a}{R_\pi} = \frac{\sigma_{eq} - \bar{\sigma}}{\psi R_e - \bar{\sigma}} \leq \frac{\sigma_{eq}}{\psi R_e} = \frac{1}{K_\sigma}$$

$$\frac{\tau_a}{R''_\pi} = \frac{\tau_{eq} - \bar{\tau}}{\psi_c R''_e - \bar{\tau}} \leq \frac{\tau_{eq}}{\psi_c R''_e} = \frac{1}{K_\tau}$$



# PIECES REELLES SOUMISES A DES SOLLICITATIONS MULTIAXIALES



- En définitive, on convient de calculer la sécurité globale à l'aide des sécurités partielles

$$\frac{1}{K} = \sqrt{\frac{1}{K_{\sigma}^2} + \frac{1}{K_{\tau}^2}} = \sqrt{\frac{K_{\sigma}^2 K_{\tau}^2}{K_{\sigma}^2 + K_{\tau}^2}} \quad K = \frac{K_{\sigma} K_{\tau}}{\sqrt{K_{\sigma}^2 + K_{\tau}^2}}$$

- Il vient que le coefficient de sécurité K sera calculé en remplaçant respectivement les expressions par leurs valeurs estimées  $1/K_{\sigma}$  et  $1/K_{\tau}$  à partir des équations

$$\frac{1}{K} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a k_{\sigma}}{b_1 b_2 R_{\pm}} + \frac{\bar{\sigma}}{\psi R_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a k_{\tau}}{b_1 b_2 R_{\pm}''} + \frac{\bar{\tau}}{\psi_c R_e''}\right)^2}$$

- Le coefficient de sécurité global ainsi calculé est légèrement sous-estimé et la méthode travaille en sécurité.



# Coefficients de sécurité

# LAY-OUT

- Partie I Le phénomène de fatigue
- Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - Pièces réelles soumises à niveaux de contrainte variables
- Valeur du coefficient de sécurité
- Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

# VALEURS DES COEFFICIENTS DE SECURITE

- On adopte généralement un **coefficient de sécurité K de 1,5 à 2**.
- A défaut de renseignements plus précis, la norme DIN propose d'utiliser :
  - $K = 2$  lorsque la charge maximale est appliquée 100% du temps (cas des machines rotatives par exemple).
  - $K = 1,5$  lorsque la charge maximale est appliquée 50% du temps (cas des machines-outils généralement).
  - $K = 1,25$  lorsque la charge maximale est appliquée pendant 25% du temps seulement (cas type des engins de levage et de manutention).

## VALEURS DES COEFFICIENTS DE SECURITE

- Précisons que ce coefficient de sécurité global doit nous prémunir contre différents facteurs d'incertitude à savoir :
  - La limite d'endurance est une valeur nominale correspondant à une probabilité de rupture de 50%,
  - Les variations possibles de la charge, la corrosion, les contraintes résiduelles...
  
- On se met généralement du côté de la sécurité à plusieurs reprises lors de l'estimation du coefficient K:
  - En adoptant le diagramme linéaire de Soderberg
  - En adoptant le produit des coefficients de concentration de contraintes des deux discontinuités.
  - En faisant l'estimation du coefficient de sécurité dans le cas de sollicitations pulsatoires en phase.

# Pieces réelles soumises à un niveau de contrainte variable et sollicitations multiaxiales

# LAY-OUT

- Partie I Le phénomène de fatigue
- Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - **Pièces réelles soumises à niveaux de contrainte variables**
- Valeur du coefficient de sécurité
- Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

# PIECES SOUMISES A DIVERS NIVEAUX DE CONTRAINTES



- On suppose que la pièce est chargée par une série de niveaux de sollicitations constants caractérisés par des états de contrainte  $\sigma_a, \sigma_m, \tau_a, \tau_m$  pendant  $n_i$  cycles.
- On admet que le dommage est donné par le critère de Palmgren Miner:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}$$

- où  $N_i$  est le nombre de cycle à rupture pour l'état de contrainte  $i$

- Dommage global

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i}$$



- On vérifiera que le dommage reste effectivement inférieur à l'unité

$$D = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{K} = \leq 1$$

- Le facteur d'échelle K est le **coefficient de sécurité**

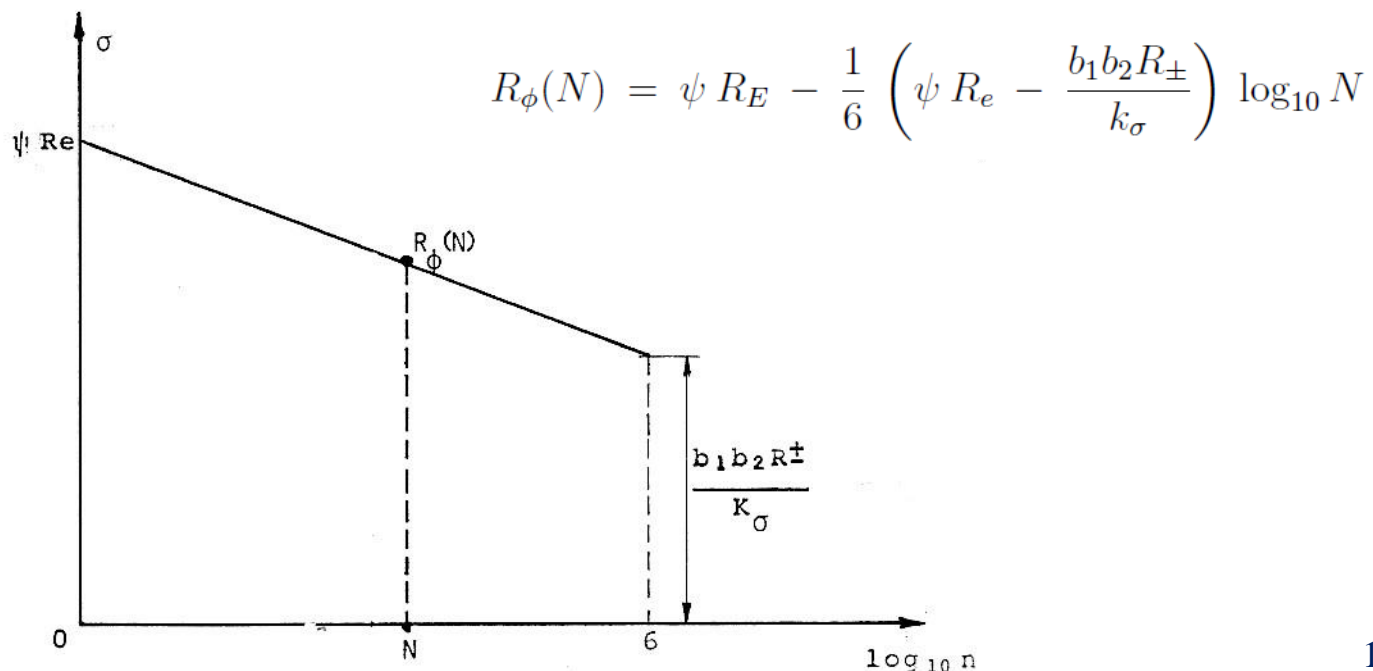
# PARTIE III : LE DIMENSIONNEMENT POUR UNE DURÉE DE MOINS D'UN MILLION DE CYCLES

# LAY-OUT

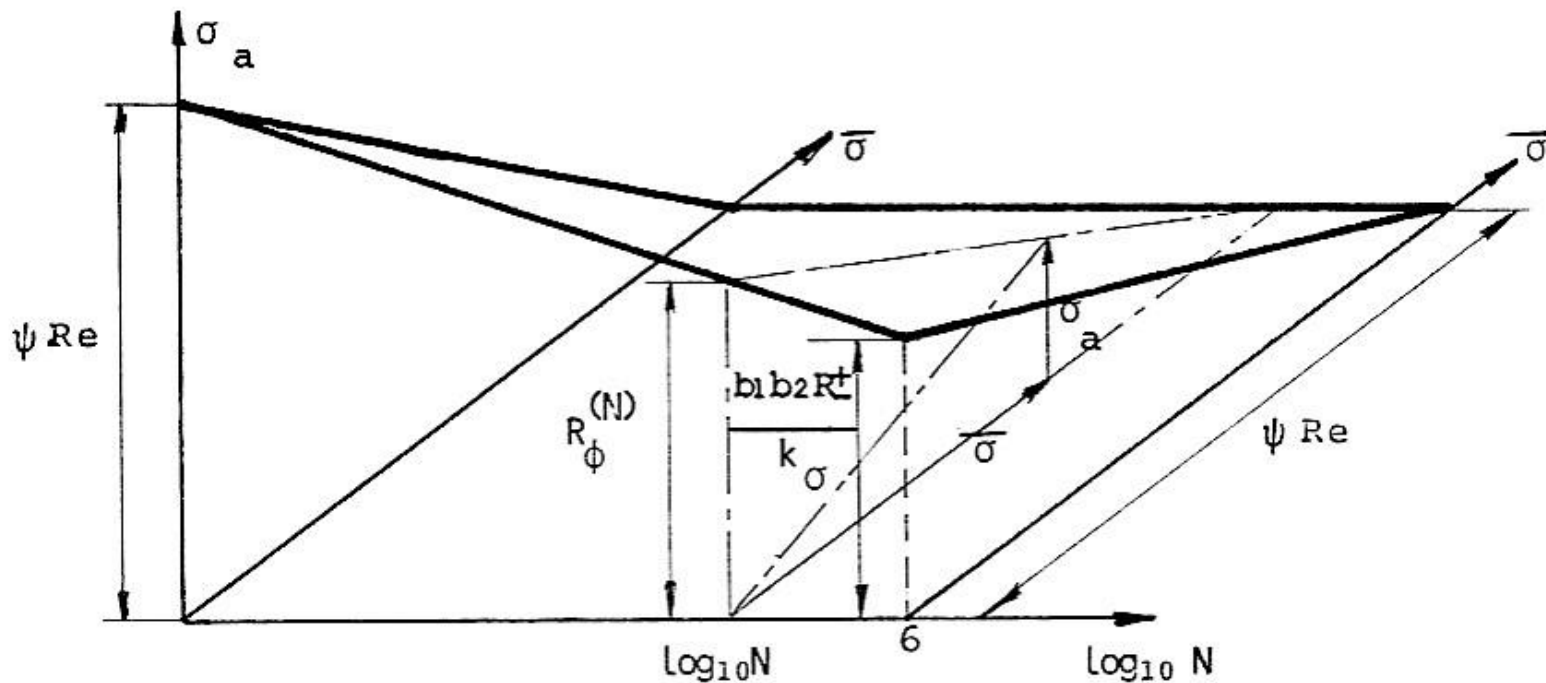
- Partie I Le phénomène de fatigue
- Partie II : Dimensionnement pour plus d'un million de cycles
  - Pièces réelles soumises à sollicitation uni axiale
  - Coefficient de sécurité
  - Pièces soumises à sollicitations multiaxiales
  - Pièces réelles soumises à niveaux de contrainte variables
- Valeur du coefficient de sécurité
- **Partie III : Dimensionnement pour une durée de vie limitée (moins d'un million de cycles)**
  - Coefficient de sécurité
- Partie IV : Amélioration de l'endurance des éléments de machines
- Conclusion

- Certaines pièces devant subir un faible nombre de cycles limités seraient inutilement lourdes et surdimensionnées si on adoptait la limite d'endurance conventionnelle.
- Plus judicieux dans certains cas d'espèce, de concevoir les pièces pour une durée limitée, quitte à prévoir leur remplacement périodique.
- En outre certains métaux non ferreux ne possèdent pas de limite d'endurance.
- On remplace dans la méthode la limite d'endurance par la contrainte de rupture par fatigue  $R_{\phi}(N)$  après  $N$  cycles.

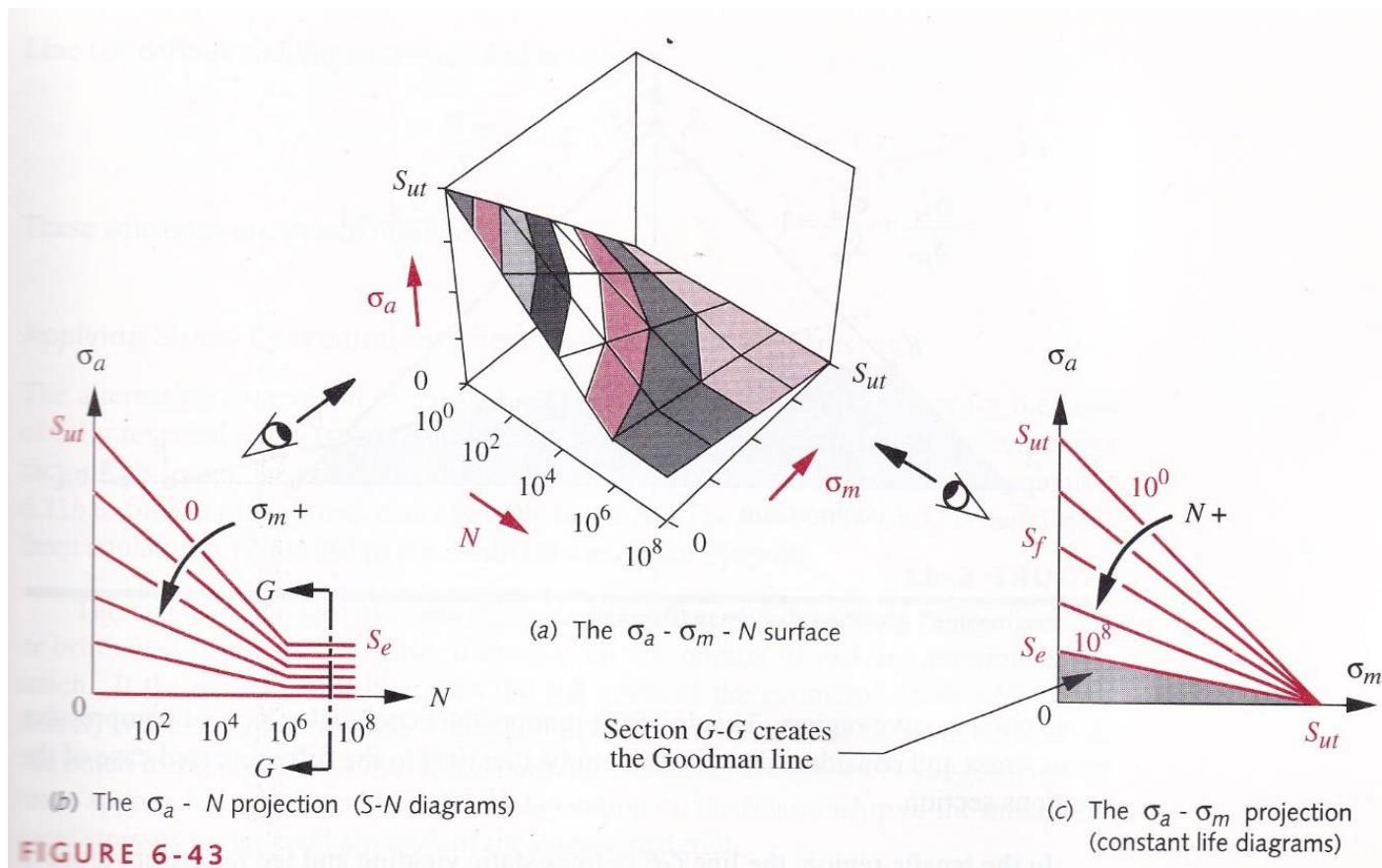
- Courbe de Wöhler n'est généralement pas connue.
- On en fait une **approximation linéaire** dans le diagramme logarithmique



- Le diagramme de Soderberg devient un diagramme en trois dimensions



- Le diagramme de Soderberg devient un diagramme en trois dimensions



- On en déduit l'expression des sécurités partielles

$$\frac{1}{K_{\sigma,N}} = \frac{\bar{\sigma}}{\psi R_e} + \frac{\sigma_a}{\psi R_e - \frac{1}{6} (\psi R_e - R_\phi) \log_{10} N} \quad R_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma}$$

- En torsion

$$\frac{1}{K_{\tau,N}} = \frac{\bar{\tau}}{\psi R_e''} + \frac{\tau_a}{\psi_c R_e'' - \frac{1}{6} (\psi_c R_e'' - R_\phi'') \log_{10} N} \quad R_\phi'' = \frac{b_1 b_2 R_\pm''}{k_\tau}$$



- Si on s'impose une durée de vie limitée inférieure à  $10^6$  cycles, les relations précédentes permettent un calcul immédiat de  $K_{\sigma,N}$  et  $K_{\tau,N}$ . On en déduit le coefficient de sécurité global  $K_N$ .
- Par contre, si on s'impose une sécurité  $K_N$  totale et qu'on demande le nombre de cycles qui y correspond, le mieux est de procéder par itérations successives en introduisant une série de différentes valeurs de  $N$  dans chacune des relations en  $K_{\sigma,N}$  et  $K_{\tau,N}$ . La bonne valeur de  $N$  conduit aux sécurités partielles qui, combinées, satisfont à la condition imposée sur  $K_N$ .

□ Une formule approchée

$$\log_{10} N = \frac{6(\psi R_e - \sigma_{max})}{(\psi R_e - \bar{\sigma})(1 - \frac{R_{\phi}}{\psi R_e})}$$

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma} + \sigma_a \quad R_{\phi} = \frac{b_1 b_2 R_{\pm}}{k_{\sigma}}$$