CONCEPTION DES ENGRENAGES
Partim 1: Géométrie et Cinématique

Pierre Duysinx

Aérospatiale & Mécanique

Année académique 2020-2021

LAY-OUT

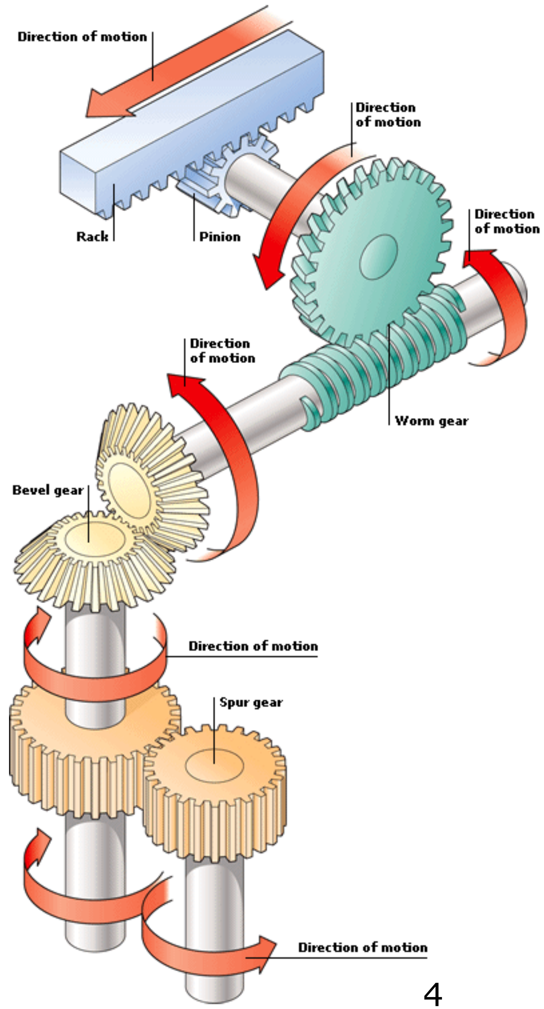
- Introduction
- Types d'engrenage
- Engrenages à dentures droites
  - Cinématique
  - Géométrie
  - Calcul des forces
  - Dessin
- Engrenages à dentures hélicoïdales
  - Cinématique
  - Géométrie
  - Calcul des forces

INTRODUCTION

DÉFINITIONS

- On appelle roues dentées des corps de révolution pourvus de dents par le contact desquelles un mouvement de rotation peut être transmis d'un arbre moteur vers un arbre récepteur.

- L'engrènement d'une roue dentée avec une crémaillère transforme la rotation de la roue en un déplacement de translation de la crémaillère et vice-versa.

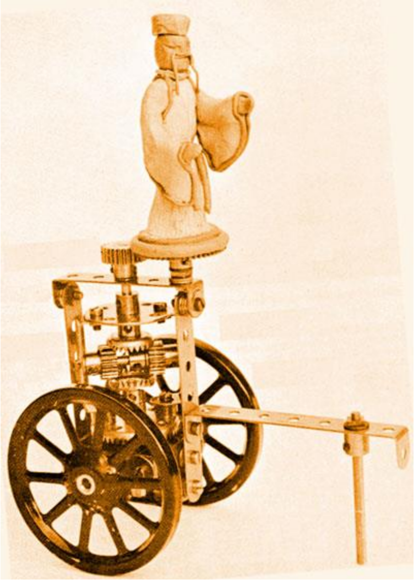


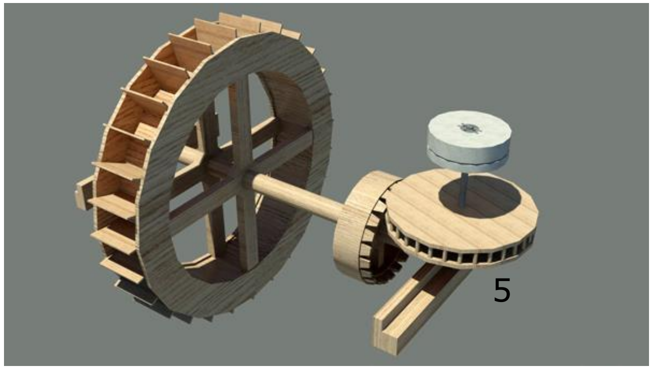
HISTORIQUE DES ENGRENAGES

- Chine ancienne*: South Pointing Chariot* permet de voyager à travers le désert de Gobi contient des engrenages

- Chez les Romains, Vitruve imagine le principe des engrenages à peigne

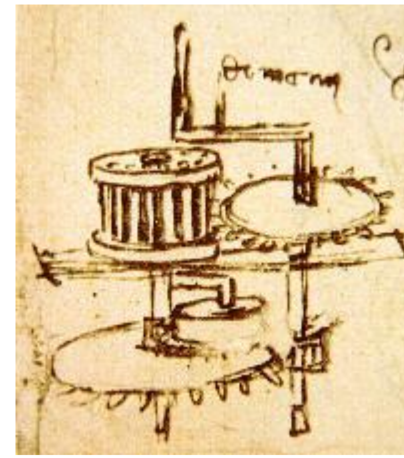
- Moyen-Age: les systèmes de roues dentées en forme de peigne avec des dents en bois transmettent le mouvement des moulins.





HISTORIQUE DES ENGRENAGES

- A la Renaissance, Léonard de Vinci dessine de nombreux engrenages et s’intéresse à l’engrènement homocinétique

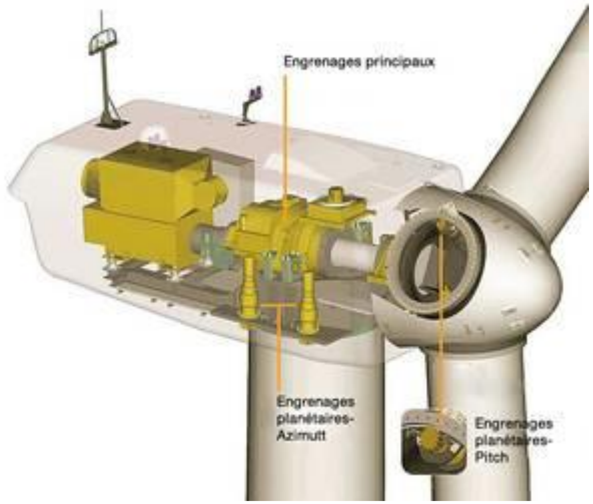


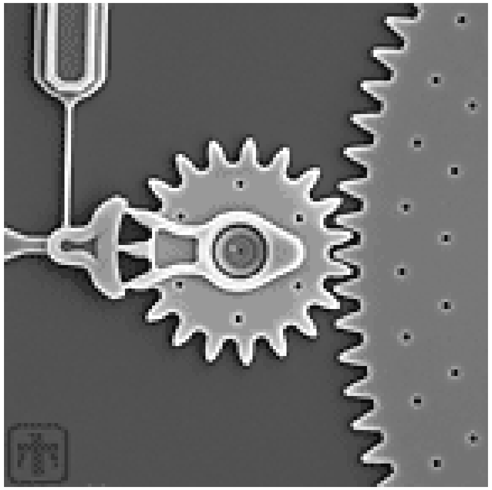
- L’horlogerie développe la technique des engrenages

- Ere industrielle: la fabrication des engrenages en acier et en grande série

HISTORIQUE DES ENGRENAGES

- Aujourd’hui, les engrenages constituent une vaste famille d’éléments de machine utilisés pour transmettre les mouvements de rotation et pour transmission de puissance.
- En transmission de puissance, les engrenages sont utilisés pour transmettre et convertir le couple et la vitesse dans une grande variété d’applications, des plus grandes aux plus petites machines.





AVANTAGES DES ENGRENAGES

- Transmission des plus petites aux plus grandes machines
- Rapport constant des vitesses quelle que soit la charge
- Disposition quelconque des axes des roues, même si les axes parallèles sont la meilleure solution
- Sécurité de service et durée de vie élevée
- Entretien restreint (graissage)
- Compacité et encombrement faible

DÉSAVANTAGES DES ENGRENAGES

- Prix de revient relativement élevé (par rapport à d’autres solutions)
- Niveau sonore parfois gênant (dépend du type d’engrenages)
- Transmission rigide entre les arbres
  - ➔ Amortissement peu efficace des à-coups et des vibrations
  - ➔ Positionnement géométrique précis des axes
- Interchangeabilité limitée (même module nécessaire)

OBJECT DE LA LEÇON

- Introduction: découvrir les différents types d'engrenages et leur applications

- Engrenages à dentures droites: le type le plus simple d'engrenages: axes parallèles et dentures droites et hélicoïdales.

- Autres types d'engrenages: coniques, à axes gauches, vis sans fin… ➔ cours avancés

- Les engrenages sont un type d'éléments de machines les plus courants: → Nécessité de connaître et de comprendre les bases de la théorie des engrenages

OBJET DE LA LEÇON

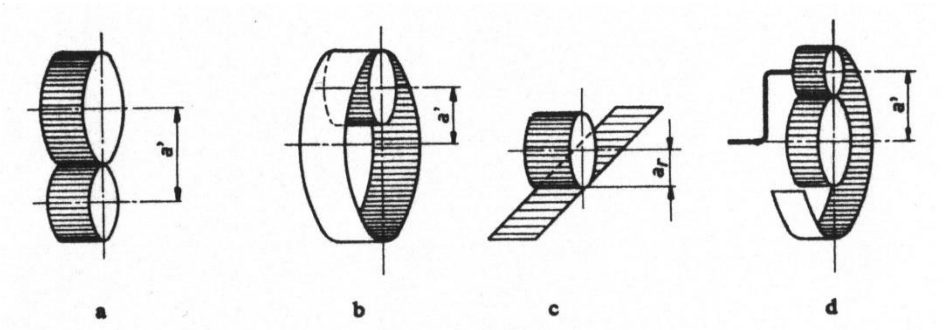
- Les engrenages sont hautement standardisés
  - AGMA: American Gear Manufacturer Association
  - ISO: International Standards Organisation

➔ Introduction aux règles et normes de
  - Conception & Dimensionnement
  - Fabrication
  - Choix des matériaux

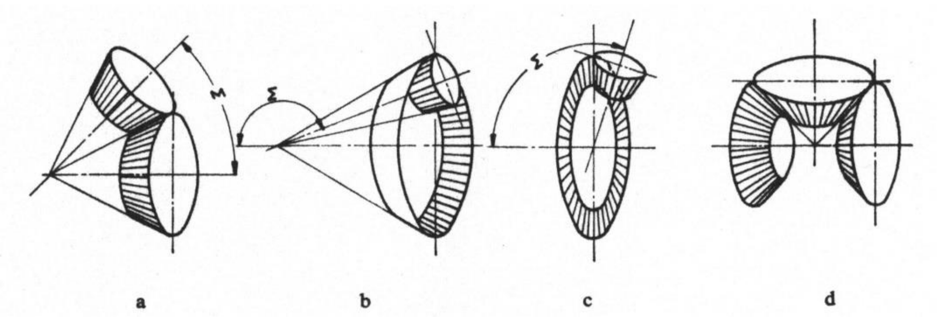
TYPES D’ENGRENAGES

TYPES D'ENGRENAGE

- Engrenages à axes parallèles: les surfaces primitives sont des cylindres qui roulent sans glisser l'un sur l'autre

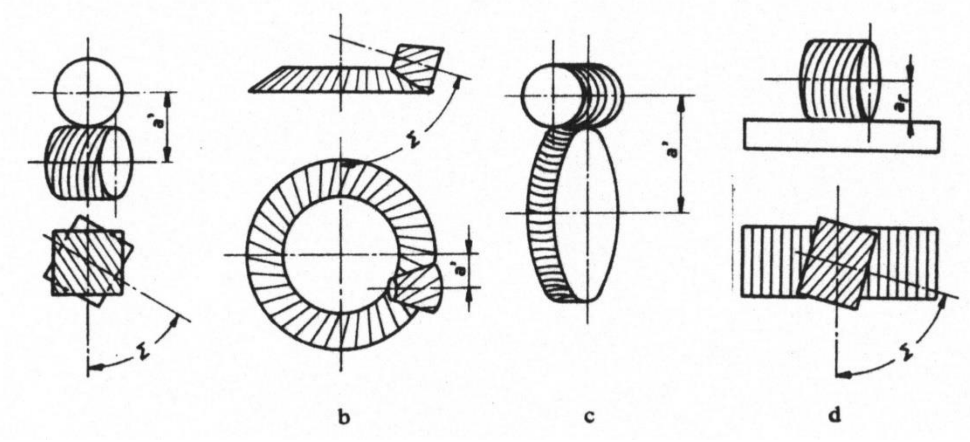


- Engrenages à axes concourants: les surfaces primitives sont des troncs de cône qui roulent sans glisser l'un sur l'autre



TYPES D’ENGRENAGE

- Engrenages à axes gauches: les axes des roues sont gauches c.-à-d. ni concourants ni parallèles. Les surfaces primitives théoriquement des hyperboloïdes roulent et glissent l’une sur l’autre. Les surfaces utilisées pratiquement sont des cylindres, des troncs de cônes, ou des tores.

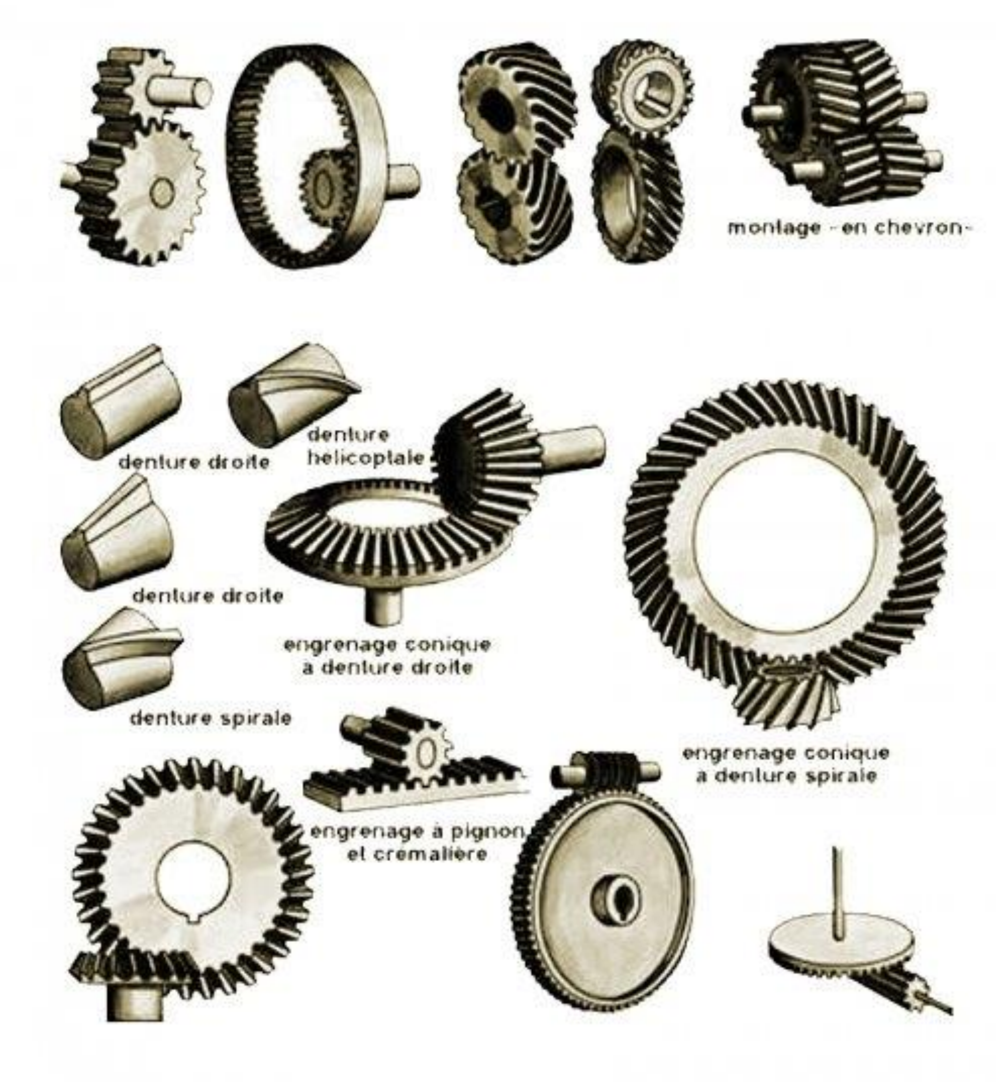


TYPES D'ENGRENAGES

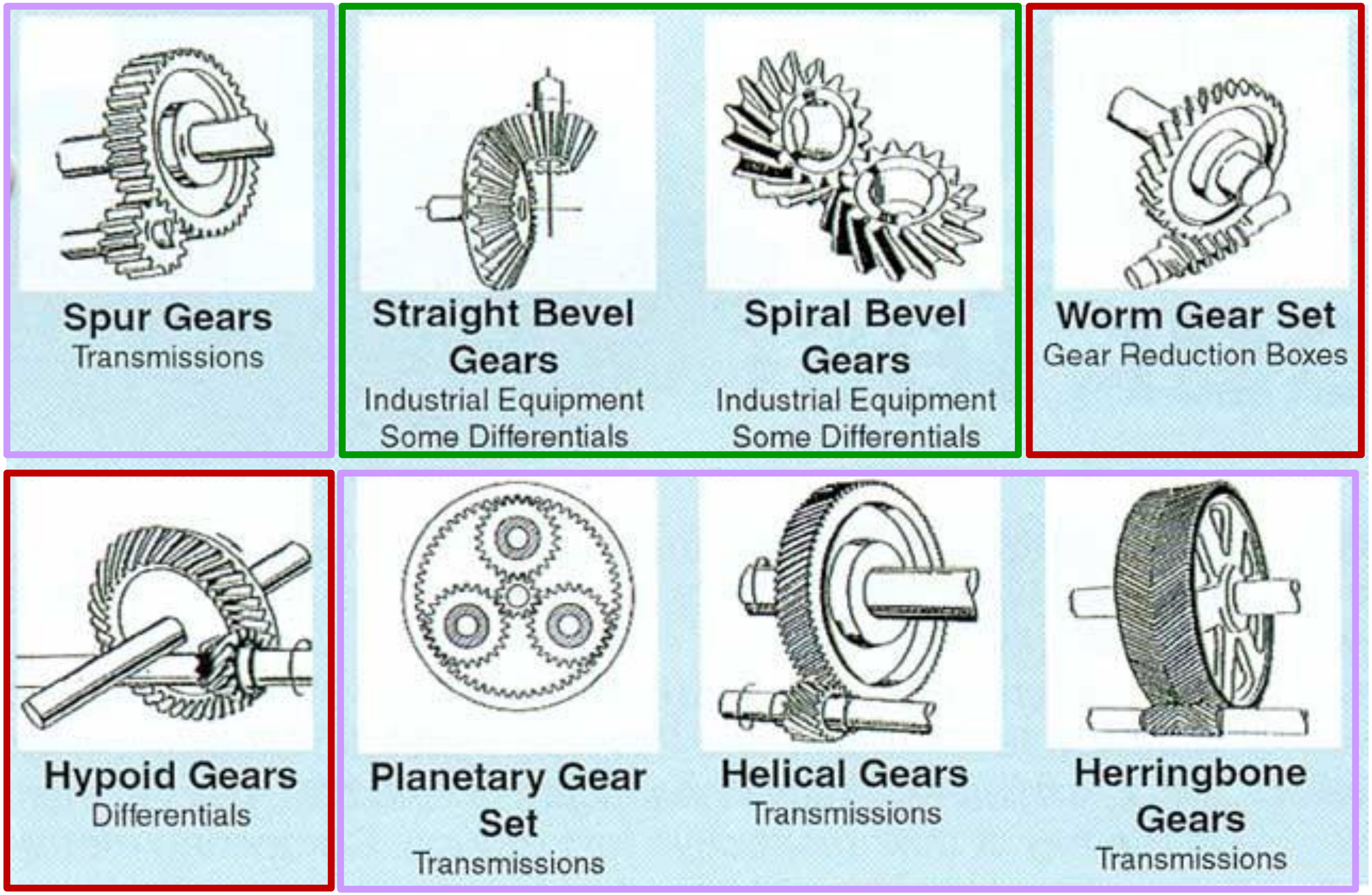
Engrenages à axes parallèles

Engrenages à axes concourants

Engrenages à axes gauches



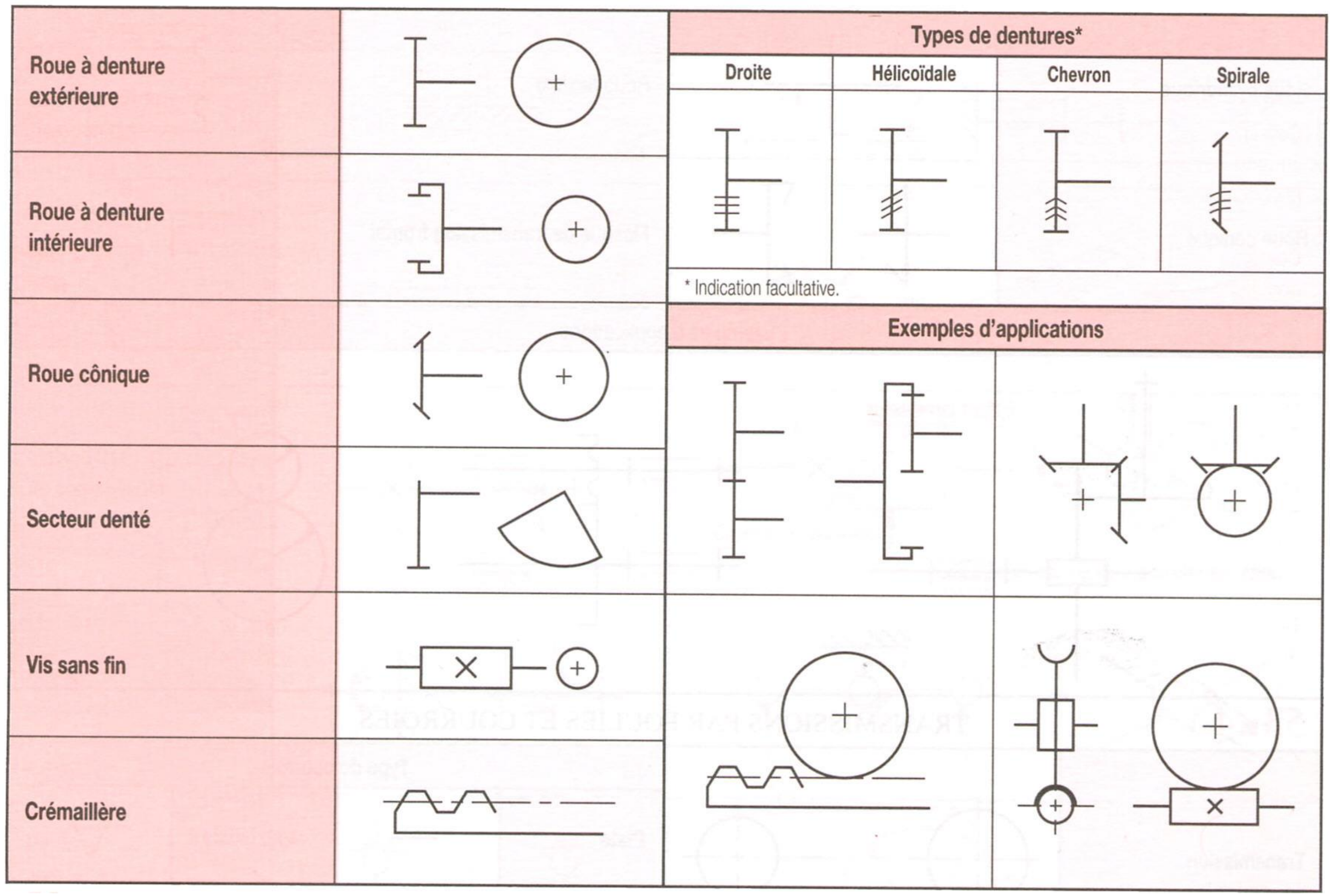
TYPES D'ENGRENAGES



VOCABULAIRE

- On convient d'appeler:
  - Pignon: La plus petite des roues dentées. Elle est indicée 1.
  - Roue: La roue dentée de diamètre maximale. Elle est repérée par l'indice 2. Il s'agit d'une roue à denture extérieure.
  - Couronne: Une roue à denture intérieure. Elle est également repérée par l'indice 2.
  - Crémaillère : Un profil denté continu et plan.

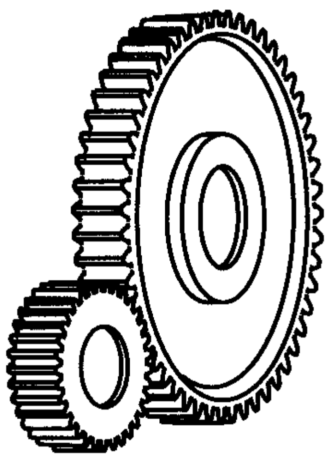
SCHEMATISATION DES ENGRENAGES



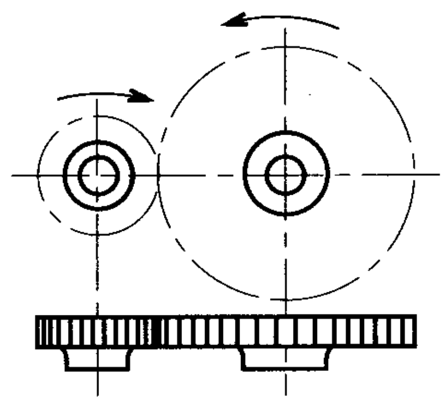
ENGRENAGES A DENTURES DROITES

ENGRENAGES A DENTURES DROITES

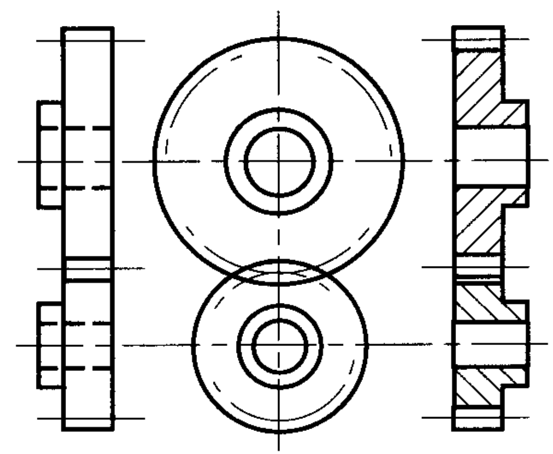
perspective



principe



dessin normalisé



RAPPORT DE REDUCTION

- Deux roues dentées en prise se comportent comme deux cylindres de diamètres d_{01} et d_{02} roulant l’un sur l’autre

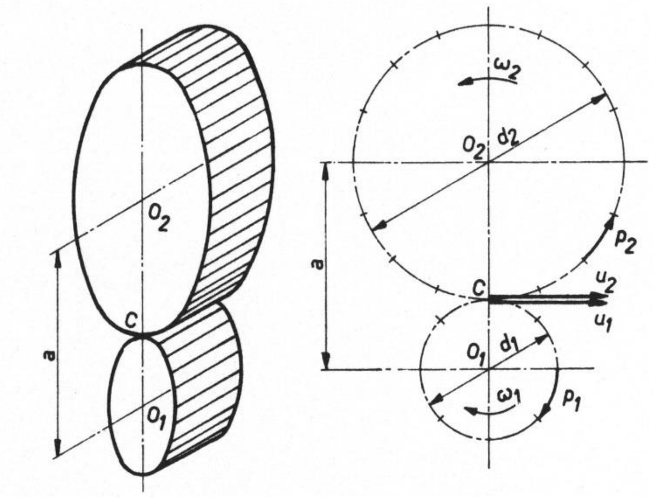
- On parle de cylindres primitifs et de diamètres primitifs d_0

- Si il n’y a pas de glissement, on peut écrire

$$v_1 = \frac{\omega_1 \, d_{01}}{2} = v_2 = \frac{\omega_2 \, d_{02}}{2}$$

- Soit le rapport de réduction i

$$\frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i > 1$$



RAPPORT DE REDUCTION

- Un engrènement extérieur donne lieu à une inversion du sens de rotation alors qu’un engrènement sur une denture intérieure (comme pour les poulies et les chaînes) préserve le sens de rotation

- On devrait dès lors écrire

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{d_{02}}{d_{01}} = \pm i > 1$$

- Le signe « + » étant pour les dentures intérieures et le signe « - » pour les dentures extérieures

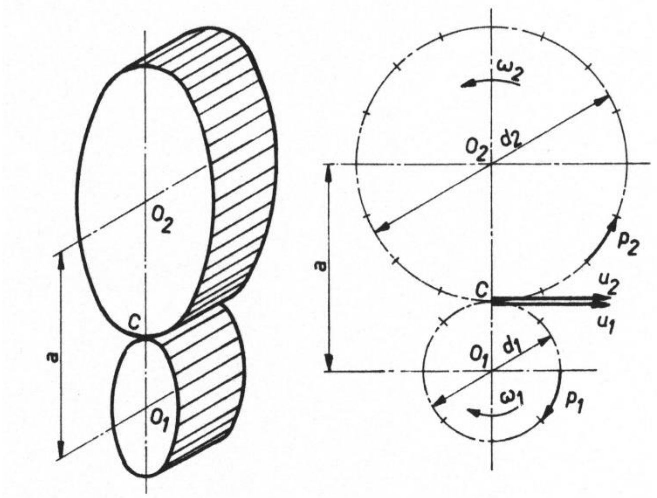
RAPPORT DE REDUCTION

- L'égalité des puissances entrantes et sortantes (au rendement organique près)

$$\mathcal{P}_1 = C_1 \, \omega_1 = \mathcal{P}_2 = C_2 \, \omega_2$$

- Donne le facteur d'amplification du couple

$$m_A = \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i \geq 1$$



ENTRE AXE

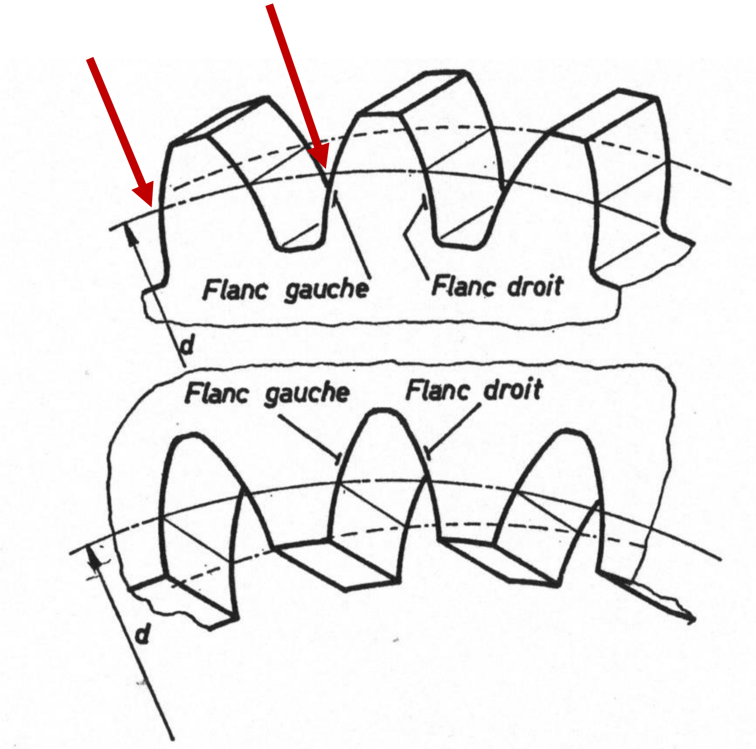
- L'entre axe a_0

$$a_0 = \frac{d_{02} + d_{01}}{2}$$

- Les formules sont valables pour un engrènement à denture intérieure pour autant que l'on affecte un signe « - » aux grandeurs Z_2, i, a_0.

PAS PRIMITIF

- Le pas primitif p des roues cylindriques à denture droite est la longueur de l'arc mesuré sur le cercle primitif entre deux points relatifs à deux flancs correspondants (droits ou gauches).



MODULE METRIQUE

- Soit Z_1 et Z_2 les nombres entiers de dents du pignon 1 et de la roue 2:

$$\pi\, d_{01} \;=\; Z_1\, p_1 \qquad \pi\, d_{02} \;=\; Z_2\, p_2$$

$$d_{01} \;=\; Z_1\, \frac{p_1}{\pi} \qquad d_{02} \;=\; Z_2\, \frac{p_2}{\pi}$$

- Le pas primitif doit être le même sur les deux roues

$$p_1 \;=\; p_2 \;=\; p$$

- Le module métrique (en mm) est le rapport

$$\boxed{m \;=\; \frac{p}{\pi}}$$

MODULE METRIQUE

- Le module métrique *m* est très commode pour le calcul.

- Le module métrique est à la base de la normalisation des engrenages en Europe continentale

Tableau LII

Module métrique m, pas primitif p et pas de base p_b

Modules 0,5 à 1,5			Modules 2 à 6			Modules 8 à 25		
m	p	p_b	m	p	p_b	m	p	p_b
0,5	1,570 796	1,476 066	2	6,283 185	5,904 263	8	25,132 74	23,617 05
0,6	1,884 956	1,771 279	2,5	7,853 982	7,380 329	10	31,415 93	29,521 31
0,8	2,513 274	2,361 705	3	9,424 778	8,856 394	12	37,699 11	35,425 58
		2,952 131						
1	3,141 593		4	12,566 371	11,808 526	16	50,265 48	47,234 10
1,25	3,926 991	3,690 164	5	15,707 963	14,760 657	20	62,831 85	59,042 63
1,5	4,712 389	4,428 197	6	18,849 556	17,712 789	25	78,539 82	73,803 29

MODULE METRIQUE

- Les diamètres primitifs des roues cylindriques à dentures droites sont calculés par les relations

$$d_{01} = Z_1 \, m \quad d_{02} = Z_2 \, m$$

- Il vient aussi que le rapport de réduction s'écrit aussi

$$i = \frac{Z_2}{Z_1}$$

- Et l'entre-axe:

$$a_0 = \frac{d_{02} \pm d_{01}}{2} = m \, \frac{Z_2 \pm Z_1}{2}$$

DIAMETRE DE PITCH

- Dans les pays anglo-saxons, où on utilise les mesures anglaises, on utilise le diametral pitch (pas diamétral) Pd

$$Pd = \frac{Z}{d'} \qquad [\mathrm{d'}] = \mathrm{inch}$$

- Soit encore

$$Pd = \frac{1}{m'} \qquad [\mathrm{m'}] = \mathrm{inch}$$

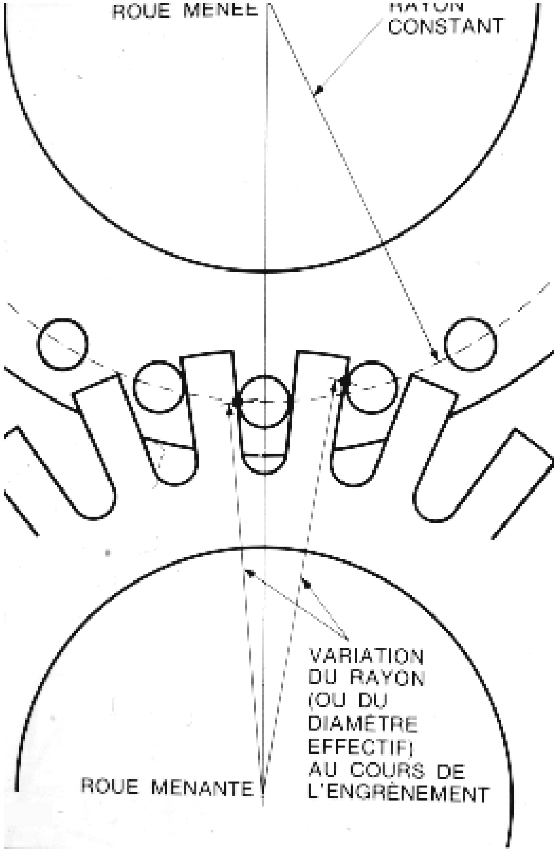
- En incluant le module métrique m:

$$Pd = \frac{25.4\mathrm{mm}}{m} \qquad [\mathrm{m}] = \mathrm{mm}$$

CINEMATIQUE DE L'ENGRENAGE

FORME DE LA DENT

- Pour avoir un rapport de réduction constant avec le temps, il faut que les dents possèdent un profil particulier, conjugué l'un part rapport à l'autre.
- Par exemple les dents en forme de peigne donnent lieu à des fluctuations de la vitesse instantanée. Ce n'est donc pas un bon profil.



CINEMATIQUE DE L'ENGRENEMENT

- Pour que l'on ait une paire engrenages, il faut que la transformation soit homocinétique:

- 1/ Il faut que le rapport des vitesses angulaires soit constant et égal au rapport d'engrenage ou encore des diamètres

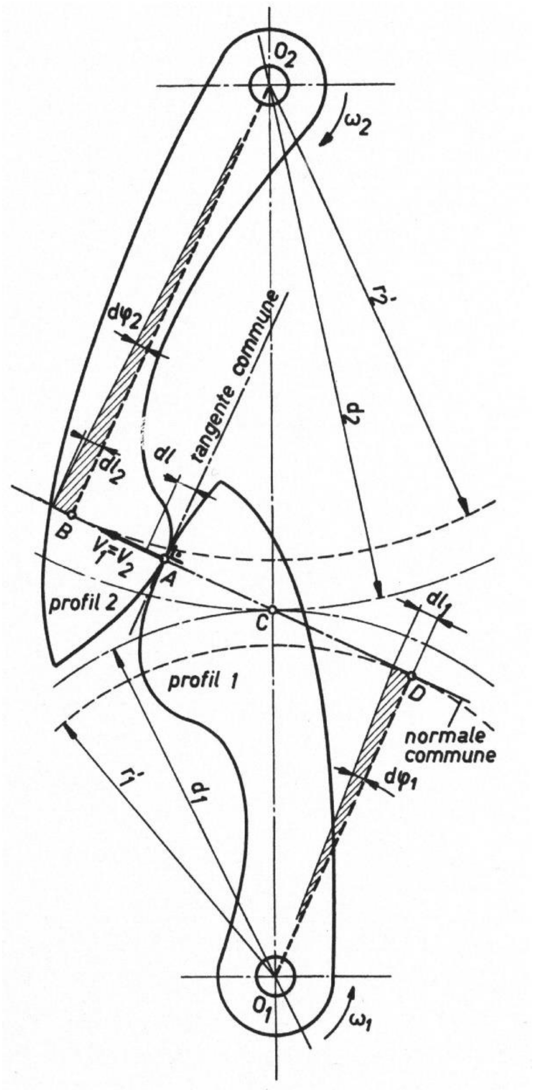
- 2/ Le contact entre les dents successives ne doit pas subir d'interruption

  – Pour qu'il y ait transmission du mouvement du pignon 1 à la roue 2, les profils des dents doivent rester constamment en contact.

CINEMATIQUE DE L'ENGRENEMENT

- Soient deux roues dentées de cercles primitifs d_{01} et d_{02} en contact au point C.

- Supposons pour simplifier que les roues 1 et 2 soient remplacées par les deux leviers centrées en O_1 et O_2.



CINEMATIQUE DE L'ENGRENEMENT

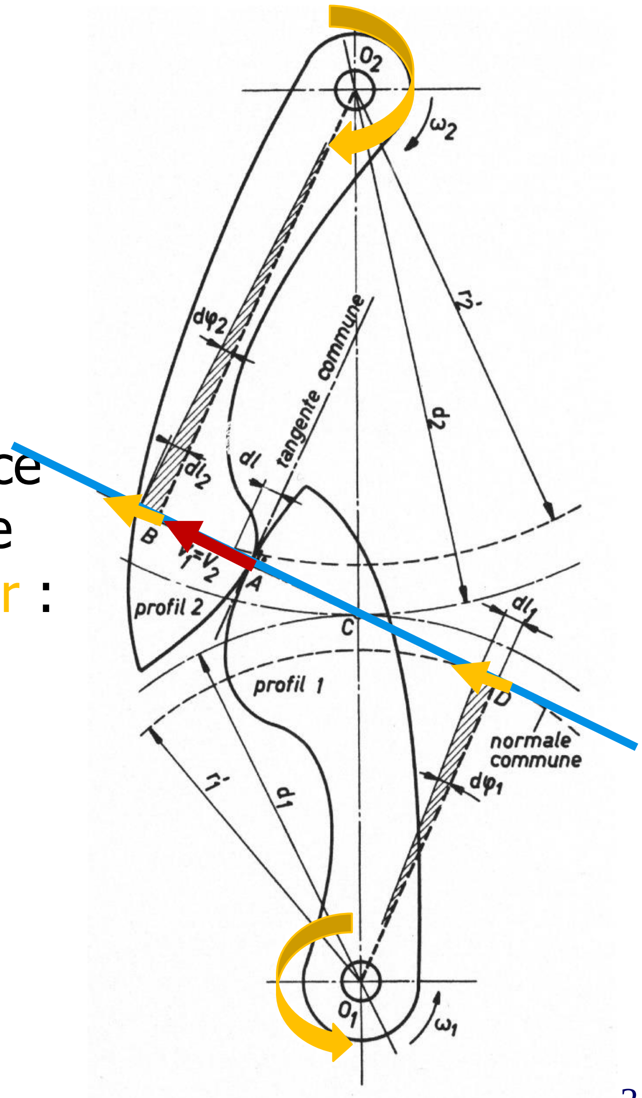
- Dans une position quelconque, par exemple au point de contact A, les vitesses selon la normale commune doivent être identiques.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

- Si le profil 1 est déplacé de la distance *dl_1* dans la direction de la normale, le profil 2 se déplace de la même valeur :

$$dl_1 = dl_2 = dl$$

- Pendant l'intervalle de temps *dt,* les deux roues doivent tourner chacune des angles élémentaires $d\phi_1$ et $d\phi_2$.



CINEMATIQUE DE L'ENGRENEMENT

- On peut écrire (au sens des déplacements virtuels)

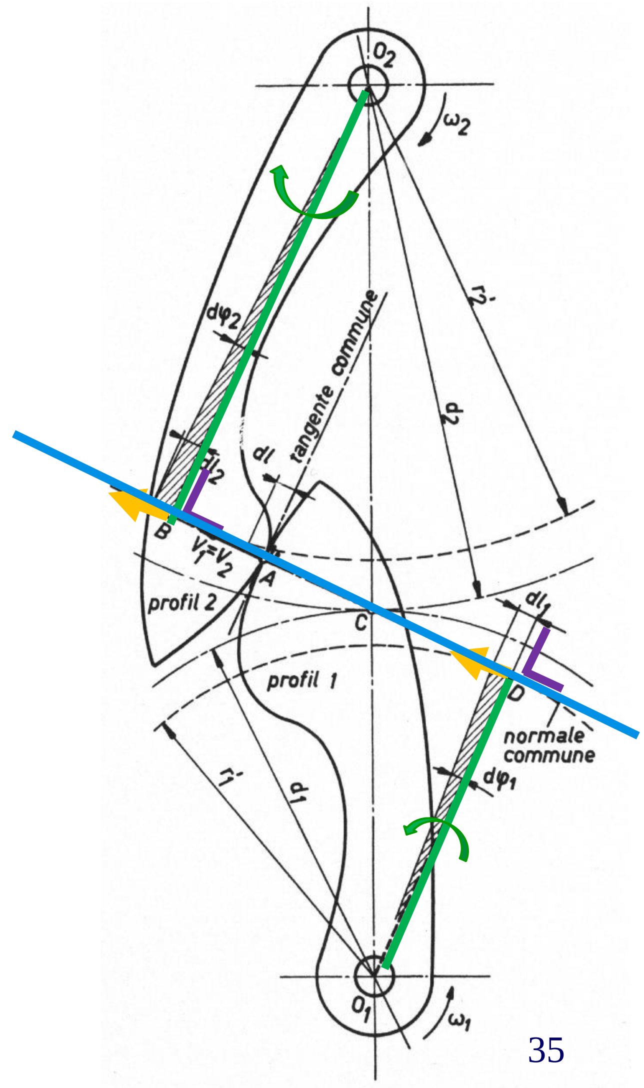
$$dl_1 \;=\; r_1'\, d\phi_1 \qquad dl_2 \;=\; r_2'\, d\phi_2$$

$$r_1'\, d\phi_1 \;=\; dl_2 \;=\; r_2'\, d\phi_2$$

- Il vient

$$\frac{r_2'}{r_1'} = \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{d\phi_1/dt}{d\phi_2/dt} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

- Pour que le rapport des vitesses angulaires ω_1/ω_2 reste constant quelle que soit la position du point de contact, il faut que le rapport r'_2 / r'_1 , rapport des distances à la perpendiculaire commune, le reste aussi.



CINEMATIQUE DE L'ENGRENEMENT

- La similitude entre les triangles O$_1$CD et O$_2$BC permet d'écrire

$$\frac{\overline{O_2B}}{\overline{O_1D}} = \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$$

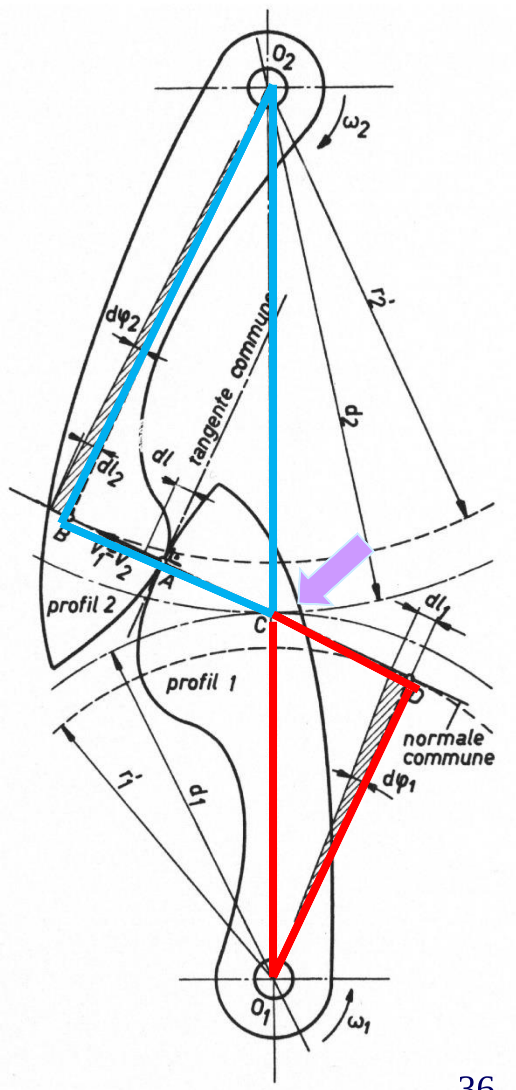
- Etant donné que

$$\overline{O_2B} = r'_2,\ \overline{O_1D} = r'_1,\ \overline{O_2C} = d_{02}/2,\ \overline{O_1C} = d_{01}/2,$$

- Il vient

$$\frac{r'_2}{r'_1} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i$$

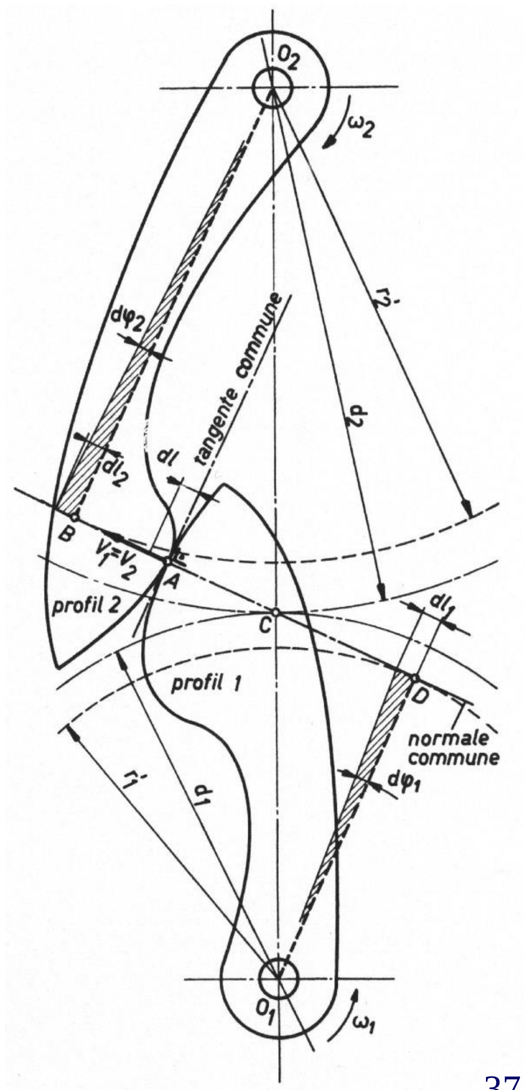
- Si la normale commune reste tangente aux cercles de rayons r'$_1$ et r'$_2$, alors le point de contact virtuel C sur l'entraxe reste constant aussi et d$_{01}$ et d$_{02}$ sont constants.



CINEMATIQUE DE L’ENGRENEMENT

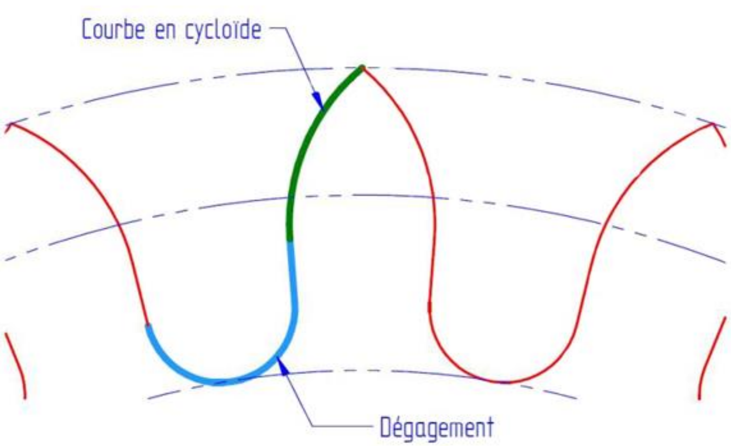
- Première loi des engrenages: La normale commune en tout point de contact de deux profils quelconques doit passer par le même point central C commun situé sur l’entraxe.

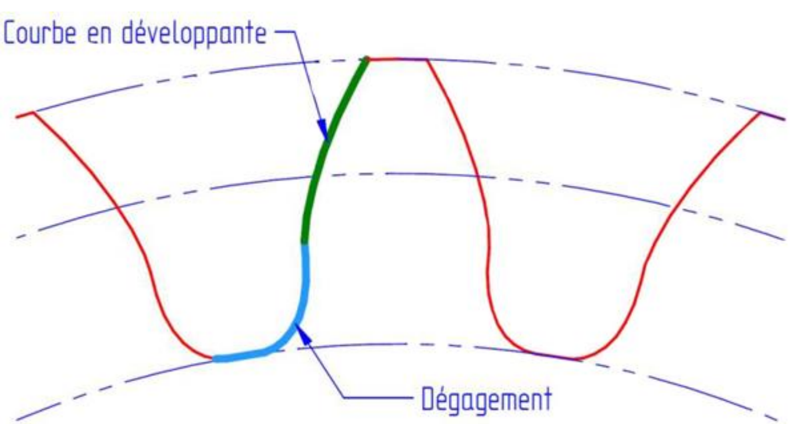
- Si l’un des profils des dents est fixé, alors le profil de l’autre roue dentée est déterminé par la loi. Ce deuxième profil se nomme le profil conjugué.



CINEMATIQUE DE L'ENGRENEMENT

- Il existe une infinité de profils conjugués qui conviennent et vérifient la loi.
- Même s'il y a un nombre infini de profils conjugués de dents, seul un petit nombre a donné lieu à des applications pratiques. Les plus connues sont les profils en forme de cycloïde utilisés en horlogerie et les profils en développante de cercle (odontoïde) qui sont utilisés en transmission de puissance.

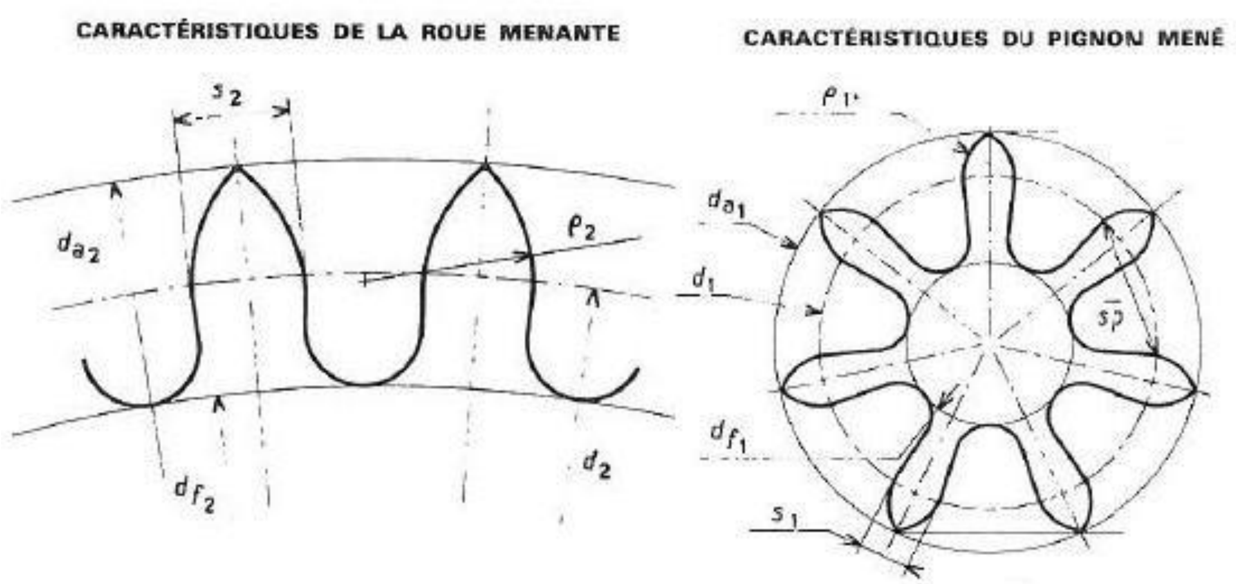




Source: https://www.louisbelet.ch/fr/news/fraise-mere-de-l-horlogerie-a-la-microtechnique.html

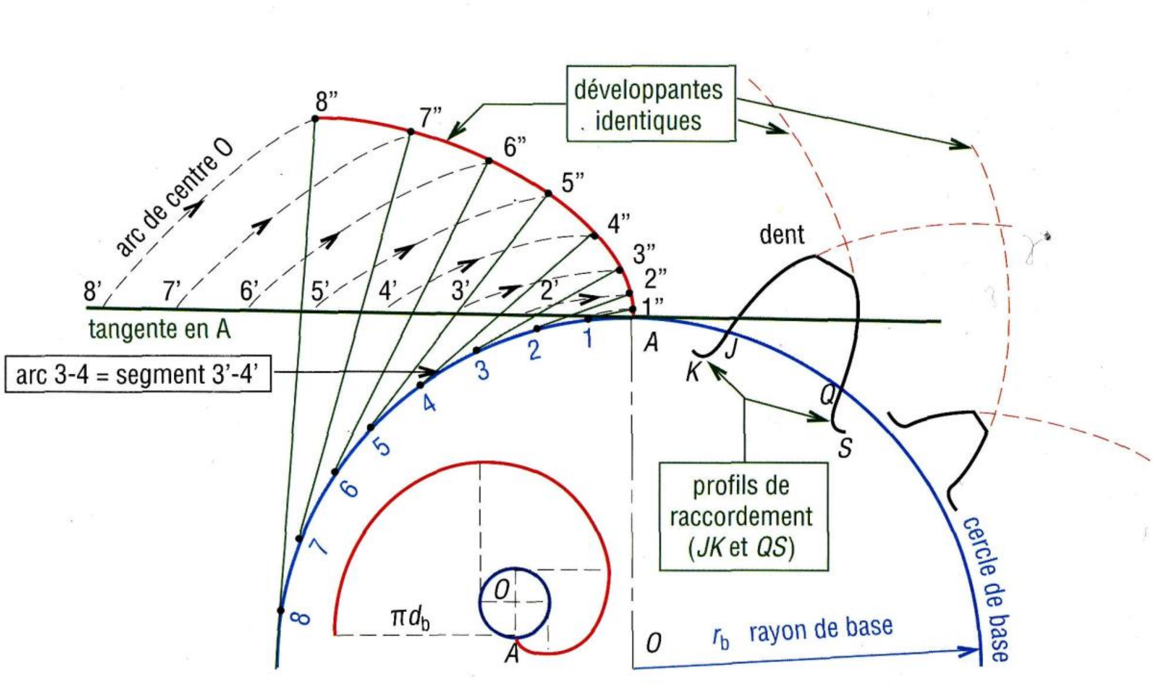
DENT AVEC PROFIL EN CYCLOIDE

- Ces dentures sont utilisées principalement en horlogerie et en micromécanique quand le train d'engrenage est multiplicateur, car il évite l'arc-boutement et le blocage. (c'est une possibilité dans le cas des engrenages en développante de cercle)



DENT A PROFIL DE DEVELOPPANTE DE CERCLE

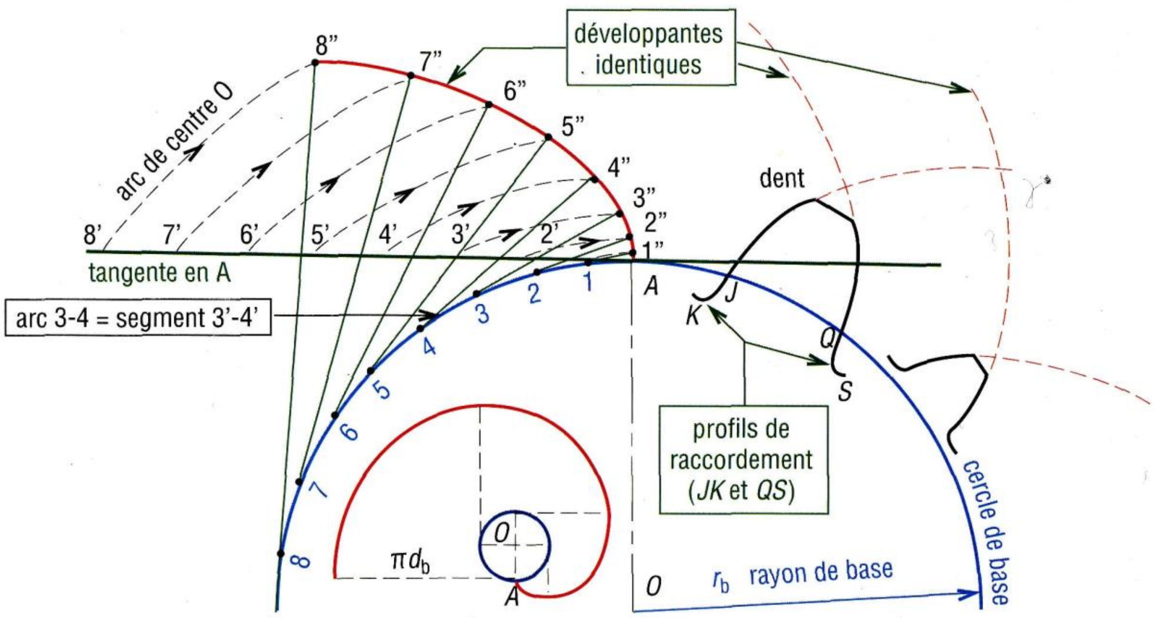
- Denture en développante de cercle, le plus souvent utilisé dans l'industrie de mécanique générale



Source: http://www.zpag.net/Machines_Simples/engrenage_droit_dent_droit.htm

DENT EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

- On appelle développante de cercle la courbe décrite par un point d'une droite (ou une corde) qui roule sans glisser sur la circonférence d'un cercle.



- La circonférence porte le nom de cercle de base.

DENT EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

EQUATION DE L'ODONTOÏDE:

- On l'étude en coordonnées polaires (r, ϕ)
- La corde roule sans glisser. La longueur de l'arc est celle de la corde

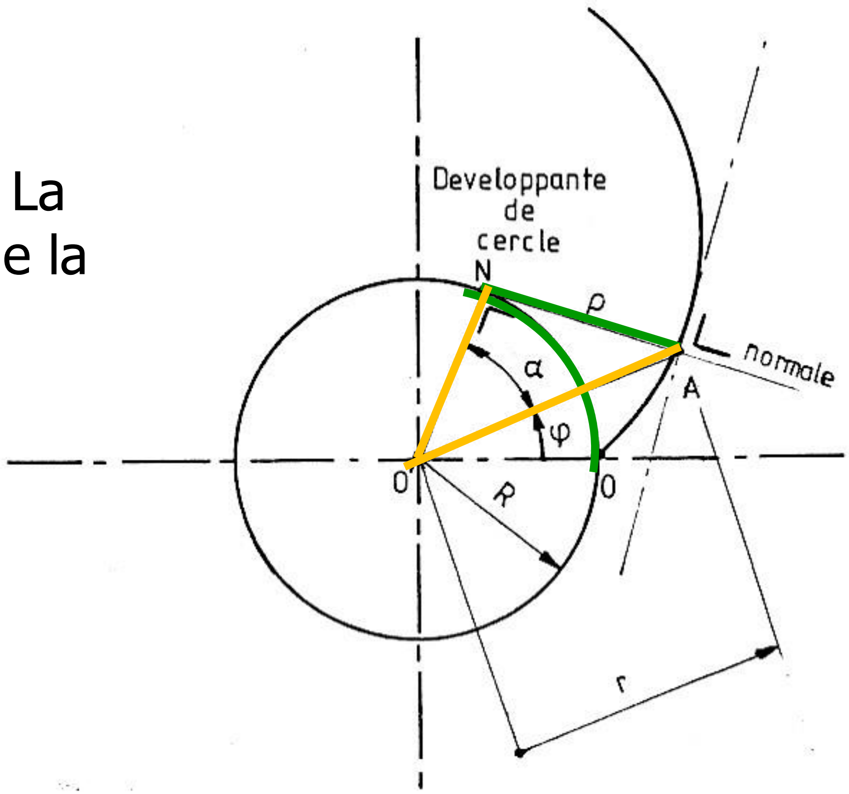
$$R\,(\alpha + \phi) \;=\; R\;\mathrm{tg}(\alpha)$$

$$\phi \;=\; \mathrm{tg}\,\alpha \;-\; \alpha \;=\; \mathrm{inv}(\alpha)$$

- En outre

$$r\;\cos\alpha \;=\; R$$

$$r \;=\; \frac{R}{\cos\alpha}$$



DENT EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

Méthode numérique pour calculer la développante de cercle

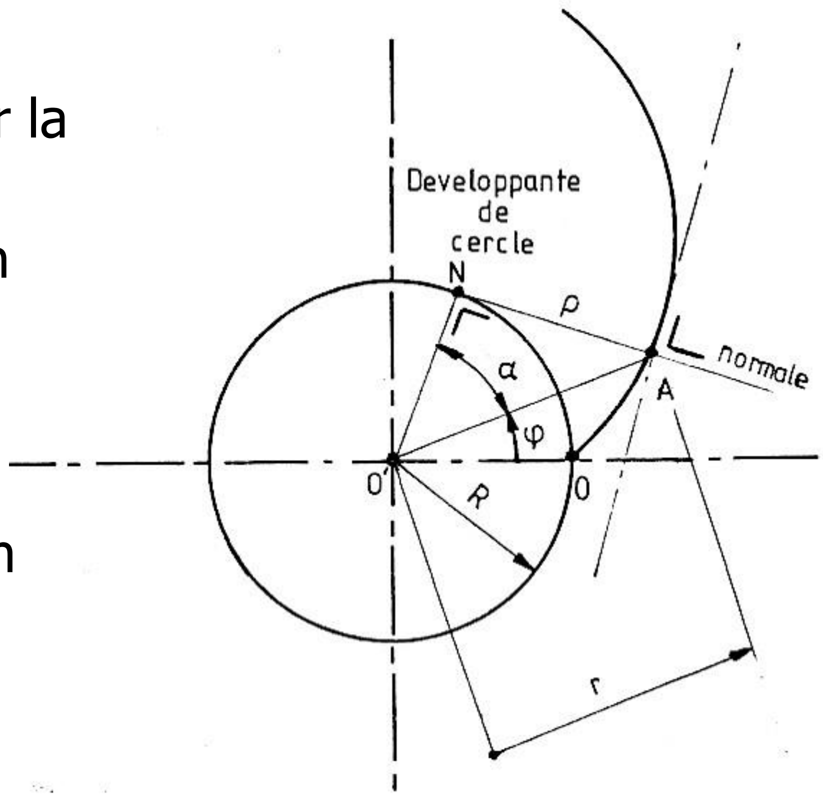
- 1/ A un angle ϕ correspond un angle α:

$$\phi = \mathrm{tg}\,\alpha - \alpha = \mathrm{inv}(\alpha)$$

- 2/ A un angle α correspond un rayon r:

$$r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

- 3/ La zone retenue sera limitée par le pied et la tête de dent

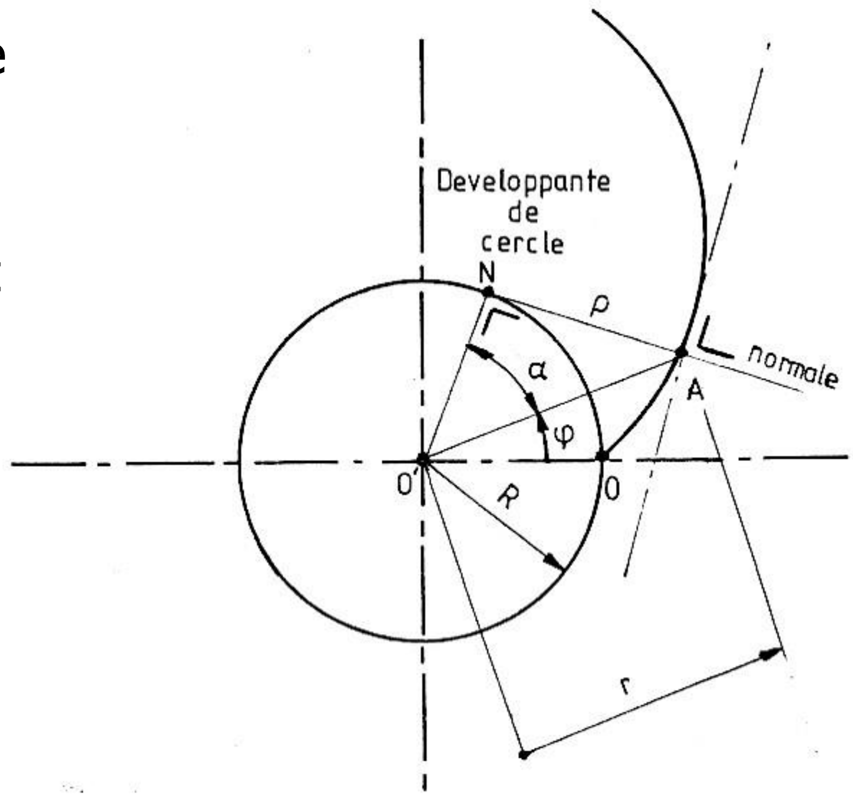


PROPRIÉTÉS DE LA DÉVELOPPANTE

- La tangente à la développante ne coupe pas le profil de la dent

- La normale à la développante est toujours tangente au cercle de base

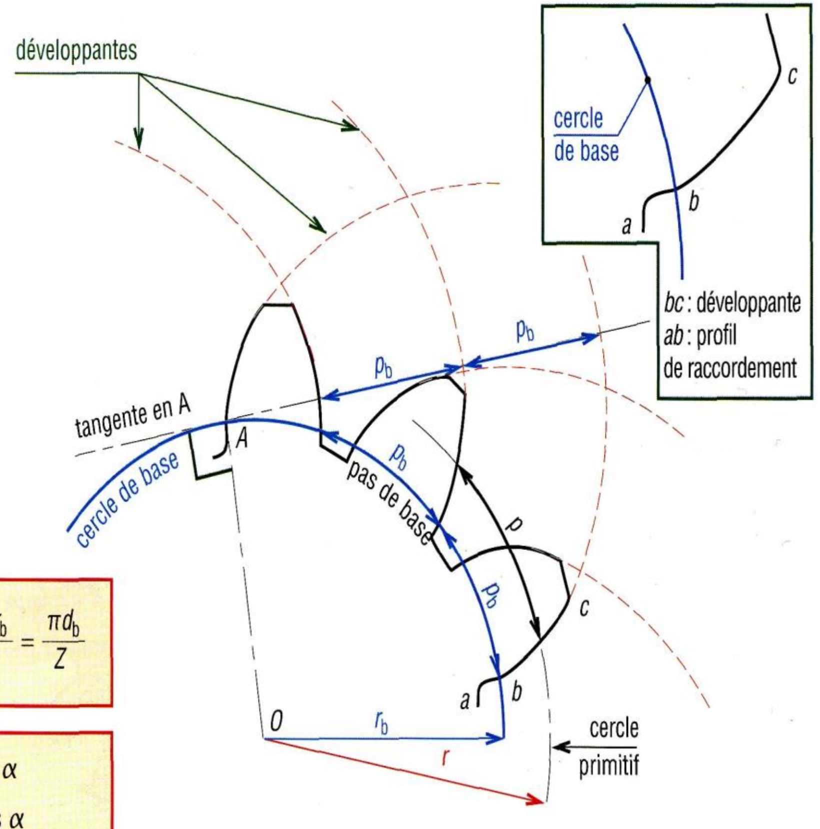
- Le rayon de courbure ρ en un point quelconque de la développante a son centre sur le cercle de base



- L'angle α est appelé angle de pression ou angle d'incidence: il varie en tout point de la développante

PROPRIÉTÉS DE LA DÉVELOPPANTE

- Deux développantes de cercle de base sont équidistantes en tout point (distance mesurée sur le cercle de base)



$$p_b = \frac{2\pi r_b}{Z} = \frac{\pi d_b}{Z}$$

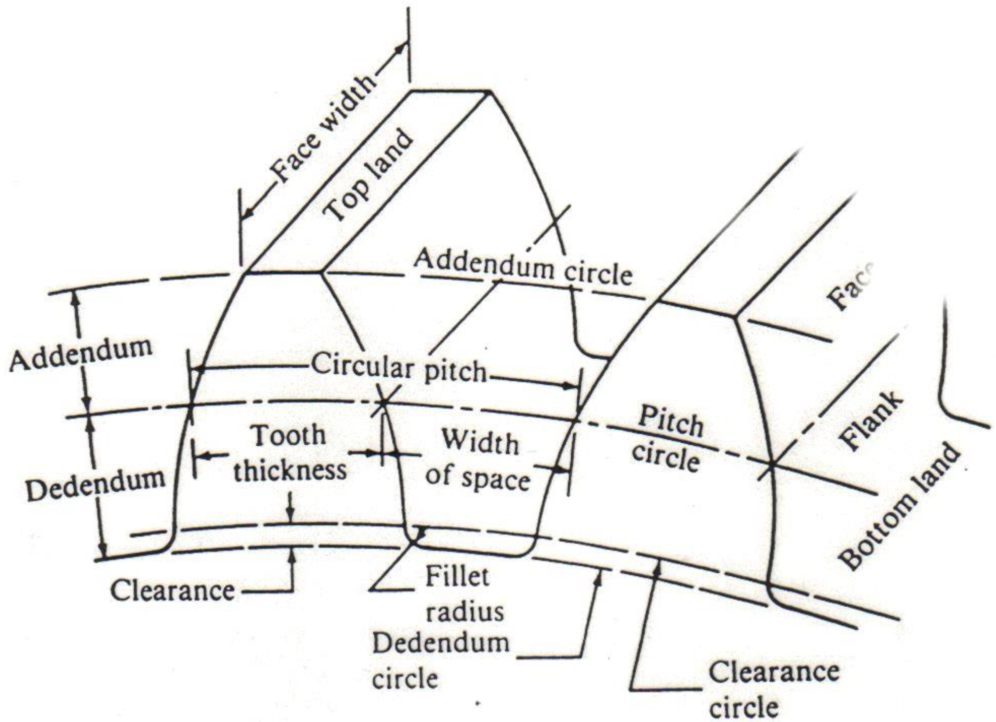
$$r_b = r \cos \alpha$$

$$p_b = p \cos \alpha$$

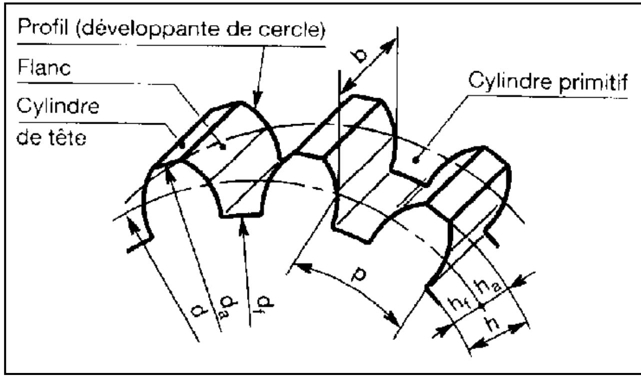
GEOMETRIE DE L'ENGRENAGE

DIMENSIONS

- Dans la norme ISO, on exprime les dimensions de la dent en fonction du module m



DIMENSIONS



- 's' l'épaisseur au niveau du diamètre primitif = 'e' largeur du creux correspondant entre deux dents (sinon l'engrènement n'est pas possible)

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi\, d_0}{2\, Z} = \frac{\pi\, m}{2} == 1,5708\, m$$

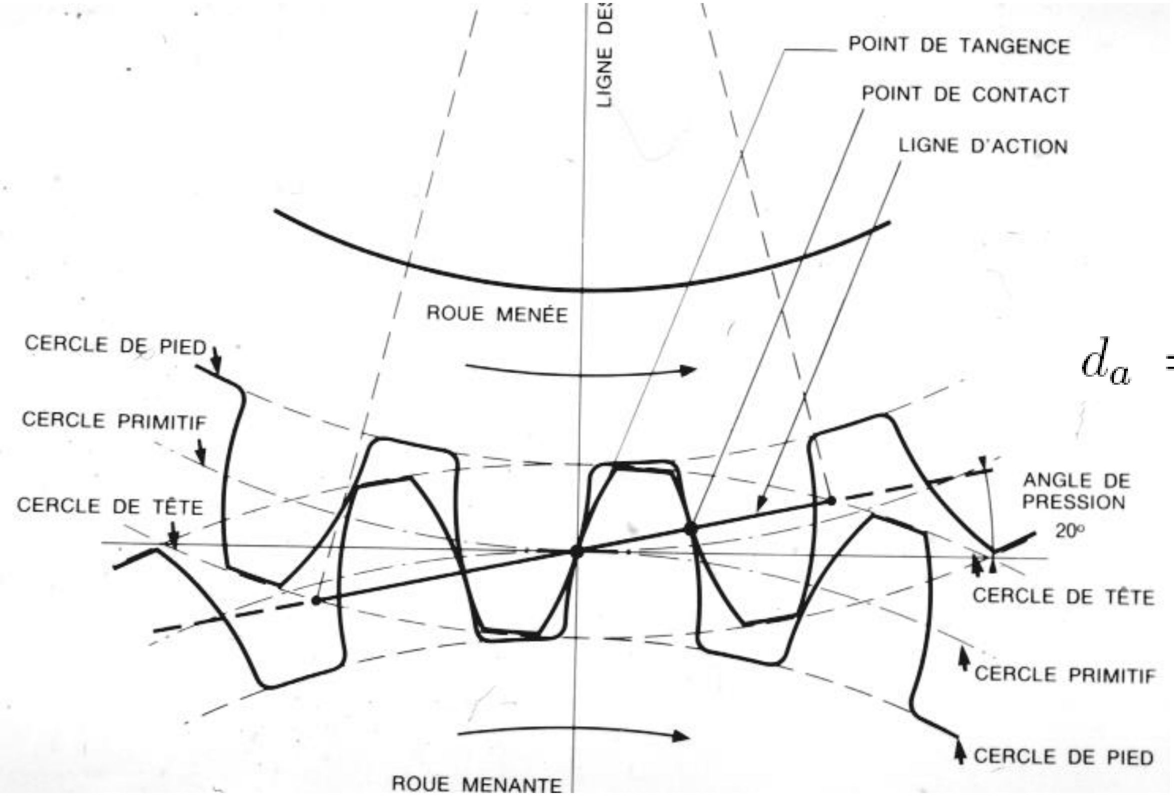
- Addendum h_a hauteur de la dent normale mesurée par rapport au cercle primitif (saillie)

$$h_a = m\, w_{0a} \qquad w_{0a} = 1,00 \text{ (ISO)}$$

- Dédendum h_f : profondeur du creux entre dents normales, mesurées par rapport au cercle primitif

$$h_f = m\, w_{0f} \qquad w_{0f} = 1,25 \text{ (ISO)}$$

DIMENSIONS



Diamètre de tête :

$$d_a = d_0 + 2\,h_a = d_0 + 2,00\,m$$

$$r_{\max} = d_a/2$$

Diamètre de pied :

$$d_f = d_0 - 2\,h_f = d_0 - 2,50\,m$$

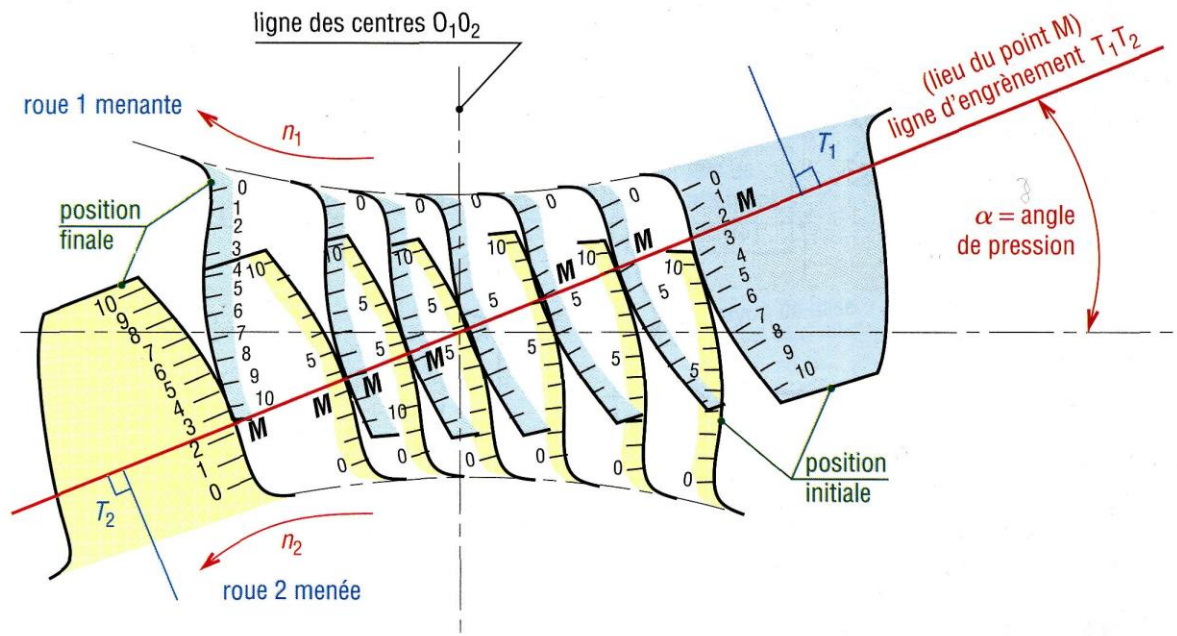
$$r_{\min} = d_f/2$$

$$r_{\min} > d_f/2 \qquad d_f/2 < R_b$$

Forces de contact
Angle de pression

FORCE ET ANGLE DE PRESSION

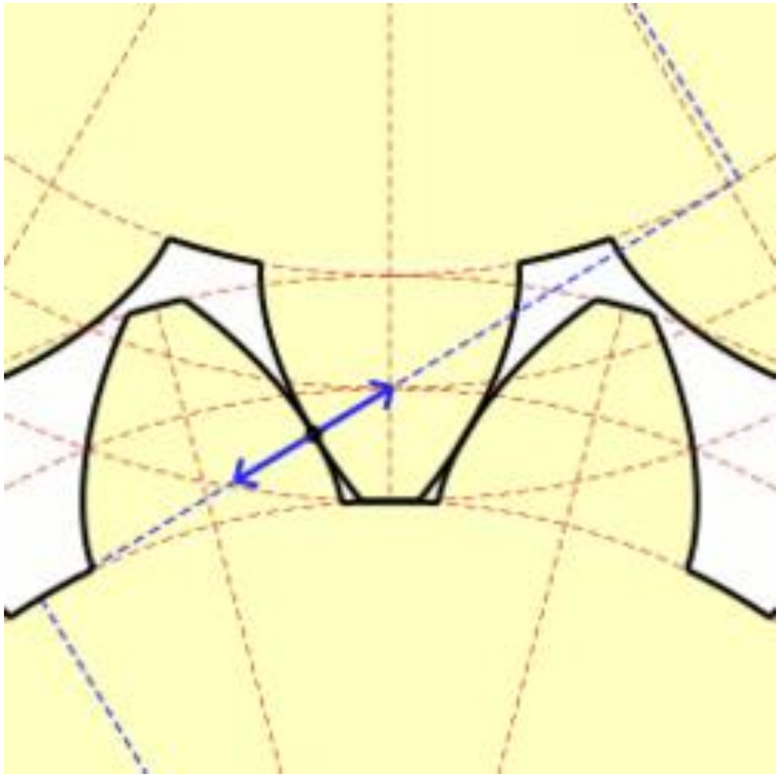
- L'examen du profil de deux roues en contact montre que les points de contact sont toujours situés sur une droite, la ligne d'action, inclinée par rapport à la tangente commune aux cylindres primitifs.



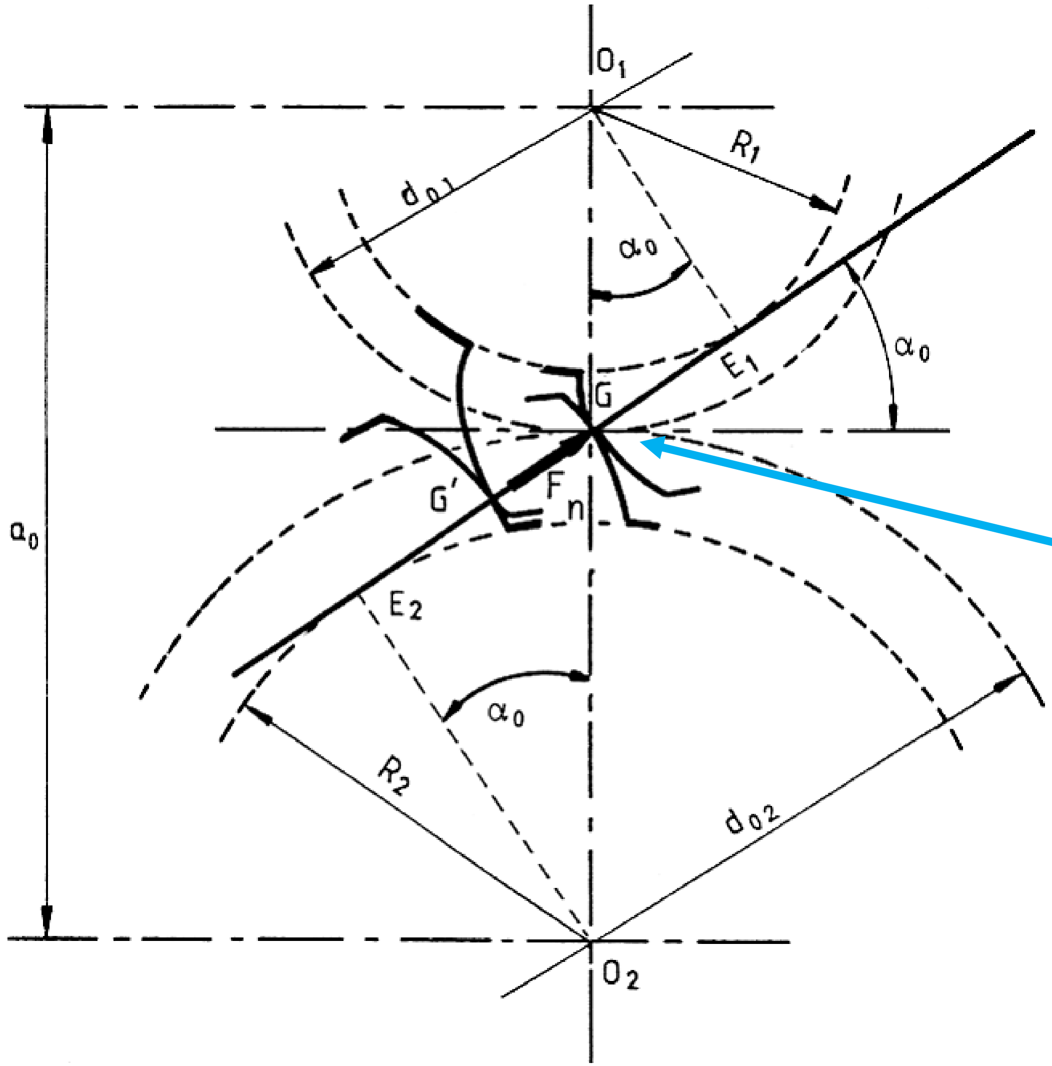
M : point de contact entre les deux dents

FORCE ET ANGLE DE PRESSION

- L'examen du profil de deux roues en contact montre que les points de contact sont toujours situés sur une droite, la ligne d'action, inclinée par rapport à la tangente commune aux cylindres primitifs.



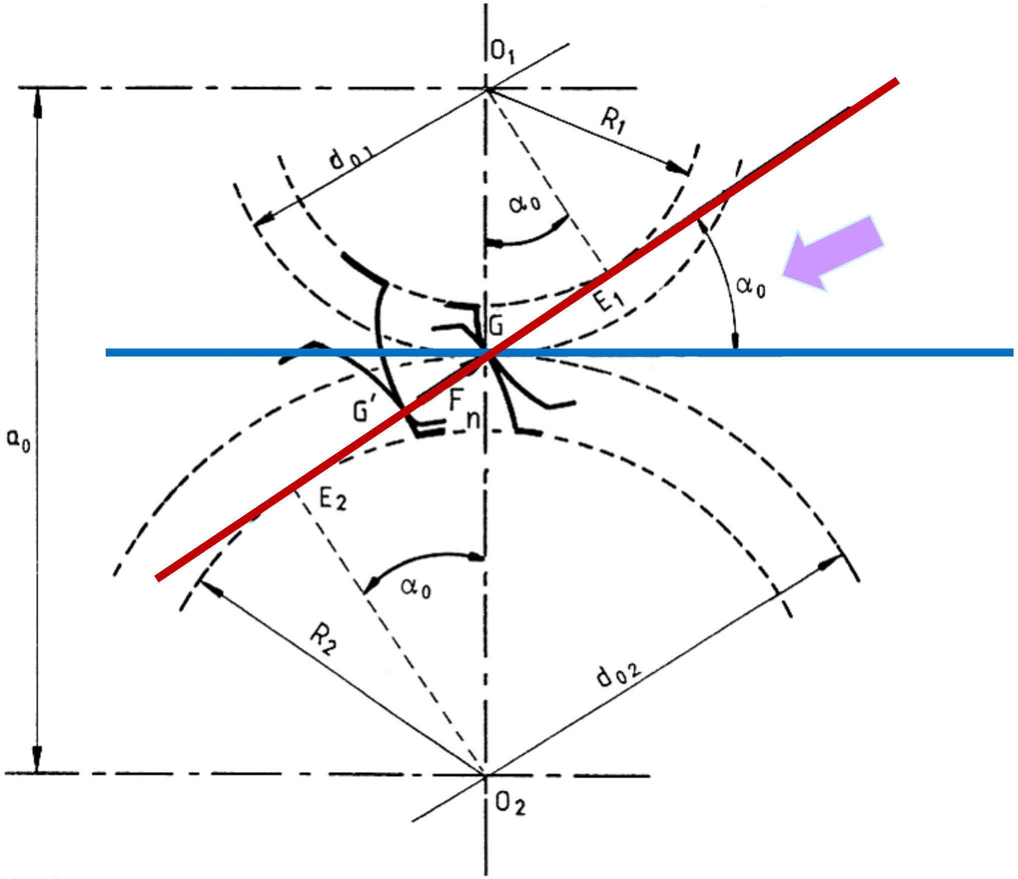
FORCE ET ANGLE DE PRESSION



- Dans les dentures en développante de cercle, la normale commune aux deux dentures est aussi la tangente aux deux cercles de base.
- La normale commune passe par le point de contact (pitch point) des deux cercles primitifs quel que soit le point où le contact physique a lieu.

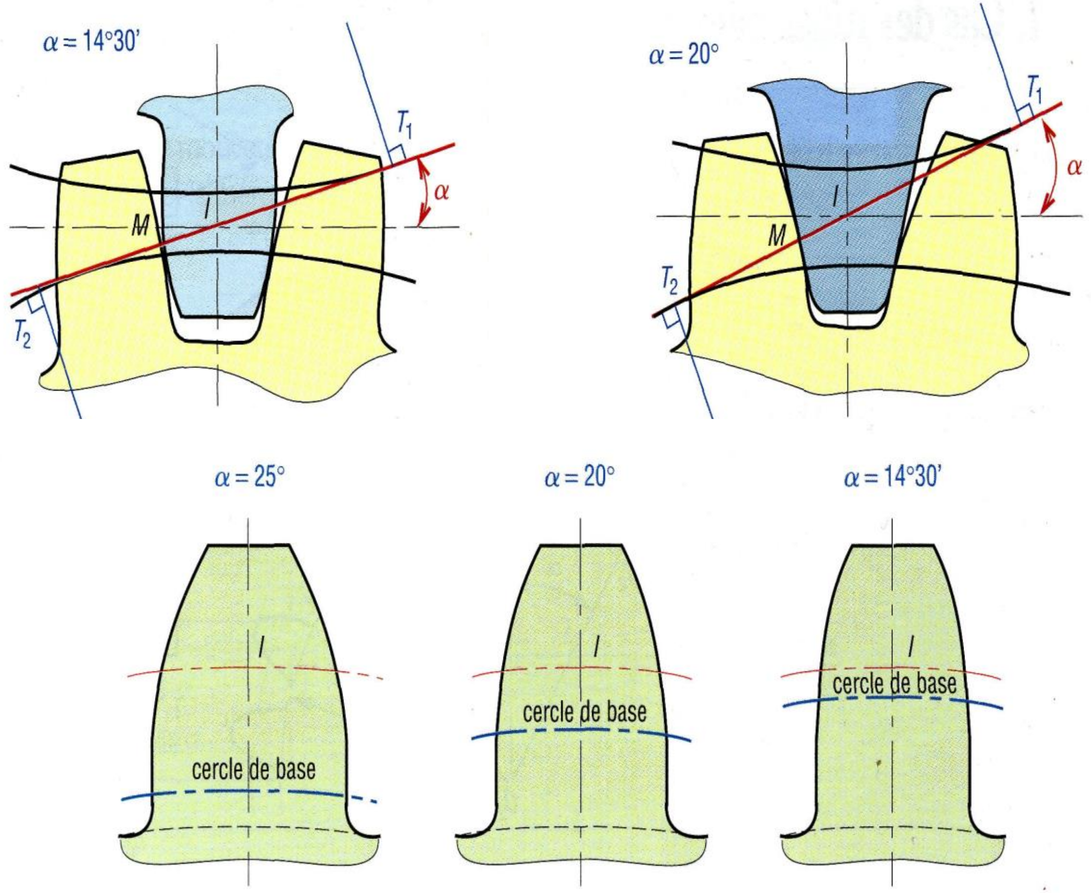
FORCE ET ANGLE DE PRESSION

- L’angle entre la ligne d’action de la force de contact et le vecteur vitesse, tangent au cercle primitif est appelé angle de pression α_0



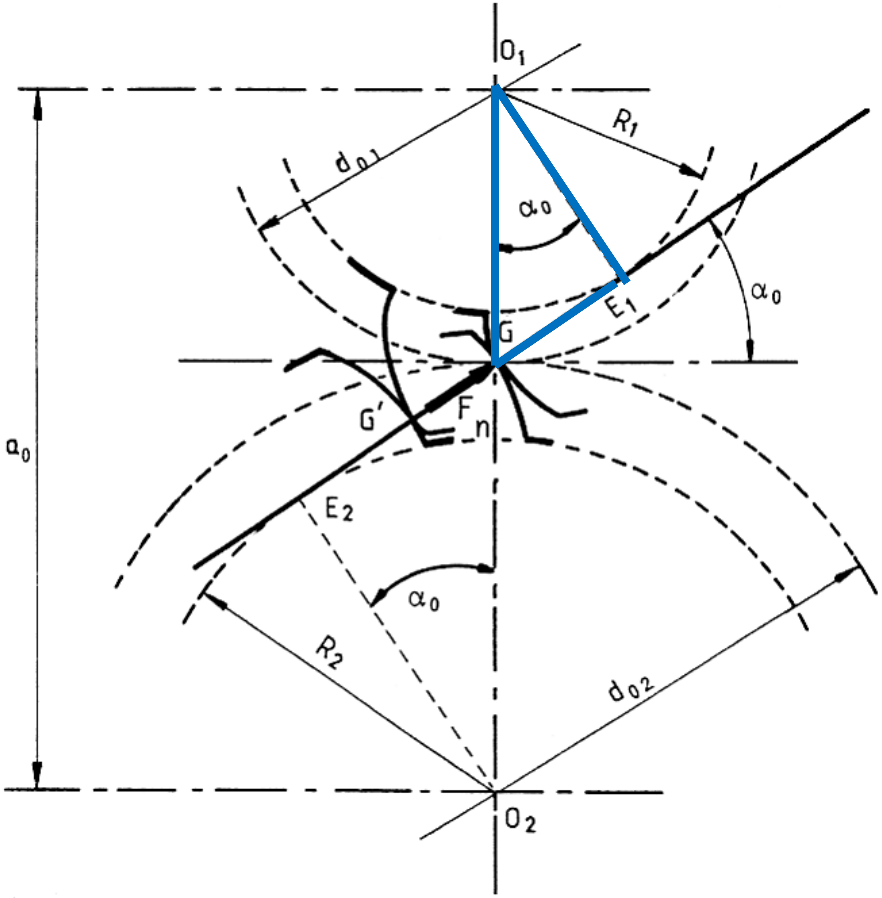
FORCE ET ANGLE DE PRESSION

- Les angles de pression α_0 sont normalisés et peuvent prendre un petit nombre de valeurs: 14,5 ° (rare), 20° (le plus courant), 25°



FORCE ET ANGLE DE PRESSION

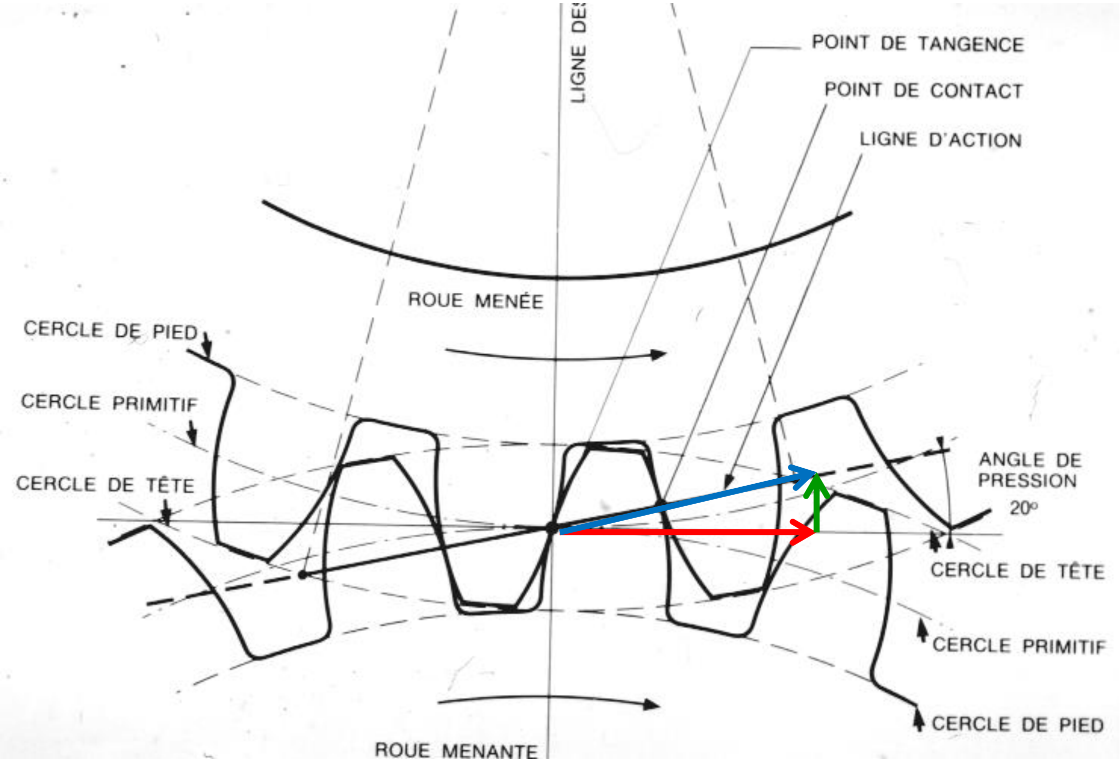
- L’angle de pression permet encore d’écrire la relation entre le rayon du cercle primitif et le rayon du cercle de base:



$$\boxed{\frac{d_{0i}}{2}\cos\alpha_0 = R_i}$$

FORCE ET ANGLE DE PRESSION

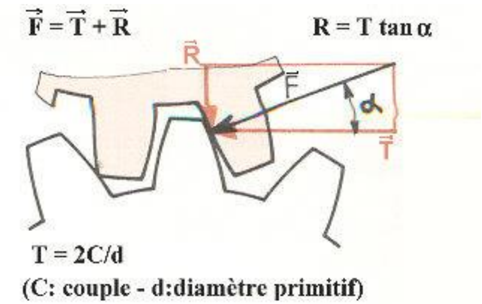
- L'existence de l'angle de pression α_0 entraîne l'apparition de forces radiales et tangentielles dont la composition vectorielle donne F_n réellement transmise de dent à dent.



FORCE ET ANGLE DE PRESSION

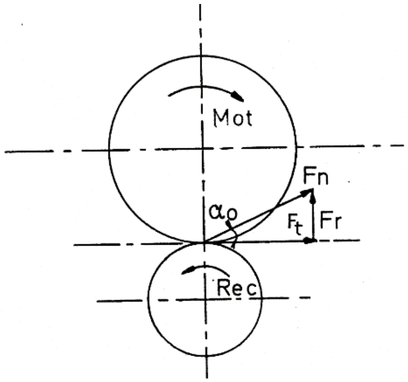
- L’existence de l’angle de pression α_0 entraîne l’apparition de forces radiales F_r et tangentielles F_t dont la composition donne la force de pression transmise de dent à dent

$$
\begin{aligned}
F_t &= F_n \cos \alpha_0 \\
F_r &= F_n \sin \alpha_0 \\
F_r &= F_t \,\mathrm{tg}\, \alpha_0
\end{aligned}
$$



- En réalité c’est la force tangentielle qui est donnée car elle est calculée par la puissance transmise

$$F_t \frac{d_{0i}}{2} \omega_i = \mathcal{P}$$



- Et puis on calcule la force radiale

$$F_r = F_t \,\mathrm{tg}\, \alpha_0$$

Déport de denture

DEPORT DE DENTURE

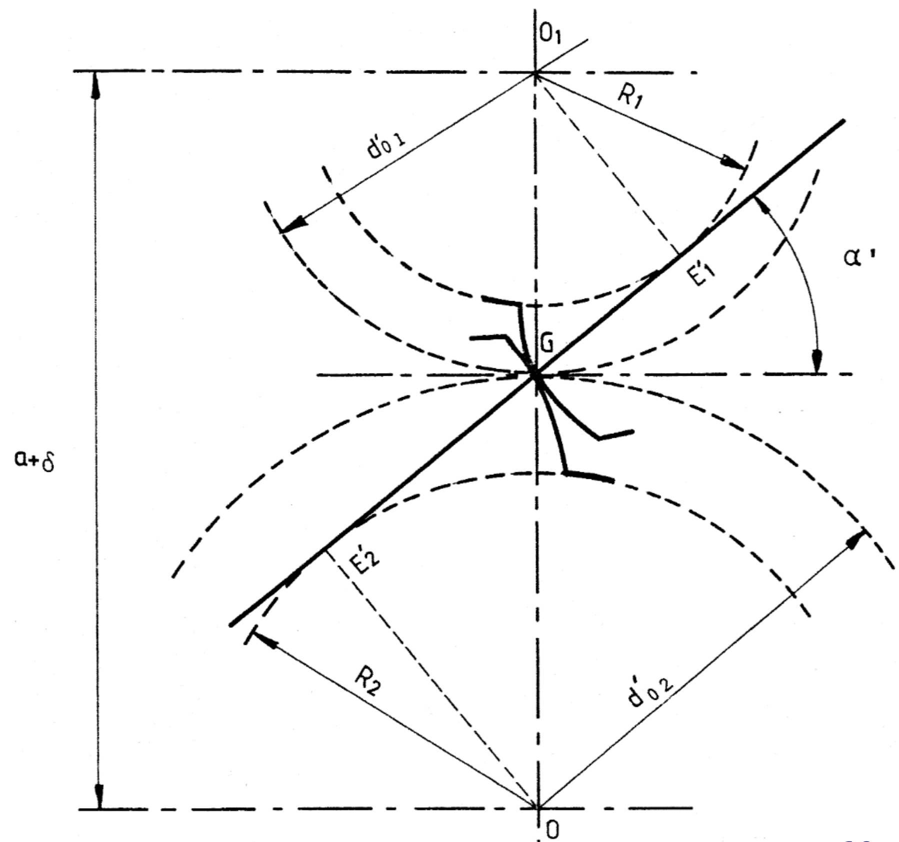
- Le déport de denture consiste à modifier l'entre axe en maintenant les cercles de base identiques

- Soit δ l'accroissement d'entre axe

$$a' = a_0 + \delta$$

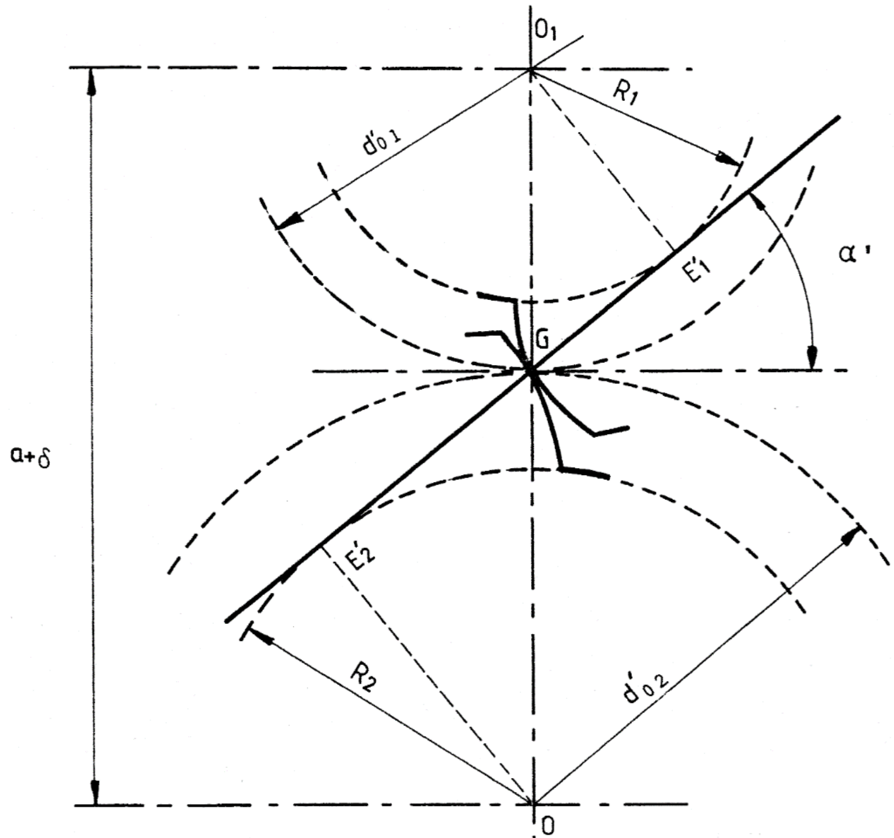
- Les diamètres primitifs et les angles de pression s'en trouvent modifiés.
- L'angle de pression est augmenté avec l'entre axe

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha_0}{1 + \frac{\delta}{a_0}}$$



DEPORT DE DENTURE

- A force normale constante, l'augmentation de l'angle de pression α' entraîne une diminution de F_t mais surtout une augmentation de F_r

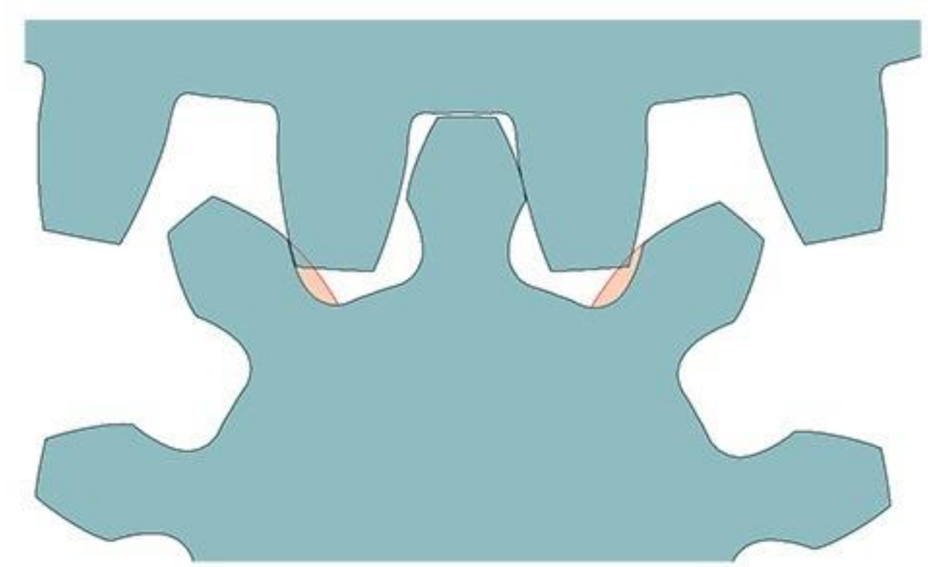


$$F'_r = F_n \sin\alpha' > F_r$$
$$F'_t = F_n \cos\alpha' < F_t$$

Interférence de denture

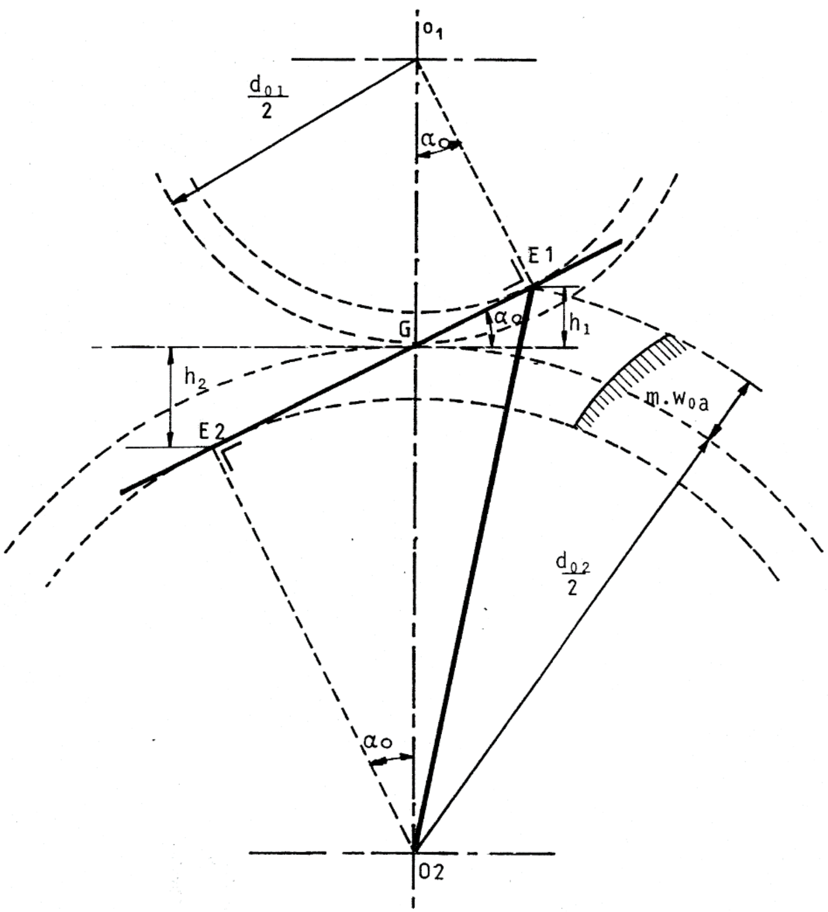
INTERFERENCE DE DENTURE

- L'interférence de denture survient lorsqu'on a contact entre la tête de la dent et la dent antagoniste en un point situé à l'intérieur du cercle de base



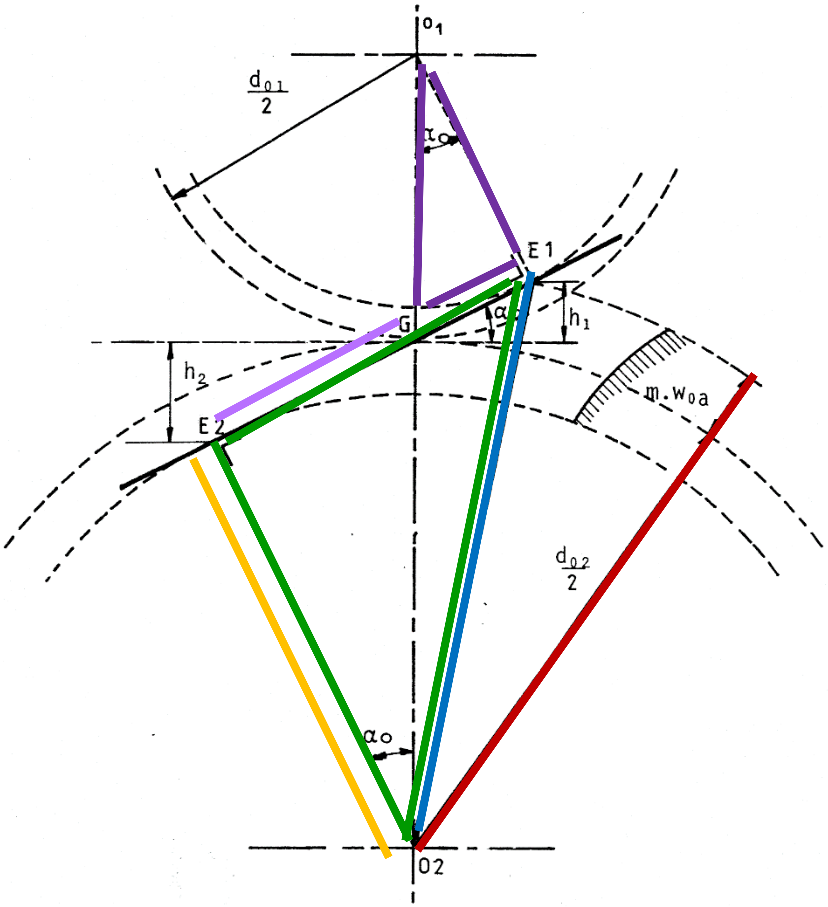
- Etant donné que la distance qui sépare le point de tangence des cercles primitifs et la tête de dent est plus petite du côté pignon, l'interférence survient en premier lieu sur la petite roue.

INTERFERENCE DE DENTURE



- Lors de l’engrènement, le contact entre dentures suit la ligne d’action (E_1E_2) tangente commune aux cercles de base, inclinée de l’angle de pression (α) par rapport à la tangente commune aux deux cercles primitifs qui sont en contact au point G.
- Lorsque le nombre de dents du pignon devient faible, on s’aperçoit que le cercle de tête de la roue sort de la ligne d’action. Il se produit alors une interférence d’engrènement.

INTERFERENCE DE DENTURE



- Exprimons la condition pour ne pas avoir de contact en dehors de la ligne d'action E_1E_2:

$$\boxed{\frac{d_{a2}}{2} = \frac{d_{02}}{2} + m} < \boxed{O_2E_1}$$

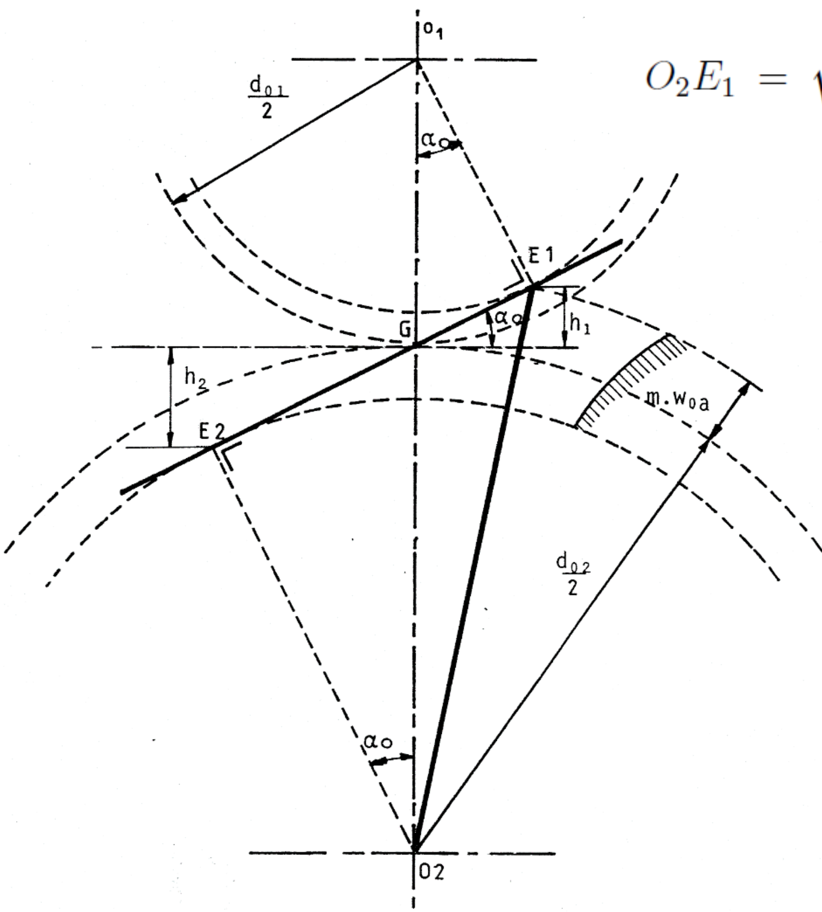
- Calculons cette condition

$$O_2E_1 = \sqrt{O_2E_2^2 + E_1E_2^2}$$

$$O_2E_2 = R_2 = \frac{d_{02}}{2}\cos\alpha_0$$

$$E_1E_2 = \frac{d_{01}}{2}\sin\alpha_0 + \frac{d_{02}}{2}\sin\alpha_0$$

INTERFERENCE DE DENTURE



- Il vient

$$O_2E_1 = \sqrt{\frac{d_{02}^2}{4}\cos^2\alpha_0 + \frac{d_{01}^2}{4}\sin^2\alpha_0 + \frac{d_{02}^2}{4}\sin^2\alpha_0 + \frac{d_{01}\,d_{02}}{2}\sin^2\alpha_0}$$

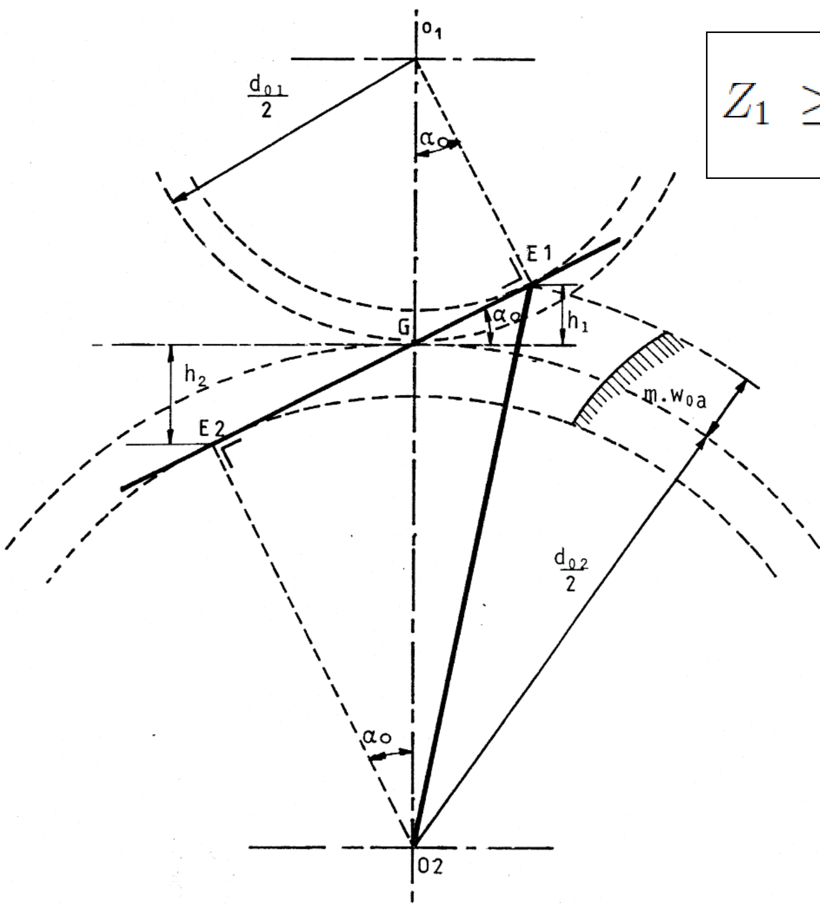
- La condition s'écrit

$$\frac{d_{02}}{2} + m \leq \sqrt{\frac{d_{02}^2}{4} + \left(\frac{d_{01}^2}{4} + \frac{d_{01}\,d_{02}}{2}\right)\sin^2\alpha_0}$$

- En introduisant le rapport de réduction $i=d_{02}/d_{01}$, le module $m=d_{01}/Z_1$, on trouve

$$i + \frac{2}{Z_1} \leq \sqrt{i^2 + (1+2i)\sin^2\alpha_0}$$

INTERFERENCE DE DENTURE



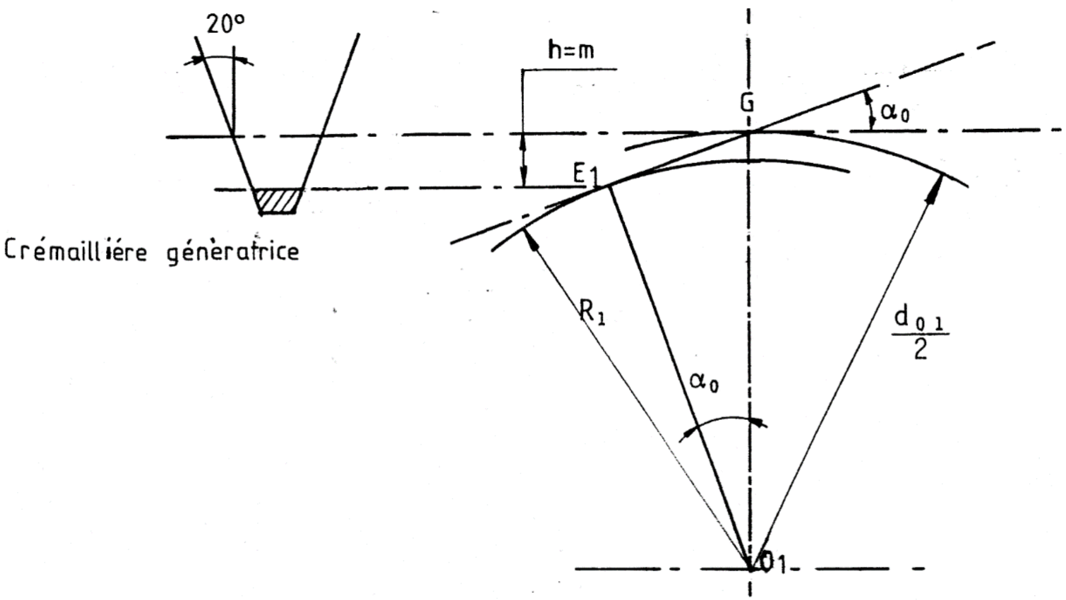
- Après un peu d'algèbre, il vient

$$\boxed{Z_1 \geq \frac{2}{(1+2i)\sin^2\alpha_0}\left(i + \sqrt{i^2 + (1+2i)\sin^2\alpha_0}\right)}$$

- Il s'en suit qu'à une valeur de i correspond une valeur de Z_1, nombre de dents en dessous duquel on a interférence de denture.
- Pour les dimensions normalisées de la dent et un angle de pression α=20°,

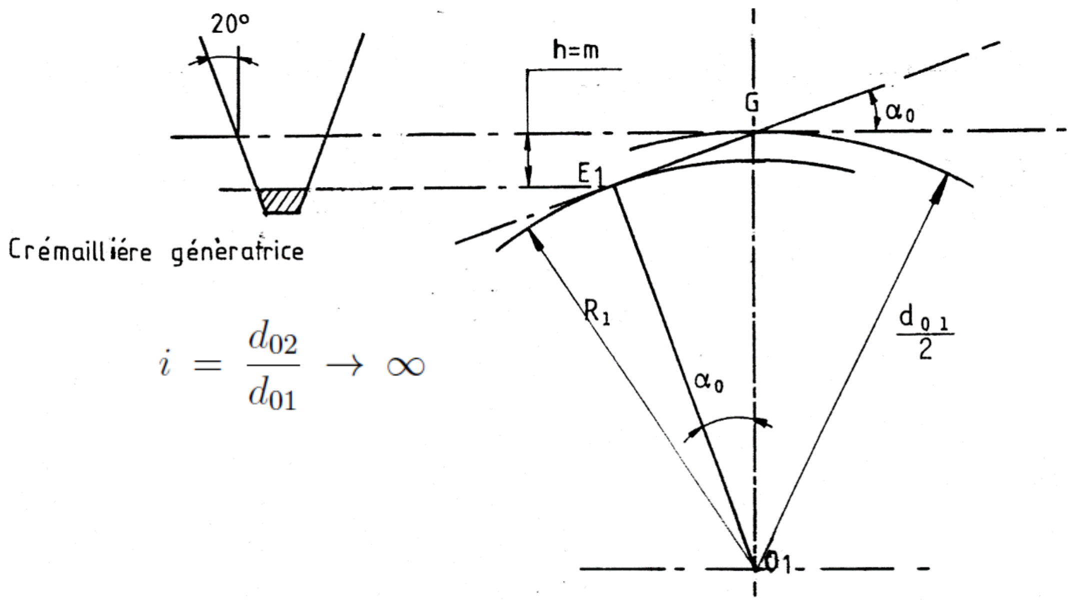
$$Z_1 \geq 12,32 \quad \text{soit} \quad Z_1 \geq 13 \quad \text{pour} \quad i = 1$$

INTERFERENCE DE TAILLE



- A côté de l'interférence de denture qui survient lors de l'engrènement des roues dentées, on peut avoir également interférence lors de la génération et de la taille de l'engrenage par une crémaillère.
- On parle alors d'interférence de taille.

INTERFERENCE DE TAILLE



$$i = \frac{d_{02}}{d_{01}} \rightarrow \infty$$

- La crémaillère correspond à un cercle de rayon infini et donc aussi d'un nombre infini de dents.

$$\lim_{i\to\infty} Z_1 = \frac{2}{(1+2i)\sin^2\alpha_0}\left(i + \sqrt{i^2 + (1+2i)\sin^2\alpha_0}\right) = \frac{2}{\sin^2\alpha_0} = 17,09$$

- En pratique on va jusque 14 dents (interférence limitée)

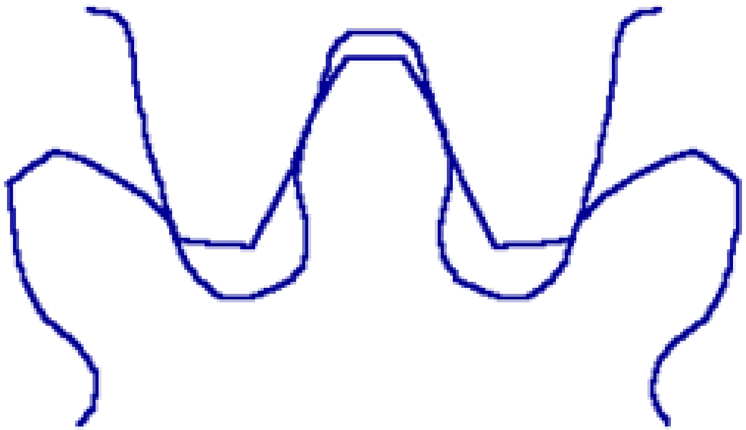
INTERFERENCE DE DENTURE / DE TAILLE

RESUME

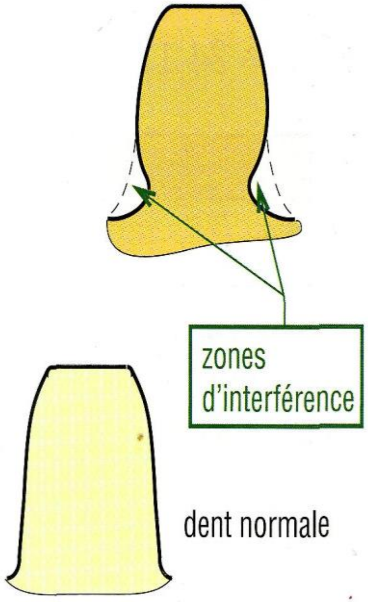
- Ce phénomène dépend de l'angle de pression (α). Pour un angle de 20°, l'interférence de taille apparaît lorsque les roues dentées ont moins de 17 dents et l'interférence de denture apparaît lorsque le pignon a moins de 13 dents quelque soit le nombre de dents de la roue.
- La solution consiste à ramener le premier point de contact à l'intérieur de la zone de contact E_1 E_2.
- Ceci peut-être fait en déportant les dentures par rapport aux cercles primitifs. Pour une correction sans variation de l'entraxe O_1 O_2, il est nécessaire de déporter les deux dentures en sens inverses:
  - Vers l'extérieur pour le pignon
  - Vers l'intérieur pour la roue

INTERFERENCE DE DENTURE

- Lorsque le déport devient trop important, on aboutit à des formes de dentures qui peuvent présenter dans le cas du pignon des zones de fragilité ou des amorces de rupture.
- Il faut dans ce cas utiliser un déport de denture avec variation de l’entraxe ou bien faire appel à des dentures spéciales ne respectant pas le profil en développante de cercle.



Pignon 10 dents – Roue 40 dents

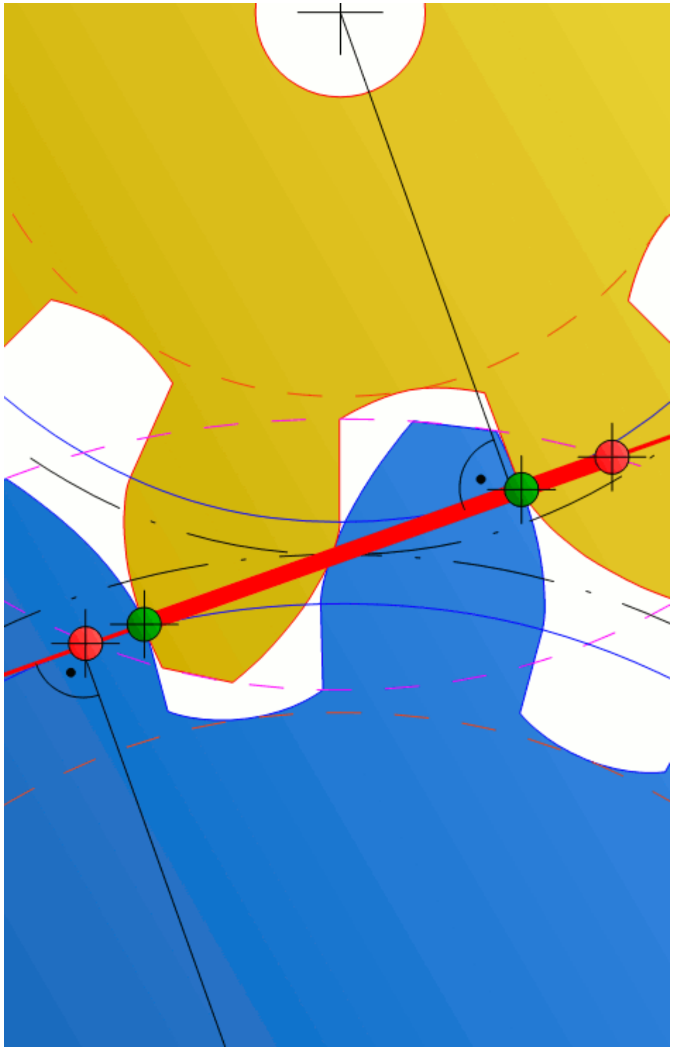


Longueur de conduite (Longueur de contact)

LONGUEUR DE CONDUITE

- Pour assurer la continuité de l'engrènement, il faut au moins avoir une dent en prise en permanence.

- La longueur de conduite est la longueur du segment de la ligne d'action pendant lequel il y a contact entre les dents adverses



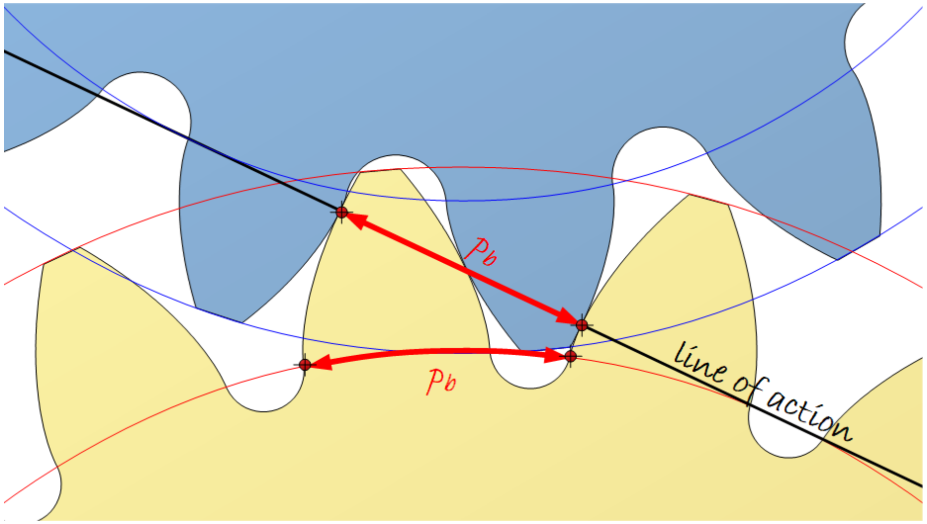
Source: https://www.tec-science.com/mechanical-power-transmission/involute-gear/calculation-of-involute-gears/

LONGUEUR DE CONDUITE

- Le rapport de conduite est le rapport entre la longueur de conduite au pas de base

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\ell}{p_b}$$

  – Remarque : Le pas de base correspond à la distance entre deux profils de dent le long de la ligne d'action



Source: https://www.tec-science.com/mechanical-power-transmission/involute-gear/calculation-of-involute-gears/

LONGUEUR DE CONDUITE

- Pour assurer la continuité de l'engrènement il faut au moins avoir un rapport de conduite supérieur à 1.

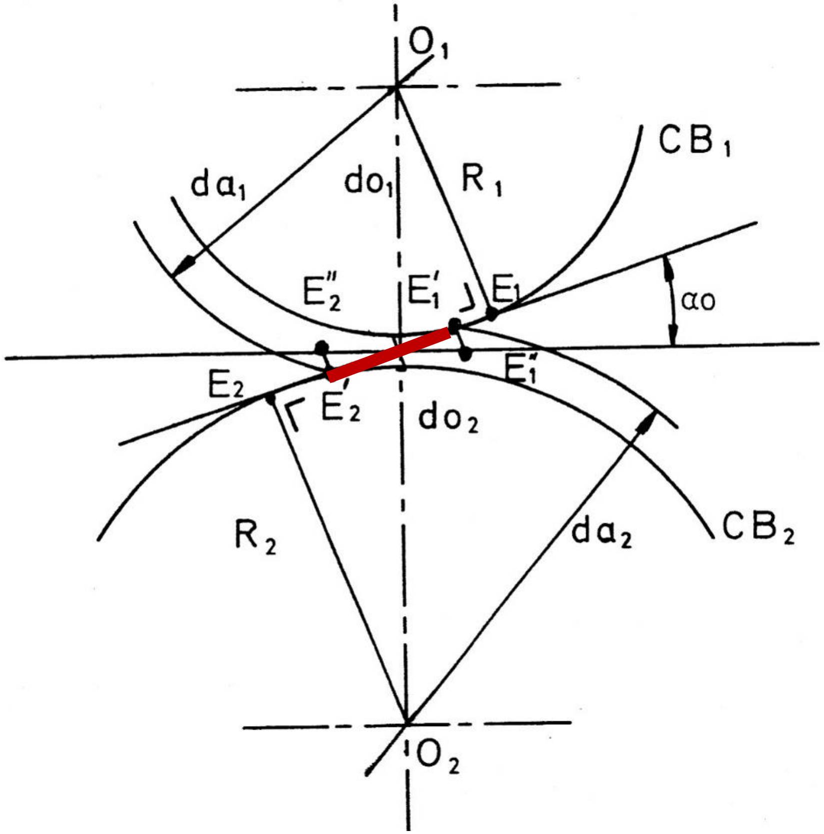
$$\boxed{\varepsilon_\alpha \geq 1}$$

- En pratique, il est bon de maintenir un rapport de conduite au moins égal à $\varepsilon_\alpha > 1{,}2$
- Pour la plupart des trains d'engrenages, on a ε_α entre 1,4 et 2,0
- Un haut rapport de conduite diminue la charge sur les dents (force normale divisée par le nombre de dents en prise).

LONGUEUR DE CONTACT

- Les points de début et de fin de contact entre les dents définissent l'engrènement de la roue et du pignon.

- Soient
  - E'_1: interaction du cercle de tête (addendum) d_{a2} de la roue menée avec ligne de pression
  - E'_2: interaction du cercle de tête d_{a1} de la roue menante avec ligne de pression
- La longueur E'_1 E'_2 mesurée le long de la ligne d'action entre ces deux points est appelée longueur de conduite



LONGUEUR DE CONTACT

- Le recouvrement $e_\alpha = E''_1 E''_2$ se mesure sur la tangente commune aux circonférences de base

$$e_\alpha = \frac{\ell}{\cos \alpha_0}$$

- Le rapport de conduite est le rapport de la longueur de conduite $E'_1 E'_2$ au pas de base p_b

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\ell}{p_b}$$

- Le pas de base p_b est la distance qui sépare deux profils homologues sur une tangente au cercle de base

LONGUEUR DE CONTACT

- Pas de base

$$2\,\pi\,R = Z\,p_b \qquad \frac{p_b}{p} = \frac{2R}{d_0} \qquad p_b = p\cos\alpha_0$$

$$\pi\,d_0 = Z\,p$$

- Le rapport de conduite s'écrit

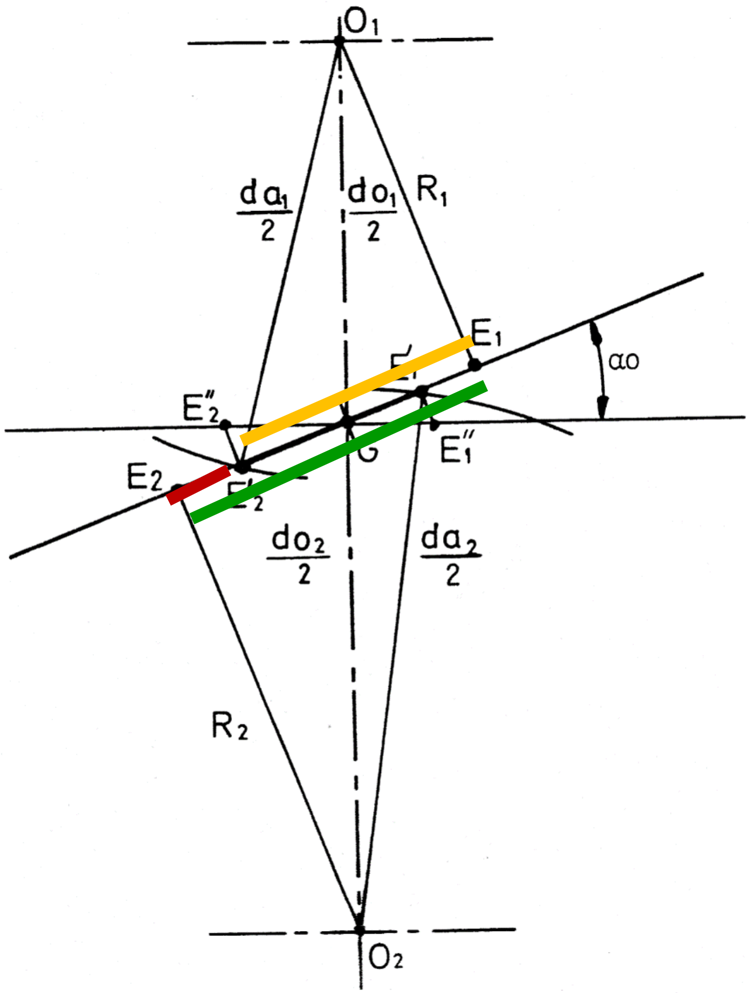
$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \frac{\ell}{p_b} = \frac{e_\alpha\ \cos\alpha_0}{p_b} = \frac{e_\alpha}{p}}$$

- Pour avoir continuité de l'engrènement, on doit avoir

$$\boxed{\varepsilon_\alpha \geq 1}$$

  – Pour éviter les chocs on doit avoir $\varepsilon_\alpha > 1{,}25$.
  – Situation idéale $\varepsilon_\alpha > 2$

LONGUEUR DE CONTACT



- Calcul du recouvrement

$$E_1E_2 = \frac{d_{01}}{2}\sin\alpha_0 + \frac{d_{02}}{2}\sin\alpha_0 = a_0\sin\alpha_0$$

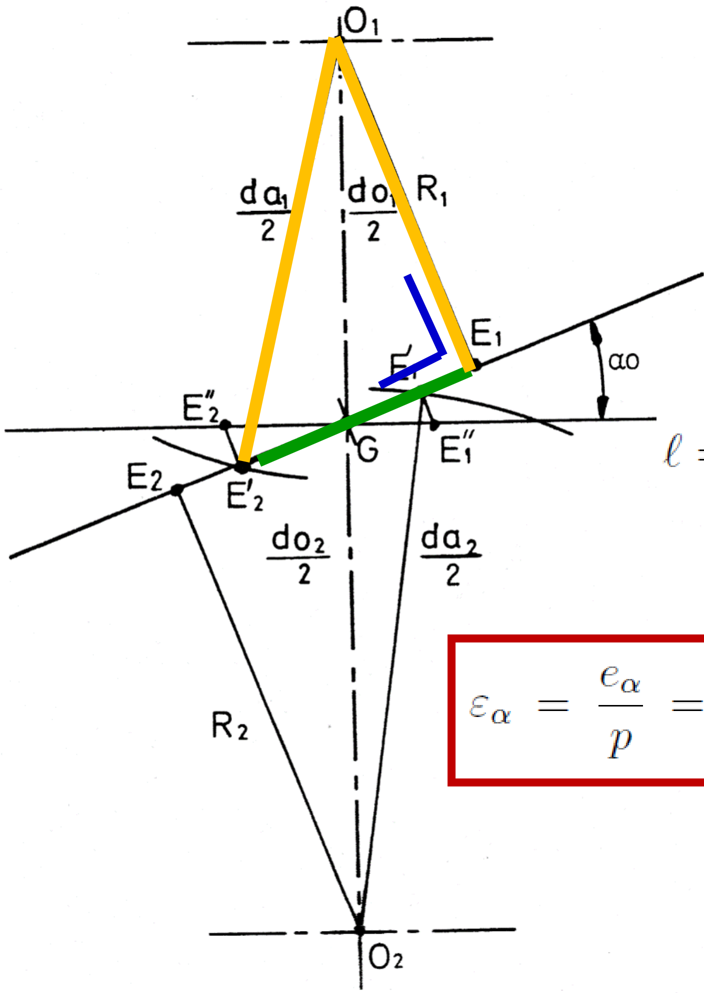
- On remarque que

$$E_2E_2' = E_1E_2 - E_1E_2'$$
$$E_1E_1' = E_1E_2 - E_2E_1'$$

$$E_1E_2' = \sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2}$$
$$E_2E_1' = \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2}$$

$$R_{ai} = \frac{d_{oi}}{2} + m$$
$$R_i = \frac{d_{oi}}{2}\cos\alpha_0 = \frac{Z_i\,m}{2}\cos\alpha_0$$

LONGUEUR DE CONTACT



- Calcul du recouvrement (suite)

$$
\begin{aligned}
E_1'E_2' &= E_1E_2 - E_1E_1' - E_2E_2' \\
&= E_1E_2 - (E_1E_2 - E_2E_1') - (E_1E_2 - E_1E_2') \\
&= E_1E_2' + E_2E_1' - E_1E_2
\end{aligned}
$$

- Soit la longueur de conduite

$$\ell = e_\alpha \cos\alpha = \underline{\sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2}} + \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} - a_0 \sin\alpha_0$$

- Le recouvrement

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \frac{e_\alpha}{p} = \frac{\ell}{p\cos\alpha_0} = \frac{\sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2} + \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} - a_0 \sin\alpha_0}{p\cos\alpha_0}}$$

LONGUEUR DE CONTACT

- Utilisons les grandeurs suivantes

$$Z_2 = Z_1\, i \qquad p = \pi m \qquad d_0 = Z\, m$$

- Il vient

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{m^2(\frac{Z_1}{2}+1) - \frac{Z_1^2 m^2}{4}\cos\alpha_0} + \sqrt{m^2(\frac{iZ_1}{2}+1) - \frac{i^2 Z_1^2 m^2}{4}\cos\alpha_0} - \frac{mZ_1}{2}(i+1)\ \sin\alpha_0}{\pi\ m\ \cos\alpha_0}$$

- En simplifiant

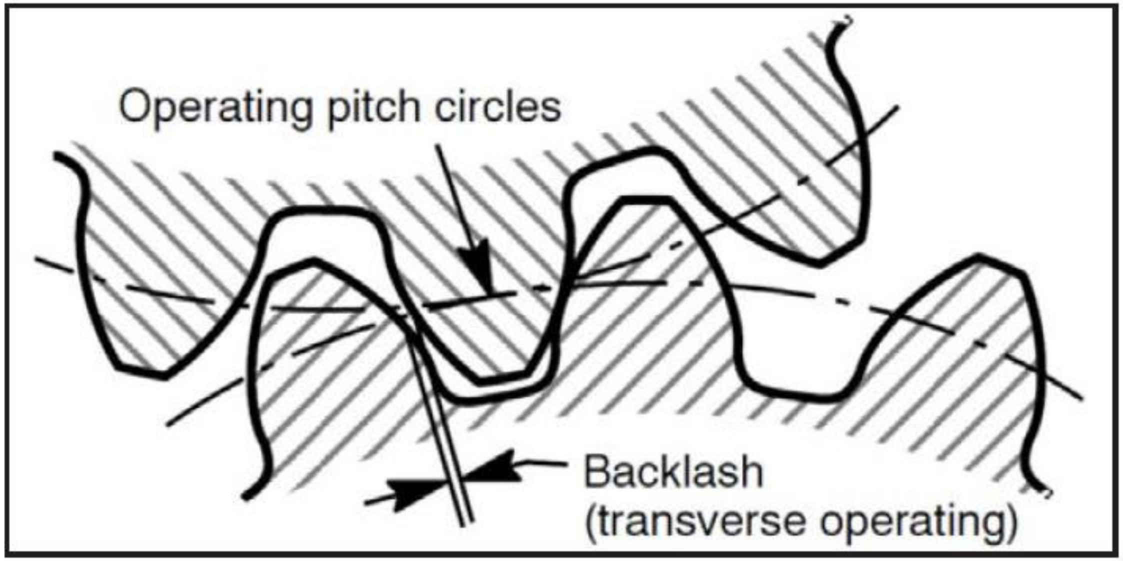
$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{(\frac{Z_1}{2}+1) - \frac{Z_1^2}{4}\cos\alpha_0} + \sqrt{(\frac{iZ_1}{2}+1) - \frac{i^2 Z_1^2}{4}\cos\alpha_0} - \frac{Z_1}{2}(i+1)\ \sin\alpha_0}{\pi\ \cos\alpha_0}}$$

- Dans le cas d’une denture intérieure, on met un signe « - » devant la seconde racine carrée

Jeu d’entredent

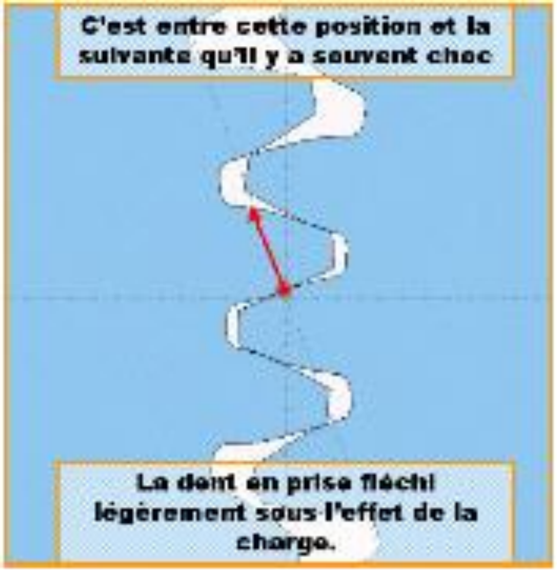
JEU D'ENTRE DENTS

- Pour des dentures idéalisées, l'entredent et la dent ont la même largeur.
- En pratique avec les imprécisions de fabrication, on fabrique la dent légèrement plus petite que l'entre dent pour permettre l'introduction de la dent dans l'entredent.
- Le jeu mesure le long du cercle primitif est appelé jeu ou backlash en anglais



JEU D'ENTRE DENTS

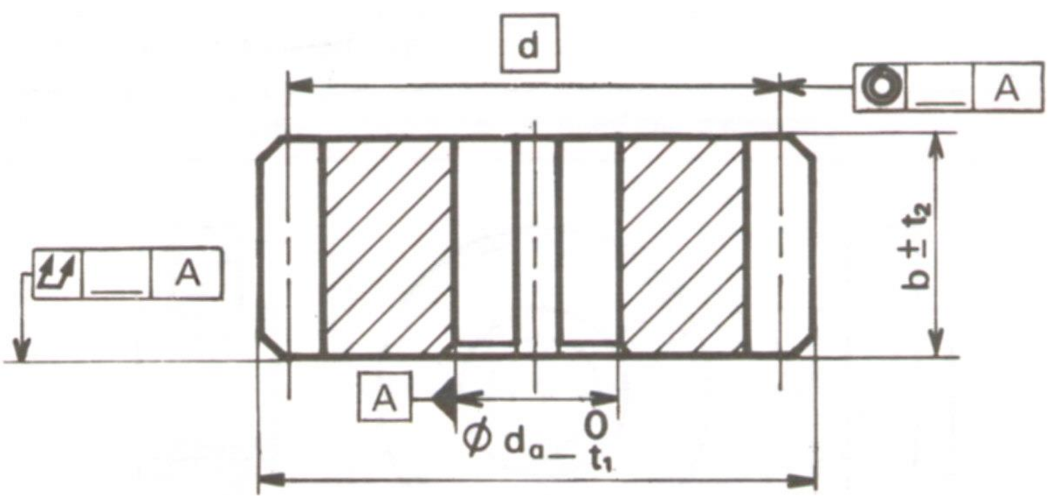
- Le jeu introduit un temps mort lorsque le mouvement est inversé (par exemple dans les robot) d'une imprécision du mouvement.
- Durant l'engrènement, les dents en prise fléchissent, et de plus leur nombre varie (2 – 3), ce qui augmente le backlash, engendre du bruit et des vibrations.



COTATION, MATERIAUX, DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES

COTATION D'UNE ROUE DENTEE

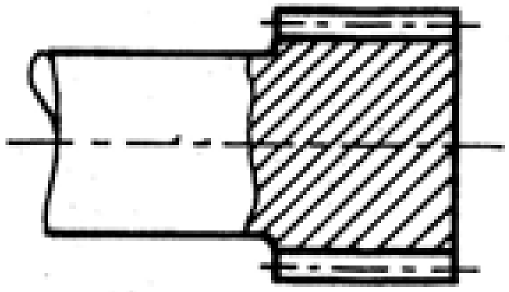
- Sur le dessin ci-contre figurent les cotes devant figurer sur le dessin de définition de la roue.
- Le diamètre primitif est en cote encadrée car il s'agit d'une valeur théorique <u>non mesurable</u>.
- Doit également figurer sur le dessin de définition un tableau indiquant les principales caractéristiques de la denture comme sur l'exemple ci-contre.



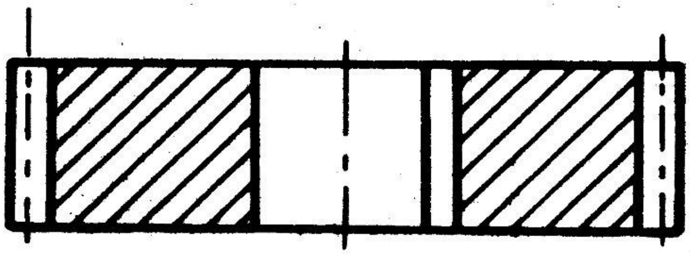
CARACTÉRISTIQUES DE LA DENTURE			
Classe de précision : ______			NF E23-006
Nombre de dents :	z	Angle de pression :	20°
Module :	m	Rugosité des flancs :	√
Crémaillère de référence :			NF E 23-011

DISPOSITION CONSTRUCTIVE

- Pignon arbré pour denture de petites dimensions

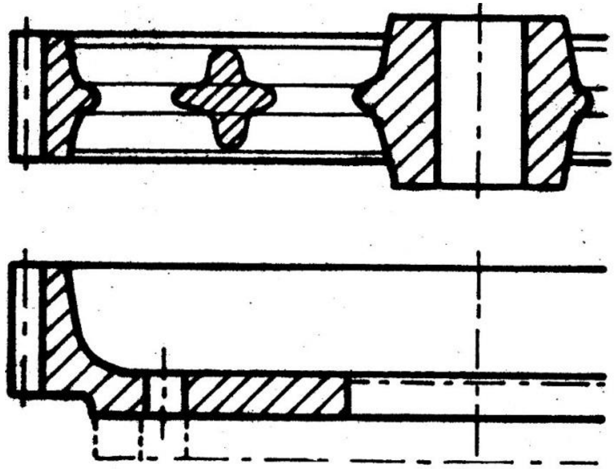


- Roue rapportée avec rainure de clavette pour taille moyenne



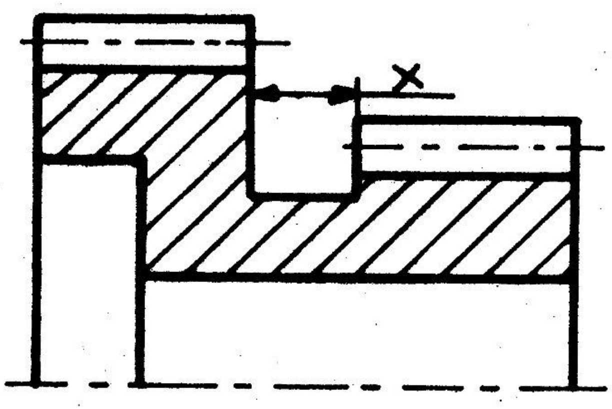
DISPOSITION CONSTRUCTIVE

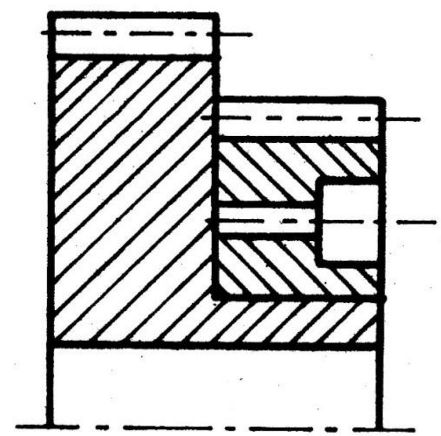
- Roue à bras moulée ou couronne rapportée pour roues dentées de grandes dimensions

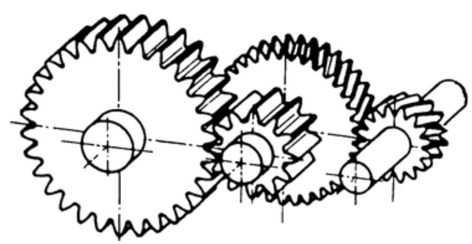


DISPOSITION CONSTRUCTIVE

- Pour les trains d'engrenages, prévoir un dégagement d'outil (x)
- Des roues rapportées permettent de réduire l'encombrement axial.







MATERIAUX UTILISES

- Fonte à graphite sphéroïdal FGS : ➔ Roues de grandes dimensions.
- Aciers ordinaires type XC : ➔ Engrenages peu chargés.
- Aciers au nickel-chrome (10 NC 12) : ➔ Engrenages fortement chargés.
- Matières plastiques : Nylon, Téflon.

DETERMINATION GEOMETRIE APPROCHEE
-
DENTURES DROITES

Nombre de dents Z_1 et du diamètre primitif d_{01} du pignon

- Le diamètre primitif d_{01} supérieur de deux modules au diamètre de pied

$$d_{01} - 2,5\,m = d_{01}\left(1 - \frac{2,5}{Z_1}\right) \leq C\,.\,d$$

  - avec
$$\begin{aligned} C &= 1,2 \quad \text{pour un pignon arbré} \\ C &= 1,8 \quad \text{pour un pignon rapporté} \end{aligned}$$
  - d diamètre de l'arbre portant le pignon, compte tenu éventuellement d'une rainure de cale si nécessaire.
- D'où la formule

$$\boxed{d_{01} \geq \frac{C\,.\,d\,.\,Z_1}{Z_1 - 2,5}}$$

- Le diamètre primitif d_{01} sera déterminé si on connaît Z_1 et vice versa

Choix du nombre de dents Z_1

- On choisit le nombre de dents Z_1 en respectant la règle DIN

$$
\begin{aligned}
20 &< Z_1 < 25 \quad \text{si} \quad 5\,m/s < v_0 \\
18 &< Z_1 < 22 \quad \text{si} \quad 1\,m/s < v_0 < 5\,m/s \\
15 &< Z_1 < 20 \quad \text{si} \quad v_0 < 1\,m/s
\end{aligned}
\qquad
v_0 = \frac{\pi\, d_{01}\, N}{60}
$$

- Z_1 =20 appartient à tous les domaines. On le choisit comme première approximation

$$d_{01} = \frac{20\, C\, .\, d}{20 - 2,5}$$

  – Soit

$$
\begin{aligned}
d_{01} &= 1,37\, d \quad \text{pour un pignon arbré} \\
d_{01} &= 2,05\, d \quad \text{pour un pignon rapporté}
\end{aligned}
$$

Choix du module m

- Module théorique (candidat module)

$$m^\star = \frac{d_{01}}{Z_1}$$

- Ajuster le module à une valeur supérieure dans la série de Renard.

Valeurs normalisées du module *m* (NF ISO 54...)									
valeurs principales en mm					valeurs secondaires en mm				
0,06	0,25	1,25	5	20	0,07	0,28	1,125	5,5	22
0,08	0,30	1,5	6	25	0,09	0,35	1,375	7	28
0,10	0,40	2	8	32	0,11	0,45	1,75	9	36
0,12	(0,50)	2,5	10	40	0,14	(0,55)	2,75	11	45
0,15	(0,80)	3	12	50	0,18	(0,7)	3,5	14	55
0,20	1,0	4	16	60	0,22	(0,9)	4,5	18	70

( ) entre parenthèses, ancienne normalisation

Choix du module m

- Avec la valeur normalisée du module m, on recalcule le diamètre primitif

$$d_{01} = 20\, m$$

- On ajuste le nombre de dents Z_1 si nécessaire
- On mène un calcul itératif jusqu'à convergence

$$\begin{aligned}
&Z_1 \\
&m \\
&d_{01} \\
&Z_2 = i\, Z_1 \\
&d_{02} = Z_2\, m \\
&a_0 = d_{01}\, \frac{1+i}{2}
\end{aligned}$$

Cycle itératif de conception

- Remarque si a_0 et i sont donnés alors on a aussi d_{01} et d_{02}.

$$a_0 = \frac{d_{01} + d_{02}}{2}$$

$$i = \frac{d_{02}}{d_{01}}$$

Choix des largeurs b_1 et b_2

- Les largeurs b_1 et b_2 sont choisies dans un premier temps en respectant les règles de bonne pratique suivantes.

- Règles 1: la largeur de la roue (2) est plus faible que celle du pignon:

$$b_2 = 0,9\, b_1 \qquad b_1 - b_2 \leq 5\, mm$$

- Règle 2: b_1 doit être choisi de manière à choisir des paramètres géométriques compatibles avec l'application
  - Paramètre $\psi_d = b_1/d_{01}$
  - Paramètre $\psi_m = b_1/m$
  - Comme b_{1m} et b_{1d} sont généralement différents on prend la valeur moyenne des deux

Choix des largeurs b_1 et b_2

- Paramètre $\psi_d = b_1/d_{01}$
  - Faible vitesse (v<1 m/s), denture et pivoterie de qualité moyenne (roue folle, crabotage)

    $$\psi_d = 0,23 + 0,0857\, i$$

  - Vitesse moyenne (1<v<5 m/s), denture et pivoterie de bonne qualité normale.

    $$\psi_d = 0,50 + 0,0857\, i$$

  - Grande vitesse (v>5 m/s) et durée de vie élevée; denture et pivoterie très soignées

    $$\psi_d = 0,80 + 0,0857\, i$$

  - Très grande vitesse (v>>5 m/s) durée de vie élevée; la meilleure précision pour l'ensemble.

    $$\psi_d = 1,20 + 0,0857\, i$$

Choix des largeurs b_1 et b_2

- Paramètre $\psi_m = b_1/m$
  - Denture coulée, de mauvaise qualité.

$$8 < \psi_m < 10$$

  - Denture soignée mais problème de parallélisme, déformée d'arbre (roue en porte-à-faux).

$$10 < \psi_m < 15$$

  - Denture soignée et parallélisme très correct.

$$15 < \psi_m < 30$$

  - Meilleure qualité de denture, appui très rigide et excellent parallélisme.

$$30 < \psi_m$$

REFERENCES

- J. Bozet. Dimensionnement des Eléments de Machines. Centrale des Cours de l'AEES. Université de Liège. 1995.
- R. Budynas, J. Nisbeitht. Shigley's Mechanical Engineering Design. Tenth editionMc Graw Hill Education. 2015.
- R. Juvinall and K. Marshek. Fundamentals of Machine Component Design. Fifth edition. John Wiley and Sons. 2012.
- G. Henriot. Engrenages. Définition, dessin et calcul. Techniques de L'Ingénieur. Dossier B636.
- S. Schmid, B. Hamrock, B. Jacobson. Fundamentals of Machine Elements. SI Version. Third Edition. CRC Press. 2014.