

# CONCEPTION DES ENGRENAGES

## Partim 2: Calcul des engrenages & Dentures hélicoïdales

---

Pierre Duysinx

Aérospatiale & Mécanique  
Année académique 2020-2021

# LAY-OUT

- Introduction
- Types d'engrenage
- Engrenages à dentures droites
  - Cinématique
  - Géométrie
  - Calcul des forces
    - Flexion
    - Pitting
- Engrenages à dentures hélicoïdales
  - Cinématique
  - Géométrie
  - Calcul des forces



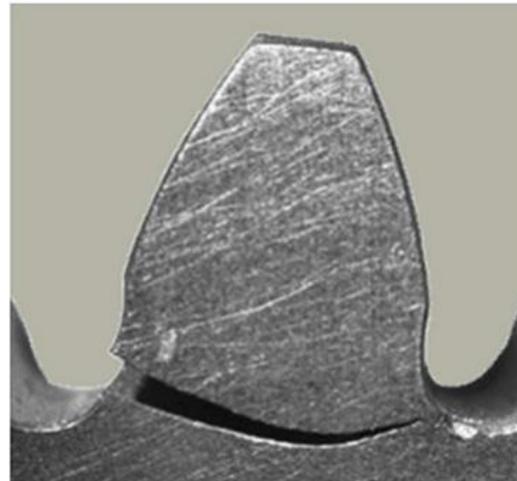
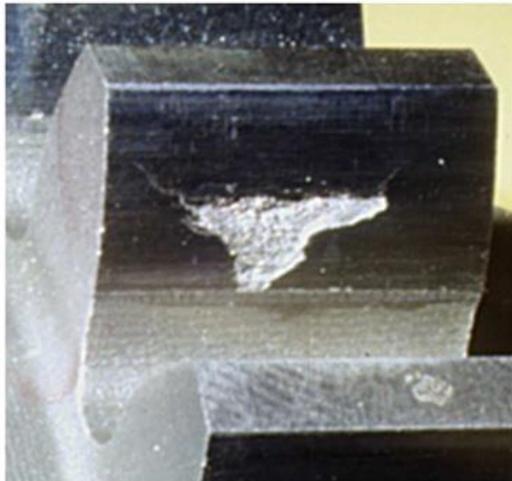
# DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES A DENTURES DROITES

# RESISTANCE DES DENTURES

---

- Une denture se définit complètement à partir du module  $m$  dont la valeur approximative résulte d'un calcul de résistance des matériaux.
  
- La résistance des dentures est examinée au travers de deux critères:
  - 1/ La résistance à la flexion des dents
  - 2/ La résistance à la pression de contact
  
- Les contraintes de référence sont calculées dans des situations idéalisées et affectées d'une série de coefficients pour tenir compte de la situation réelle.

# RESISTANCE A LA FLEXION



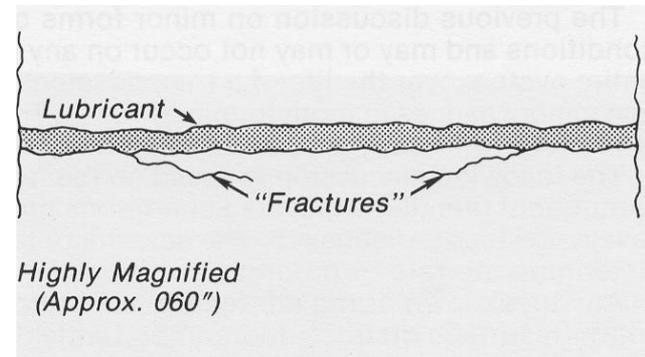
# Mécanismes de dégradation

---

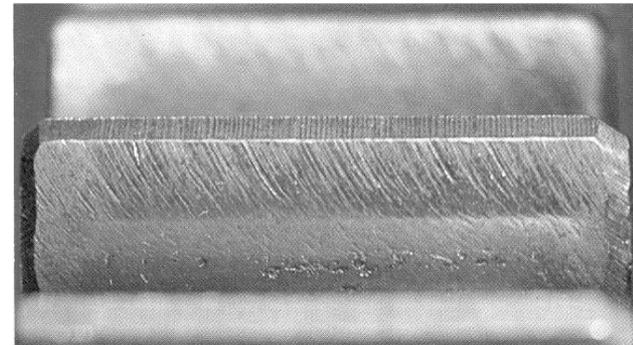
- Rupture en flexion au pied de la dent
  - Ruine suite à une surcharge: contrainte supérieure à la résistance mécanique
  - Phénomène de fatigue à un très grand nombre de cycles ou bien oligocyclique
  
- Piqûres de la surface (pitting)
  - Dégradation progressive de l'état de surface des dentures
  - Formation de cavités
  - Gouverné par la pression superficielle au contact et le nombre de sollicitations

# Mécanismes de dégradation

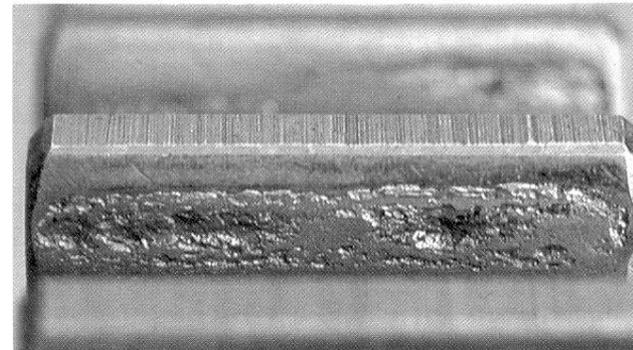
- Piqûres de la surface (pitting)



- Initiation



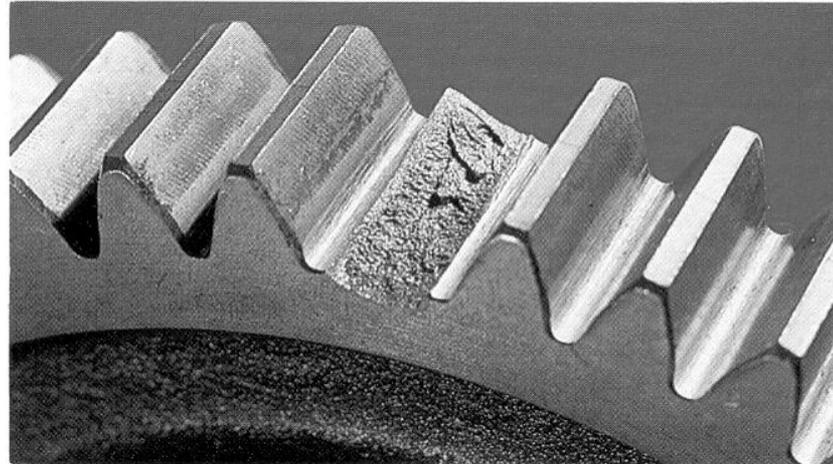
- Piqûres destructives



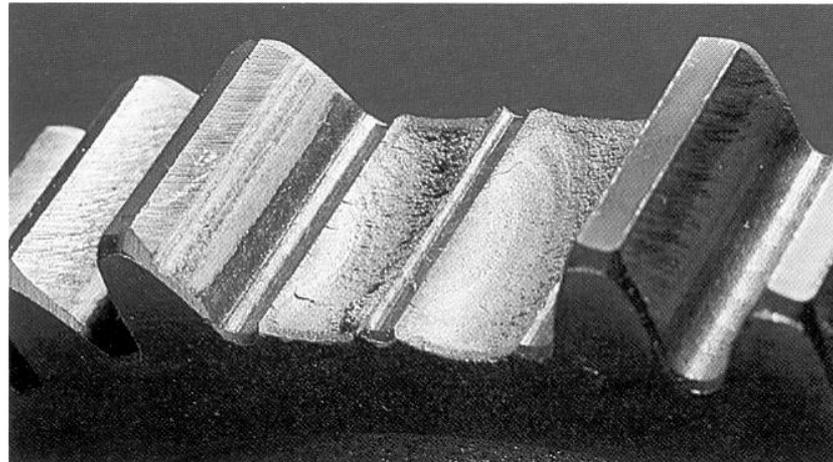
# Mécanismes de dégradation

- Rupture en flexion au pied de la dent

- Impact



- Fatigue



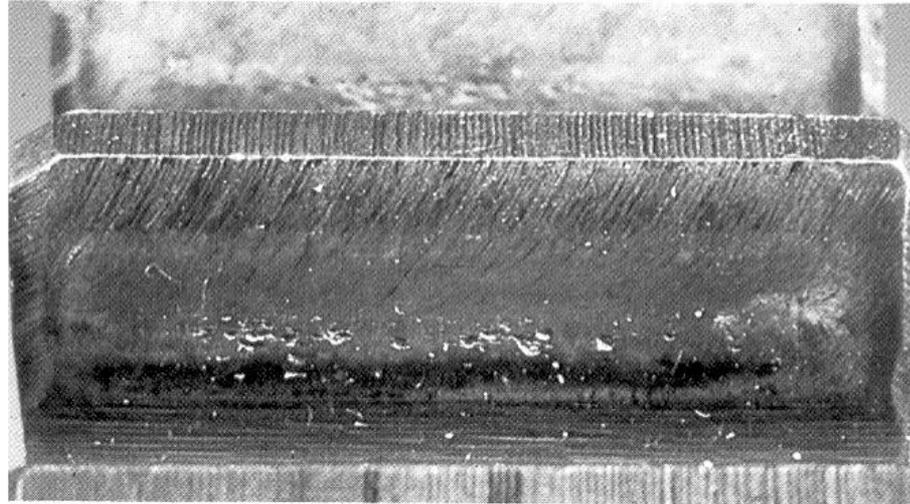
# Mécanismes de dégradation

---

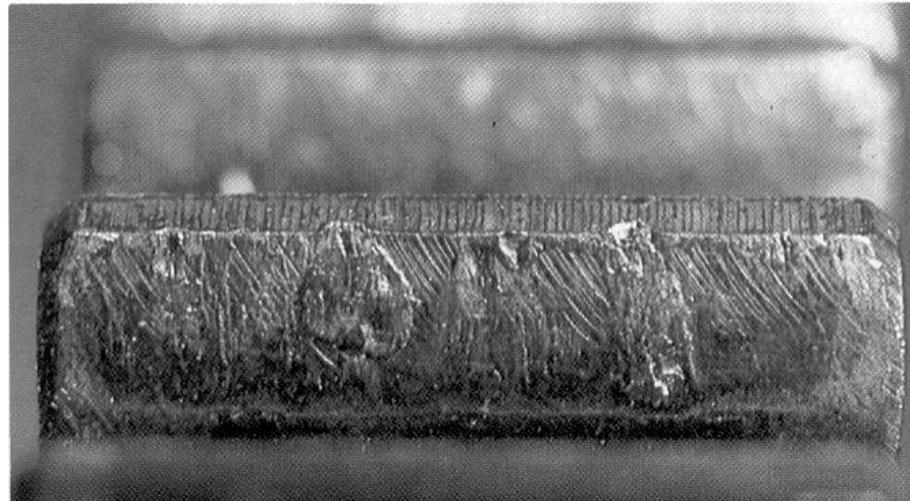
- Usure
  - Phénomène naturel caractérisé par l'enlèvement de matière à cause du glissement de deux surfaces l'une sur l'autre
  - Usure normale: poli miroir
  - Usure abrasive et excessive: provoqué par la présence de particules abrasives et des conditions de chargement trop élevées
  
- Grippage
  - Gouverné par deux grandeurs simultanées: la vitesse de glissement et la pression superficielle au point de contact, donc la puissance dissipée
  - Arrachement de métal selon la direction de glissement

# Mécanismes de dégradation

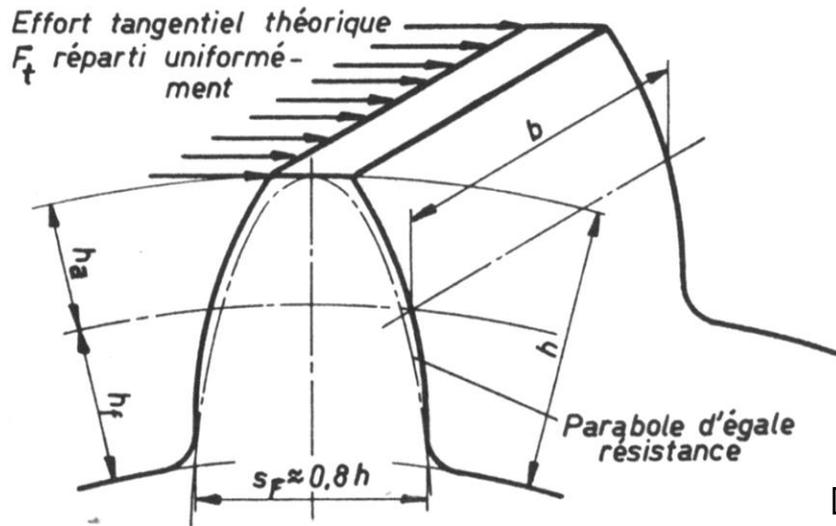
□ Usure



□ Grippage



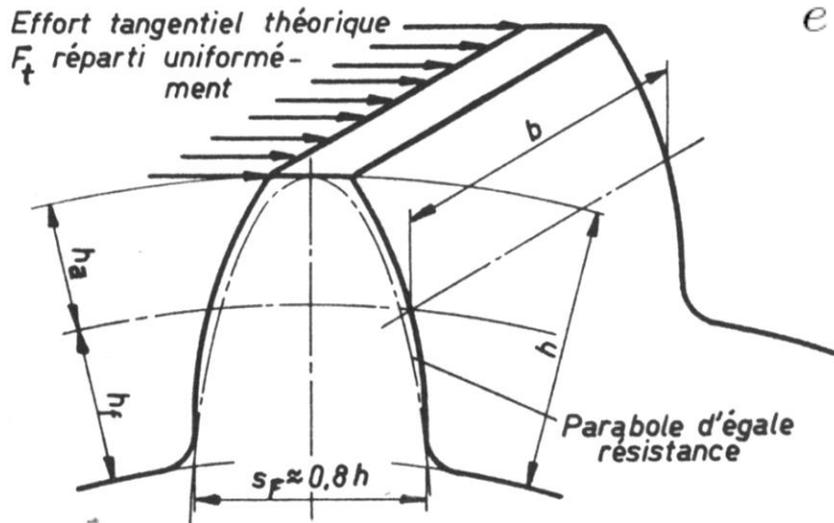
# CONTRAINTES DE FLEXION



- La résistance de la dent se calcule en faisant l'approximation que la dent est assimilée à une poutre encastrée, fléchiée par la **composante tangentielle**  $F_t$  de la force de contact que l'on supposera située à son sommet afin de se placer dans le cas le plus défavorable.
- L'approximation néglige volontairement l'effet de la **composante radiale**  $F_r$  génératrice de compression, car elle renforce la résistance de la dent à la fatigue (mise en sécurité).

# CONTRAINTES DE FLEXION

- Pour rappel, on a les données géométriques suivantes :
  - La hauteur de la dent est  $h = 2,25 m$
  - La largeur de la dent est  $b = k m$ , avec  $k$  une valeur à définir,
  - L'épaisseur de la dent au niveau du diamètre primitif



$$e = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$$

# CONTRAINTES DE FLEXION

---

- Composante tangentielle  $F_t$  de la force de contact

$$F_t = \frac{\mathcal{P} C_s}{v}$$

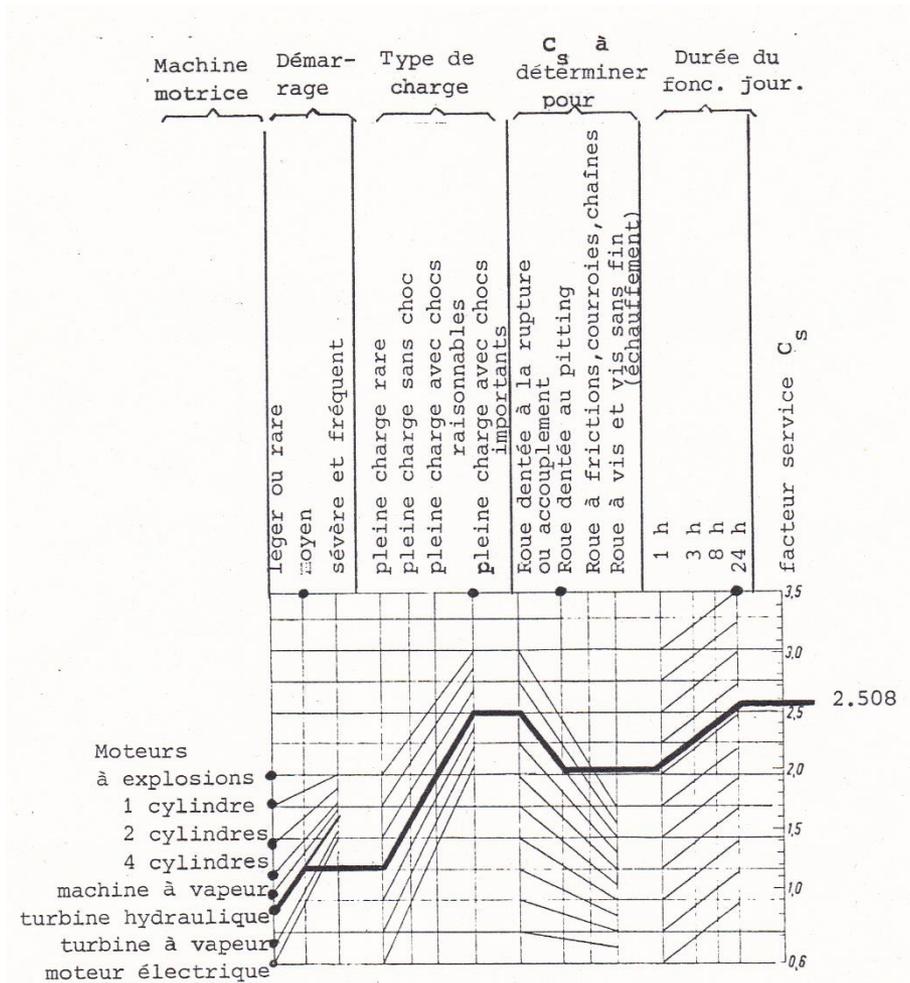
où  $C_s$  est un facteur de service rendant compte de l'irrégularité de la force dans différentes applications.

- Le moment de flexion maximal à l'encastrement

$$M = F_t h = F_t 2,25 m$$

# CONTRAINTES DE FLEXION

- Facteur de service  $C_s$  peut-être calculé par l'abaque de Richter et Ohlendorf



# CONTRAINTES DE FLEXION

- Le moment d'inertie de la section (rectangulaire) de la dent est:

$$I = \frac{be^3}{12} = b \frac{\pi^3 m^3}{96} = k \frac{\pi^3 m^4}{96}$$

- La contrainte maximale de flexion est donné par:

$$\sigma = \frac{M y}{I} = \frac{M e/2}{I}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_t (2,25 m) (\pi m/4)}{b \pi^3 m^3/96} = \frac{F_t (2,25 m) (\pi m/4)}{k \pi^3 m^4/96} \\ &= 5,47 \frac{F_t}{b m} = 5,47 \frac{F_t}{k m^2} \end{aligned}$$

# CONTRAINTES DE FLEXION

- La contrainte donnée par la formule de Lewis doit être comparée à une valeur de référence pour le matériau et le type de sollicitation.
- Selon la DIN 3990, on adopte les tensions admissibles suivantes:

$$\text{Mouvements lents} \quad R_{\phi} = \frac{R_0^{Flex}}{2.5}$$

Mouvements rapides

$$\text{- avec couples répétés} \quad R_{\phi} = \frac{R_0^+}{2}$$

$$\text{- avec couples alternés} \quad R_{\phi} = \frac{R_0^{\pm}}{2.5}$$

# CONTRAINTES DE FLEXION

- On a

$$5,47 \frac{F_t}{k m^2} \leq R_\phi$$

- Il vient

$$m \geq 2,34 \sqrt{\frac{F_t}{k R_\phi}}$$

- On choisit le module normalisé immédiatement supérieur dans la série de Renard.

Tableau LII

Module métrique  $m$ , pas primitif  $p$  et pas de base  $p_b$

Modules 0,5 à 1,5			Modules 2 à 6			Modules 8 à 25		
$m$	$p$	$p_b$	$m$	$p$	$p_b$	$m$	$p$	$p_b$
0,5	1,570 796	1,476 066	2	6,283 185	5,904 263	8	25,132 74	23,617 05
0,6	1,884 956	1,771 279	2,5	7,853 982	7,380 329	10	31,415 93	29,521 31
0,8	2,513 274	2,361 705	3	9,424 778	8,856 394	12	37,699 11	35,425 58
		2,952 131						
1	3,141 593		4	12,566 371	11,808 526	16	50,265 48	47,234 10
1,25	3,926 991	3,690 164	5	15,707 963	14,760 657	20	62,831 85	59,042 63
1,5	4,712 389	4,428 197	6	18,849 556	17,712 789	25	78,539 82	73,803 29

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

- L'approche américaine proposée par l'AGMA repose sur la **formule de Lewis** écrite en fonction du pas diamétral  $p_d = 1/m'$  avec  $m'$  exprimé en pouces.
- Lewis introduit le coefficient  $\Phi(Z_1)$  qui rend compte de la géométrie exact sur le calcul de la contrainte maximale de flexion

$$\sigma = \frac{F_t p_d}{\Phi_L(Z_1) b}$$

TABLE 1 – Valeurs des coefficients de Lewis pour  $\alpha_0 = 20^\circ$

$Z_1$	10	20	30	50	75	100	300
$\Phi_L$	0,201	0,320	0,358	0,408	0,433	0,446	0,471

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

- On multiplie ensuite la tension totale par une série de coefficients tenant compte de l'état réel de l'engrènement.

$$\sigma = \frac{F_t}{b m J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I$$

- On compare enfin le produit résultant de cette opération à une tension (HD à coeur) admissible en fonction de la durée de vie exigée (endurance en rapport avec le nombre de cycles).
- Coefficients:
  - J: facteur de forme → géométrie du pied de dent
  - $K_a$ : facteur d'application de la charge
  - $K_m$ : facteur de distribution de la charge sur la largeur
  - $K_v$ : facteur dynamique
  - $K_s, K_B, K_I$ : facteurs d'échelle, facteur de jante, facteur de roue folle

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## FACTEUR DE FORME J

- Le facteur  $J$  remplace le coefficient de Lewis. Il tient compte de l'effet de géométrie de la dent. Il est déterminé suivant un algorithme complexe défini par la norme AGMA 908-B89.
- Remarquons que les facteurs  $J$  sont différents pour les pignons et pour les roues.
- Le facteur  $J$  dépend en particulier de la géométrie du pied de la dent et du nombre de dents  $Z$ .
  
- Remarque: On prend
  - HPSTC: *Highest point of single tooth contact*, lors d'une régularité plutôt bonne
  - *Tip of tooth*: cas de chocs importants... → sécurité

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

Table 11-8 AGMA Bending Geometry Factor J for 20°, Full-Depth Teeth with Tip Loading

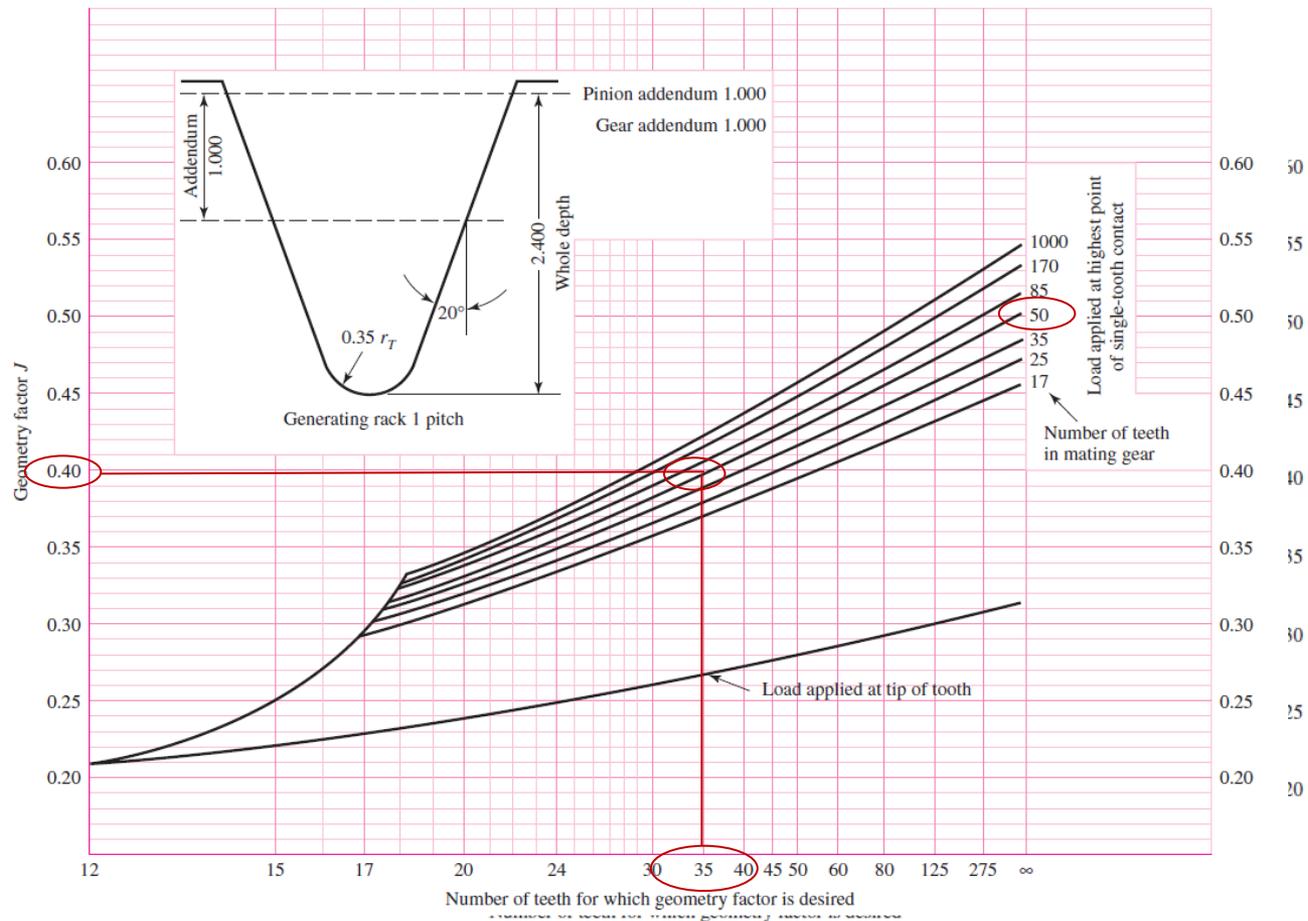
Gear teeth	Pinion teeth																
	12		14		17		21		26		35		55		135		
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	
12	U	U															
14	U	U	U	U													
17	U	U	U	U	U	U											
21	U	U	U	U	U	U	0.24	0.24									
26	U	U	U	U	U	U	0.24	0.25	0.25	0.25							
35	U	U	U	U	U	U	0.24	0.26	0.25	0.26	0.26	0.26					
55	U	U	U	U	U	U	0.24	0.28	0.25	0.28	0.26	0.28	0.28	0.28			
135	U	U	U	U	U	U	0.24	0.29	0.25	0.29	0.26	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29	

Table 11-9 AGMA Bending Geometry Factor J for 20°, Full-Depth Teeth with HPSTC Loading

Gear teeth	Pinion teeth																
	12		14		17		21		26		35		55		135		
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	
12	U	U															
14	U	U	U	U													
17	U	U	U	U	U	U											
21	U	U	U	U	U	U	0.33	0.33									
26	U	U	U	U	U	U	0.33	0.35	0.35	0.35							
35	U	U	U	U	U	U	0.34	0.37	0.36	0.38	0.39	0.39					
55	U	U	U	U	U	U	0.34	0.40	0.37	0.41	0.40	0.42	0.43	0.43			
135	U	U	U	U	U	U	0.35	0.43	0.38	0.44	0.41	0.45	0.45	0.47	0.49	0.49	

Denture droite. Facteur de forme selon norme AGMA 908-B89.

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA



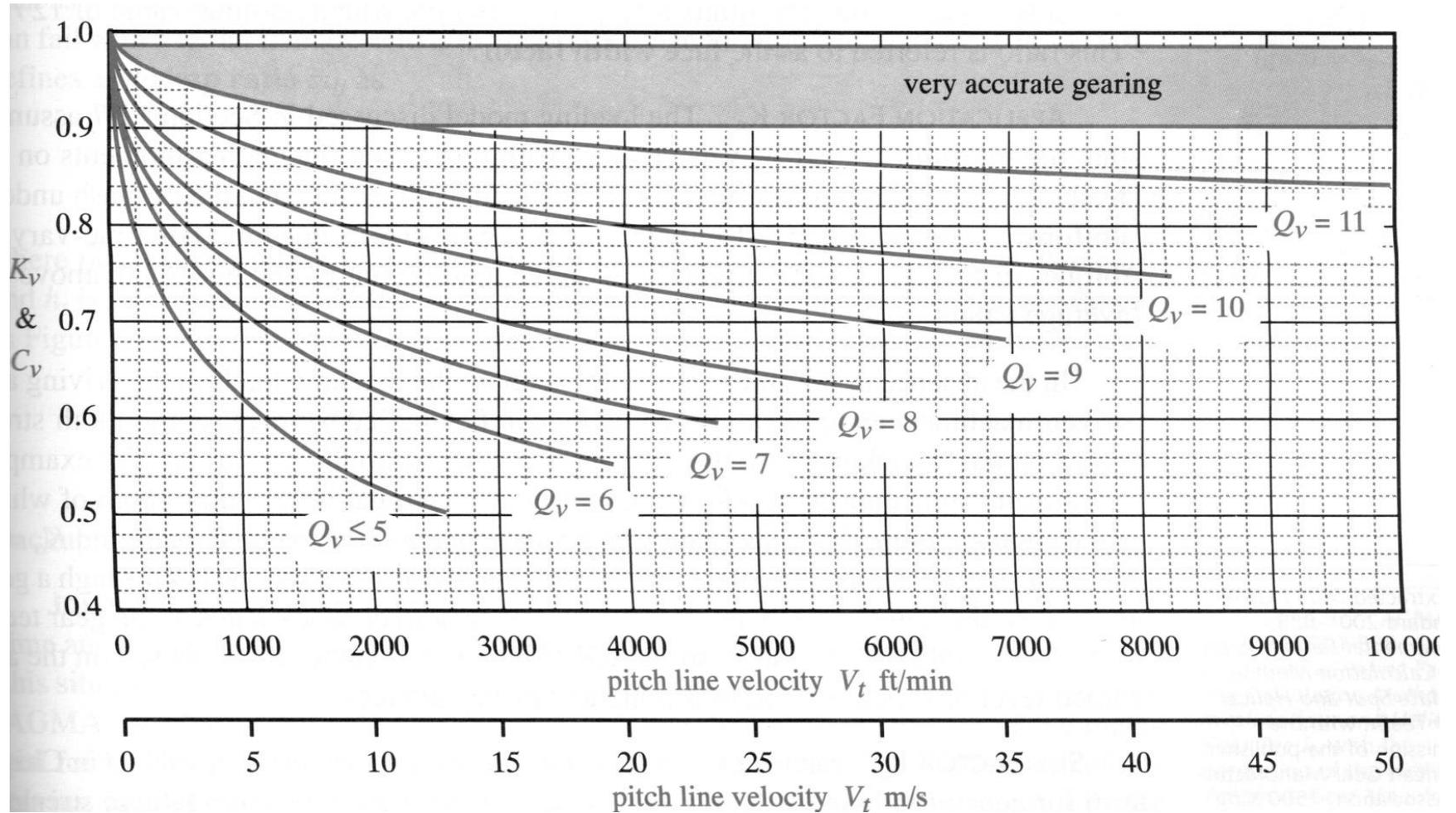
Denture droite. Facteur de forme selon norme AGMA 218.01, cohérent avec les valeurs tabulées de la version AGMA 908-B89.

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## FACTEUR DYNAMIQUE $K_v$

- Le facteur  $K_v$  ou facteur dynamique tient compte des charges dynamiques et des vibrations induites par les impacts dent contre dent.
- Les charges vibratoires sont appelées **erreurs de transmission** et sont plus pénalisantes avec les engrenages de moindre précision.
- En l'absence de données, on peut approcher  $K_v$  par les courbes suivantes en fonction de facteur de Q (procédé d'usinage, fini de surface...)
  - La qualité des engrenages augmente de Q1 à Q12
  - Q3 à Q7 recouvrent les engrenages de qualité commerciale courante
  - Q8 à Q12 sont des engranges de haute précision

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA



# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## FACTEUR DYNAMIQUE $K_v$

- En l'absence de données, on peut approcher  $K_v$  par les courbes suivantes

$$K_v = \left( \frac{A}{A + \sqrt{200V_t}} \right)^B$$

- où  $V_t$  est la vitesse tangentielle au diamètre primitif en  $m/s$ . Les facteurs A et B sont définis par :

$$A = 50 + 56(1 - B)$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \quad \text{for } 6 \leq Q_v \leq 11$$

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## FACTEUR DYNAMIQUE $K_v$

- Ces courbes sont valides en dessous de la vitesse tangentielle maximale :

$$V_{t \max} = \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200}$$

- Pour des engrenages de qualité  $Q < 5$ ,

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200V_t}}$$

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## **FACTEUR D'APPLICATION DE LA CHARGE $K_a$**

- L'effort  $F_n$  n'est pas appliqué progressivement mais un effet de choc intervient. La fluctuation des contraintes dans la dent provient de la variabilité de la charge.
- On doit introduire un effort tangentiel majoré:

$$F'_t = F_t K_A \quad K_A > 1$$

- Remarque:
  - Soit on applique le  $K_A$  suggéré par la norme AGMA, soit on utilise une valeur plus précise comme le facteur  $C_s$  suggéré par l'abaque de Richter Olhendorff. L'un ou l'autre mais pas les deux.

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

- Le tableau suivant donne le facteur  $K_A$  pour différentes sources de puissance et différents récepteurs

TABLE 2 – Facteur d'applications  $K_A$

Driven Machine Driving machine	Uniform	Moderate shock	Heavy shock
Uniform (electric motor, turbine)	1.00	1.25	< 1.75
Light shock (Multi cylinder engine)	1.25	1.50	< 2.00
Medium shock (Single cylinder engine)	1.50	1.75	< 2.25

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## FACTEUR D'ECHELLE $K_S$

- Le facteur de taille  $K_S$  est similaire au facteur de taille introduit pour la résistance à la fatigue. Les engrenages de grande taille ont une moindre résistance.
  - Généralement

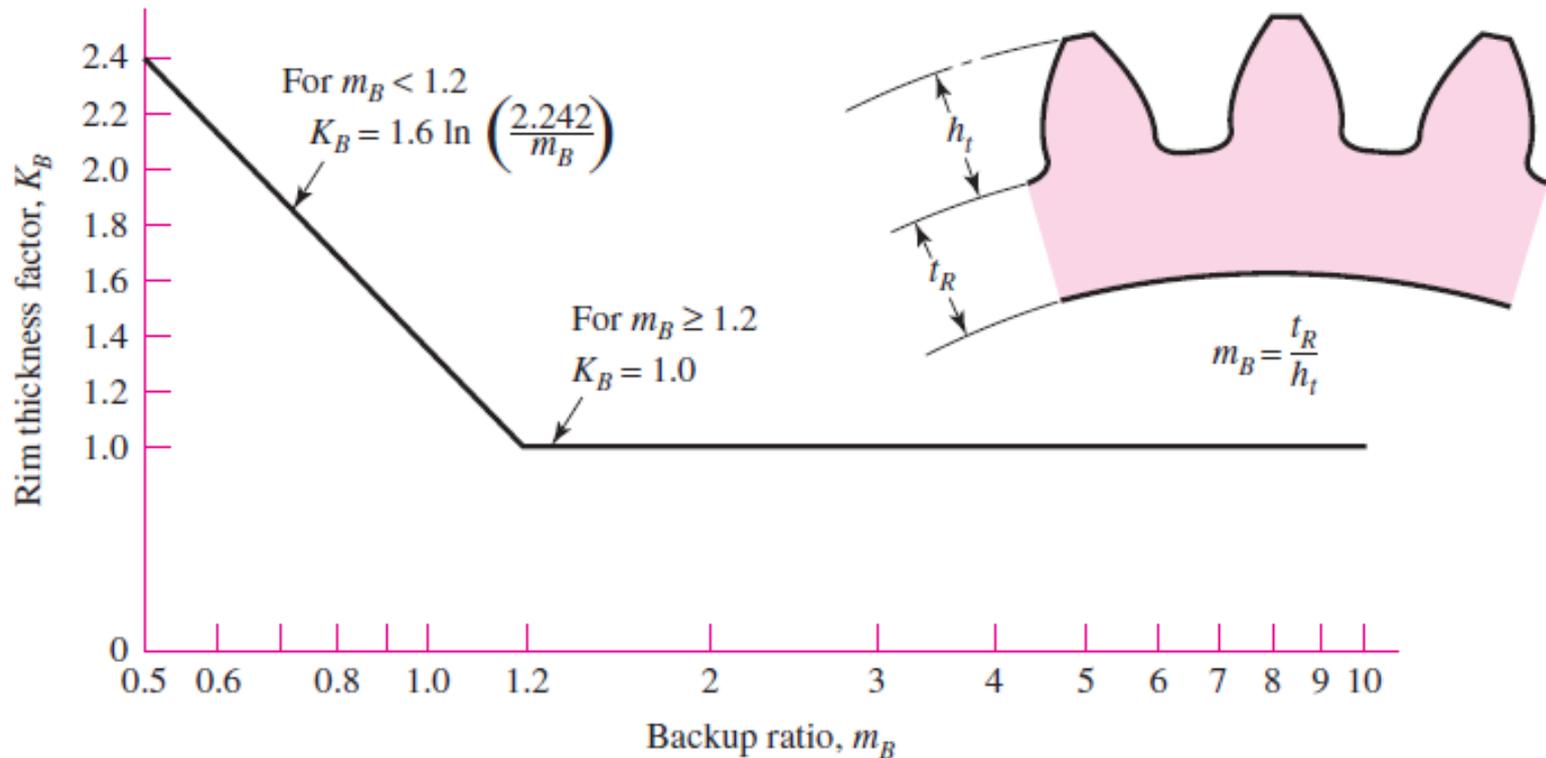
$$K_S = 1$$

## FACTEUR D'ÉPAISSEUR DE JANTE $K_B$

- Le facteur d'épaisseur de jante  $K_B$  a été récemment introduit par l'AGMA pour tenir compte de situations dans lesquelles un engrenage de grand diamètre, fait d'une jante et de rayons plutôt que d'un tambour solide avec une faible épaisseur de jante. Ceux-ci peuvent périr à cause des contraintes radiales dans la jante avant rupture de la dent.

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

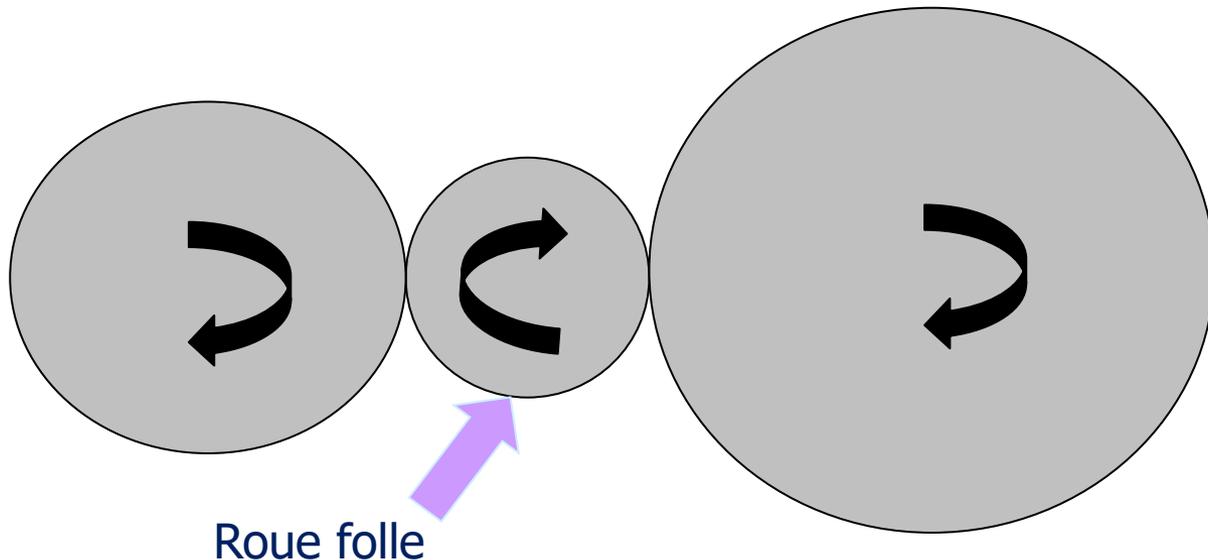
## FACTEUR D'ÉPAISSEUR DE JANTE $K_B$



# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## FACTEUR DE ROUE FOLLE $K_I$

- Le facteur  $K_I$  doit refléter le fait que les engrenages sur roue folle sont soumis à plus de cycles par unité de temps et plus de charges alternées de hautes amplitudes que leur homologues montés fixes.
  - $K_I = 1,25$  pour les roues folles
  - $K_I = 1,00$  pour les roues fixes.



# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

## TENSIONS ADMISSIBLES

- La **contrainte max admissible en flexion** représente la valeur de comparaison de la contrainte de flexion calculé. Elle dépend de la durée de vie que l'on veut imposer.

$$S_{at} = R_{\phi} \frac{Y_N}{S_F Y_{\theta} Y_Z}$$

- $R_{\phi}$  l'endurance de la matière de l'engrenage correspondant à un nombre de cycles de référence ( $10^7$  cycles).
- Le facteur  $Y_N$  tient compte d'une autre durée de vie que  $10^7$  cycles.
- $Y_{\theta}$  est présent pour tenir compte d'une température de fonctionnement élevée.
- $Y_Z$  permet de considérer une probabilité de rupture plus faible ou plus élevé que 0,99.
- $S_F$  est le facteur de sécurité adopté.

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA

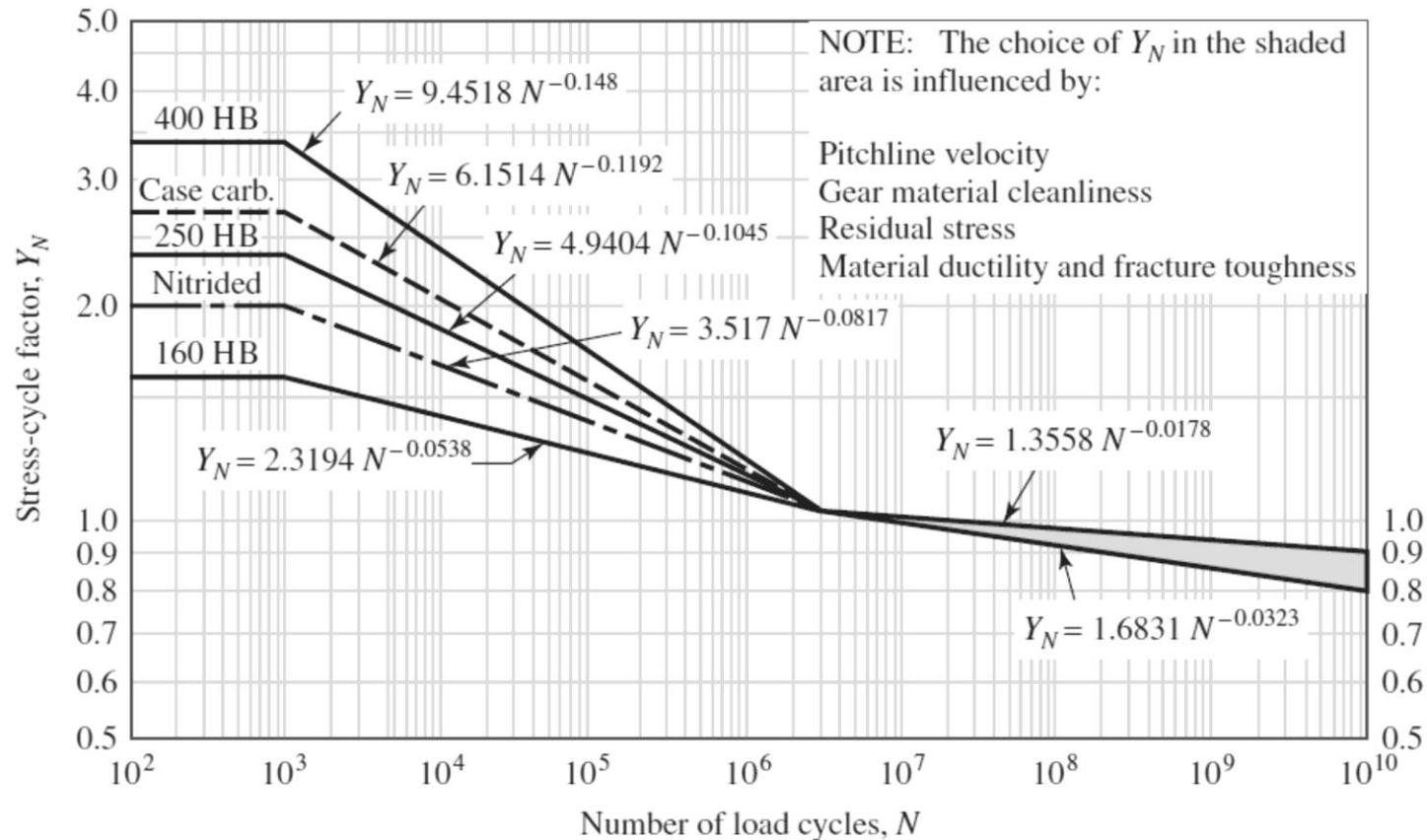
Tableau LXV

Caractéristiques mécaniques des matériaux

Toutes les caractéristiques mécaniques sont données en daN/mm<sup>2</sup>

Matériaux		Éprouvette à l'état final		Caractéristiques de la denture		
Matériau M ou IN	Type et traitement thermique	Contrainte de rupture $\sigma_B$	Résistance dynamique $\sigma_{fa}$	Dureté HB		Pression limite $P_{H\ lim}$
				Cœur	Flanc	
	Fonte grise	20	9	200		36
		25	12	210		40
20	Fonte nodulaire	42	19	150		35
		50	20	170		40
50 60	Acier moulé	50	20	140		37
		60	24	170		46
	Aciers de construction au carbone	min. 42	19	125		43
		min. 50	24	150		50
		min. 60	28	180		62
		min. 70	32	210		72
4 Si 5 Mo 4	Aciers d'amélio- ration	50 à 60	22 à 26	140		41
		65 à 80	30 à 34	185		54
		75 à 90	34 à 40	210		61
		75 à 90	36 à 44	260		77
		70 à 80	36 à 42	230		63
		95 à 110	46 à 54	300		77
Cr 5 Ni 6	Aciers de cémentation	45 à 60	25	170	590	20
		50 à 65	27	190	740	22
		80 à 110		270	650	42
		90 à 120		310	650	44
Si 4 4	Acier pour trempé superficielle	65 à 80		220	595	31
		90 à 105		270	560	34
		90 à 110		275	590	35
Si 5 4	Aciers pour cyanuration	140 à 180		460	595	32
		150 à 190		470	550	35

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA



Facteur  $Y_N$  affectant la contrainte admissible en flexion répétée selon AGMA 218.01



# PRESSION DE CONTACT

# PRESSION DE CONTACT

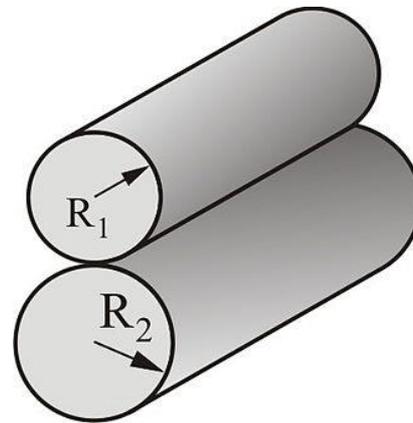
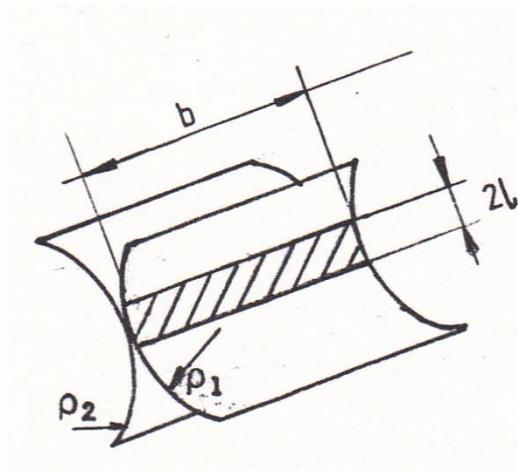
---

## PRINCIPE DE LA DEMARCHE

- On calcule la pression de contact au niveau du flanc des dents puis on la multiplie par une série de coefficients qui tiennent compte de l'engrènement réel.
- On compare ensuite cette pression à une valeur limite fonction des caractéristiques mécaniques superficielles du matériau (HB superficielle) et de la durée de vie désirée avant apparition de lésions.

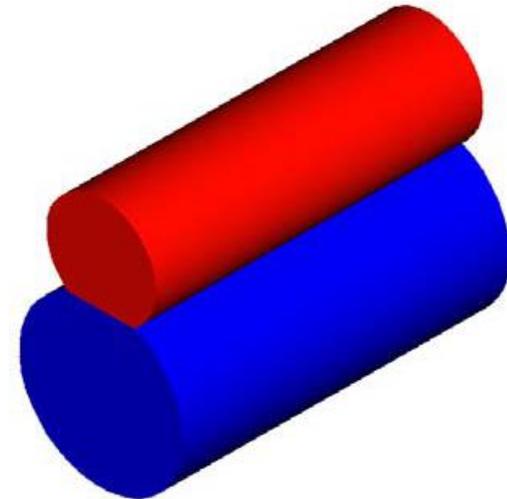
# PRESSION DE CONTACT

- Lorsque deux cylindres élastiques semi-infinis sont appliqués l'un contre l'autre et pressés avec un effort  $F_n$  le contact est régi par la **théorie du contact de Hertz**.
- Le contact s'établit sur une zone rectangulaire, de largeur  $2l$  tandis que la pression de contact varie transversalement selon une loi de répartition semi elliptique.



# THEORIE DU CONTACT DE HERTZ

- Soient deux cylindres repérés par les indices 1 et 2, de même longueur  $L$ , de diamètre respectifs  $d_1$  et  $d_2$ , et de matériaux de modules de Young et de coefficient de Poisson  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$ .



- La zone de contact est un rectangle de longueur  $L$  et de largeur  $2l$

$$l = \sqrt{\frac{4 F}{\pi L} \frac{\frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*}}{\frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2}}} \quad E_i^* = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}$$

- La pression maximale a lieu sur la ligne reliant axes des cylindres et est situé au centre de la zone

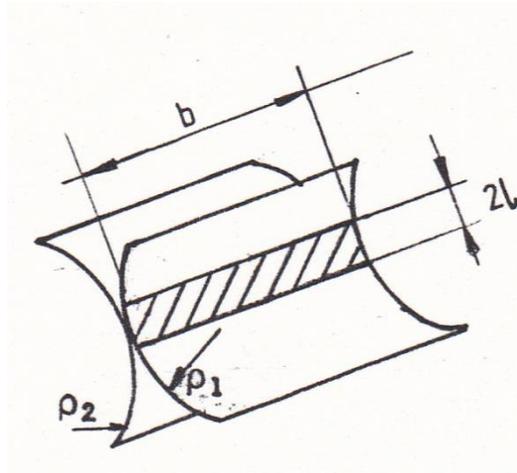
$$p_{\max} = \frac{2 F}{\pi l L}$$

# PRESSION DE CONTACT

- La **pression max** est donnée par

$$p_{max} = \frac{2 F_n}{\pi b \ell}$$

- où  $F_n$  est la charge normale à la dent,  $\ell$  est la demi largeur d'empreinte et  $b$  est la largeur de contact, ici la largeur de la plus petite des deux roues.



# PRESSION DE CONTACT

- La **théorie du contact de Hertz** conduit au résultat :

$$\ell = \sqrt{4 \frac{F_n}{b} \rho \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\pi}}$$

- Avec

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

- où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les rayons de courbure des surfaces cylindriques et

- Et

$$\kappa_i = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}$$

- Posons

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} = \kappa_1 + \kappa_2$$

# PRESSION DE CONTACT

- La valeur du demi grand axe de l'ellipse s'écrit

$$\ell = \sqrt{\frac{4 F_n \rho}{b \pi E^*}}$$

- Introduisons le résultat dans la pression de contact max:

$$p_{max} = \frac{2 F_n}{\pi b \ell} = \frac{2 F_n}{\pi b} \sqrt{\frac{\pi E^* b}{4 F_n \rho}}$$

- Après simplification

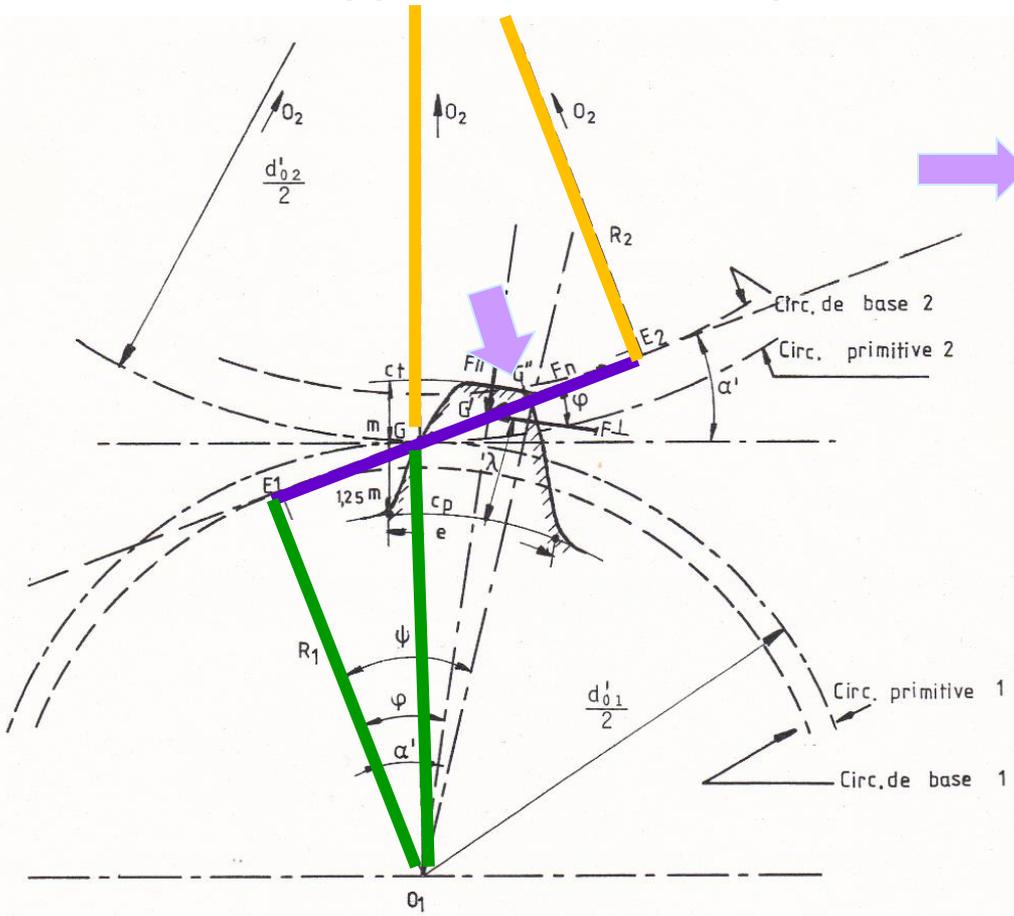
$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_n E^*}{\pi b \rho}}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

# PRESSION DE CONTACT

- On peut montrer en étudiant le profil de denture en développante de cercle que :



$$\rho = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

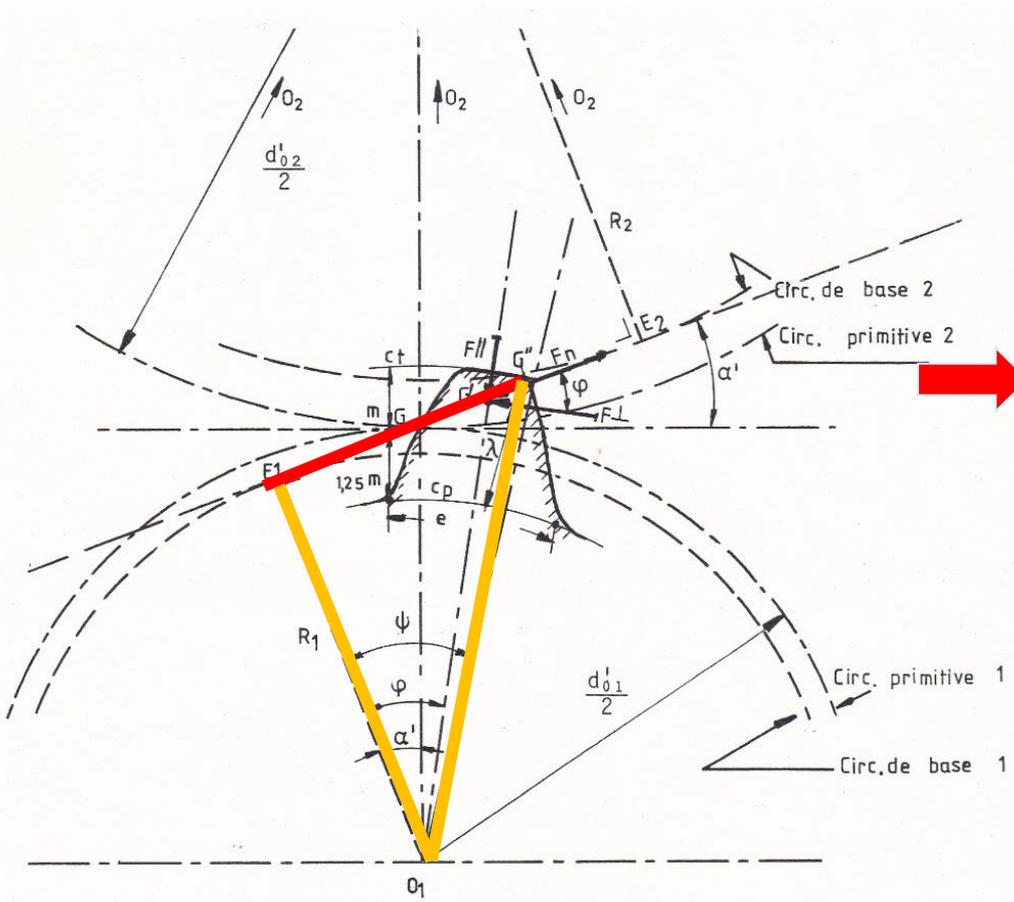
$$\rho_1 + \rho_2 = E_1 G'' + G'' E_2 = E_1 E_2 = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} \sin \alpha_0$$

$$\rho_1 = R_1 \tan \psi = \frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0 \tan \psi$$

$$\rho_2 = (\rho_1 + \rho_2) - \rho_1 = \frac{d_{01}}{2} [(1 + i) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \tan \psi]$$

# PRESSION DE CONTACT

- On peut montrer en étudiant le profil de denture en développante de cercle que :



$$\rho = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= E_1 G'' + G'' E_2 = E_1 E_2 \\ &= \frac{d_{01} + d_{02}}{2} \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

$$\rho_1 = R_1 \tan \psi$$

$$= \frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0 \tan \psi$$

$$\rho_2 = (\rho_1 + \rho_2) - \rho_1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d_{01}}{2} [(1 + i) \sin \alpha_0 \\ &\quad - \cos \alpha_0 \tan \psi] \end{aligned}$$



# PRESSION DE CONTACT

- Pour un point quelconque de ligne d'action (caractérisé par un angle  $\psi$ ), on peut montrer en étudiant le profil de denture en développante de cercle que :

$$\rho = \frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0 \tan \psi \left[ 1 - \frac{1}{i+1} \tan \psi \cot \alpha_0 \right]$$

- Dans le cas particulier d'un contact au point G situé sur l'entraxe, on a  $\alpha_0 = \psi$  :

$$\rho = \frac{d_{01}}{2} \sin \alpha_0 \frac{i}{i+1}$$

# PRESSION DE CONTACT

- Ecrivons l'expression de la pression maximale

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_n E^*}{\pi b \rho}}$$

- La force normale

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha_0}$$

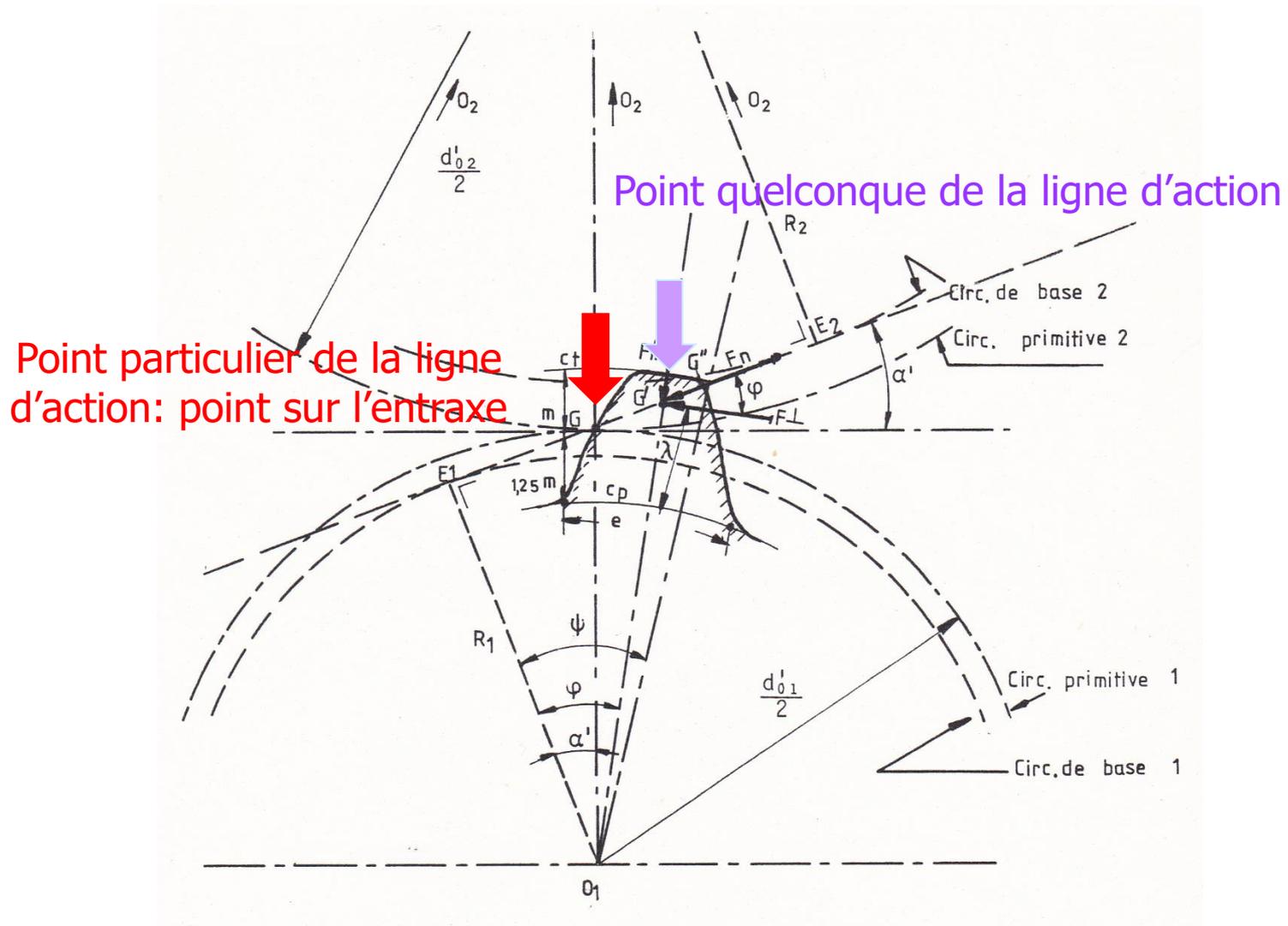
- Le rayon de courbure

$$\rho = \frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0 \tan \psi \left[ 1 - \frac{1}{i+1} \tan \psi \cot \alpha_0 \right]$$

- Il vient pour un point quelconque de la ligne d'action

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t E^*}{\pi b \cos \alpha_0} \frac{2(i+1)}{d_{01} \cos \alpha_0 \tan \psi (1+i - \cot \alpha_0 \tan \psi)}}$$

# PRESSION DE CONTACT



# PRESSION DE CONTACT

- On a pour un contact en tête de dent :

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t E^*}{\pi b \cos \alpha_0 d_{01} \cos \alpha_0 \tan \psi} \frac{2(i+1)}{(1+i - \tan^{-1} \alpha_0 \tan \psi)}}$$

- Pour le point de contact sur l'entraxe, point de tangence des diamètres primitifs ( $\alpha_0 = \psi$ ) :

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t E^*}{\pi b \cos \alpha_0 d_{01} \sin \alpha_0} \frac{2(i+1)}{i}}$$

- Ou encore en réarrangeant les termes

$$p_{max} = \sqrt{\frac{E^*}{\pi} \frac{F_t}{b d_{01}} \frac{2}{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \frac{(i+1)}{i}}$$

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- On calcule d'abord la **pression de contact maximale au point de contact des cercles primitifs** en utilisant la théorie de Hertz.

$$p_{max} = \sqrt{\frac{E^*}{\pi} \frac{F_t}{b d_{01}} \frac{2}{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \frac{(i+1)}{i}}$$

– Le coefficient matériau est

$$\frac{\pi}{E^*} = \pi \{ \kappa_1 + \kappa_2 \} = \pi \left\{ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right\}$$

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- La pression de contact théorique

$$p_{max} = \sqrt{\frac{E^*}{\pi} \frac{F_t}{b d_{01}} \frac{2}{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \frac{(i+1)}{i}}$$

- a peu de chance d'exister en réalité du fait des imperfections de la réalisation et du montage.
- La norme AGMA se base sur l'expression de la contrainte de pression de contact théorique en introduisant un certain nombre de coefficients.

$$p_{max} = C_p \sqrt{\frac{F_t}{b d_0 I} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- Le coefficient  $C_p$  est le **coefficient élastique** qui rend compte de la différence des modules élastiques de la roue et du pignon:

$$C_P = \sqrt{\frac{E^*}{\pi}}$$

- Soit

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right]}}$$

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- Le coefficient  $C_p$  est le **coefficient élastique**

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left[ \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right]}}$$

Elastic Coefficient  $C_p$  ( $Z_E$ ),  $\sqrt{\text{psi}}$  ( $\sqrt{\text{MPa}}$ ) Source: AGMA 218.01

Pinion Material	Pinion Modulus of Elasticity $E_p$ psi (MPa) <sup>a</sup>	Gear Material and Modulus of Elasticity $E_G$ , lbf/in <sup>2</sup> (MPa) <sup>a</sup>					
		Steel $30 \times 10^6$ ( $2 \times 10^5$ )	Malleable Iron $25 \times 10^6$ ( $1.7 \times 10^5$ )	Nodular Iron $24 \times 10^6$ ( $1.7 \times 10^5$ )	Cast Iron $22 \times 10^6$ ( $1.5 \times 10^5$ )	Aluminum Bronze $17.5 \times 10^6$ ( $1.2 \times 10^5$ )	Tin Bronze $16 \times 10^6$ ( $1.1 \times 10^5$ )
Steel	$30 \times 10^6$ ( $2 \times 10^5$ )	2300 (191)	2180 (181)	2160 (179)	2100 (174)	1950 (162)	1900 (158)
Malleable iron	$25 \times 10^6$ ( $1.7 \times 10^5$ )	2180 (181)	2090 (174)	2070 (172)	2020 (168)	1900 (158)	1850 (154)
Nodular iron	$24 \times 10^6$ ( $1.7 \times 10^5$ )	2160 (179)	2070 (172)	2050 (170)	2000 (166)	1880 (156)	1830 (152)
Cast iron	$22 \times 10^6$ ( $1.5 \times 10^5$ )	2100 (174)	2020 (168)	2000 (166)	1960 (163)	1850 (154)	1800 (149)
Aluminum bronze	$17.5 \times 10^6$ ( $1.2 \times 10^5$ )	1950 (162)	1900 (158)	1880 (156)	1850 (154)	1750 (145)	1700 (141)
Tin bronze	$16 \times 10^6$ ( $1.1 \times 10^5$ )	1900 (158)	1850 (154)	1830 (152)	1800 (149)	1700 (141)	1650 (137)

Poisson's ratio = 0.30.

<sup>a</sup>When more exact values for modulus of elasticity are obtained from roller contact tests, they may be used.

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- Le **coefficient de géométrie de la surface  $I$**  tient compte des rayons de courbure des dents en prise et de l'angle de pression et du diamètre primitif :

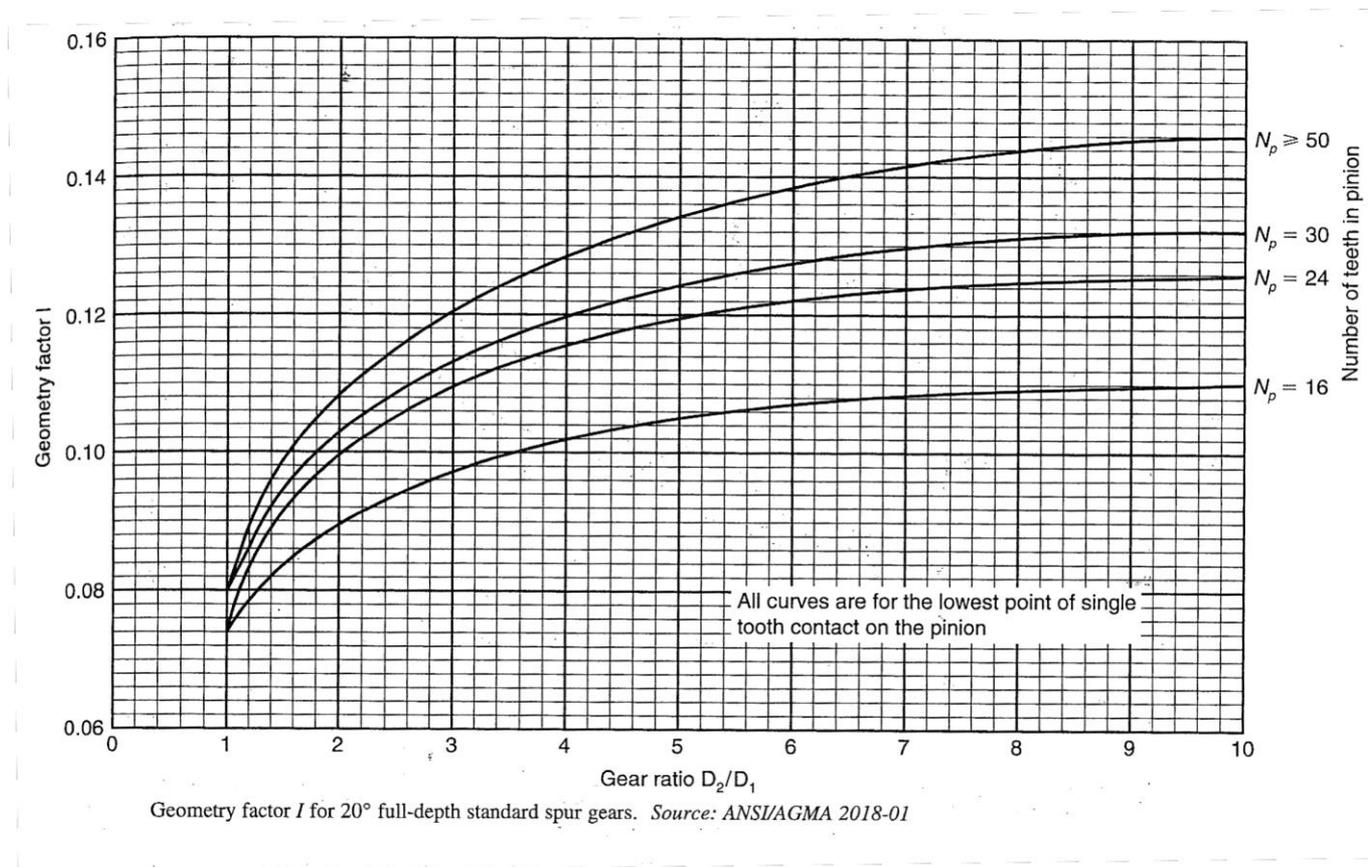
$$I = \frac{\rho \cos \alpha'}{d'}$$

- Dans le cas d'un engrenage sans déport et calculé au point de contact des diamètres primitifs, on a l'expression simplifiée

$$I = \frac{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0}{2} \frac{i}{(i + 1)}$$

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- Le **coefficient de géométrie de la surface  $I$**  peut également être évalué à l'aide d'abaques



# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- La pression doit être majorée pour tenir compte d'une **répartition inégale de l'effort**  $F_n$  sur la largeur de la dent :  
On remplace  $b$  par  $b'$  avec  $C_m$  fonction de la qualité de la denture

$$b' = \frac{b}{C_m} \quad C_m > 1$$

- L'effort  $F_n$  n'est pas appliquée progressivement mais un **effet de choc** intervient et on doit introduire un effort tangentiel majoré :

$$F'_t = \frac{F_t}{C_v} \quad C_v < 1$$

- $C_v$  est le même coefficient que  $K_v$  pour la flexion.

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

---

- $C_s = K_s$  le **facteur de d'échelle** identique à celui calculé pour la flexion
  
- $C_F$  le **facteur de fini de surface** tient compte de la rugosité de la surface.
  - $C_F = 1$  pour les procédés conventionnels
  - $C_F$  est diminué pour les procédés non conventionnels ou pour ceux qui laissent des contraintes résiduelles

# PRESSION DE CONTACT ADMISSIBLE - AGMA

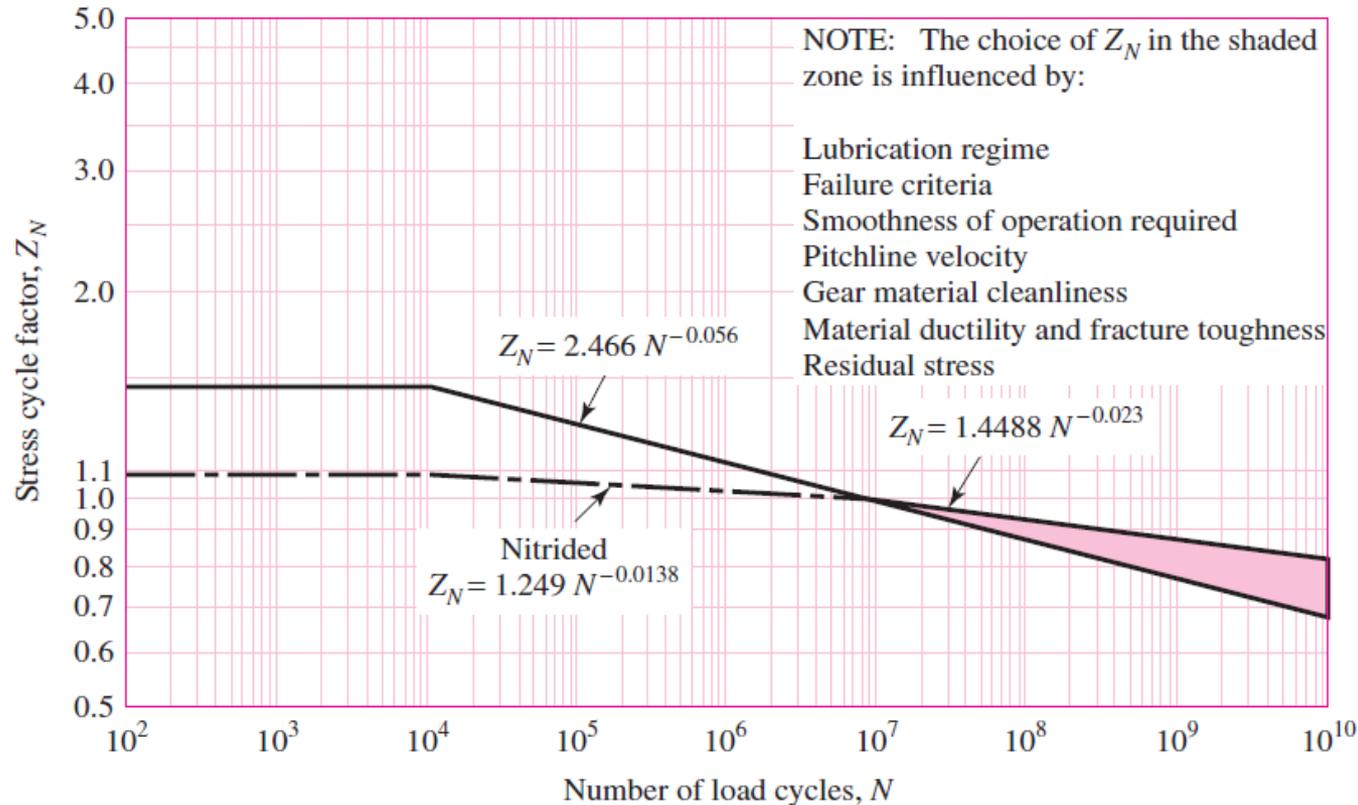
## PRESSION DE CONTACT ADMISSIBLE

- La **pression de contact admissible** représente la valeur de comparaison de la pression de contact calculé. Elle dépend de la durée de vie que l'on veut imposer.

$$S_{ac} = R_{pe,\phi} \frac{Z_N Z_W}{S_F Y_\theta Y_Z}$$

- $R_{pe,\phi}$  l'endurance de la matière de l'engrenage en pitting.
- Le facteur  $Z_N$  pour une autre durée de vie que  $10^7$  cycles.
- Le facteur  $Z_W$  tient compte d'un effet de la dureté HB sur la résistance au pitting.
- $Y_\theta$  pour une température de fonctionnement élevée.
- $Y_Z$  pour une probabilité de rupture plus faible ou plus élevée que 0,99.
- $S_F$  est le facteur de sécurité adopté supplémentaire.  
Typiquement  $S_F=1,5$

# CONTRAINTES DE FLEXION - AGMA



Facteur  $Z_N$  affectant la contrainte limite de pression de contact selon AGMA 218.01

# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

- La pression max admissible est améliorée par l'application d'une lubrification adéquate. La pression devra être comparée à

$$S'_{at} = S_{at} C_L \quad C_L < \text{ou} > 1$$

- Le **coefficient de lubrification**  $C_L$  tient compte de l'effet de la lubrification

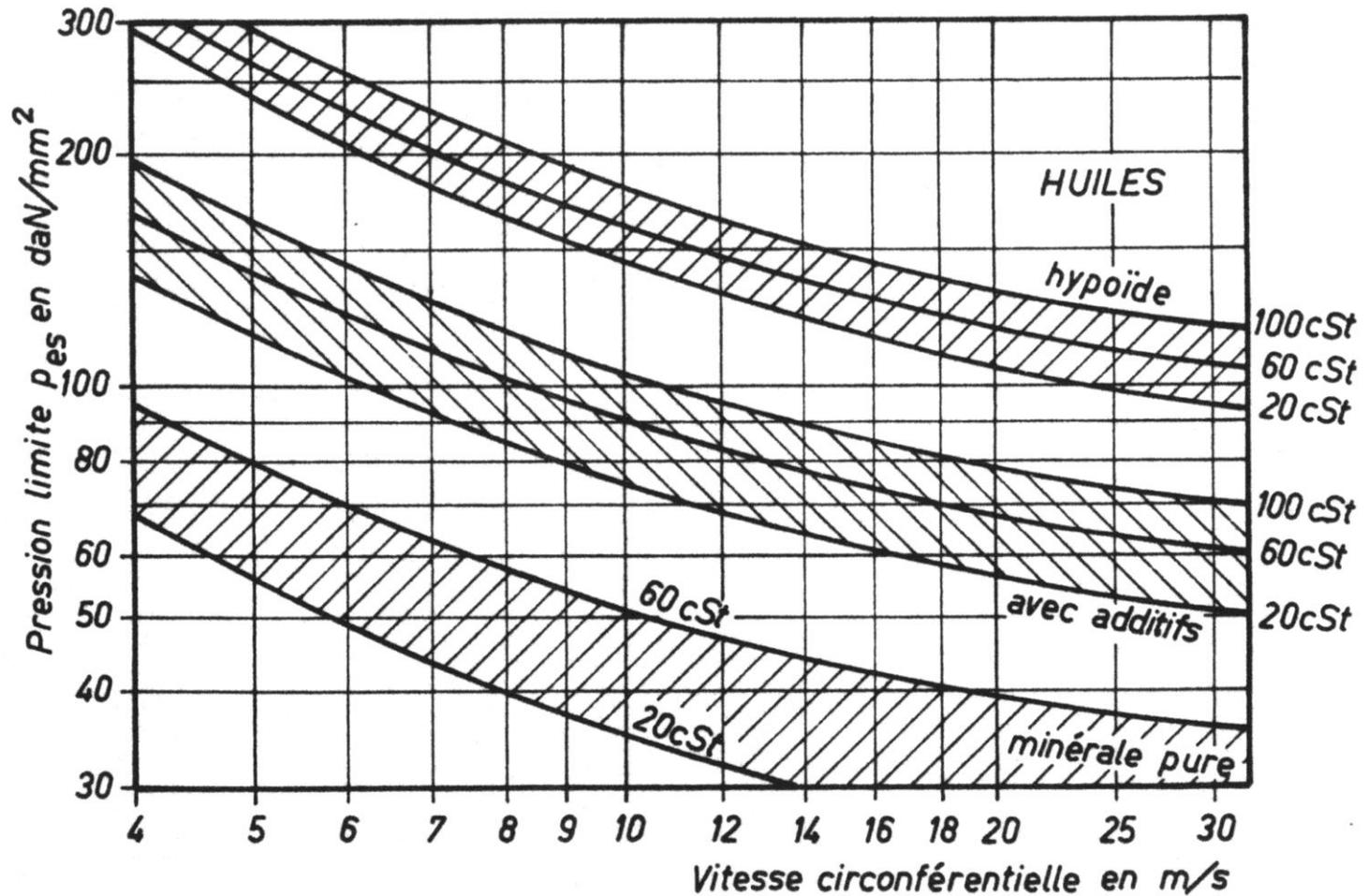
$$C_L = \begin{cases} C_L = 0,7, & \nu = 10 \text{ cSt} \\ C_L = 1,0 & \nu = 100 \text{ cSt} \\ C_L = 1,35 & \nu = 300 \text{ cSt} \end{cases}$$

- Pour le calcul de  $C_L$ , on peut admettre

$$C_L = 2,528 \cdot 10^{-2} (\ln \nu)^2 + 0,5215 \quad \nu [\text{cSt}]$$

$$C_L \leq 1,5$$

# PRESSIION DE CONTACT – METHODE AGMA



# PRESSION DE CONTACT – METHODE AGMA

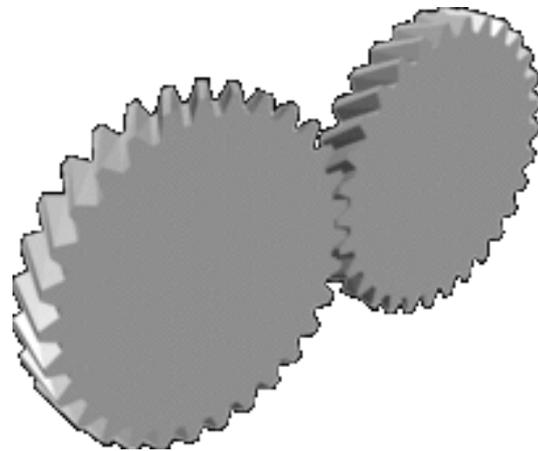
Tableau LXIII

*Choix de la viscosité du lubrifiant pour engrenage*

Vitesse circonférentielle en m/s	Viscosité de l'huile Charge de l'engrenage	
	continue	temporaire
jusqu'à 0,5	150 cSt	250 cSt
de 0,5 à 1,0	120 cSt	200 cSt
de 1,0 à 2,5	80 cSt	150 cSt
de 2,5 à 5,0	60 cSt	100 cSt
de 5,0 à 12,5	40 cSt	70 cSt
de 12,5 à 25	30 cSt	55 cSt
au-dessus de 25	20 cSt	30 cSt

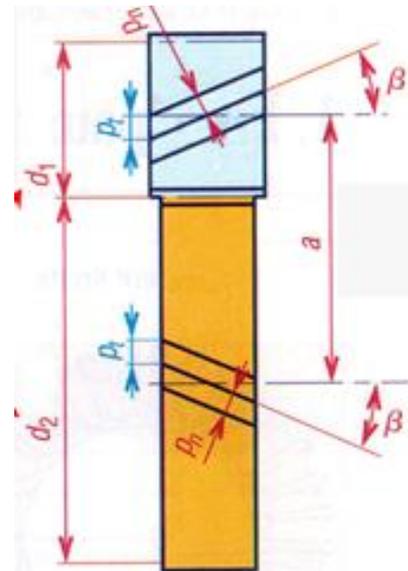
---

# DENTURE HELICOÏDALE

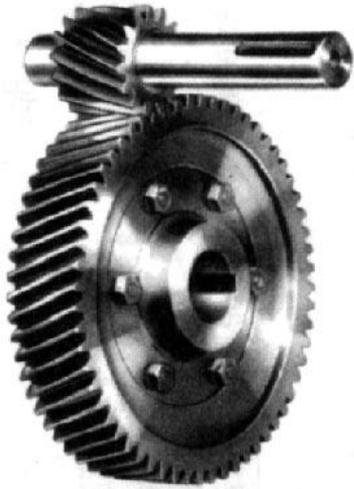


# DENTURE HELICOIDALE

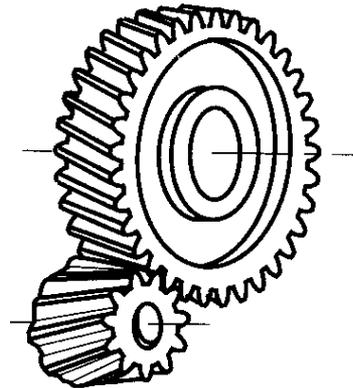
- Roues dentées dans lesquelles le profil des dents suit une hélicoïde.
- La roue est cylindrique. Les dents sont inclinées d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe de rotation ( $8^\circ < \beta < 30^\circ$ ).
- Les deux roues à dentures hélicoïdales doivent avoir leurs hélices de sens opposés pour s'engrener ensemble.



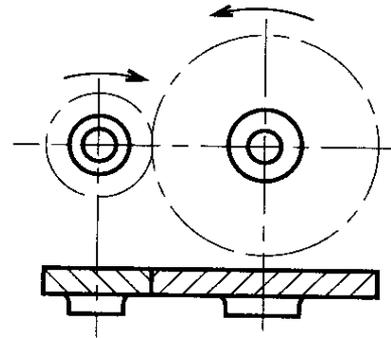
# DENTURE HELICOIDALE



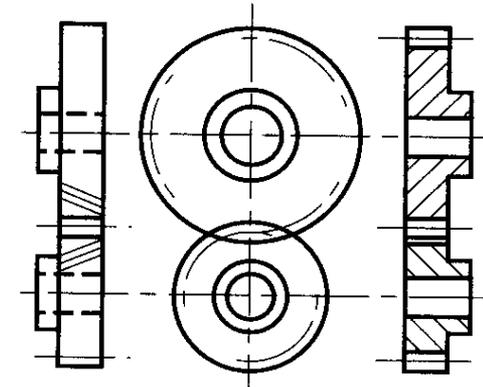
**perspective**



**principe**

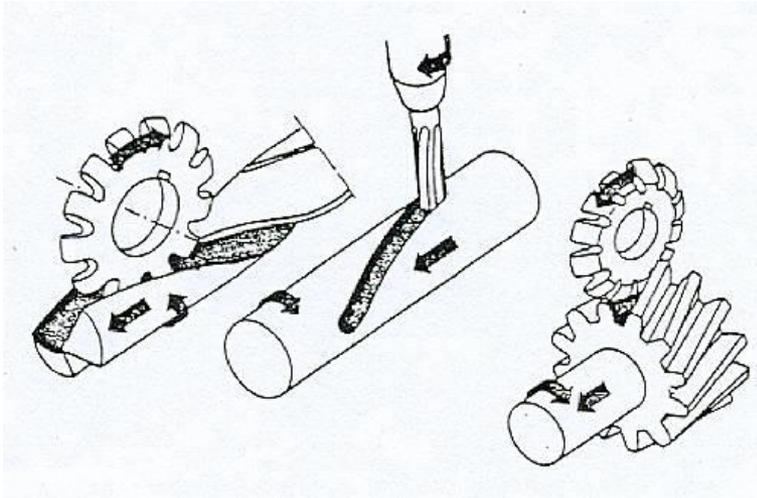


**dessin normalisé**



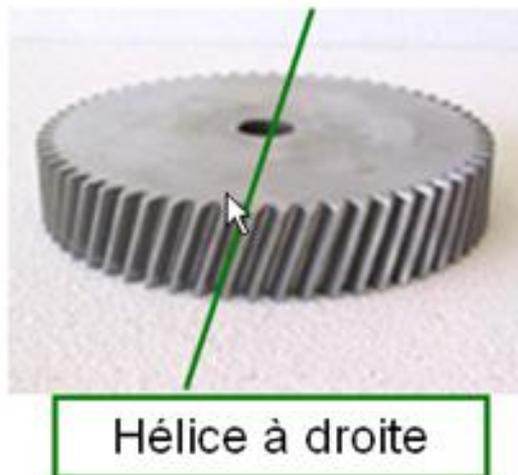
# DENTURE HELICOIDALE

- La taille d'une roue dentée est réalisée par le moyen d'un outil crémaillère ou de son équivalent (Hobb) décalée d'un angle  $\beta$  par rapport à la génératrice.
- L'enlèvement des copeaux est obtenu par un mouvement de va et vient de la crémaillère, le mouvement d'avance étant synchronisé avec le mouvement de rotation de la roue



# DENTURE HELICOIDALE

- On distingue les dentures hélicoïdales à droite / les dentures hélicoïdales à gauche.
  - Regarder la denture en prenant l'axe de rotation comme référence



# DENTURE HELICOIDALE

---

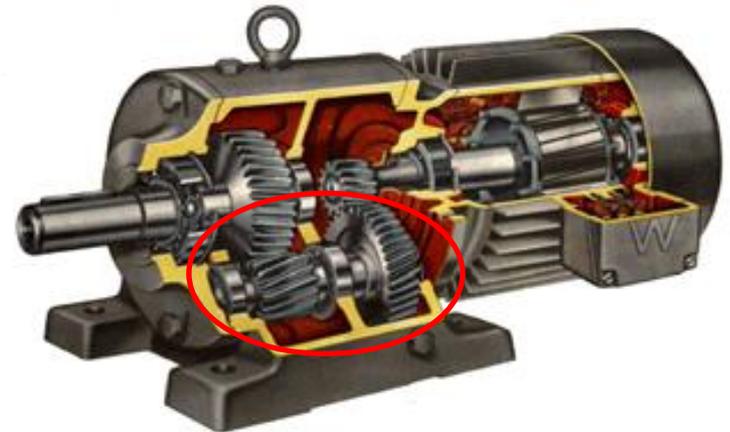
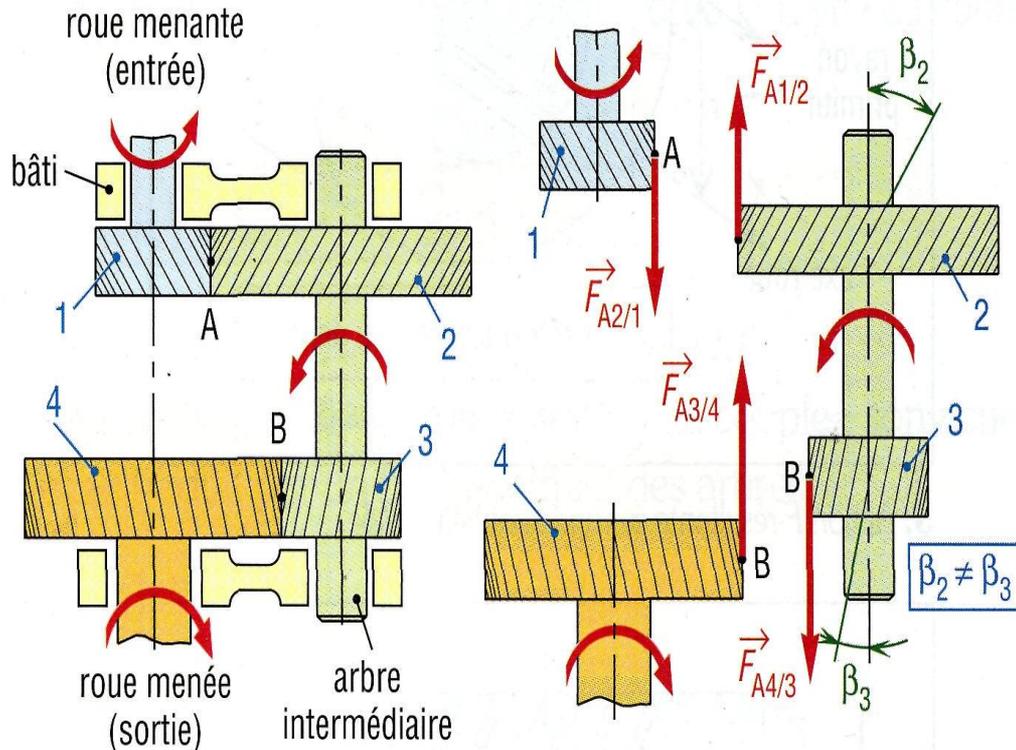
## **AVANTAGES** (par rapport aux dentures droites)

- Toujours plusieurs dents en prise → Régularité de la transmission à haute vitesse
- Moins d'usure et niveau sonore plus bas: chocs dus à la flexion des dents sont moindres
- Possibilité d'obtenir de façon précise des entraxes de dimension souhaitée en modifiant l'angle d'hélice
- Possibilité de transmettre un mouvement entre deux axes orthogonaux non concourants

# DENTURE HELICOIDALE

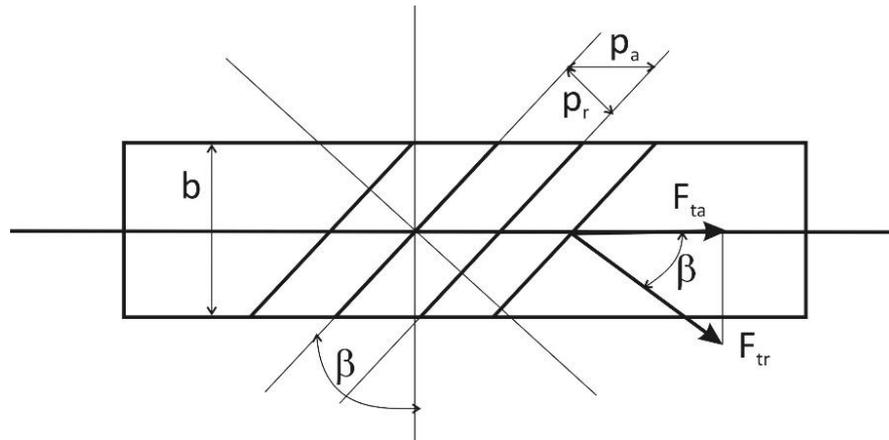
## INCONVENIENT

- Les dentures sur les arbres intermédiaires doivent être inclinées dans le même sens pour que les efforts axiaux se compensent (dirigés en sens inverses).



# DENTURE HELICOIDALE:

- Les profils sont toujours en développante de cercle mais l'axe des dents est incliné d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe principal du cylindre primitif



- On définit : le **profil réel** contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe des dents
- Le **profil apparent** contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre

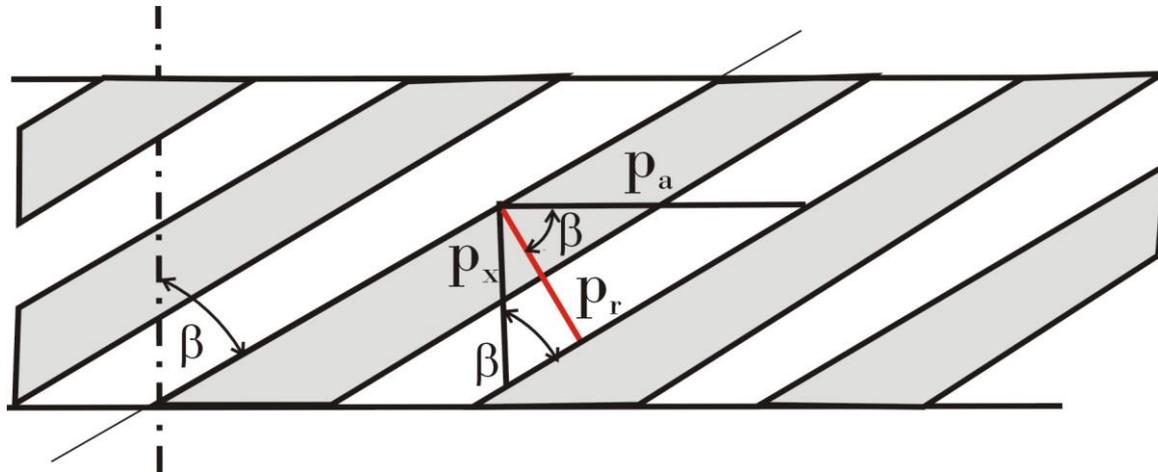
# MODULE ET PAS APPARENT

- Module apparent dans le plan du cylindre

$$p_a = \frac{p_r}{\cos \beta_0}$$

- Pas axial de la denture

$$p_x = \frac{p_r}{\sin \beta_0}$$



# MODULE ET PAS APPARENT

- Le module réel est celui qui est lié au pas réel. Il est normalisé et est donné par celui de la crémaillère

$$p_r = \pi m_r$$

- Le pas apparent s'en déduit

$$p_a = \pi m_a$$

$$m_a = \frac{m_r}{\cos \beta_0}$$

- L'entre axe

$$a_0 = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = m_r \frac{Z_1 + Z_2}{2 \cos \beta_0}$$

# ANGLE DE PRESSION

- L'angle de pression qui correspond à l'inclinaison du profil trapézoïdal de la crémaillère n'est pas le même dans le plan normal à la denture que dans le plan moyen de la roue.
- On peut montrer que **l'angle de pression est normalisé dans le plan normal à la denture** et que dans le plan apparent on a:

$$\tan \alpha_{0t} = \tan \alpha_0 \frac{1}{\cos \beta_0}$$

# CALCUL DES FORCES SUR LA DENTURE

- Force tangentielle dans le plan apparent donné par la puissance et la vitesse de rotation

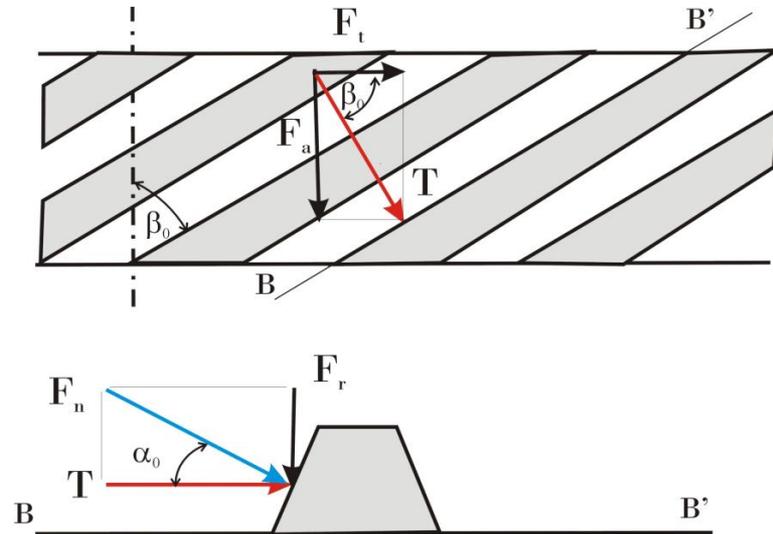
$$F_t = \frac{\mathcal{P} 60}{\pi d_0 N}$$

- Dans le plan tangent au diamètre primitif, la force normale à la denture dans le plan réel

$$T = \frac{F_t}{\cos \beta_0}$$

- Quant à la composante axiale

$$F_x = T \sin \beta_0 = F_t \tan \beta_0$$



Attention: ici changement de notation par rapport à la leçon sur les efforts dans les transmissions en 2020

- $Q \rightarrow F_t$
- $F_t \rightarrow T$

# CALCUL DES FORCES SUR LA DENTURE

- La composante  $F_t$  étant connue

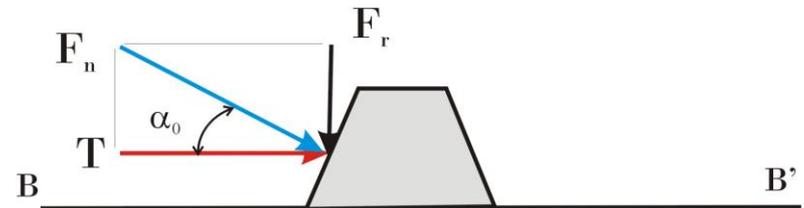
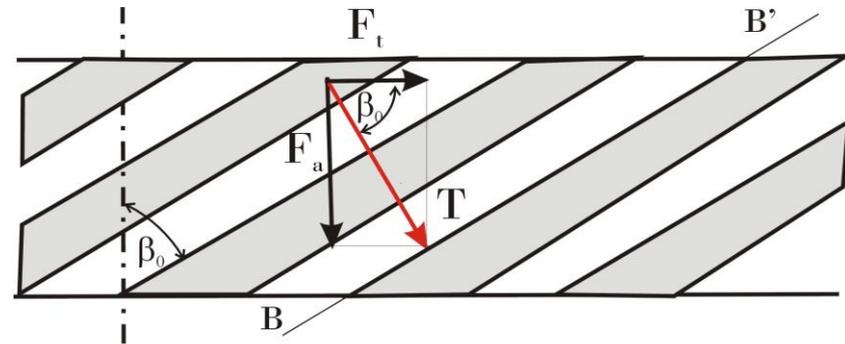
$$T = \frac{F_t}{\cos \beta_0}$$

- On calcule la force normale dans le plan normal de la denture

$$F_n = \frac{T}{\cos \alpha_0} = \frac{F_t}{\cos \alpha_0 \cos \beta_0}$$

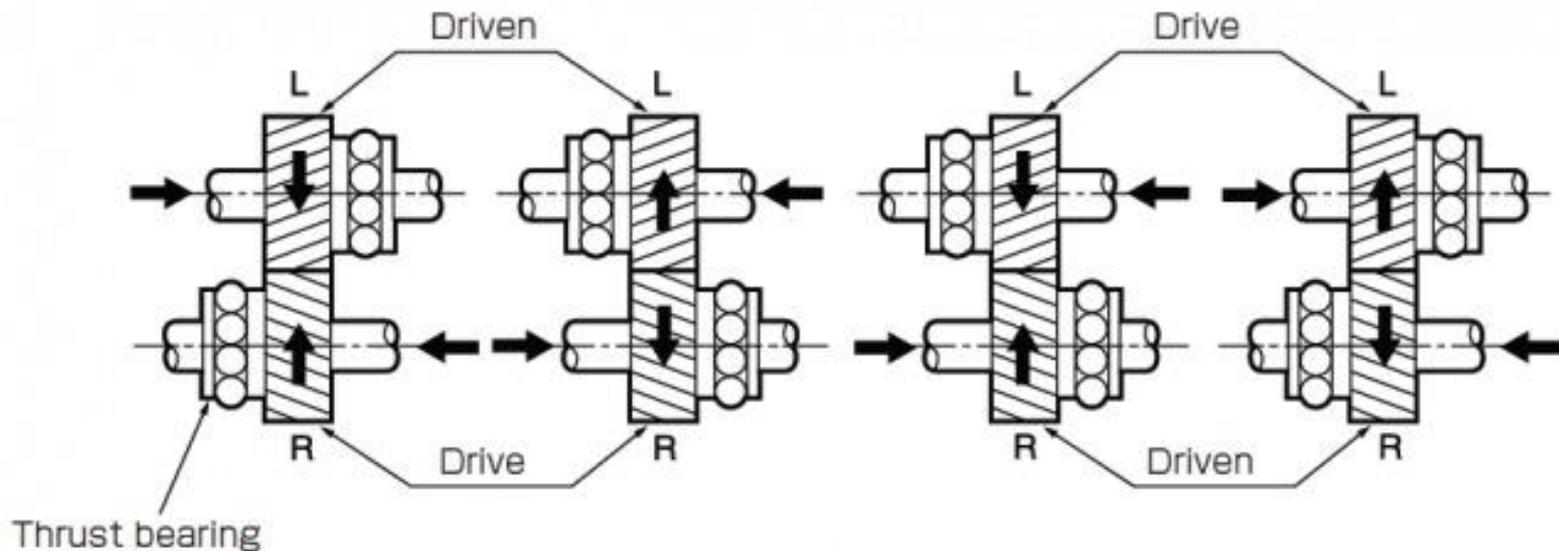
- Dans le plan normal à la denture, on trouve la composante radiale avec l'angle de pression  $\alpha_0$ :

$$F_r = T \tan \alpha_0 = F_t \frac{\tan \alpha_0}{\cos \beta_0}$$



# CALCUL DES FORCES SUR LA DENTURE

- La sens de la poussée axiale dépend si on est en rue menante ou menée.



# CALCUL DU MODULE

- La résistance à la flexion de la denture hélicoïdale peut être estimée en menant un raisonnement similaire à celui conduit sur les dentures droites si on considère la situation dans le plan réel.
- Le module est déterminé par la résistance à la flexion de la denture

$$m_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{T}{k R_\phi}}$$

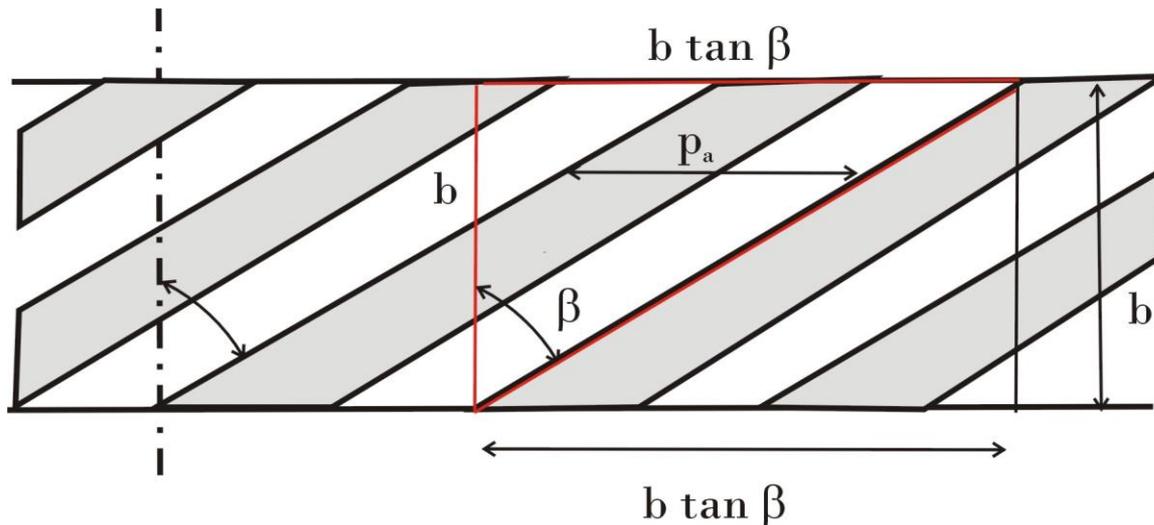
- Le module réel  $m_r$  est choisi dans les séries de Renard. On en déduit alors  $m_a$ :

$$m_a = \frac{m_r}{\cos \beta_0}$$

# CALCUL DU MODULE

- Pour les dentures hélicoïdales, la largeur doit être suffisamment importante pour permettre la continuité de l'engrènement. Il faut que l'arc parcouru lorsque le contact court le long du flanc de la dent soit plus grand que l'arc du pas apparent.

$$b \tan \beta_0 \geq p_a = \frac{\pi m_r}{\cos \beta_0}$$



# CALCUL DU MODULE

- Pour les dentures hélicoïdales, la largeur doit être suffisamment importante pour permettre la continuité de l'engrènement. Il faut que l'arc parcouru lorsque le contact court le long du flanc de la dent soit plus grand que l'arc du pas apparent.

$$b \tan \beta_0 \geq p_a = \frac{\pi m_r}{\cos \beta_0}$$

- Il vient

$$b \geq \frac{\pi m_r}{\sin \beta_0}$$

- Pour  $\beta=25^\circ$ , on trouve

$$b \geq 7,4 m_r$$

- On choisit donc k entre 6 et 10 afin d'avoir continuité du mouvement.

# CALCUL DU MODULE

---

- On peut alors appliquer aux dentures hélicoïdales la méthodologie développée dans le cas des dentures droites mais en utilisant les données du **profil réel**.

# REFERENCES

---

- AGMA. Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical, and Herringbone Gear Teeth, ANSI/AGMA Standard 908-B49, American Gear Manufacturers Association, 1989.
- J. Bozet. Dimensionnement des Eléments de Machines. Centrale des Cours de l'AEES. Université de Liège. 1995.
- R. Budynas, J. Nisbett. Shigley's Mechanical Engineering Design. Tenth edition Mc Graw Hill Education. 2015.
- R. Juvinall and K. Marshek. Fundamentals of Machine Component Design. Fifth edition. John Wiley and Sons. 2012.
- G. Henriot. Engrenages. Définition, dessin et calcul. Techniques de L'Ingénieur. Dossier B636.
- S. Schmid, B. Hamrock, B. Jacobson. Fundamentals of Machine Elements. SI Version. Third Edition. CRC Press. 2014.
- R. Norton. Machine Design. An integrated approach, Prentice Hall. 1998.