



LTAS - INGÉNIERIE DES  
VÉHICULES TERRESTRES  
UNIVERSITÉ DE LIÈGE



---

# INTRODUCTION A LA CONCEPTION MECANIQUE ET A L'USINAGE

---

Pierre DUYSINX

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
ANNÉE ACADÉMIQUE 2018-2019



# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>TECHNIQUES D'AVANT PROJET</b>                          | <b>1</b>  |
| 1.1      | SOLLICITATION ÉLÉMENTAIRE . . . . .                       | 1         |
| 1.1.1    | Calcul des efforts externes et internes . . . . .         | 1         |
| 1.1.2    | Sollicitations élémentaires . . . . .                     | 2         |
| 1.2      | TENSIONS ADMISSIBLES ET COEFFICIENT DE SECURITE . . . . . | 3         |
| 1.2.1    | Tension admissible . . . . .                              | 3         |
| 1.2.2    | Coefficient de sécurité . . . . .                         | 4         |
| 1.2.3    | Détermination des coefficients de sécurité . . . . .      | 5         |
| 1.2.4    | Choix du coefficient de sécurité K . . . . .              | 5         |
| 1.2.5    | Cas des autres modes de sollicitation . . . . .           | 6         |
| 1.3      | SOLLICITATION PAR CHOC OU PAR APPLICATION BRUSQUE         | 8         |
| 1.4      | SOLLICITATION VARIABLE DANS LE TEMPS . . . . .            | 13        |
| 1.5      | EFFORTS MAL DÉFINIS . . . . .                             | 17        |
| 1.6      | SOLLICITATIONS COMPOSEES . . . . .                        | 18        |
| 1.6.1    | Critère de la plus grande tension principale . . . . .    | 19        |
| 1.6.2    | Critères de plastification . . . . .                      | 19        |
| 1.6.3    | Sollicitations composées en fatigue . . . . .             | 23        |
| 1.7      | SOLLICITATIONS D'ARBRES CYLINDRIQUES . . . . .            | 23        |
| 1.8      | COEFFICIENT DE MAJORATION $\psi$ EN FLEXION PURE          | 24        |
| <b>2</b> | <b>EFFORTS DANS LES TRANSMISSIONS</b>                     | <b>31</b> |
| 2.1      | INTRODUCTION . . . . .                                    | 31        |
| 2.2      | PRINCIPE . . . . .  | 31        |
| 2.3      | LE RHÉOGRAMME DE LA PUISSANCE . . . . .                   | 32        |
| 2.3.1    | Réducteur à engrenages . . . . .                          | 33        |
| 2.3.2    | Distribution de puissance par une courroie . . . . .      | 36        |
| 2.3.3    | Une distribution plus complexe . . . . .                  | 38        |
| 2.3.4    | Un cas de faible rendement . . . . .                      | 39        |
| 2.4      | EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES . . . . .         | 40        |
| 2.4.1    | Engrenages à dentures droites . . . . .                   | 40        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.4.2    | Engrenages à denture hélicoïdale . . . . .  | 43        |
| 2.4.3    | Engrenages coniques à denture droite . . . . .  | 45        |
| 2.4.4    | Efforts secondaires dans les transmissions par courroie                                   | 46        |
| 2.4.5    | Rapport de transmission . . . . .   | 47        |
| 2.4.6    | Efforts secondaires dans les transmissions par chaîne .                                   | 55        |
| <b>3</b> | <b>LA CONCEPTION A LA FATIGUE</b>   | <b>59</b> |
| 3.1      | LE PHENOMENE DE FATIGUE . . . . .   | 59        |
| 3.1.1    | Objet du chapitre . . . . .   | 59        |
| 3.1.2    | Brève historique . . . . .  | 60        |
| 3.1.3    | Les différentes phases d'une rupture par fatigue . . . .                                  | 62        |
| 3.1.4    | Sollicitations cycliques . . . . .  | 64        |
| 3.1.5    | Limite d'endurance - Courbe de Wöhler . . . . .   | 66        |
| 3.1.6    | Diagrammes de Haigh . . . . .   | 75        |
| 3.1.7    | Diagramme de Goodman - Smith . . . . .  | 78        |
| 3.1.8    | Diagramme VDI . . . . .   | 79        |
| 3.1.9    | Diagramme de Soderberg . . . . .  | 80        |
| 3.1.10   | Sécurité par rapport à la Soderberg Failure Line . . . .                                  | 81        |
| 3.1.11   | Fluctuation des charges . . . . .   | 83        |
| 3.1.12   | Caractéristiques de quelques matériaux utilisés en construc-<br>tion mécanique . . . . .  | 84        |
| 3.2      | DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE<br>CYCLES . . . . .                             | 93        |
| 3.2.1    | Introduction . . . . .  | 93        |
| 3.2.2    | Effet d'échelle : coefficient $b_1$ . . . . .   | 93        |
| 3.2.3    | Etat de surface : coefficient correcteur $b_2$ . . . . .                                  | 94        |
| 3.2.4    | Facteur de concentration de contrainte dans les pièces .                                  | 96        |
| 3.2.5    | Pièces soumises à des sollicitations pulsatoires . . . . .                                | 103       |
| 3.2.6    | Pièces lisses soumises à des sollicitations composées al-<br>ternées . . . . .            | 110       |
| 3.2.7    | Pièces entaillées soumises à des sollicitations pulsa-<br>toires en phase . . . . .       | 112       |
| 3.3      | DIMENSIONNEMENT POUR UNE DUREE DE VIE LIMITEE<br>TEE . . . . .                            | 114       |
| 3.4      | CAS DE PIECES REELLES SOUMISES A DIVERS NIVEAUX<br>DE CONTRAINTE . . . . .                | 117       |
| 3.4.1    | Chargement de la pièce par un série de niveaux de sol-<br>licitations constants . . . . . | 117       |
| 3.5      | VALEUR DU COEFFICIENT DE SECURITE . . . . .   | 118       |
| 3.6      | AMELIORATION DE L'ENDURANCE . . . . .   | 119       |
| 3.7      | TRAITEMENTS DE SURFACE . . . . .  | 123       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.7.1    | Traitements mécaniques - plastification locale à froid . . . . .                                 | 124        |
| 3.7.2    | Traitements thermiques . . . . .   | 128        |
| <b>4</b> | <b>ENGRENAGES</b>  | <b>133</b> |
| 4.1      | INTRODUCTION . . . . .   | 133        |
| 4.1.1    | Définitions . . . . .  | 133        |
| 4.1.2    | Elements historiques . . . . .   | 133        |
| 4.1.3    | Applications des engrenages en mécanique . . . . .   | 135        |
| 4.1.4    | Nomenclature . . . . .   | 136        |
| 4.1.5    | Types d'engrenages . . . . .   | 137        |
| 4.1.6    | Représentation graphique . . . . .   | 137        |
| 4.2      | CINEMATIQUE DE L'ENGRENAGE A DENTURE DROITE  | 138        |
| 4.2.1    | Définitions fondamentales . . . . .  | 139        |
| 4.2.2    | Cinématique de l'engrènement . . . . .   | 144        |
| 4.2.3    | Denture en développante de cercle . . . . .  | 148        |
| 4.2.4    | Dimensions de la dent . . . . .  | 150        |
| 4.2.5    | Angle de pression . . . . .  | 152        |
| 4.2.6    | Forces normales et tangentielles entre dents . . . . .   | 153        |
| 4.2.7    | Influence de la variation d'entraxe . . . . .  | 154        |
| 4.2.8    | Influence de la variation de diamètre primitif. Notion<br>de crémaillère d'engrènement . . . . . | 156        |
| 4.2.9    | Interférence de denture . . . . .  | 157        |
| 4.2.10   | Déport de denture . . . . .  | 163        |
| 4.2.11   | Notion de recouvrement de dentures . . . . .   | 173        |
| 4.3      | RESISTANCE DES DENTURES<br>DROITES . . . . .   | 178        |
| 4.3.1    | Résistance à la flexion . . . . .  | 178        |
| 4.3.2    | Résistance à la pression de contact . . . . .  | 186        |
| 4.4      | ENGRENAGES A DENTURE HELICOIDALE . . . . .   | 191        |
| 4.4.1    | Paramètres fondamentaux des dentures<br>hélicoïdales . . . . .                                   | 193        |
| 4.4.2    | Forces sur la denture hélicoïdale . . . . .  | 195        |
| 4.4.3    | Angle de pression apparent . . . . .   | 197        |
| 4.4.4    | Dimensions générales des roues . . . . .   | 198        |
| 4.4.5    | Nombre de dents et diamètre primitif de la denture<br>droite équivalente . . . . .               | 199        |
| 4.4.6    | Déport de dentures hélicoïdales . . . . .  | 201        |
| 4.4.7    | Longueur de recouvrement d'une denture<br>hélicoïdale. Paramètre de recouvrement . . . . .       | 202        |
| 4.4.8    | Résistance des dentures hélicoïdales . . . . .   | 203        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.5      | CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES . . . . .                          | 204        |
| 4.5.1    | Détermination de la géométrie approchée . . . . .                               | 204        |
| 4.5.2    | Méthode simplifiée de dimensionnement selon l'ISO . . . . .                     | 209        |
| 4.5.3    | Exemples d'application de la méthode ISO simplifiée . . . . .                   | 213        |
| 4.5.4    | Méthode de dimensionnement selon l'AGMA . . . . .                               | 224        |
| 4.5.5    | Exercices Méthode AGMA . . . . .  | 225        |
| <b>5</b> | <b>TRANSMISSIONS PAR COURROIE ET POULIES</b>                                    | <b>237</b> |
| 5.1      | GENERALITES . . . . .   | 237        |
| 5.2      | FORMULES FONDAMENTALES . . . . .  | 242        |
| 5.2.1    | Définitions et relations de base . . . . .                                      | 242        |
| 5.2.2    | Rendement global et rapport de réduction réel . . . . .                         | 245        |
| 5.3      | ETUDE DYNAMIQUE . . . . .   | 247        |
| 5.3.1    | Effort périphérique équivalent . . . . .  | 247        |
| 5.3.2    | Formule fondamentale d'Euler . . . . .  | 248        |
| 5.3.3    | Tensions centrifuge, tension productive . . . . .                               | 252        |
| 5.3.4    | Valeurs des tensions dans les brins pour un effort effectif donné $Q$ . . . . . | 254        |
| 5.3.5    | Calcul des tensions dans la courroie pour le système de poulies . . . . .       | 255        |
| 5.3.6    | Cas des courroies trapézoïdales . . . . .                                       | 256        |
| 5.4      | GLISSEMENT - RENDEMENT DE GLISSEMENT . . . . .                                  | 258        |
| 5.4.1    | Glissement élastique . . . . .  | 258        |
| 5.4.2    | Glissement d'ensemble . . . . .   | 260        |
| 5.5      | TENSION DE POSE . . . . .   | 261        |
| 5.5.1    | Calcul de la tension de pose . . . . .  | 262        |
| 5.5.2    | Procédure de choix d'une tension de pose . . . . .                              | 265        |
| 5.5.3    | Valeur minimale de la tension de pose . . . . .                                 | 266        |
| 5.5.4    | Contrôle de la tension de pose . . . . .  | 268        |
| 5.5.5    | Technologies d'imposition d'une tension de pose . . . . .                       | 269        |
| 5.6      | ENTRAXE ET LONGUEUR DE COURROIE . . . . .                                       | 273        |
| 5.6.1    | Entraxe . . . . .   | 273        |
| 5.6.2    | Longueur $L$ du lien flexible . . . . .   | 275        |
| 5.7      | DIMENSIONNEMENT - CHOIX DES COURROIES . . . . .                                 | 278        |
| 5.7.1    | Courroies plates . . . . .  | 278        |
| 5.7.2    | Courroies trapézoïdales . . . . .   | 285        |
| 5.7.3    | Courroies crantées . . . . .  | 288        |
| <b>A</b> | <b>LEXIQUE</b>  | <b>293</b> |

# Chapitre 1

## TECHNIQUES D'AVANT PROJET

### 1.1 SOLLICITATION ÉLÉMENTAIRE

#### 1.1.1 Calcul des efforts externes et internes

Le dimensionnement est principalement basé sur le calcul de résistance et de déformation des organes formant un système mécanique. Pour cela, on détermine d'abord les efforts sollicitant chacun des organes lors du fonctionnement du système. Dans nombre de cas, on essaie de se ramener à un ensemble de cas de *sollicitations quasi statiques équivalentes*.

Pour tenir compte des liaisons cinématiques, on peut décomposer le mécanisme en remplaçant chaque liaison par des efforts inconnus. L'équilibre du corps en translation et rotation est ensuite exprimé par les six équations de Newton-Euler

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.1)$$

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt} (J\vec{\omega}) \quad (1.2)$$

Une fois les sollicitations externes connues, on détermine les efforts internes afin de calculer les contraintes et déformations de la matière. Utilisons le *principe de la coupe*. On trouve alors les forces et moments appliqués à cette section du solide.

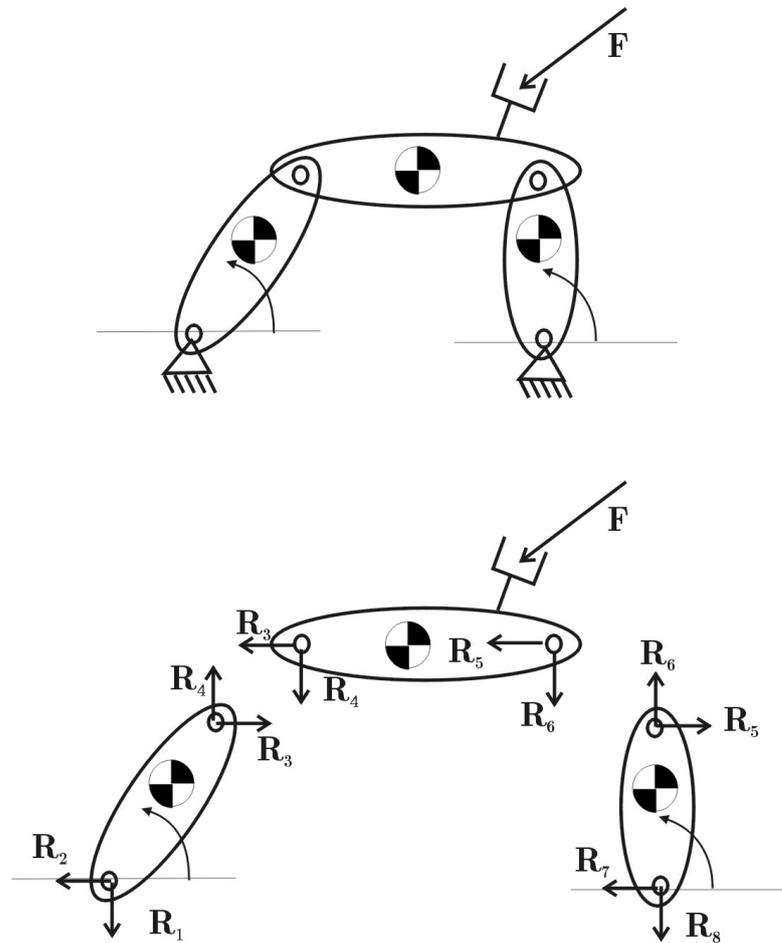


FIGURE 1.1 – Calcul des efforts et sollicitations des organes mécaniques au sein du système

### 1.1.2 Sollicitations élémentaires

Les forces agissant à gauche de la section droite  $G$  de la poutre représentée à la Figure 1.2 peuvent se ramener à :

- Une force  $R$  d'orientation quelconque dans l'espace passant par le centre de gravité  $G$  de la section droite ;
- Un moment  $M$ .

$R$  et  $M$  occupant une position quelconque par rapport au plan de la section.

La force  $R$  peut se décomposer elle-même en une force normale  $N$  au plan de la section et une force  $T$  contenue dans le plan de la section. Quant au moment  $M$ , il se décompose lui-même en un moment  $M_t$  normal au plan de la section et un moment  $M_f$  contenu dans le plan de la section. Selon la

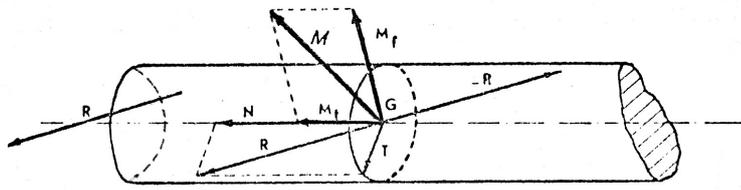


FIGURE 1.2 – Eléments de réduction

position dans l'espace de la résultante  $R$  des forces à gauche, chacune des quatre actions citées pourrait être la seule à s'exercer. Dans cette hypothèse on dénombre quatre *sollicitations simples ou élémentaires* :

- L'*effort normal*  $N$ , qui détermine une sollicitation de traction ou de compression,
- L'*effort tranchant*  $T$ , qui détermine une sollicitation de cisaillement simple,
- Le *moment de flexion pure*  $M_f$  (plane ou gauche) entraînant un système de tensions de traction et de compression ;
- Le *moment de torsion*  $M_t$ , qui détermine une sollicitation de torsion pure, donnant naissance à un système de sollicitations de cisaillement.

## 1.2 TENSIONS ADMISSIBLES ET COEFFICIENT DE SECURITE

### 1.2.1 Tension admissible

On appelle *tension admissible* la tension (ou contrainte) que le matériau peut accepter sans s'endommager ou se rompre.

Pour les matériaux ductiles tels que l'acier au carbone, l'acier allié, l'acier coulé, l'aluminium et ses alliages, les métaux légers et leurs alliages, le laiton, etc. il est évident qu'il faut éviter de mettre la pièce en état de déformation permanente. La tension admissible doit donc être telle que la limite d'élasticité apparente  $R_e$  ou  $\sigma_{0,2}$  ne soit pas dépassée. Si on convient de désigner par  $R$  la tension admissible, on admet souvent que l'on puisse écrire

$$R \leq R_e \quad \text{ou} \quad \sigma_{0,2} = R^* \quad (1.3)$$

où  $R^*$  est la tension de référence du matériau.

En ce qui concerne les fontes grises lamellaires et les matériaux raides, ils ne présentent généralement pratiquement pas de déformation permanente. C'est donc par rapport à la tension de rupture  $R_0$  faut définir la sécurité pour fixer la tension admissible.

$$R^* = R_0 \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Coefficient de sécurité

En fait il faut assurer l'inégalité à un degré en fixant en grandeur la sécurité que l'on veut garantir. Afin de tenir compte de toute une série de facteurs non maîtrisés, des erreurs de modélisation, de la méconnaissance des sollicitations exactes, on va limiter les tensions dans la matière à une certaine fraction de la valeur admissible. On peut écrire :

$$R = \frac{R^*}{K} \quad (1.5)$$

$K$  étant un coefficient supérieur à l'unité  $K > 1$ , appelé *coefficient de sécurité*.

### Exemple

Parfois les modélisations du système ou des caractéristiques du matériau, font que l'on se place naturellement du côté de la sécurité. Par exemple pour les aciers doux à mi durs, il est courant d'adopter en bonne pratique une limite élastique calculée à partir de la limite de rupture selon la formule suivante

$$R_e = \frac{R_0}{2} + 50 \text{ à } 100 \text{ MPa} \quad (1.6)$$

En conséquence l'ancienne pratique qui consistait à situer la limite d'élasticité du matériau à la moitié de la limite de rupture revient à adopter une tension de référence  $R^*$  plus faible que  $R_e$  :

$$R^* = \frac{R_0}{2} = \frac{R_e}{K^*} < R \quad (1.7)$$

Il en découle que l'ancienne pratique adoptait implicitement un coefficient de sécurité  $K^*$  :

$$K^* = \frac{2 R_e}{R_0} = \frac{2 R_0}{R_0 2} + (50 \text{ à } 100) \frac{2}{R_0} \quad (1.8)$$

$$K^* \simeq 1 + \frac{2 \cdot 75}{R_0} = 1 + \frac{150}{R_0} \quad (1.9)$$

$K^*$  variait donc en fonction de la nuance d'acier :

|                  |                         |              |
|------------------|-------------------------|--------------|
| Acier extra-doux | $R_0 = 350 \text{ MPa}$ | $K^* = 1.42$ |
| Acier doux       | $R_0 = 420 \text{ MPa}$ | $K^* = 1.35$ |
| Acier demi-doux  | $R_0 = 550 \text{ MPa}$ | $K^* = 1.27$ |
| Acier demi-dur   | $R_0 = 600 \text{ MPa}$ | $K^* = 1.25$ |

### 1.2.3 Détermination des coefficients de sécurité

Ce qui a été dit du choix de la tension admissible était fondé sur la connaissance de la tension de rupture  $R_0$  et de la limite d'élasticité  $R_e$  fournies par les essais de traction. Cette limite n'est donc applicable en toute rigueur au stade de nos connaissances actuelles, qu'aux sollicitations de même type ayant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire au cas de la traction simple exercée par l'application d'un effort :

- progressivement appliqué ;
- constant en direction ;
- parfaitement déterminé, c'est-à-dire ne donnant pas lieu à un effort et à une tension secondaire.

Il y a lieu d'établir ce que devient cette notion :

- d'abord en restant dans le cas de la traction simple, compte tenu d'autres façon d'appliquer la sollicitation ;
- dans les cas d'autres sollicitations simples ;
- dans le cas de sollicitations composées, c'est-à-dire résultant de l'application simultanée de deux ou plusieurs sollicitations simples.

### 1.2.4 Choix du coefficient de sécurité K

Examinons maintenant le calcul de la tension admissible référentielle  $R$  à défaut de coefficient fixé par une norme.

**Dans le cas de matériaux ductiles**, le coefficient de sécurité est appliqué à la limite élastique  $R_e$  ou à son équivalent  $\sigma_{0,2}$ . Etant donné les hypothèses défavorables (choc mou, pas d'amortissement, etc.) introduites lors de l'étude

des sollicitations brusques, avec ou sans choc, on peut judicieusement choisir une valeur de  $K$  inférieure à 2. On adoptera ainsi

$$R = \frac{R_e \text{ ou } \sigma_{0,2}}{K} = \frac{R^*}{K}$$

avec  $K = 1.3$  à  $1.8$ .

La valeur minimale de  $K$  est introduite lorsque les efforts sont bien connus, pour des pièces mécaniques peu importantes et facilement remplaçables. Les valeurs plus élevées de  $K$  seront utilisées dans le cas contraire.

**Dans le cas des matériaux fragiles** ne présentant aucune propriété de ductilité, le coefficient de sécurité est appliqué à la limite de rupture  $R_0$ . On adopte une valeur  $K$  plus élevée que dans le cas précédent :

$$R = \frac{R_0}{K}$$

avec  $K = 1.5$  à  $2.5$ .

Les mêmes remarques que précédemment s'imposent quant au choix des valeurs, faibles ou élevées, du coefficient de sécurité.

### 1.2.5 Cas des autres modes de sollicitation

Les valeurs limites des tensions admissibles qui correspondent à d'autres types de sollicitation que la traction simple sont fixées toutes par rapport à la tension référentielle  $R$ .

**Matériaux ductiles** : aciers, aciers coulés, fontes malléables et nodulaires, alliages de cuivre, alliages d'aluminium, etc. On prend :

|  |  |
|--|--|
| En compression   | $R' = R$<br>( $R' = 1.2 R$ pour alliages d'Alu.) |
| En cisaillement simple perpendiculaire aux fibres du laminage ou du forgeage | $R''_{\perp} = 0.8 R = 4/5 R$                    |
| En cisaillement pur  | $R'' = 0.65$ à $0.70 R$                          |
| En cisaillement simple parallèle aux fibres du laminage ou du forgeage       | $R''_{\parallel} = 0.6 R = 3/5 R$                |
| Pression de contact  | $R^* = R_e \text{ ou } \sigma_{0,2}$             |

**Matériaux fragiles** :

|                           | Compression   | Cisaillement  |
|---------------------------|---------------|---------------|
| Fontes blanches           | $R' = 1.5 R$  | $R'' = 1.2 R$ |
| Fontes noires             | $R' = 2.0 R$  | $R'' = 1.2 R$ |
| Fontes grises lamellaires | $R' = 2.5 R$  | $R'' = 1.2 R$ |
| Pression de contact       | $p \simeq R'$ |               |

avec néanmoins des tensions admissibles  $R$  assez basses dans l'absolu.

### Effets cumulés

La tension référentielle  $R$  (traction) intervient donc lors de l'évaluation des tensions limites correspondant à n'importe quel type de sollicitation. Il est clair cependant qu'un coefficient supérieur à  $K$  doit être introduit dans le cas de chocs caractérisés ou de sollicitations variables dans le temps.

Illustrons la méthode par un exemple. On considère une pièce d'acier moyennement importante, supportant des sollicitations moyennement déterminées. On introduit un facteur de sécurité 1.5 :

$$R = \frac{R^*}{1.5} = \frac{2}{3}R^*$$

Dans le cas d'un cisaillement répété parallèle aux fibres, on écrit :

$$R''_{\parallel} = \frac{3}{5}R = \frac{2}{3} \frac{3}{5}R = \frac{2}{5}R$$

Si l'effet de choc est important, le coefficient  $K$  doit être remplacé par un coefficient  $K'$  supérieur, calculé en fonction de l'énergie cinétique à absorber par cycle (coefficient de choc). On écrit en définitive

$$(R''_{\parallel})^{\text{choc}} = \frac{2}{5}R^*_{\text{choc}} = \frac{2}{5} \frac{1}{K_{\text{choc}}}R^*$$

Prenons classiquement  $K_{\text{choc}} = 2$  et un acier au chrome (acier 15 Cr 3)  $R^* = 450 \text{ N/mm}^2$  :

$$(R''_{\parallel})^{\text{choc}} = \frac{2}{5} \frac{450}{2} = 90 \text{ N/mm}^2$$

### 1.3 SOLLICITATION PAR CHOC OU PAR APPLICATION BRUSQUE

En construction de machines, le cas d'une mise en charge progressive doit être considéré comme exceptionnel. Généralement, on admet que l'effort agit instantanément avec toute son intensité dans toute la pièce. Ceci implique bien entendu le passage à deux niveaux. En ce qui concerne l'instantanéité d'application de l'effort, on peut se convaincre du bien fondé de l'hypothèse en songeant au cas de la bielle de moteur automobile tournant à la vitesse de 3000 tours par minute, où l'effet de l'explosion se produit en un arc de  $12^\circ$ , et l'effort passe de zéro à son maximum en  $1/1500$  de seconde. Quant à l'hypothèse de l'instantanéité de la transmission de l'effort à toute la pièce, elle est aussi plausible que la première si l'on songe à la grande rapidité de la transmission des ondes de pression dans les pièces métalliques et à leur faible longueur. La vitesse de propagation des ondes de pression est celle du son qui est de l'ordre de 5000 m/s pour l'acier.

Il est donc intéressant d'étudier la sollicitation longitudinale par choc ou par application brusque de l'effort de traction dans une barre prismatique.

Soit une éprouvette de section  $\Omega$  et de longueur  $\ell$  (voir Figure 1.3) étant initialement sous l'action permanente d'un effort  $G_0$  (par exemple le poids propre de la barre elle-même) ayant provoqué un allongement  $x_0$ .

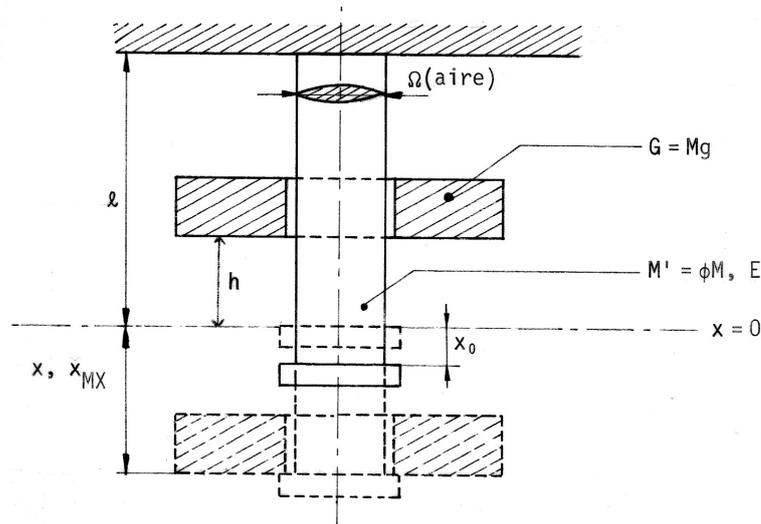


FIGURE 1.3 – Exemple d'application dynamique de la charge

Supposons que la masse  $M$  de poids  $G = Mg$  situé à une hauteur  $h$  de

### 1.3. SOLLICITATION PAR CHOC OU PAR APPLICATION BRUSQUE 9

l'extrémité de l'éprouvette. L'éprouvette est équipée d'un dispositif de butée. Lachons la masse  $M$  en chute libre et étudions la vibration du système élastique qui prend naissance après l'impact.

Appelons  $x_{MAX}$  l'élongation maximale mesurée à l'extrémité de l'éprouvette. Soit  $x_{st}$  l'allongement réel de la barre tel qu'il apparaîtrait si l'effort  $G = Mg$  était appliqué statiquement, c'est-à-dire suivant les conditions l'essai de traction normalisé.

Formulons encore quelques hypothèses simplificatrices.

- La sollicitation se transmet instantanément à toute la barre ;
- Le choc est "mou", c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rebondissement de la masse  $M$ . L'énergie cinétique de la masse  $M$  est intégralement transformée en énergie potentielle de déformation ;
- L'amortissement interne de la matière est négligeable.

Dans ces conditions, désignons par  $M_T$  est la masse totale en vibration, soit la somme de la masse de la masse d'épreuve  $M$  et celle de la barre  $M_2 = \phi m$ . Appelons  $k$  la raideur du système fonction du module de Young  $E$  du matériau, de la section droite  $\Omega$  et de la longueur de l'éprouvette  $\ell$ . On peut écrire :

$$M_T = M (1 + \phi) \quad (1.10)$$

$$k = \frac{E\Omega}{\ell} \quad (1.11)$$

L'équation différentielle du mouvement est classique. En utilisant les grandeurs définies précédemment, il vient successivement :

$$M_T \ddot{x} + k x = M g \quad (1.12)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{M_T} x = \frac{M g}{M (1 + \phi)} = \frac{g}{1 + \phi} \quad (1.13)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{g}{1 + \phi} = F \quad (1.14)$$

où  $\omega^2$  est la pulsation propre du système élastique.

La solution de cette équation différentielle du second ordre est familière ;

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + C_3 \quad (1.15)$$

Exprimons les conditions aux limites :

$$x = x_0 \quad \text{en} \quad t = 0 \quad (1.16)$$

d'où

$$C_2 + C_3 = x_0 \quad (1.17)$$

Soit  $V$  la vitesse de la masse  $M$  au moment de l'impact :

$$\dot{x} = V \quad \text{en } t = 0 \quad (1.18)$$

Etant donné que

$$\dot{x} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t$$

d'où

$$V = C_1 \omega \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{V}{\omega} \quad (1.19)$$

Pour calculer les valeurs des constantes revenons à l'équation différentielle. Pour cela on doit d'abord calculer l'accélération de la solution  $x(t)$  :

$$\ddot{x} = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t$$

et en l'insérant dans l'équation différentielle. Il vient :

$$-C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t + \omega^2 C_1 \sin \omega t + \omega^2 C_2 \cos \omega t + \omega^2 C_3 = F$$

$$\omega^2 C_3 = F$$

$$C_3 = \frac{g}{1 + \phi} \frac{M(1 + \phi)}{k} = \frac{Mg}{k} = x_{st}$$

d'où

$$C_3 = x_{st} \quad (1.20)$$

et de là :

$$C_2 = x_0 - x_{st} \quad (1.21)$$

La solution recherchée s'écrit :

$$\boxed{x(t) = \frac{V}{\omega} \sin \omega t + (x_0 - x_{st}) (\cos \omega t) + x_{st}} \quad (1.22)$$

$$\boxed{x(t) - x_0 = \frac{V}{\omega} \sin \omega t + (x_{st} - x_0) (1 - \cos \omega t)} \quad (1.23)$$

Calculons l'élongation maximale  $x_{MAX}$  du système. Pour cela réécrivons d'abord l'élongation de la manière suivante. On pose :

$$\begin{aligned} A \cos \psi &= \frac{V}{\omega} \\ A \sin \psi &= x_0 - x_{st} \end{aligned}$$

### 1.3. SOLLICITATION PAR CHOC OU PAR APPLICATION BRUSQUE 11

soit

$$\begin{aligned}\tan \psi &= \frac{x_0 - x_{st}}{V/\omega} \\ A &= \sqrt{(x_0 - x_{st})^2 + (V/\omega)^2}\end{aligned}$$

L'élongation (1.22) s'écrit :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_{st} + A \sin \omega t \cos \psi + A \cos \omega t \sin \psi \\ &= A \sin(\omega t + \psi) + x_{st}\end{aligned}\quad (1.24)$$

soit

$$\boxed{x(t) = \sqrt{(x_0 - x_{st})^2 + (V/\omega)^2} \sin(\omega t + \psi) + x_{st}} \quad (1.25)$$

L'élongation maximale survient lorsque la dérivée première de l'élongation s'annule

$$\dot{x}(t^*) = A \cos(\omega t^* + \psi) \omega = 0$$

et on en tire la variable  $\omega t^*$  correspondante.

$$\omega t^* + \psi = \frac{\pi}{2} + k \pi$$

et la valeur correspondante de l'élongation est aisément déduite :

$$x_{MAX} = x(t^*) = x_{st} + A \sin(\pi/2) = x_{st} + A$$

soit

$$x_{MAX} = x_{st} + \sqrt{(x_0 - x_{st})^2 + (V/\omega)^2} \quad (1.26)$$

$$= x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + \frac{V^2}{x_{st}^2 \omega^2}} \right] \quad (1.27)$$

On peut également écrire en revenant aux définitions des paramètres du système :

$$\begin{aligned}x_{MAX} &= x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + \frac{V^2}{x_{st}^2 \omega^2}} \right] \\ &= x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + \frac{V^2 k^2 M (1 + \phi)}{G^2 k}} \right] \\ &= x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + \frac{V^2 k (1 + \phi)}{G g}} \right] \\ &= x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + \frac{V^2 E \Omega}{g G \ell} (1 + \phi)} \right]\end{aligned}$$

Si on ntroduit la tension statique développée par la force  $G$  dans barre de section  $\Omega$  :

$$\sigma_{st} = \frac{G}{\Omega}$$

$$x_{MAX} = x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + \frac{V^2}{g} \frac{E}{\sigma_{st} \ell} (1 + \phi)} \right]$$

Dans le cas d'une chute libre, la conservation de l'énergie permet d'écrire la vitesse  $V$  en fonction de la hauteur  $h$  :

$$V = \sqrt{2g(h + x_0)}$$

ce qui donne la forme finale du déplacement maximale

$$x_{MAX} = x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{x_0}{x_{st}}\right)^2 + 2 \frac{h + x_0}{\ell} \frac{E}{\sigma_{st}} (1 + \phi)} \right] \quad (1.28)$$

## Conclusions

Si  $x_0 = x_{st}$  et si  $h = 0$ , c'est-à-dire si la déformation initiale est la déformation statique qui correspond au poids  $G$ . Même s'il s'agit d'une situation difficile à expérimenter en pratique, on est dans le cas d'une application quasi statique de la charge. En utilisant la formule (1.28) on n'observe aucune modification de la déformation. La situation correspond aux conditions idéales quasi statiques et on n'observe aucune facteur d'amplification de contrainte.

$$x_{MAX} = x_{st}$$

$$\sigma_{MAX} = E \frac{x_{MAX}}{\ell} = E \frac{x_{st}}{\ell} = \sigma_{st}$$

Si  $x_0 = 0$  et si  $h = 0$ , nous sommes dans la situation d'une charge appliquée brusquement. Il vient

$$x_{MAX} = 2 x_{st}$$

et

$$\sigma_{MAX} = E \frac{x_{MAX}}{\ell} = E \frac{2 x_{st}}{\ell} = 2 \sigma_{st}$$

Ainsi la tension développée dans une pièce mécanique par application brusque de la charge est double de ce qu'il aurait été dans le cas quasi statique.

Si  $x_0 = 0$  et si  $h$  et  $V$  sont différents de zéro, on obtient

$$x_{MAX} = x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{h}{\ell} \frac{E}{\sigma_{st}} (1 + \phi)\right)} \right] = x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{V^2}{g \ell} \frac{E}{\sigma_{st}} (1 + \phi)\right)} \right]$$

et dans ces conditions, la déformation maximale est bien supérieure à la déformation statique  $x_{st}$ . Le facteur d'amplification peut être largement supérieur à 2. Prenons un exemple numérique :

$$\begin{aligned} \sigma_{st} &= 10 \text{ MPa} & h &= 100 \text{ mm} & \phi &= 0.2 \\ x_0 &= 0 & \ell &= 1000 \text{ mm} & E &= 210 \text{ GPa} \end{aligned}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} x_{MAX} &= x_{st} \left[ 1 + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{100}{1000} \frac{210 \cdot 10^9}{10 \cdot 10^6} (1.2)\right)} \right] = 72 x_{st} \\ \sigma_{MAX} &= 720 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Ce qui souligne l'importance du facteur de choc.

A noter toutefois que les calculs précédents s'appliquent tels quels qu'à une pièce de section constante. Des variations de section importantes concentrent la toute grande partie de l'énergie de déformation dans les parties à section réduite et mènent à un maximum de tension bien plus élevé encore que celui qui a été calculé. La capacité de résistance au choc de telles pièces est ainsi fortement réduite.

Nous insisterons pour terminer sur le fait que ce phénomène important a été traité dans le contexte relativement simple de sollicitations de traction, mais que l'analyse aurait pu être étendue aux cas de la flexion ou de la torsion. Les développements auraient certes subi des aménagements imposés par les configurations particulières des systèmes considérés mais les conclusions finales resteraient inchangées.

## 1.4 SOLLICITATION VARIABLE DANS LE TEMPS

La plupart des pièces intervenant dans la construction mécanique et, plus particulièrement, dans les moteurs sont soumises au cours de leur vie à des efforts variables qui se reproduisent un très grand nombre de fois.

Il a été établi expérimentalement que les tensions menant à la rupture surviennent pour des niveaux de contraintes maxima bien plus faibles que celles observées dans des essais de traction quasi statique. Ces efforts sont d'autant plus faible que le nombre de cycles d'application de l'effort variable est grand. On observe que la fréquence de ces cycles ne joue presque pas pour autant qu'elle soit assez élevée, ce qui correspond avec les vitesses de rotation pratiquées dans les machines. Aux fréquences considérées, la rupture se produit sans signe avant courreur. c'est-à-dire sans striction ni allongement plastique apparent.

On constate généralement pour l'acier que la tension de rupture après application d'un million de cycles ne diminue pratiquement plus, de telle sorte que, pour une tension réduite de 10% par rapport à la limite, le nombre d'applications de l'effort avant rupture devient illimité.

Par ailleurs on observe expérimentalement que la valeur de la tension de rupture dépend de l'évolution de la tension au cours du cycle.

Le phénomène s'appelle *fatigue* et sera analysé en détails dans un chapitre ultérieur. Les essais destinés à faire connaître les tensions de rupture par fatigue sont appelés essais d'endurance. On les effectue généralement par flexion rotative sur des éprouvettes cylindriques dans des machines de fatigue.

A l'origine des études entreprises, il faut citer les travaux de Wöhler qui a évalué expérimentalement l'abaissement de la tension de rupture  $R_0$  en fonction du rapport  $\sigma_{min}/\sigma_{max}$  de la tension minimale à la tension maximale atteintes sur le cycle. On notera que ce cycle correspond à l'application permanente d'une tension moyenne  $\sigma_m = \bar{\sigma}$  :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2}$$

à laquelle on superpose une tension alternée  $\sigma_a$  d'amplitude

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

comme montré à la Figure (1.4).

La courbe représentée à la Figure 1.5 décrit l'évolution de la tension de rupture pour un nombre d'applications du cycle (pouvant être considérée comme illimité) pour différents rapports  $\phi = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$  et de  $R_0$ , limite de rupture. Seefehlner fournit une expression approchée de cette courbe

$$\boxed{R_{0\phi} = \frac{2}{3} R_0 \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)} \quad (1.29)$$

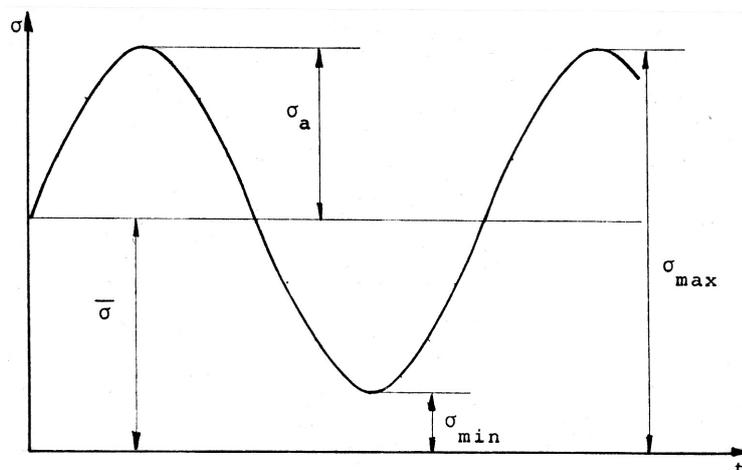


FIGURE 1.4 – Définition des caractéristiques  $\bar{\sigma}$  et  $\sigma_a$  d'une sollicitation variable dans le temps

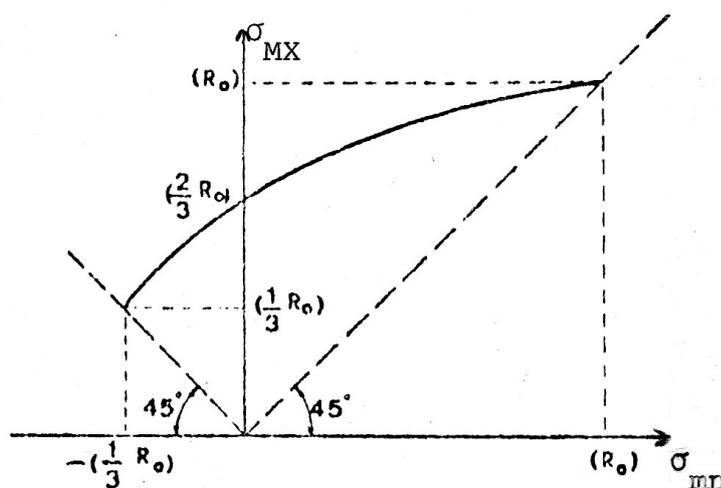


FIGURE 1.5 – Evolution de la limite de rupture pour un million de cycles pour différents rapports  $\phi = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$

sous la forme suivante où  $R_{0\phi}$  désigne la tension de rupture par fatigue ou d'endurance.

Dans le cas d'efforts statiques,  $\sigma_{\min} = \sigma_{MAX} = \bar{\sigma}$ ,  $\sigma_a = 0$  :

$$\phi = 1 \quad R_{\phi} = R_0$$

Dans le cas d'efforts alternés,  $\sigma_{min} = -\sigma_a$ ,  $\sigma_{MAX} = \sigma_a$ ,  $\bar{\sigma} = 0$  :

$$\phi = -1 \quad R_\phi = \frac{1}{3} R_0 = R_{01}$$

Dans le cas d'efforts répétés,  $\sigma_{min} = 0$ ,  $\sigma_{MAX} = 2\sigma_a$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma_a$  :

$$\phi = 0 \quad R_\phi = \frac{2}{3} R_0 = R_{02}$$

Cette vue du phénomène de fatigue est certes un peu simpliste mais elle est souvent suffisante en techniques d'avant-projet. Elle conduit à la conception de pièces généralement surdimensionnées mais elle ne tient pas compte des accidents de géométrie tels que des congés de raccords, les gorges, saignées, rainures de cales, etc. qui amplifient la sensibilité de la pièce au phénomène de fatigue. La méthode de Seefehlner ne doit être préconisée qu'au moment du pré-dimensionnement des pièces de machine, car elle est simple et directe. Elle est bien adaptée en conception préliminaire, car elle n'exige aucun calcul itératif du type forme-tension.

La conception utilisant la méthode de Seefehlner doit être affinée ultérieurement lors de la phase finale du projet où la méthode de Soderberg qui sera décrite plus loin est strictement la seule qui doit être mise en oeuvre en phase de vérification, pour tenir compte de la géométrie finale réelle de la pièce élaborée.

Il découle de l'approche qu'un dimensionnement de pièce de machine, pratiqué par la méthode de Seefehlner doit faire intervenir une tension admissible inférieure à celle qui serait introduite dans un calcul quasi statique. En conséquence, d'après Seefehlner, il est convenu d'appliquer un facteur de réduction de  $R_0$  et d'écrire :

$$\boxed{R_\phi = \frac{2}{3} R_0 \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{R}{K_\phi}} \quad (1.30)$$

où  $K_\phi$  est un coefficient de sécurité additionnel qui découle de l'application de sollicitations variables. Sa valeur est fournie au Tableau 1.1 en fonction du rapport  $\phi = \sigma_{min}/\sigma_{MAX}$  :

| $\phi = \sigma_{min}/\sigma_{MAX}$ | -1 | -0.5 | -0.25 | 0   | +0.25 | +0.5 | +1  |
|------------------------------------|----|------|-------|-----|-------|------|-----|
| $K_\phi$                           | 3  | 2    | 1.71  | 1.5 | 1.33  | 1.2  | 1.0 |

TABLE 1.1 – Coefficient de sécurité  $K_\phi$  fonction du rapport  $\phi = \sigma_{min}/\sigma_{max}$

## 1.5 EFFORTS MAL DÉFINIS

Dans de nombreux cas, les conditions de sollicitation des pièces sont mal connues, la distribution des actions extérieures est difficile à déterminer ou trop complexe à établir, le calcul des tensions résultant des actions extérieures est incertain en raison des carences venant de l'état des connaissances théoriques en mécanique du solide la répartition des déformations de la pièce en raison de ses formes et de ses liaisons, ou encore parce qu'un calcul suffisamment exact de ces tensions demanderait l'utilisation de moyens de calcul disproportionnés au stade de la conception préliminaire.

En l'occurrence, le problème se pose comme suit : établir les dimensions d'une pièce sans connaître exactement les tensions qui s'y établissent. On suit alors un processus appelé *méthode de calcul par comparaison*. Cette méthode consiste en ceci : on fait le choix d'une pièce analogue à celle qui doit être calculée, pièce qui a été éprouvée par une utilisation pratique ayant donné entièrement satisfaction. Pour cette pièce que nous appellerons le modèle, on situe sommairement les sollicitations extérieures connues. On la schématise en vue de l'application d'une méthode de calcul des tensions relativement simple, et dans le cadre de cette modélisation, on chiffre la tension maximale atteinte en service.

Utilisant alors cette tension comme tension admissible (coefficient de résistance), on applique à la pièce à calculer, le même système de détermination des sollicitations extérieures, ce qui conduit à la détermination des dimensions cherchées.

La méthode de calcul par comparaison n'a de valeur que si le modèle et la pièce sont pratiquement de géométries semblables, et que si le rapport de similitude ou de quasi similitude est peu éloigné de l'unité. Toute extension à des formes ou à des dimensions nettement différentes du modèle est périlleuse.

On ne doit pas se complaire dans l'utilisation de cette méthode par simple souci de facilité. Les cas d'application deviennent et doivent devenir de moins en moins nombreux au fur et à mesure que les connaissances dans les domaines de la résistance des matériaux, des théories de l'élasticité et de la plasticité évoluent et s'accroissent et que les temps de calcul des méthodes numériques comme la méthode des éléments finis diminuent.

Il est clair à ce propos que l'utilisation de méthodes d'investigation fines, basées sur les techniques numériques telles que la méthode des éléments finis, sont tout à fait capables de résoudre des problèmes de ce type problème pour autant qu'il soit possible de rendre compte correctement les conditions

aux limites correspondantes. Dès que ces méthodes sont appliquées à des géométries tridimensionnelles complexes, on se rappellera qu'elles exigent des temps de calcul de calcul dont les coûts peuvent être fort élevés.

## 1.6 SOLLICITATIONS COMPOSEES

Nous ne ferons qu'une brève incursion dans cette matière en vue de situer sommairement le problème dans le domaine de la construction des pièces de machines.

Les cas essentiellement rencontrés sont ceux où agissent simultanément des tensions normales et des tensions tangentielles (par exemple traction simple et cisaillement simple, flexion et torsion).

Comment interpréter leur intervention combinée sur base des connaissances acquises par l'essai de traction ?

On y arrive en adoptant un critère de résistance qui indique suivant quelle règle il faut combiner les tensions dues aux sollicitations simples pour former une tension équivalente, appelée **tension de comparaison**, entendue comme tension de traction équivalente et à exploiter comme telle pour prédire la rupture ou la plastification du matériaux à l'aide des valeurs de références définies précédemment.

Deux types de critères sont utilisés dans ce but : soit celui de la plus grande tension principale soit ceux basés sur l'apparition des premiers glissements plastiques.

Soit un état plan de tension caractérisé par  $\sigma$ ,  $\tau$  (Figure 1.6a). Traçons le cercle de Mohr correspondant. Il en découle (Figure 1.6b) trois tensions principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$  :

$$\sigma_I, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} < 0$$

Les valeurs de ces tensions principales  $\sigma_I$  et  $\sigma_{III}$  sont respectivement :

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

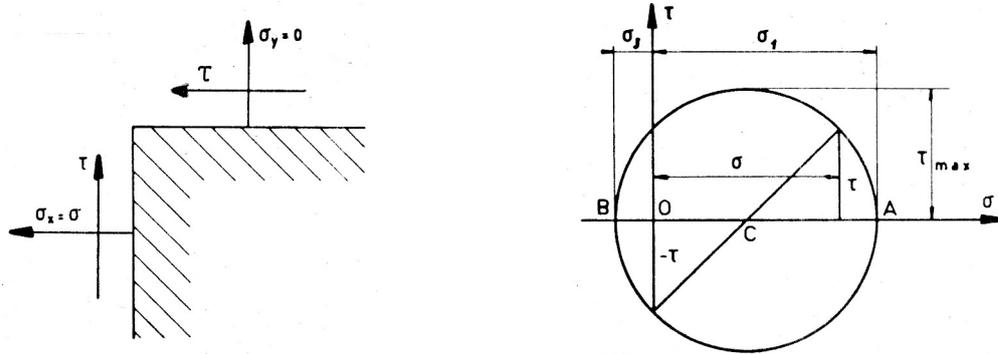


FIGURE 1.6 – a/ Etat plan de contrainte b/ Cercle de Mohr

### 1.6.1 Critère de la plus grande tension principale

Ce critère est appliqué dans le cas des matériaux fragiles. Il revient à limiter la plus grande tension principale  $\sigma_I$  à la tension admissible en traction, à savoir

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} < R$$

soit

$$\sigma \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\tau}{\sigma}\right)^2}\right) < 2R$$

### 1.6.2 Critères de plastification

Pour les métaux ductiles, dont les aciers doux, on emploie des critères de plastification : généralement le critère de Tresca-Guest et le critère de Hencky-Von Mises.

#### Critère de Hencky-Von Mises

Le **critère de Tresca-Guest** appelé aussi *critère du cisaillement maximum* considère que les premières déformations permanentes sensibles se produisent par glissement relatif des couches l'une sur l'autre, et s'appuie ainsi sur la tension de cisaillement maximum, égale à la demi-différence des tensions principales extrêmes.

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \tau_{MAX}$$

Il convient de comparer cette contrainte de cisaillement maximum - avec la sécurité requise - à la plus grande tension de cisaillement relevée dans l'essai de traction, également à l'apparition des premières déformations permanentes sensibles.

Or dans l'essai de traction simple, la construction du cercle de Mohr montre que la tension de cisaillement maximale vaut toujours la moitié de la tension de traction existant dans l'éprouvette soit  $R/2$ .

Comparer  $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$  à une tension  $R/2$  revient à comparer  $\sigma_I - \sigma_{III}$  à  $R$ , c'est-à-dire que dans le critère de Tresca-Guest, la tension de comparaison sera la différence des tensions principales extrêmes, à considérer et à traiter comme tension de traction simple. Il vient ainsi :

$$\sigma_c = \sigma_I - \sigma_{III} = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} < R$$

soit

$$\boxed{\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < R} \quad (1.31)$$

### Critère de Hencky-Von Mises

Un second critère basé sur la notion de déformation limite est également très utilisé en construction de machines : c'est le critère de **Hencky - Von Mises** ou critère de la plus grande tension tangentielle octaédrale.

Désignons par  $U$  l'énergie volumique totale qu'un solide soumis à un champ de contraintes  $\sigma_{ij}$  :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

En utilisant les contraintes principales et les déformations associées, on peut encore écrire :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=I,II,III} \sigma_i \epsilon_i$$

Supposons le corps élastiques isotropes, les relations tensions - déformations s'écrivent en fonction des coefficients de Lamé (module de compressibilité cubique et module de cisaillement) ou plus souvent, pour les ingénieurs, en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} - \frac{\nu}{E} \sum_{j \neq i} \sigma_j$$

On obtient l'expression de l'énergie interne exprimée en termes des contraintes principales.

$$U^* = \frac{1}{2E} \left[ \sum_{i=I,II,III} \sigma_i^2 - 2\nu \left( \sum_{i=I,II,III} \sigma_i \sigma_{i+1} \right) \right]$$

Nous avons utilisé la notation  $U^*$  puisqu'il s'agit d'une expression de l'énergie complémentaire puisque écrite en fonction des contraintes uniquement.

Cette énergie totale de déformation n'est toutefois pas un élément déterminant pour la prédétermination des caractéristiques ultimes : il est prouvé expérimentalement que l'application d'un champ de pression hydrostatique  $\sigma_h$

$$\sigma_h = \sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$$

La contrainte hydrostatique  $\sigma_h$  n'induit pas de plastification du matériau.

Retirons l'énergie liée à la composante hydrostatique  $U_h^*$  hors de l'expression de l'énergie volumique.

$$U_h^* = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_h^2$$

Remplaçons la composante du champ de pression hydrostatique par sa valeur en fonction des contraintes principales :

$$\sigma_h = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$

Il vient

$$U_h^* = \frac{(1-2\nu)}{6E} \left[ \sum_{i=I,II,III} \sigma_i^2 + 2 \left( \sum_{i=I,II,III} \sigma_i \sigma_{i+1} \right) \right]$$

L'énergie de distorsion caractéristique d'un état de tension tridimensionnel est déterminé en retirant l'énergie hydrostatique :

$$U_d = U^* - U_h^* = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[ \sum_{i=I,II,III} \sigma_i^2 - \left( \sum_{i=I,II,III} \sigma_i \sigma_{i+1} \right) \right]$$

La méthode qui utilise le critère de Hencky et Von Mises consiste à comparer l'énergie de distorsion volumique existant en un point d'un élément de machine à la valeur maximale admissible tolérée pour l'essai de traction simple :

$$\sigma_I = R = \frac{R_e}{K} \quad \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

il en découle la tension de comparaison  $\sigma_c$ , tension fictive à utiliser pour prédire la plastification du matériau :

$$\sigma_c^2 = \sum_{i=I,II,III} \sigma_i^2 - \sum_{i=I,II,III} \sigma_i \sigma_{i+1} \leq R^2$$

Considérons un état de tension bidimensionnel caractérisé par un traction  $\sigma$  et un cisaillement  $\tau$ . Les contraintes principales sont :

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_{II} &= 0 \\ \sigma_{III} &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2 + 2\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2 - 2\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\right] \\ &\quad - \left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \tau^2\right] \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R} \quad (1.32)$$

**Tension admissible en torsion** : Il faut noter que le choix d'un critère de plasticité fixe le niveau maximum des tensions tangentielles par rapport à celles résultant de la torsion. En effet, si  $\sigma = 0$  et  $\tau \neq 0$ , il vient :

— Critère de Tresca-Guest :

$$\sigma_c = \sqrt{4\tau^2} \leq R$$

soit

$$\tau \leq \frac{R}{2}$$

— Critère de Hencky et Von Mises :

$$\sigma_c = \sqrt{3\tau^2} \leq R$$

soit

$$\tau \leq \frac{R}{\sqrt{3}} = 0.577 R$$

### 1.6.3 Sollicitations composées en fatigue

En technique d'avant-projet, la DIN accepte de composer les tensions variables suivant le critère suivant :

$$\boxed{\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha\tau)^2} \leq R_{limite}} \quad (1.33)$$

- Si  $\sigma$  est alternée et  $\tau$  est constante ou répétée, on adopte  $\alpha = 0.7$  et  $\sigma_{limite} = R_1$
- Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont de même type, on adopte
  - $\alpha = 1$  dans le cas d'un moment de flexion combiné avec un effort tranchant. La tension de cisaillement  $\tau$  est calculée par la formule :

$$\tau = \frac{T}{A'}$$

- $\alpha = 1.15$  dans le cas d'un moment de flexion et d'un moment de torsion simultanés et si  $\sigma$  et  $\tau$  sont maximales au même endroit. On prend pour valeur de  $R_{limite}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  ou  $R_\phi$  suivant les cas.

## 1.7 SOLLICITATIONS D'ARBRES CYLINDRIQUES

Les barres cylindriques revêtent une importance considérable en mécanique car c'est la forme des arbres de machine destinés à la transmission de puissance.

Dans le cas des barres cylindriques destinées à la fonction d'arbre de transmission, la tension  $\sigma$  est une tension liée à l'application d'un moment de flexion  $M_f$ , tandis que la tension  $\tau$  est une tension de cisaillement pur liée à un moment de torsion  $M_t$ . Soit  $d$  le diamètre de l'arbre cylindrique. Il vient :

$$\sigma = \frac{M_f}{\frac{\pi d^4}{64}} \frac{d}{2} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

et

$$\tau = \frac{M_t}{\frac{\pi d^4}{32}} \frac{d}{2} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = 0.5 \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

Dans le cas du critère de Tresca-Guest, il vient

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{M_f^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2} + 4 \frac{0.25 M_t^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2}} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

et si on appelle

$$\sigma_c \frac{\pi d^3}{32} = M_i$$

le moment fictif idéal, le critère de Tresca Guest s'écrit :

$$M_i^{(T)} = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

Cas du critère de Hencky-Von Mises, on a :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{M_f^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2} + 3 \frac{0.25 M_t^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2}} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2}$$

et partant de là, le moment fictif idéal, le critère de Von Mises s'écrit :

$$M_i^{(VM)} = \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2}$$

A noter que l'existence d'une tension de traction (ou de compression) supplémentaire ou tout simplement l'absence de forme circulaire impose automatiquement l'utilisation du critère sous sa forme initiale

$$\boxed{\sigma_c = \sqrt{(\sigma_f + \sigma_t)^2 + 3 (\alpha \tau)^2} \leq R_{limite}} \quad (1.34)$$

A noter que dans les développements qui vont suivre, nous adopterons en général  $\alpha = 1$ , ce qui conduit à appliquer de préférence le critère de Hencky et Von Mises.

## 1.8 COEFFICIENT DE MAJORATION $\psi$ EN FLEXION PURE

On établit aisément la valeur des tensions de traction et de compression résultant de la sollicitation par **flexion pure** d'une section d'une poutre en admettant l'hypothèse - confirmée par l'observation - du maintien de la

planéité de la section droite après déformation. Cette notion peut également résulter simplement de la considération de conditions de symétrie.

Considérons la situation d'une flexion plane telle que le moment fléchissant agit dans un des plans de symétrie, et où il existe un second plan de symétrie normal au premier. On fait l'hypothèse que le pivotement du plan de la section droite s'effectue autour du second axe de symétrie de la section droite, appelé axe neutre.

La situation est représentée à la Figure 1.7. Considérons un tronçon de poutre élémentaire de longueur  $dl$  et soumis à un moment de flexion  $M$ . Le segment  $CD$ , pivotant d'une angle  $d\phi$  autour de l'axe neutre  $OO'$  conduit à une extension des fibres situées au dessus de  $OO'$  tandis que les fibres situées sous l'axe neutre  $OO'$  se trouvent en compression. Si le matériau est élastique linéaire, l'application du moment de flexion conduit à une distribution bi triangulaire des déformation et des contraintes.

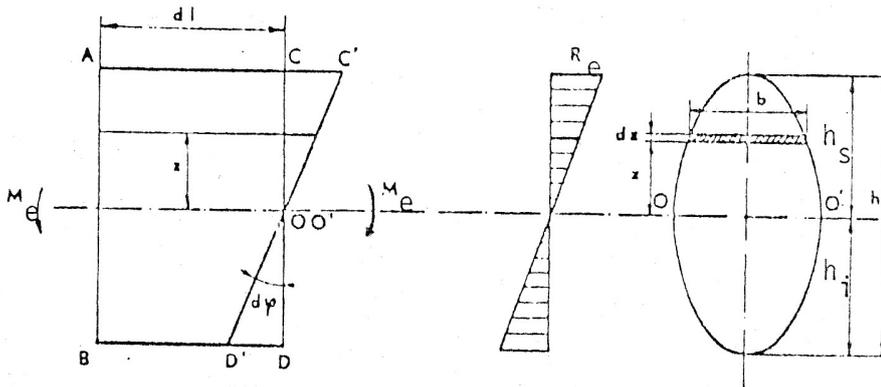


FIGURE 1.7 – Ca d'une flexion pure

Si on adopte  $\sigma_{MAX} = R_e$ , on peut écrire l'expression du moment élémentaire qui correspond à une ordonnée particulière  $z$  comptée à partir de l'axe neutre  $OO'$ .

$$\sigma(z) = \sigma_{MAX} \frac{z}{h} = R_e \frac{z}{v}$$

où  $v$  est la distance à l'axe neutre de la fibre la plus éloignée sur la section droite (voir Figure 1.7).

$$v = \max(h_s, h_i)$$

L'intégrale de ces moments élémentaires doit être égale au moment de flexion extérieur.

$$M_e = \int_{-h_i}^{h_s} R_e \frac{z}{v} z b(z) dz = \frac{R_e}{v} \int_{-h_i}^{h_s} b(z) z^2 dz$$

Il vient donc

$$\frac{M_e}{R_e} = \frac{I}{v} \quad (1.35)$$

avec le moment d'inertie  $I$  de la section par rapport à l'axe neutre

$$I = \int_{-h_i}^{h_s} b(z) z^2 dz \quad (1.36)$$

Les cas particuliers suivants sont très courants dans la pratique :

— Section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$  :

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad v = \frac{h}{2} \quad \frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6}$$

— Section circulaire de diamètre  $d$  :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad v = \frac{d}{2} \quad \frac{I}{v} = \frac{\pi d^3}{32}$$

Une particularité de la résistance à la flexion des aciers doux comparée à leur résistance à la traction tient à l'existence du palier d'étirage qui, s'il est abordé, rend les situations des deux cas assez dissemblables. En effet, dans un barreau en extension, dès qu'une sollicitation permet d'atteindre exactement la limite d'étirage. Le moindre accroissement de l'effort appliqué pour un palier d'étirage strictement horizontal dans le diagramme de traction, l'absorbe tout entier.

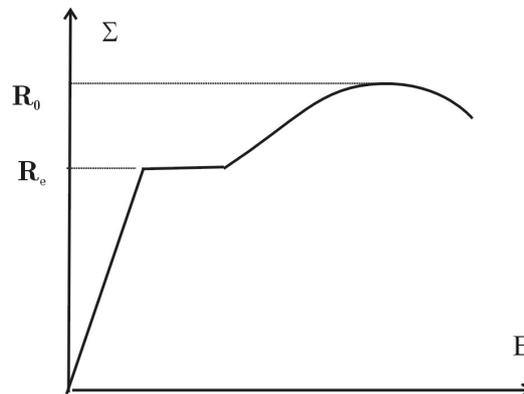


FIGURE 1.8 – Palier d'étirage dans la courbe de traction des aciers

Pour la poutre fléchie la même situation initiale ne concerne que les fibres extrêmes. Tout accroissement de la sollicitation déterminera pour ces fibres

une certaine absorption du palier d'étirage sans augmentation de la valeur de leur contrainte, mais la solidarité de ces fibres avec les fibres voisines de la section entraîne d'abord un accroissement élastique de leur déformation, et par la suite, de leur tension élastique. Ceci donnera lieu ensuite à une déformation plastique de ces fibres avec maintien de leur tension au niveau de la limite d'élasticité apparente d'où un accroissement du moment résistant créé par les tensions présentées dans la section fléchie, qui pourra dès lors reprendre un léger accroissement du moment de flexion par une déformation plastique très modérée.

En raison du fait que, dans le palier d'étirage, la section continue à conserver sa planéité (ce qui a été démontré expérimentalement) on dispose du moyen de traiter théoriquement et de modéliser le problème.

Reprenons le cas traité dans la Figure 1.7, mais augmentons le moment de flexion de telle sorte qu'aux fibres extrêmes, l'allongement total devienne supérieur à l'allongement élastique limite ou en d'autres termes, qu'une déformation permanente apparaisse au niveau des fibres extrêmes (Figure 1.9). Supposons une section rectangulaire et que l'on autorise un accroissement du moment de flexion repris moyennant plastification limitée  $M_f = \psi M_e$  avec un coefficient  $\psi$  de l'ordre de 1.2. Calculons la déformation permanente qui apparaît dans la fibre extrême lorsque le couple est relaxé.

Dès que le moment  $M_f$  est retiré, une répartition bitriangulaire doit être soustraite du diagramme des tensions de la Figure 1.9, de manière à annuler dans un premier temps la tension qui existe à la fibre extrême (Voir Figure 1.10).

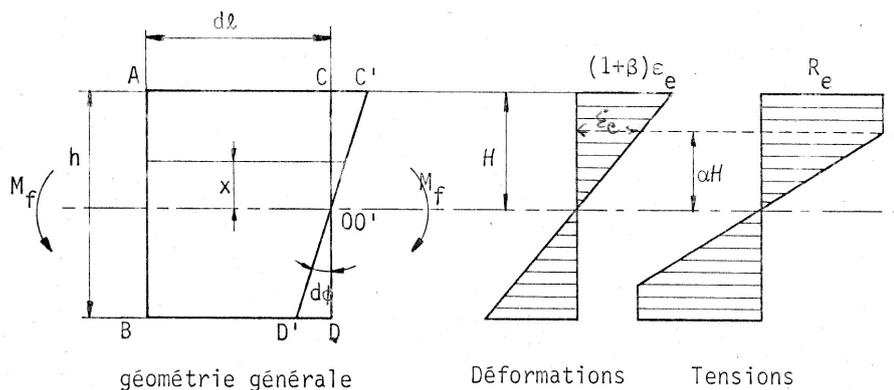


FIGURE 1.9 – Le coefficient  $\psi$

*Calcul du coefficient  $\alpha$*

Supposons la section symétrique. Pour faciliter le raisonnement supposons également que la section est rectangulaire. Posons  $\mathcal{H} = h/2$  la moitié de la hauteur de la section droite. On admet au départ

$$M_f = 1.2 M_e = 1.2 \frac{I}{v} R_e = 1.2 \frac{bh^2}{6} R_e$$

$$M_f = 1.2 \frac{4}{6} b\mathcal{H}^2 R_e = 0.8 b\mathcal{H}^2 R_e$$

Calculons  $M_f$  par intégration des moments développés par la distribution des contraintes selon la hauteur de la section droite.

$$\frac{1}{2} M_f = \left[ \left( \frac{1}{2} R_e \alpha \mathcal{H} \right) \frac{2}{3} \alpha \mathcal{H} + (1 - \alpha) \mathcal{H} R_e \frac{1 + \alpha}{2} \mathcal{H} \right] b$$

$$M_f = R_e \frac{b\mathcal{H}}{3} (3 - \alpha^2)$$

d'où la valeur de  $\alpha$  :

$$0.8 = \frac{3 - \alpha^2}{3} \quad \text{soit} \quad \alpha = \sqrt{0.6} = 0.775$$

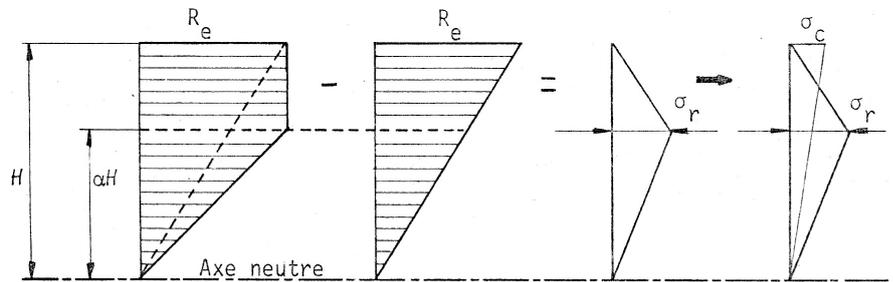


FIGURE 1.10 – Contraintes résiduelles

*Calcul de  $\epsilon_p$  déformation plastique permanente*

L'allongement conservant la planéité, l'allongement totale de la fibre extérieure sous l'effet de  $M_f$  vaut :

$$\epsilon_t = \epsilon_e \frac{\mathcal{H}}{\alpha \mathcal{H}} = 1.29 \epsilon_e$$

Dès que le moment  $M_f$  est retiré, une répartition bitriangulaire doit être soustraite des tensions de la Figure 1.9, de manière à annuler dans un premier temps la tension qui existe dans la fibre extrême (Figure 1.10).

Une répartition de tensions résiduelles persiste néanmoins. La valeur maximale de cette tension résiduelle  $\sigma_r$  est localisée en  $\alpha\mathcal{H}$  et peut se calculer de la manière suivante :

$$\sigma_r = R_e - \frac{R_e}{\mathcal{H}} \alpha\mathcal{H} = 0.225 R_e$$

Il en découle un moment de flexion équivalent que l'on peut évaluer :

$$\begin{aligned} M_f &= 2 \left[ \frac{1}{2} (\sigma_r \alpha\mathcal{H} b) \frac{2}{3} \alpha\mathcal{H} + \frac{1}{2} (\sigma_r (1-\alpha)\mathcal{H} b) \left( \alpha\mathcal{H} + \frac{1}{3}(1-\alpha)\mathcal{H} \right) \right] \\ &= 2 \sigma_r \mathcal{H}^2 b \left[ \frac{\alpha^2}{3} + \frac{1-\alpha}{2} \left( \frac{3\alpha}{3} + \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{3} \right) \right] \\ &= 2 (0.225 R_e) \frac{\mathcal{H}^2 b}{6} 1.775 = 0.8 R_e \frac{\mathcal{H}^2 b}{6} \end{aligned}$$

Ce moment fictif va induire une répartition de tensions classiques qui tendent à équilibrer la répartition de tensions résiduelles. Appliquons l'équation d'équarissage.

$$M'_f = \sigma_c \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} \sigma_c b\mathcal{H}^2$$

Les moments  $M_f$  et  $M'_f$  sont identiques de sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{2}{3} \sigma_c b \mathcal{H}^2 = 0.8 R_e \frac{\mathcal{H}^2 b}{6}$$

soit

$$\sigma_c = 0.2 R_e$$

et

$$\epsilon_c = 0.2 \epsilon_e$$

d'où la valeur finale de la déformation permanente après suppression du moment de flexion initial.

$$\epsilon_p = \epsilon_t - \epsilon_e - \epsilon_c = 0.09 \epsilon_e$$

Seules des valeurs faibles de  $\epsilon_p$  sont tolérées en pratiques : la limite de  $0.075 \epsilon_e$  est assez souvent citées. On adopte généralement les coefficients  $\psi$  repris au Tableau 1.2.

### Remarques

On peut montrer que les *sections circulaires* soumises à la torsion sont caractérisées par le même coefficient de majoration : une valeur unique (1.3 ou 1.1) peut donc être utilisée indifféremment en flexion et en torsion.

| Section | Carré plein | Circulaire | Rectangulaire | Tube creux |
|---------|-------------|------------|---------------|------------|
| $\psi$  | 1,425       | 1,3        | 1,2           | 1,1        |

TABLE 1.2 – Coefficients de majoration  $\psi$  en flexion

En définitive, l'application d'un couple  $M_f$  supérieur à celui qui entraîne l'apparition de  $R_e$  à la fibre extrême de la pièce ( $M_f = \psi M_e$   $\psi > 1$ ) conduit à la création d'une zone plastifiée d'autant plus épaisse que le coefficient multiplicatif  $\psi$  est élevé.

Si on limite la déformation permanente maximum à  $0.075\epsilon_e$  environ, on fixe automatiquement une tension de flexion fictive  $R_e^*$  supérieure à la limite acceptable en simple traction

$$R_e^* = \psi R_e$$

cette procédure apparemment paradoxale se justifie par le fait que l'allongement plastique des fibres ne concerne qu'une couche mince de la peau de pièce alors qu'en traction la limite  $R_e$  est atteinte uniformément dans la section transversale.

C'est donc la notion de sécurité prise par rapport à l'existence de déformations plastiques importantes qui permet d'adopter une tension admissible  $R_{flex}$  majorée par rapport à la tension référentielle  $R_e$  adoptée en traction simple.

En ce qui concerne la flexion des fontes grises lamellaires (fontes de moulage), on peut adopter les mêmes coefficients de majoration. Ceci ne résulte plus, comme pour les aciers, de l'effet bénéfique d'une meilleure distribution des tensions dans la section due à sa plastification mais bien de l'existence dans la courbe de l'essai de traction, d'une concavité tournée vers l'axe des abscisses (axe des déformations) et partant d'une répartition de  $\sigma_f$  plus uniforme du côté de la fibre extrême.

# Chapitre 2

## EFFORTS DANS LES TRANSMISSIONS

### 2.1 INTRODUCTION

Le premier problème qui se pose en dimensionnement est le recensement des efforts. Les efforts peuvent être une donnée du problème, fondée sur une analyse statistique par exemple. Dans un certain nombre de cas, ils font l'objet de règlements.

Nous nous pencherons plus particulièrement sur le recensement des efforts dans une transmission. Ceci nous permettra d'envisager un certain nombre d'éléments courants en mécanique.

### 2.2 PRINCIPE

La première démarche consiste à déterminer le schéma de la circulation de la puissance. On en déduit aisément les *efforts actifs*, c'est-à-dire ceux qui travaillent et transmettent la puissance. Mais la plupart des transmissions ne peuvent exister que moyennant des *efforts secondaires*, induisant de la flexion et parfois aussi de l'extension. Contrairement à ce que leur dénomination pourrait faire croire, ces efforts ne sont pas nécessairement plus petits que les efforts actifs. Ils jouent souvent un rôle fondamental dans la résistance de l'arbre et de ses supports et les éléments de guidage. La détermination des efforts secondaires fait l'objet d'une deuxième étape de calcul où l'on tient à la fois compte des efforts actifs et du type de transmission envisagée.

## 2.3 LE RHÉOGRAMME DE LA PUISSANCE

La puissance fournie par le ou les *organes moteurs* est amenée aux *organes récepteurs* par la *transmission*, moyennant d'ailleurs certaines *pertes*. On a donc en général la relation

$$\sum \mathcal{P}_{mot} = \sum \mathcal{P}_{rec} + \sum \mathcal{P}_{pertes} \quad (2.1)$$

Dans un très grand nombre de transmissions mécaniques, les pertes sont faibles devant la puissance à transmettre, c'est-à-dire que le rendement

$$\eta = \frac{\sum \mathcal{P}_{rec}}{\sum \mathcal{P}_{mot}} \quad (2.2)$$

est voisin de l'unité. C'est pourquoi, en dehors de cas très particuliers, il est d'usage, au moins dans un calcul préliminaire, de négliger les pertes (ce qui équivaut à poser  $\eta = 1$ ). Dans ces conditions, la puissance passe des moteurs aux récepteurs sans perte à la manière d'un fluide incompressible. Le *rhéogramme de la puissance* est précisément le schéma de ces flux. En pratique on peut remonter de chaque récepteur vers son générateur de puissance pour établir le chemin pris par la puissance. L'ensemble des chemins de tous les récepteurs forme dans ce cas un circuit maillé.

A partir du rhéogramme, il est aisé de déterminer les efforts moteurs, car la puissance  $\mathcal{P}$  est toujours de la forme

$$\mathcal{P} = Q v \quad (2.3)$$

ou  $v$  est une vitesse généralisée et  $Q$ , l'effort actif associé. En pratique, on rencontre des vitesses de translation pour lesquelles la formule (2.3) s'applique sans modification, et des vitesses de rotation, pour lesquelles la formule (2.3) doit s'entendre comme

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} \omega = M_t \omega = M_t 2 \pi N \quad (2.4)$$

avec un couple  $\mathcal{C}$  donnant lieu à un moment de torsion  $M_t$  multipliant une vitesse angulaire  $\omega$  (en radians par secondes) et  $N$  la vitesse de rotation correspondante exprimée en tours par seconde (encore appelé la fréquence de rotation). Nous allons illustrer cette approche au moyen de quelques exemples.

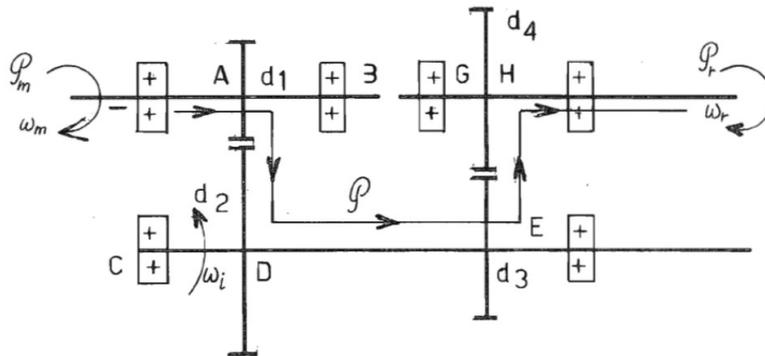


FIGURE 2.1 – Réducteur à engrenages à deux étages

### 2.3.1 Réducteur à engrenages

Un réducteur est destiné à transformer une puissance à grande vitesse de rotation  $\omega_m$  en une puissance à faible vitesse de rotation  $\omega_r$ . Le réducteur à engrenages de la Figure 2.1 possède deux étages. Le rendement des engrenages est élevé (98 %), ce qui permet de négliger les pertes. On a donc immédiatement

$$M_{tm} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_m} \quad \text{et} \quad M_{tr} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_r} \quad (2.5)$$

ce qui signifie que le couple récepteur est beaucoup plus important que le couple moteur. Remarquons que cela signifie que ces deux couples ne sont pas équilibrés et que, dès lors, si l'on fait l'équilibre du réducteur complet, on constate qu'il faut que la différence

$$\Delta M_t = M_{tr} - M_{tm}$$

soit reprise par ailleurs. Ici la différence de couple entre l'entrée et la sortie est reprise par les réactions des liaisons entre le réducteur et la fondation. Il est donc essentiel d'attacher le réducteur !

En suivant la situation représentée à la Figure 2.1, la puissance passe de l'entrée au point A par l'arbre moteur. Elle passe alors par les roues dentées sur l'arbre intermédiaire, ou elle fait le chemin DE. De là, elle passe par la seconde paire d'engrenages à l'arbre récepteur, ou elle fait le chemin de H vers la sortie. On en déduit les moments de torsion dans les différentes tronçons d'arbres. Par exemple il est clair que le moment de torsion est nul dans les portions d'arbre AB, CD, EF, GH puisque le couple y est nul.

| Portion d'arbre | Puissance     | Moment de torsion      |
|-----------------|---------------|------------------------|
| Entrée - A      | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{P}/\omega_m$ |
| A - B           | 0             | 0                      |
| C - D           | 0             | 0                      |
| D - E           | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{P}/\omega_t$ |
| E - F           | 0             | 0                      |
| G - H           | 0             | 0                      |
| H - Sortie      | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{P}/\omega_r$ |

On peut tout aussi déduire sans peine les efforts actifs dans les engrenages. Grace à la présence des dents, deux circonférences (une sur chaque roue) roulent sans glisser l'une sur l'autre. C'est ce que l'on appelle les *circonférences primitives*. Si  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont leurs diamètres, les roues dentées ont donc en leur point de contact  $I$  une vitesse tangentielle commune  $v$  donnée par

$$v = \omega_m \frac{d_{01}}{2} = \omega_m \frac{d_{02}}{2} \quad (2.6)$$

Pour l'arbre secondaire on évidemment

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_{02}}{d_{01}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_i}{\omega_r} = \frac{d_{03}}{d_{02}} \quad (2.7)$$

Pratiquement, pour que deux roues puissent engrener, il faut qu'elles aient le même pas  $p$ . Ce pas est donné par

$$p = \frac{\pi d}{Z} \quad (2.8)$$

où  $Z$  est le nombre de dents. Le périmètre  $\pi d$  est un nombre irrationnel à cause du nombre  $\pi$ . Le pas est une grandeur difficile à manipuler. Le diamètre est lui normalement un nombre rationnel, de même évidemment que le nombre entier de dents. Du reste, sur les plans, on ne voit pas la circonférence, mais le diamètre. C'est pourquoi on ne parle jamais du pas, mais du *module*.

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{Z} \quad (2.9)$$

qui est un nombre rationnel, et ce sont les modules qui sont normalisés. Il est clair que deux roues qui engrènent ont le même module. Il en découle également que :

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{m Z_2}{m Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.10)$$

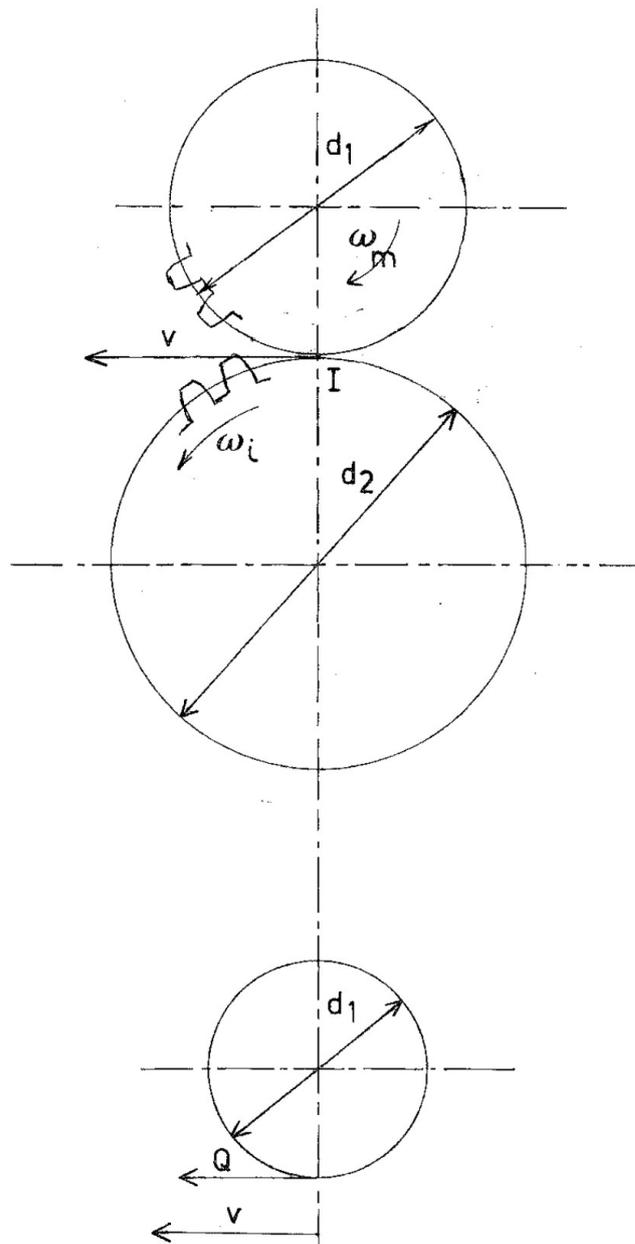


FIGURE 2.2 – Effort actif dans la première paire d'engrenages

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux nombres de dents.

Il vient que la roue motrice fournit une puissance

$$\mathcal{P} = Qv \quad (2.11)$$

$Q$  étant la composant tangentielle de l'effort d'interaction entre les deux roues dentées, ce qui donne

$$F_t = Q = \frac{\mathcal{P}}{v} \quad (2.12)$$

C'est l'effort actif. Nous verrons plus loin quels sont les efforts secondaires qui l'accompagnent.

### 2.3.2 Distribution de puissance par une courroie

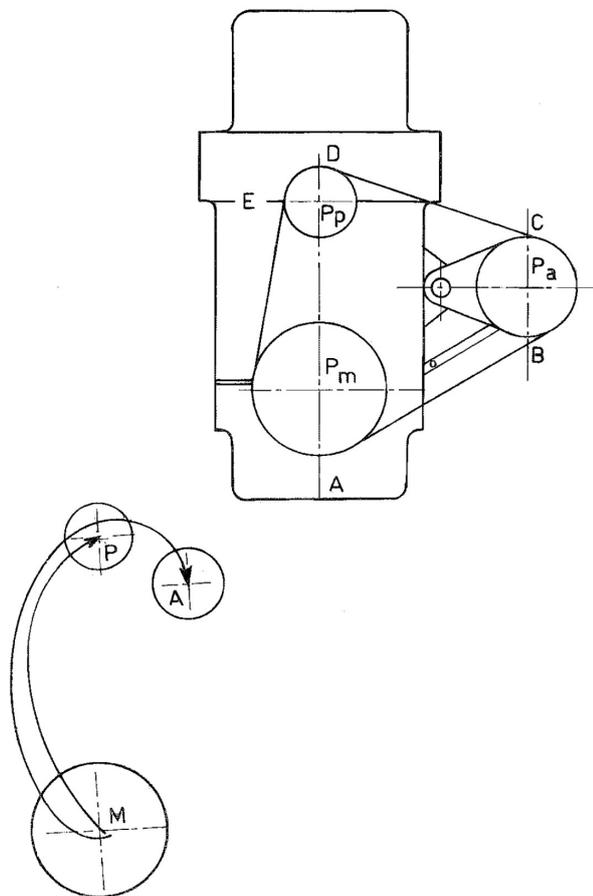


FIGURE 2.3 – Entraînement des auxiliaires d'un moteur à piston par une courroie

Considérons la distribution de puissance aux auxiliaires d'un moteur à combustion interne, soit la pompe à eau et le ventilateur d'une part, l'alternateur d'autre part (Voir Figure 2.2). En pratique, on utilise une courroie

trapézoïdale ou une courroie crantée. Supposons que l'alternateur doive tourner 1.8 fois plus vite que le moteur et la pompe à eau, 1.5 fois plus vite que le moteur, on a :

$$\omega_p = 1.5 \omega_m \quad \text{et} \quad \omega_a = 1.8 \omega_m \quad (2.13)$$

La caractéristique d'une courroie est de transmettre (au rendement près) sa vitesse tangentielle aux poulies. On a donc

$$v = \frac{\omega_m d_m}{2} = \frac{\omega_p d_p}{2} = \frac{\omega_a d_a}{2} \quad (2.14)$$

Il en découle que les diamètres doivent être dans le rapport inverse des vitesses angulaires :

$$d_p = \frac{d_m}{1.5} \quad \text{et} \quad d_a = \frac{d_m}{1.8} \quad (2.15)$$

Le bilan des puissances s'écrit

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_p \quad (2.16)$$

Si, par exemple, l'alternateur consomme 230 W et le groupe pompe-ventilateur, 500 W, on aura donc

$$\mathcal{P}_m = 730 \text{ W}$$

Telle est la puissance consommée par le moteur pour faire tourner ses auxiliaires.

Venons-en aux efforts actifs. On appelle effort actif d'une courroie sur une poulie le rapport

$$\mathcal{P} = Q v \quad (2.17)$$

C'est la charge équivalente concentrée à la jante de la poulie qui fournirait la même puissance. On peut encore la voir comme la somme de tous les efforts tangentiels à la jante fournis par la courroie à la poulie. Si donc la vitesse de la courroie vaut 30 m/s, on aura

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{\mathcal{P}_m}{v} = \frac{730}{30} = 24.33 \text{ N} \\ Q_p &= \frac{\mathcal{P}_p}{v} = \frac{500}{30} = 16.67 \text{ N} \\ Q_a &= \frac{\mathcal{P}_a}{v} = \frac{230}{30} = 7.67 \text{ N} \end{aligned}$$

Dans tout ceci, nous assimilons le rendement à l'unité. En pratique, il se situe aux environs de 96 à 98 %.

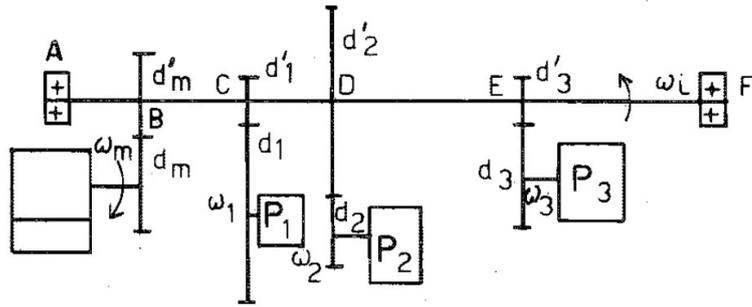


FIGURE 2.4 – Système complexe de distribution de puissance

### 2.3.3 Une distribution plus complexe

Dans le cas de la transmission de la Figure , le moteur  $m$  fournit sa puissance à trois récepteurs notés 1, 2 et 3. On obtient aisément le rhéogramme de la Figure en partant des récepteurs. Supposons que l'on désire connaître les moments de torsion régnant dans les différents tronçons de l'arbre secondaire. Il suffit de diviser la puissance qui y transite par la vitesse angulaire.

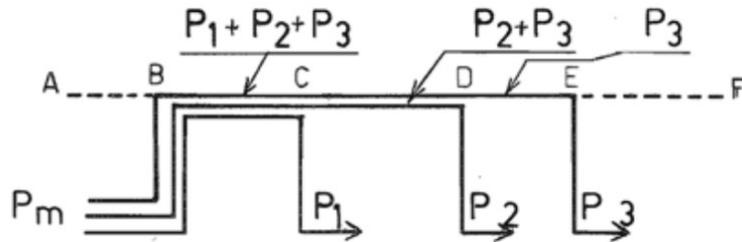


FIGURE 2.5 – Rhéogramme de puissance d'un système complexe de distribution

Les moments de torsion dans l'arbre intermédiaire sont donnés par :

| Portion d'arbre | Puissance         | Moment de torsion              |
|-----------------|-------------------|--------------------------------|
| A - B           | 0                 | 0                              |
| B - C           | $P_1 + P_2 + P_3$ | $\frac{P_1+P_2+P_3}{\omega_i}$ |
| C - D           | $P_2 + P_3$       | $\frac{P_2+P_3}{\omega_i}$     |
| D - E           | $P_3$             | $\frac{P_3}{\omega_i}$         |
| E - F           | 0                 | 0                              |

Les moments de torsion dans l'arbre primaire est donné par :

$$M_{tm} = \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3}{\omega_m}$$

tandis que les moments de torsion dans les arbres récepteurs sont

$$M_{t1} = \frac{\mathcal{P}_1}{\omega_1} \quad M_{t2} = \frac{\mathcal{P}_2}{\omega_2} \quad M_{t3} = \frac{\mathcal{P}_3}{\omega_3}$$

Enfin, les efforts actifs dans les engrenages valent

$$Q_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{\omega_1 \frac{d_{01}}{2}} \quad Q_2 = \frac{\mathcal{P}_2}{\omega_2 \frac{d_{02}}{2}} \quad Q_3 = \frac{\mathcal{P}_3}{\omega_3 \frac{d_{03}}{2}}$$

#### 2.3.4 Un cas de faible rendement

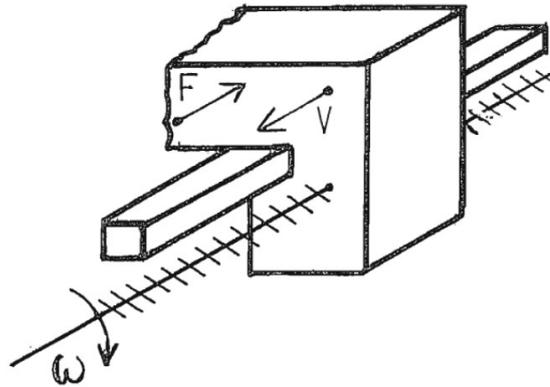


FIGURE 2.6 – Transmission par vis et écrou

Il existe certains cas où il est indispensable de tenir compte des pertes parce qu'elles sont importantes. C'est notamment le cas des transmissions par vis et écrou. Dans ces transmissions, très communes dans les machines-outils notamment pour le mouvement d'avance.

En fonction du pas et du coefficient de frottement, le fonctionnement peut être réversible ou irréversible. Si le mouvement est *irréversible*, la vis peut faire avancer le chariot mais inversement, le chariot est incapable de faire tourner la vis en se déplaçant. Selon les applications, la réversibilité est souhaitable ou non. C'est le cas par exemple des étaux. Rappelons que dans le

cas irréversible, le rendement est toujours inférieur à  $1/2$  et qu'il est donc impératif d'en tenir compte dans le calcul des puissances et couples moteurs nécessaires à l'actionnement du système mécanique.

Examinons le cas de la transmission par vis et écrou. La rotation d'un tour de la vis provoque le mouvement de translation d'un corps, par exemple un chariot (Fig. 2.6). A chaque tour de la vis correspond une avance du chariot égale au pas  $p$  de la vis. En notant  $N$  la fréquence de rotation de la vis, la vitesse  $v$  du chariot est donnée par

$$v = N p \quad (2.18)$$

Supposons que la vis envisagée ait un rendement  $\eta$ . La puissance à la vis est donnée par

$$\mathcal{P}_{vis} = M_{t,vis} \cdot 2\pi N \quad (2.19)$$

Si le chariot doit vaincre une force  $F$ , la puissance correspondante vaudra

$$\mathcal{P}_{chariot} = F v \quad (2.20)$$

Pour obtenir le moment que doit fournir la vis, on écrit que la puissance reçue par le chariot est égale à la puissance de la vis multipliée par le rendement,

$$\mathcal{P}_{chariot} = \eta \mathcal{P}_{vis} \quad (2.21)$$

soit explicitement

$$F v = \eta M_{t,vis} \cdot 2\pi N$$

ce qui donne

$$M_{t,vis} = \frac{1}{\eta} F \frac{v}{2\pi N} = \frac{1}{\eta} F \frac{N p}{2\pi N} = \frac{1}{\eta} F \frac{p}{2\pi} \quad (2.22)$$

## 2.4 EFFORTS SECONDAIRES DANS LES ENGRENAGES

### 2.4.1 Engrenages à dentures droites

Commençons par préciser le vocabulaire exact relatif aux engrenages. Un engrenage est un système dans lequel deux roues dentées engrènent entre elles. On appelle généralement *pignon* la petite roue dentée, l'autre étant

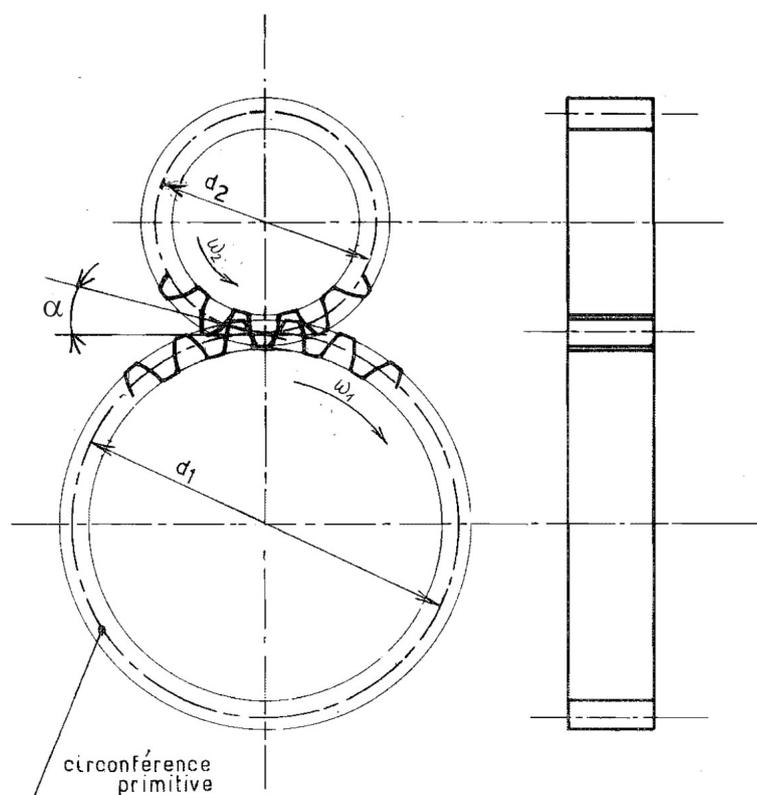


FIGURE 2.7 – Engrenage à denture droite

simplement dénommée *roue*. Affectons ici d'un indice 2, les grandeurs relatives au pignon et d'un indice 1 les grandeurs relatives à la roue (Fig. 2.7). Nous savons que l'effet des dents est d'amener les circonférences primitives à rouler sans glisser l'une sur l'autre. Leur vitesse commune  $v$  au point de contact est donc

$$v = \omega_1 \frac{d_{01}}{2} = \omega_2 \frac{d_{02}}{2} \quad (2.23)$$

où  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont les diamètres primitifs des cylindres équivalents aux engrenages qui roulent l'un sur l'autre sans glisser.

Pour que les dents d'une des deux roues puissent entrer et sortir des entre-dents de la roue conjuguée, il faut évidemment qu'elles soient plus étroites en leur sommet qu'en leur base. Au point de contact, le profil de la dent a donc sa normale inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la tangente au cercle passant par ce point de contact. Cet angle est appelé *angle de pression*. La dent conjuguée doit à ce moment avoir, au point de contact, le même angle. C'est à partir de ces conditions que l'on détermine le profil des dents, dont

l'étude précise relève d'un chapitre particulier de ce cours. En transmission de puissance, on utilise exclusivement le profil en développante de cercle. Il possède cette propriété fondamentale que l'angle de pression reste constant tout au long de l'engrènement. A l'heure actuelle, cet angle est normalisé à la valeur

$$\alpha = 20^\circ \quad (2.24)$$

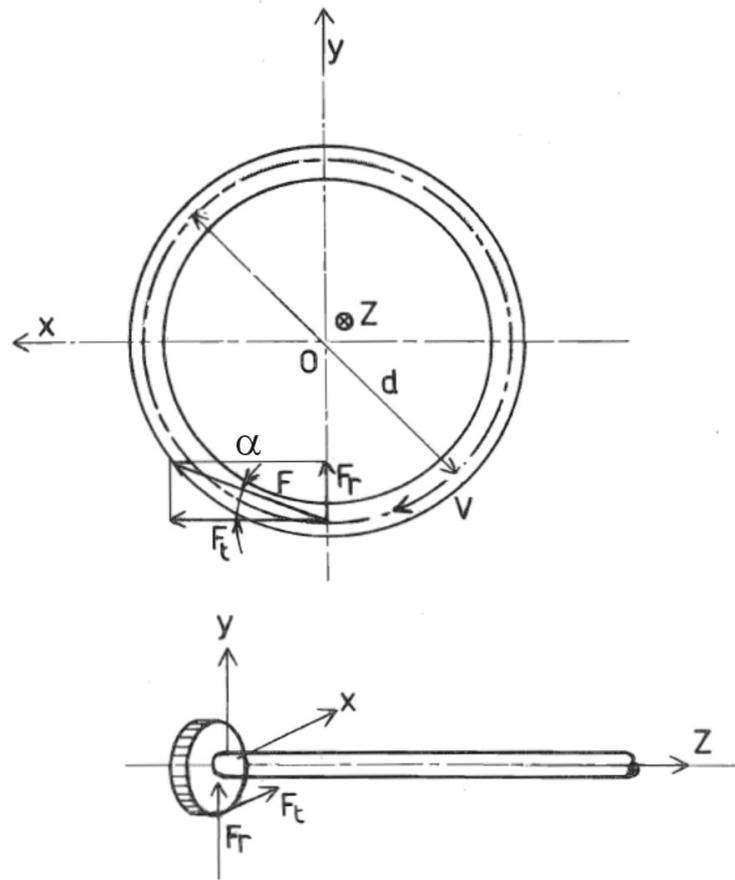


FIGURE 2.8 – Efforts dans un engrenage à denture droite

Si l'on néglige les frottements, l'action de la roue menante sur la roue menée est située sur la normale commune aux deux profils. On a donc (Figure 2.8) :

— Force tangentielle  $F_t$  :

$$F_t = Q = \frac{P}{v} = \frac{P}{\omega d_0} \quad (2.25)$$

— Force normale  $F_r$  :

$$F_r = F_t \tan \alpha \quad (2.26)$$

Pour un angle de pression de  $20^\circ$ , la tangente vaut 0.36, ce qui signifie que l'effort secondaire  $F_r$  vaut ici 36 % de l'effort actif  $F_t$ . En se référant à la Figure 2.8, les forces ci-dessus induisent les sollicitations suivantes pour l'arbre :

- Moment de torsion  $M_t = F_t d_0/2$ ;
- Flexion dans le plan  $xOz$ , sous l'effet de l'effort tranchant  $F_t$ ;
- Flexion dans le plan  $yOz$ , sous l'effet de l'effort tranchant  $F_r$ .

### 2.4.2 Engrenages à denture hélicoïdale

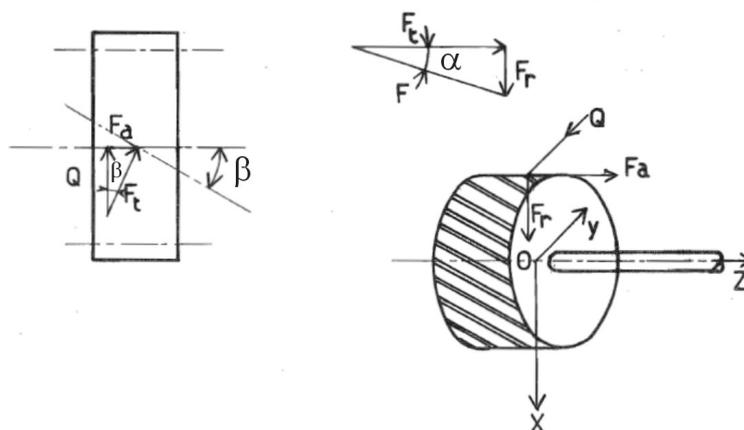


FIGURE 2.9 – Engrenage à denture hélicoïdale

Diverses considérations pratiques, au rang desquelles interviennent le silence de fonctionnement et la régularité de l'engrènement, conduisent à préférer dans bien des cas des dentures hélicoïdales. Leur caractéristique est que les dents sont inclinées d'un angle  $\beta$  par rapport à la génératrice du cylindre primitif. Cet angle d'hélice varie entre  $8^\circ$  et  $20^\circ$  selon les applications. Il vaut souvent  $10^\circ$ .

Dans le plan normal à la denture, la force normale à la denture  $F_n$  donne lieu à une composante radiale  $F_r$  et une composante dans le plan tangent  $F_t$ . On a donc (voir Figure 2.9) :

$$F_t = F_n \cos \alpha \quad (2.27)$$

$$F_r = F_n \sin \alpha \quad (2.28)$$

Soit en éliminant le module de la force normale  $F_n$

$$F_r = F_t \tan \alpha \quad (2.29)$$

et l'angle de pression de contact reste en général de  $\alpha = 20^\circ$ . Mais du fait de l'angle d'hélice  $\beta$ , la force tangentielle  $F_t$  se décompose elle-même en une composante active  $Q$  et une force axiale  $F_a$ . On a donc

$$Q = F_t \cos \beta \quad (2.30)$$

$$F_a = F_t \sin \beta \quad (2.31)$$

soit

$$F_a = Q \tan \beta \quad (2.32)$$

$$F_t = \frac{Q}{\cos \beta} \quad (2.33)$$

L'effort productif  $Q$  est quant à lui donné par la puissance à transmettre

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega \frac{d_0}{2}} \quad (2.34)$$

En définitive, tout se déduit de la puissance à transmettre et de l'effort productif  $Q$  :

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega \frac{d_0}{2}} \quad (2.35)$$

$$F_a = Q \tan \beta \quad (2.36)$$

$$F_r = Q \frac{\tan \alpha}{\cos \beta} \quad (2.37)$$

Les efforts de denture soumettent l'arbre à

— un moment de torsion

$$M_t = Q \frac{d_0}{2} \quad (2.38)$$

— une flexion dans le plan  $xOz$ , due aux efforts  $F_r$  et  $F_a$

— une flexion dans le plan  $yOz$ , due à l'effort  $Q$

— un effort axial  $F_a$  qui devra être repris par une butée.

Remarque importante : l'effort axial change de sens avec le couple.

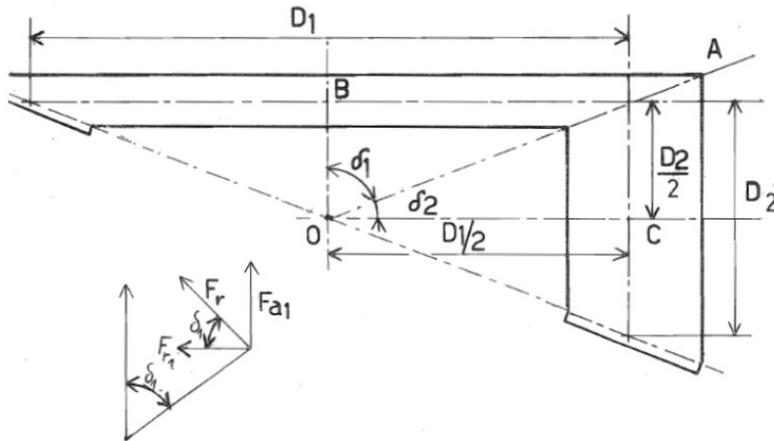


FIGURE 2.10 – Engrenage à denture conique

### 2.4.3 Engrenages coniques à denture droite

Nous nous limiterons au cas courant de l'engrenage entre deux arbres perpendiculaires. Les deux demi-angles au sommet des cônes,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  repris à la Figure 2.10 sont liés par les relations :

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (2.39)$$

$$\frac{D_1}{2} = \frac{D_2}{2} \tan \delta_1 \quad (2.40)$$

$$\frac{D_2}{2} = \frac{D_1}{2} \tan \delta_2 \quad (2.41)$$

ce qui implique, en notant  $Z$  le nombre de dents,

$$\tan \delta_1 = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (2.42)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.43)$$

La force active vaut

$$Q = \frac{\mathcal{P}}{\omega_1 \frac{D_1}{2}} = \frac{\mathcal{P}}{\omega_2 \frac{D_2}{2}} \quad (2.44)$$

La composante normale à la ligne OA, dans le plan BAC, vaut

$$F_n = Q \tan \alpha \quad (2.45)$$

où  $\alpha$  est l'angle de pression dans le plan normal au denture. Elle se décompose en

$$F_{r1} = F_{a2} = F_n \cos \delta_1 = F_n \sin \delta_2 \quad (2.46)$$

$$F_{r2} = F_{a1} = F_n \sin \delta_1 = F_n \cos \delta_2 \quad (2.47)$$

#### 2.4.4 Efforts secondaires dans les transmissions par courroie

Les courroies seront étudiés lors du chapitre consacré à ce thème, toutefois nous livrons ici un résumé des résultats nécessaires à l'étude et à la conception préliminaire des systèmes mécaniques impliquant des courroies. En particulier on estimera de manière approchée les efforts actifs et les efforts secondaires qui en découlent. On peut d'ores et déjà remarquer que ces efforts secondaires sont de loin supérieurs à l'effort actif  $Q$ .

##### Géométrie de la transmission

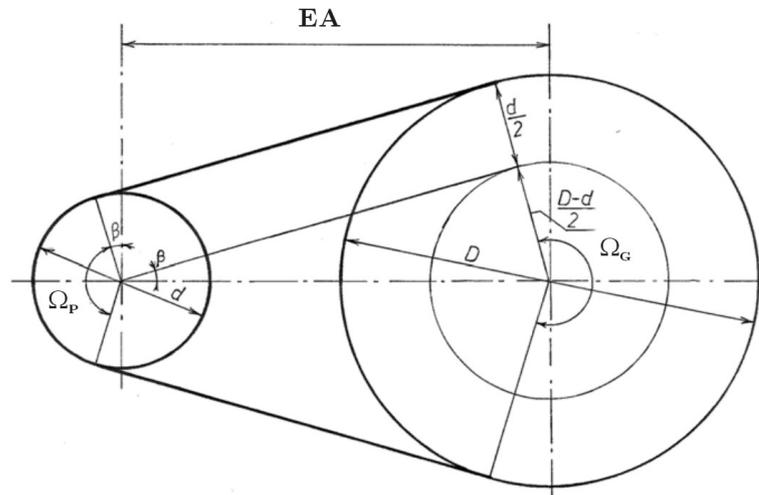


FIGURE 2.11 – Transmission par courroie sans tendeur

La géométrie d'une transmission classique par courroie sans tendeur est représentée à la Figure 2.11. Les deux poulies ont pour diamètres respectifs  $D$  pour la grande et  $d$  pour la petite. L'arc sur lequel la courroie s'enroule sur la jante d'une poulie s'appelle l'*arc embrassé*. Notons le  $\Omega_G$  pour la grande

poulie et  $\Omega_P$  pour la petite. Entre celles-ci, pour autant que la tension de la courroie soit suffisante, la courroie suit la tangente commune aux deux poulies. Ces parties de la courroie qui sont en l'air sont appelés les *brins*. La distance  $EA$  entre les axes des deux poulies est appelée l'*entraxe*.

Appelons  $\beta$  la différence

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega_P}{2}$$

Il ressort de la Figure 2.11 que

$$\sin \beta = \frac{D - d}{2EA} \quad (2.48)$$

On a alors

$$\Omega_P = \alpha_P = \pi - 2\beta \quad (2.49)$$

$$\Omega_G = \alpha_G = \pi + 2\beta \quad (2.50)$$

Enfin la longueur de la courroie se calcule par

$$\mathcal{L} = \frac{d}{2} \Omega_P + \frac{D}{2} \Omega_G + 2EA \cos \beta \quad (2.51)$$

Ce n'est pas la longueur relaxée, car la courroie est montée sous une *tension de pose*  $T_0$ . En vertu de la loi de Hooke, la longueur relaxée est égale à

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\mathcal{L}}{1 + \frac{T_0}{ES}} \quad (2.52)$$

où  $E$  est la module de Young de la courroie et  $S$  sa section droite.

### 2.4.5 Rapport de transmission

Une transmission par courroie ne peut pas être intrinsèquement homocinétique pour trois raisons :

- L'élasticité relative de la courroie autorise celle-ci à s'allonger selon l'intensité des tensions de fonctionnement ;
- Le contact de la courroie sur la poulie sans obstacle n'exclut pas le glissement d'ensemble, toujours possible lors d'une surcharge ;
- La courroie *rampe* le long de son contact curviligne avec chacune des deux poulies. Ce phénomène qui se décrit au moment du traitement de l'équilibre de la courroie le long des jantes des poulies conduit à un glissement systémique pouvant faire varier de 2 % le rapport de transmission.

Calculons à présent le rapport de transmission dans le cas idéalisé d'une transmission parfaitement homocinétique. exprimons l'égalité de la vitesse de défilement  $v$  de la courroie avec les vitesses tangentielles à la jante des poulies :

$$v = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

On trouve le rapport de réduction entre les deux poulies.

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_1}{d_2} \quad (2.53)$$

En charge, l'allongement d'une courroie varie d'une façon réversible suivant l'intensité des tensions qu'elle supporte. L'allongement d'un élément de courroie est plus important sur le brin tendu que sur le brin mou. Par ailleurs cet allongement varie progressivement entre les point A et B lieux d'entrée et de sortie de la courroie sur la poulie. Il en résulte un glissement relatif entre la courroie et la poulie et donc une vitesse de glissement fonctionnellement non nulle. On dit que la courroie rampe sur la poulie. On parle aussi de mouvement vermiculaire. Si la tension exercée en R sur un élément de courroie de longueur  $rd\theta$  est  $F$ , alors l'hypothèse d'un allongement suivant la loi de Hooke s'écrit.

$$\sigma = E\epsilon$$

avec

$$\epsilon = \frac{\widehat{\Delta SR}}{SR} = \frac{\widehat{\Delta SR}}{rd\theta}$$

Soit

$$\frac{F}{S} = E \frac{\widehat{\Delta SR}}{rd\theta}$$

d'où

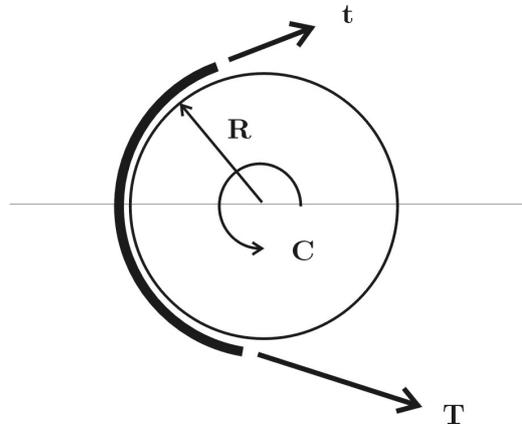
$$\widehat{\Delta SR} = \frac{Frd\theta}{ES}$$

où E est le module de Young de la courroie et S l'aide de la section droite.

Comme  $F$  varie le long de  $\theta$ , l'allongement  $\widehat{\Delta SR}$  varie le long du contact curviligne  $\widehat{AB}$ . Ce phénomène existe sur les deux poulies, motrice et réceptrice. Quand le glissement relatif n'est pas négligeable, le rapport de transmission a pour expression :

$$i = (1 - g) \frac{d_1}{d_2} \quad (2.54)$$

Une valeur typique du glissement  $g$  est 2%.

FIGURE 2.12 – Couple effectif  $C$  et efforts dans les brins tendu  $T$  et mou  $t$ 

### Tensions dans les brins d'une courroie

Soit  $C_1$  le couple moteur délivré par la poulie motrice 1. Pendant la transmission le brin supérieur est tendu tandis que le brin inférieur est mou.

Pour déterminer  $T$  et  $t$ , les tensions respectivement dans les brins tendus et mous, on dispose d'un système de deux équations : la première est issue de l'expression de la puissance transmise alors que la seconde résulte l'équilibre dynamique d'un élément de courroie. Cette dernière expression est également appelée équation d'Euler.

La résolution du système conduit souvent à des résultats théoriques qu'il convient de corriger si l'on veut se rapprocher des tensions réelles préconisées par les fabricants.

Soit  $C_2$  le couple résistant à la poulie 2. En régime établi l'équation d'équilibre des moments autour de l'axe de la poulie 2 s'écrit :

$$C_2 = T R_2 - t R_2 \quad (2.55)$$

soit

$$\boxed{T - t = \frac{C_2}{d_2/2}} \quad (2.56)$$

Sur la poulie 1, on a de même :

$$\boxed{T - t = \frac{C_1}{d_1/2}} \quad (2.57)$$

Les relations (2.55) et (2.56) constituent la première équation du système permettant de déterminer les tensions  $T$  et  $t$ . Les couples  $C_1$  et  $C_2$  s'obtiennent à partir de la puissance  $\mathcal{P}$  à transmettre :

$$C_1 = \frac{\mathcal{P}}{\omega_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\mathcal{P}}{\omega_2} \quad (2.58)$$

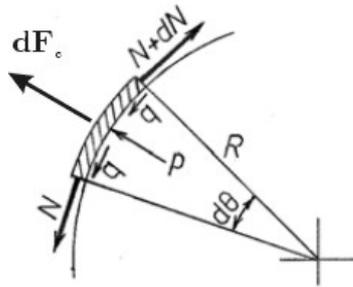


FIGURE 2.13 – Equilibre d'un élément de courroie sous l'effet des forces centrifuges et des forces de frottement entre la courroie et la poulie

La seconde équation est issue de l'équilibre dynamique d'un élément de courroie. L'équilibre d'un élément de courroie de longueur  $Rd\theta$  est représenté à la Figure 2.13. Sa masse est  $dm$ . La vitesse linéaire de la courroie le long de la jante est  $v$ .

L'équilibre radial s'écrit :

$$dF_c = N \sin \frac{d\theta}{2} + (N + dN) \sin \frac{d\theta}{2} - p R d\theta \quad (2.59)$$

tandis que l'équilibre circonférentiel donne :

$$(N + dN) \cos \frac{d\theta}{2} - N \cos \frac{d\theta}{2} = q R d\theta \quad (2.60)$$

Soit  $m'$  la masse linéique de la courroie, les forces centrifuges s'écrivent :

$$F_c = m' R d\theta \frac{v^2}{R}$$

On peut également négliger les termes d'ordre supérieur

$$dN d\theta \ll 1$$

et linéariser les fonctions sinus et cosinus.

$$\cos d\theta \simeq 1 \quad \text{et} \quad \sin d\theta \simeq d\theta$$

Il vient

$$\begin{aligned} m' R d\theta \frac{v^2}{R} &= 2 N \frac{d\theta}{2} - p R d\theta \\ dN &= q R d\theta \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve :

$$N - m' v^2 = p R \quad (2.61)$$

$$\frac{dN}{d\theta} = q R \quad (2.62)$$

Il faut maintenant écrire la condition de liaison entre la pression de contact entre la courroie et la jante et la force de frottement qui s'y développe. On note par  $\mu$  le coefficient de frottement entre la poulie et la courroie.

$$q \leq \mu p \quad (2.63)$$

En utilisant les deux équations d'équilibre (2.61) et (2.62), on peut écrire

$$\frac{dN}{d\theta} \leq \mu (N - m' v^2)$$

Dénotons par  $\bar{N}$ , la traction amputée de la composante centrifuge :

$$\bar{N} = N - m' v^2 \quad (2.64)$$

On a

$$\frac{\bar{N}}{d\theta} \leq \mu \bar{N} \quad (2.65)$$

Si on se souvient que l'effort de traction vaut  $N = t$  en  $\theta = 0$  et que  $N = T$  en  $\theta = \Omega$ , on trouve successivement :

$$\ln \bar{N} \leq \ln \bar{t} + \mu \theta$$

et

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} \leq \exp(\mu \Omega) \quad (2.66)$$

Si la transmission travaille à la limite du glissement, l'inégalité se transforme en égalité et l'équilibre radial et tangential du morceau de courroie permet de donner l'expression qui lie les tensions dans les brins tendus et mous.

$$\boxed{\frac{T - m'v^2}{t - m'v^2} = \exp(\mu \Omega)} \quad (2.67)$$

Cette équation constitue la deuxième équation du système permettant de déterminer les tensions dans les brins tendus  $T$  et mous  $t$ .

La première composante

$$T_c = m'v^2$$

est liée aux forces centrifuges et à la vitesse de défilement  $v$ . Elle est appelée *tension centrifuge*. Elle est indépendante des rayons des poulies. Cette tension naît tout au long de la courroie et ne produit aucun effort de transmission. Elle est uniquement due aux forces centrifuges.

Les *tensions productives moyennes*

$$\begin{aligned} \bar{T} &= T - m'v^2 \\ \bar{t} &= t - m'v^2 \end{aligned}$$

sont celles qui produisent l'effort  $Q$  lié à la transmission de couple et de puissance.

$$Q = \bar{T} - \bar{t} \quad (2.68)$$

Soit  $\bar{T}_0$  la moyenne des tensions productive des brins tendus et mous.

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{2} (\bar{T} + \bar{t}) \quad (2.69)$$

Calculons le ratio entre l'effort périphérique  $Q$  à la valeur moyenne des tensions  $\bar{T}_0$ . Il vient

$$\frac{Q}{2\bar{T}_0} = \frac{\bar{T} - \bar{t}}{\bar{T} + \bar{t}} = \tanh \frac{\mu \Omega}{2}$$

On peut donc écrire

$$Q = \bar{T}_0 \tanh \frac{\mu \Omega}{2} \quad (2.70)$$

On en conclut que pour qu'il y ait un effort non nul et donc un couple transmis, il est impératif d'avoir une tension initiale supérieure à zéro.

### Tension de pose

L'existence des tensions de fonctionnement  $T$  et  $t$  est due à celle d'une tension initiale  $T_0$  appliquée à l'arrêt. En effet cette *tension de pose* donne naissance aux actions de contact initiales entre la poulie et la courroie nécessaire à l'entraînement sans glissement.

Une approche élémentaire consiste à appliquer une tension de pose :

$$T_i = \frac{1}{2} (T + t) \quad (2.71)$$

On peut montrer que suite à la mise en place d'un dispositif de mise sous tension initiale qui procède généralement de l'imposition d'un allongement initial de la courroie, on a

$$T_i = \frac{T + t}{2} = \frac{(\bar{T} + m'v^2) + (\bar{t} + m'v^2)}{2} = \bar{T} + m'v^2 \quad (2.72)$$

ceci signifie que la tension de pose étant fixée, la tension productive moyenne va diminuer d'autant plus vite que la vitesse est grande. L'effort tangentiel va donc aussi diminuer en conséquence :

$$Q = (T_i - m'v^2) \tanh \frac{\mu \Omega}{2} \quad (2.73)$$

Dans le chapitre dévoué à l'étude des courroies, on verra différentes dispositions constructives qui permettent le réglage de cette tension.

### Efforts transmis aux arbres

L'interaction entre la poulie et la courroie se résume aux seuls efforts à l'arrêt. Ainsi dans le cas d'une poulie motrice représentée à la Figure 2.14, la composante de l'effort transmis à l'arbre le long de la ligne des centres vaut

$$F_1 = \bar{T} \sin \frac{\Omega}{2} + \bar{t} \sin \frac{\Omega}{2} = 2\bar{T}_0 \sin \frac{\Omega}{2} \quad (2.74)$$

tandis que la composante perpendiculaire à la ligne d'entraxe vaut :

$$F_2 = \bar{T} \cos \frac{\Omega}{2} - \bar{t} \cos \frac{\Omega}{2} = Q \cos \frac{\Omega}{2} \quad (2.75)$$

On remarque que comme la tension moyenne  $\bar{T}_0 = T_i - m'v^2$  diminue avec la vitesse, il en est de même avec la force  $F_1$ . On notera aussi que cette force est en général nettement plus grande que l'effort actif  $Q$ .

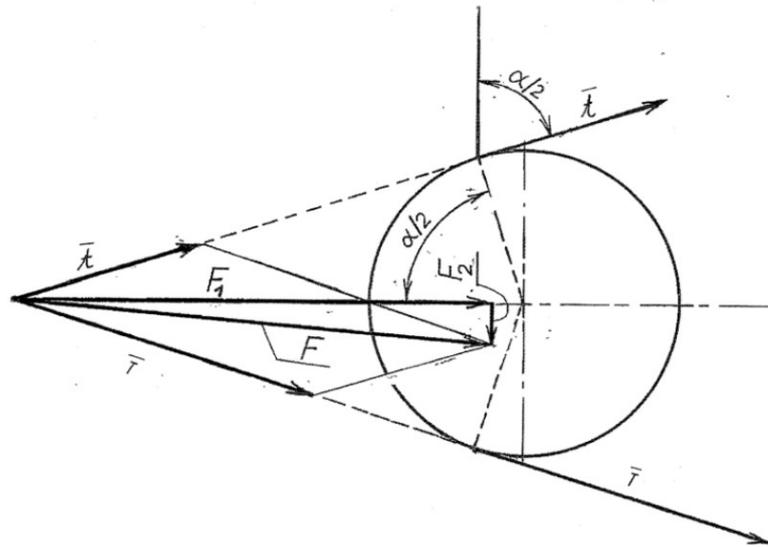


FIGURE 2.14 – Efforts transmis aux arbres par une transmission par courroie

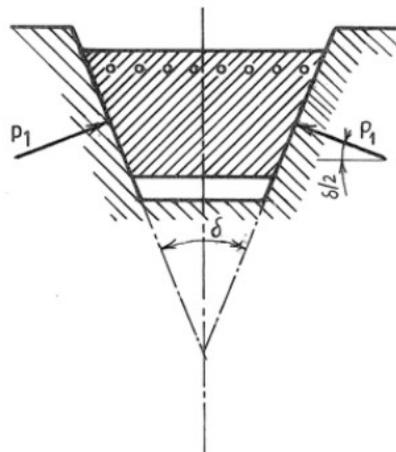


FIGURE 2.15 – Courroie trapézoïdale

### Courroie trapézoïdale

Les courroies trapézoïdales permettent d'obtenir un frottement équivalent plus grand que les courroies plates. En effet, en se référant à la Figure 2.15, elles reposent sur leurs flancs qui sont inclinés. Les pressions par unité de longueur  $p_1$  sur les flancs ont une résultante radiale

$$p = 2 p_1 \sin \frac{\delta}{2} \quad (2.76)$$

Les efforts tangentiels sur les flancs sont, par unité de longueur  $q_1$  sur chacun d'eux. A la limite du glissement, ils sont donnés par la condition de Coulomb en fonction du coefficient de frottement et de la pression normale :

$$q_1 = \mu p_1 \quad (2.77)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement entre la courroie et les flasques de la poulie.

La résultante des efforts tangentiels vaut :

$$q = 2 q_1 = 2 \mu \frac{p}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \mu \frac{p}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (2.78)$$

On se ramène alors à la théorie des courroies plates en introduisant un *coefficient de frottement équivalent* :

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (2.79)$$

En pratique l'angle de la gorge de la poulie  $\delta$  est de l'ordre de  $34^\circ$ , ce qui donne :

$$\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = 3.420$$

On obtient ainsi des coefficients de frottements équivalents de l'ordre de 1 à 2.5. Les courroies trapézoïdales peuvent donc transmettre un effort actif plus grand pour la même tension de pose. Toutefois elles ne permettent pas de travailler avec des vitesses aussi grandes que les courroies plates. On ne dépasse guère  $30 \text{ m/s}$  avec les courroies trapézoïdales alors que les courroies plates permettent d'atteindre  $50 \text{ m/s}$ .

### 2.4.6 Efforts secondaires dans les transmissions par chaîne

Dans les transmissions par chaîne à rouleaux, les rouleaux transmettent l'effort à la roue dentée avec une certaine obliquité  $\gamma$  égale au demi-angle de la dent (voir Fig. 2.16). Cette obliquité est de l'ordre de  $15^\circ$  à  $19^\circ$ . On a donc, si  $\beta$  est l'angle entre deux maillons, les relations suivantes :

$$N_0 = N_1 \cos \beta + R_1 \cos \gamma \quad (2.80)$$

$$N_1 \sin \beta = R_1 \sin \gamma \quad (2.81)$$

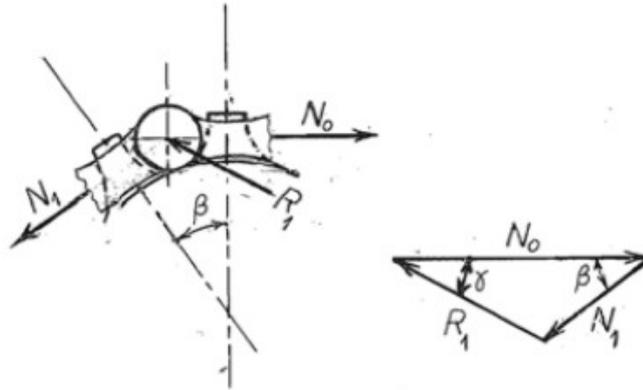


FIGURE 2.16 – Transmission par chaîne à rouleaux

De la seconde equation (2.81), on tire immédiatement

$$R_1 = N_1 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

ce qui implique

$$N_0 = N_1 \left( \cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = N_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$$

Cette relation se reproduit de maillon en maillon. Après  $n$  maillons, il subsiste donc un effort

$$N_n = N_0 \left( \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^n \quad (2.82)$$

On a évidemment

$$\beta = \frac{2\pi}{Z}$$

où  $Z$  est le nombre de dents de la roue. Le nombre de dents en prise est donné par la fraction de ce nombre de dents située dans l'arc embrassé  $\Omega$ , soit

$$Z_P = \text{partie entière de} \left( Z \frac{\Omega}{2\pi} \right) \quad (2.83)$$

où  $\Omega$  est l'arc embrassé. L'effort au brin mou  $t$  est donc relié à l'effort du brin tendu  $T = N_0$  par la relation :

$$t = T \left( \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^{Z_P}$$

Ainsi par exemple pour  $\gamma = 15^\circ$  et  $Z = 17$  dents, on a

$$\beta = \frac{360}{17} = 21.18^\circ$$

et

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin(36.18^\circ)} = 0.4384$$

Pour un arc embrassé est de  $180^\circ$ , le nombre de dents en prise vaut,

$$Z_P = \text{partie entière de } \left(17 \frac{180}{360}\right) = 8$$

On obtient donc

$$\frac{t}{T} = (0.4384)^8 = 0.001364$$

L'effort dans le brin mou est donc *négligeable* et on peut écrire sans grande erreur

$$T - t \approx T = Q$$

L'effort sur l'axe est dès lors approximativement égal à l'effort actif  $Q$ , dans la direction du brin tendu. C'est là l'avantage des chaînes sur les courroies : à effort actif égal, elles soumettent l'arbre à des efforts bien moindres.

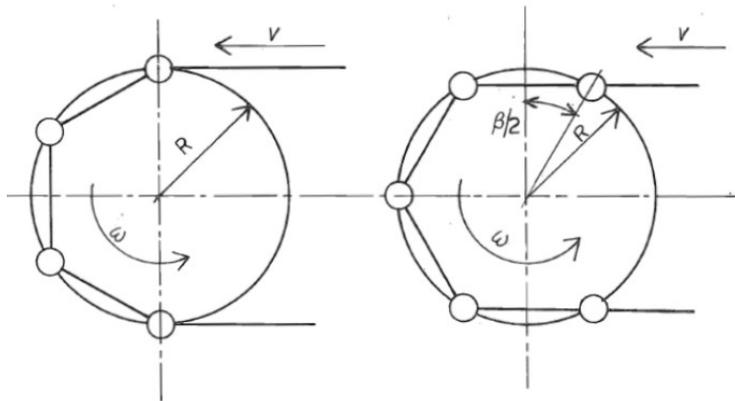


FIGURE 2.17 – Effet de polygone par dans une transmission par chaîne

Il existe cependant un inconvénient aux transmissions par chaînes. Il s'agit de l'effet de polygone, qui consiste en ceci : supposons (Fig. 2.17) que la roue motrice tourne à une vitesse de rotation constante  $\omega$ . Dans la première configuration illustrée à la Figure 2.17, la vitesse du brin tendu de la chaîne est donnée par

$$v = \omega R$$

tandis que dans la seconde configuration, elle vaut

$$v = \omega R \cos \frac{\beta}{2}$$

La transmission du mouvement n'est donc pas parfaitement régulière, on dit homocinétique. Cet effet s'accroît pour les roues à faible nombre de dents, pour lesquelles l'angle  $\beta$  est relativement grand.

Les courroies crantées s'apparentent aux chaînes pour la transmission de l'effort, avec  $\gamma = 20^\circ \dots 25^\circ$ . Elles n'ont pas d'effet de polygone.

# Chapitre 3

## LA CONCEPTION A LA FATIGUE

### 3.1 LE PHENOMENE DE FATIGUE

#### 3.1.1 Objet du chapitre

On a très souvent observé en construction de machines et en aéronautique que certaines pièces essentielles soumises à des efforts variables et répétés un grand nombre de fois se rompent brusquement et sans déformations annonciatrices de la rupture. Paradoxalement on peut vérifier que des pièces soumises à des efforts constants plus importants résistent correctement. Ainsi du fait que les efforts sont variables, leur action est plus dangereuse.

On appelle *fatigue* la cause, en apparence mystérieuse de cette défaillance à laquelle aucun matériau n'échappe sous l'action des efforts variables (R. Cazaud [7]). La fatigue désigne l'endommagement d'une pièce sous l'effet d'efforts répétés ou plus généralement variable. Il en résulte une détérioration des propriétés matériaux au cours du temps essentiellement due à l'apparition de micro fissures et aboutissant finalement à la la rupture brutale de la pièce endommagée. Le fatigue est un phénomène distinct de l'usure.

Le phénomène de fatigue revêt une importance considérable puisque l'on estime généralement que 90 % des ruptures de pièces en mécanique des machines ou en aéronautique sont imputables au phénomène de fatigue. La compréhension et la maîtrise du phénomène de fatigue est donc captiale pour l'ingénieur et la conception mécanique et aéronautique.

L'étude de la résistance de toute construction soumise à des sollicitations semi-périodiques dépend d'un très grand nombre de paramètres par ailleurs interconnectés. En fait, les données d'un problème de fatigue peuvent être

groupés comme suit : d'abord celles qui définissent les formes, ensuite celles qui sont propres à la structure, enfin celles qui concernent les conditions mécaniques, physiques et chimiques des sollicitations.

Le phénomène de fatigue est assurément complexe. Il ne peut être question de l'analyser ici dans son intégralité. L'objet du présent chapitre est en vérité moins ambitieux : il consiste à proposer une méthode de dimensionnement des éléments de machine plus fine que celle qui sont généralement utilisées dans les techniques d'avant-projet où l'on considère une contrainte limite admissible réduite. On veut utiliser les connaissances de bases accumulées dans le domaine de la mécanique de la fatigue pour énoncer quelques règles fondamentales concernant la conception et le dessin de pièces et composants conduisant à une durée de vie améliorée. Cette méthode se veut être une approche rationnelle du problème. Toutefois dans la pratique industrielle, il est entendu qu'étant donné la grande complexité du phénomène de fatigue et le nombre de facteurs dont il dépend, seuls les essais directs sur la pièce, dans des conditions aussi proches que possible de la réalité pourront donner des renseignements fiables. Même si l'analyse précise et quantitative du phénomène proposée ici est limitée aux cas relativement simples, il n'en reste pas moins vrai que le respect de quelques grands principes qui seront exposé à la fin du chapitre doit conduire le plus souvent à des améliorations positifs.

### 3.1.2 Brève historique

Le phénomène de fatigue est apparu au grand jour lors de l'essor de la conception des machines au 19ème siècle et en particulier avec les chemins de fer. Wilhelm Albert identifie le problème dès 1829 dans la rupture de chaînes de puits de mine et il effectue les premiers essais de fatigue répertoriés. En 1839, Jean-Victor Poncelet utilise pour la première fois le terme fatigue. Toutefois c'est l'accident de train de Meudon en France en 1842 causant la mort de nombreux invités revenant des fêtes organisées à Versailles pour l'anniversaire du roi Louis-Philippe (Figure 3.1) qui le problème au devant de la scène. Rankine identifie l'origine du déraillement dans la rupture par fatigue d'un essieu de la locomotive (Figure 3.2).

En 1852, le ministre prussien du commerce charge le savant August Wöhler de travailler sur les ruptures d'axes d'essieux de trains. Wöhler expose ses travaux à l'exposition universelle de 1867 à Paris. Il est le père des travaux décrivant et expliquant le phénomène de fatigue.

Avec l'essor de l'aéronautique le phénomène de fatigue prend un second virage au cours des années 1953 et 1954. Deux De Havilland DH 106 COMET



FIGURE 3.1 – Accident ferroviaire de Meudon de 1842

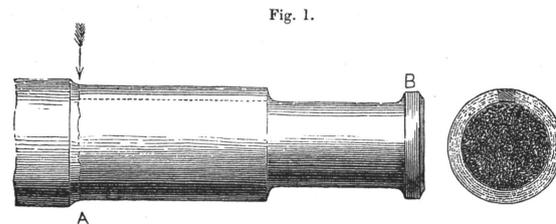


FIGURE 3.2 – Accident ferroviaire de Meudon de 1842 : identification du problème de rupture d'un essieu par Rankine

explosent en plein vol, à quelques semaines d'intervalle. Les accidents sont imputés à une rupture par fatigue des tôles d'aluminium suite à des fissures par fatigue aux trous de rivets du fuselage proches des hublots (Figures 3.3 et ). Ces accidents relancent l'étude des phénomènes par fatigue. En particulier, les accidents poussent S. S. Manson et L. F. Coffin à travailler sur la fatigue oligo-cyclique dès 1954. Les développements théoriques aboutissent alors à la théorie de la mécanique de la rupture et de l'endommagement.

Malgré les progrès accomplis, les accidents par fatigue restent une préoccupation majeure conduisant parfois à des conséquences désastreuses ou spectaculaires comme l'illustre l'accident du vol ALOHA 243 où un Boeing B737-200 de la compagnie Aloha Airlines perd une partie importante de son fuselage et de sa structure en plein vol le 28 avril 1988 (Figure 3.5) suite à la propagation d'une fissure le long de lignes de rivets. Heureusement cette fois, ceci s'est terminé avec un nombre très limité de perte de vies humaines (une hôtesse portée disparue et 65 passagers et membres d'équipage blessés).

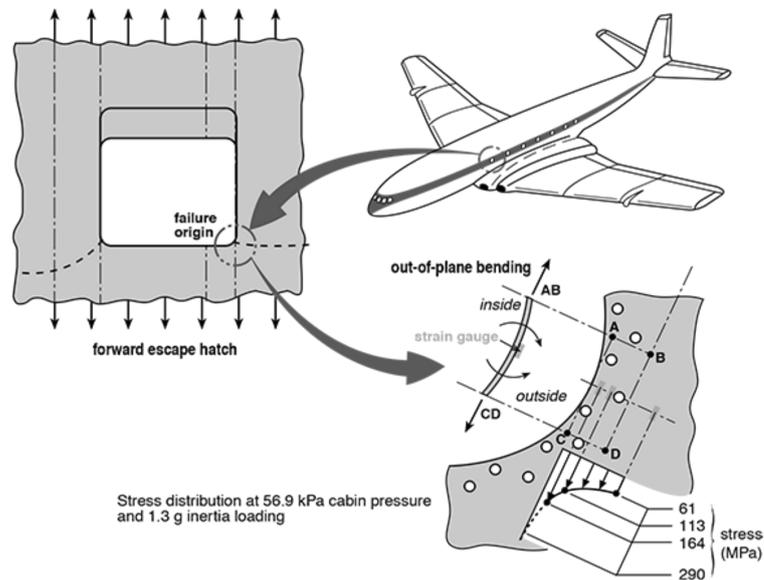


FIGURE 3.3 – Accident aérien du COMETT



FIGURE 3.4 – Accident aérien du COMETT

### 3.1.3 Les différentes phases d'une rupture par fatigue

Lors des essais par fatigue, on observe différentes phases dans l'endommagement du matériaux et la dégradation de la pièce (Figure 3.6).

**Phase I : Amorçage (inition) de la fissure.** La phase d'initiation peut représenter jusqu'à 80 à 90% de la durée de vie de la pièce comme dans le cas de la rupture d'éléments de machine. Au de cette phase on assiste à la germination puis à la croissance de multiples microfissures. Toute discontinuité



FIGURE 3.5 – Accident aérien du vol ALHOA 243

de surface, défaut cristallin, inclusion de surface, dommage lié à l'usinage ou à un accident, piqûres de corrosion... favorisent cette germination. Les microfissures progressent puis coalescent pour former in fine une macrofissure. La phase I se termine typiquement lorsque la fissure détectable c'est-à-dire dès qu'elle atteint une taille de 0,1 à 1 mm.

**Phase II : Propagation de la fissure.** La fissure macroscopique se propage alors selon les lois de la mécanique de la rupture. Cette phase est clairement visible dans le faciès de rupture de la pièce. Elle se repère à la multitude de lignes d'arrêt bien identifiables. Chaque ligne d'arrêt correspond à un arrêt à un moment donné du processus de fatigue. La partie de la section correspondant à la phase II présente un aspect soyeux du aux frottements qui existent entre les deux faces de la fissures. Cette phase est typiquement beaucoup plus courte dans les éléments de machine. Elle est souvent négligée dans ce cas de figure. Par contre en aéronautique, la mécanique de la rupture est largement utilisée pour prédire le nombre de cycles avant rupture et déterminer une taille critique au-dessus de laquelle un remplacement de la pièce est nécessaire.

**Phase III : Rupture finale.** La rupture finale survient brutalement. La fissure se propage et déchire la section droite. Généralement elle survient parce que la contrainte de rupture est dépassée dans la section résiduelle. Cette dernière partie présente un aspect rugueux typique de la rupture ductile des grains de matière. On distingue parfois des nervures émanant de la dernière ligne d'arrêt est irradianant à travers la section droite. Généralement cette troisième phase est très courte (un voire deux cycles de chargement)

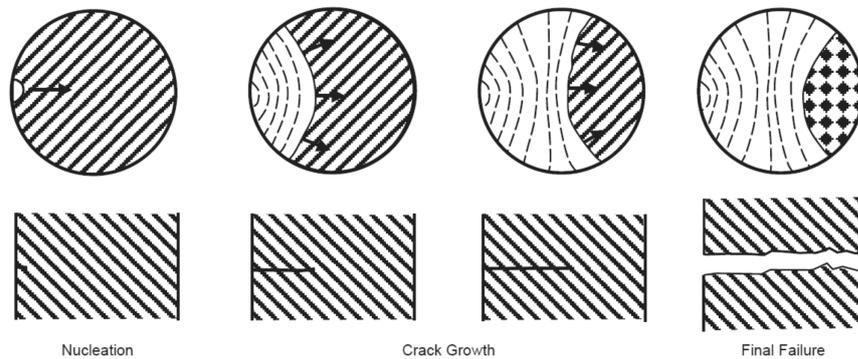


FIGURE 3.6 – Les phases d'une rupture par fatigue

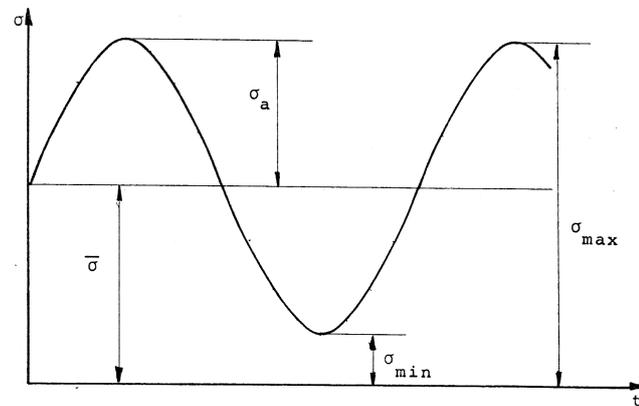


FIGURE 3.7 – Sollicitation pulsatoire

### 3.1.4 Sollicitations cycliques

Les essais de fatigue sont effectués pour différents types de sollicitations cycliques dont l'allure générale est représentée à la Figure 3.7.

On dénomme par  $\sigma_{max}$ , la valeur maximale de la contrainte de tension et par  $\sigma_{min}$ , la valeur minimale de la contrainte de tension.

A partir de ces valeurs, on peut calculer

- $\sigma_m = \bar{\sigma}$ , la valeur moyenne de la tension, caractéristique du cycle de charge, demi somme des tensions extrêmes sur 1e cycle ;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

- $\sigma_a$  : l'amplitude de la composante alternée de la sollicitation, demi-

différence des tensions extrêmes.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

En outre il est d'usage de définir les paramètres suivants caractérisant la forme du signal et de juger de la sévérité de la sollicitation.

— Le coefficient  $\phi$ , dit de Seefehlner :

$$\phi = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{avec} \quad -1 \leq \phi \leq 1$$

— Le ratio de contrainte  $R$ , identique au coefficient de Seefehlner, il lui est généralement préféré aujourd'hui dans la littérature :

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

— Le coefficient d'amplitude  $A$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

— Le *taux de pulsation*  $\varpi$  :

$$\varpi = \frac{\sigma_a}{\sigma_{max}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varpi \leq 1$$

Trois régimes fondamentaux sont couramment rencontrés :

— sollicitations statique :

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma & \sigma_{min} &= \sigma \\ \sigma_a &= 0 & \sigma_m &= \sigma \\ R = \phi &= +1 & \varpi &= 0 & A &= 0 \end{aligned}$$

— sollicitations répétées ou pulsée :

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma & \sigma_{min} &= 0 \\ \sigma_a &= \sigma/2 & \sigma_m &= \sigma/2 \\ R = \phi &= 0 & \varpi &= 1/2 & A &= 1 \end{aligned}$$

— sollicitations alternées :

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma & \sigma_{min} &= -\sigma \\ \sigma_a &= \sigma & \sigma_m &= 0 \\ R = \phi &= -1 & \varpi &= +1 & A &= \infty \end{aligned}$$

### 3.1.5 Limite d'endurance - Courbe de Wöhler

#### La Courbe de Wöhler

L'essai d'un matériau soumis à des efforts variables dans le temps s'appelle *un essai d'endurance*. Les essais d'endurance sont souvent (mais pas toujours) réalisés pour une tension moyenne nulle ( $\sigma_m = \bar{\sigma} = 0$ ).

Il y a trois facteurs de base qui sont susceptibles de causer la fatigue : 1/ la tension maximale qui doit être suffisamment grande ; 2/ une variation suffisamment grande de la contrainte ; 3/ un nombre suffisant de cycles pour entraîner la rupture par fatigue. Les essais d'endurance sont classiquement menés en appliquant des efforts de nature cyclique suivant une sinusoïde d'amplitude  $\sigma_a$  et de moyenne  $\sigma_m = \bar{\sigma}$ .

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi f t) \quad (3.1)$$

La sollicitation à laquelle l'éprouvette est soumise peut être de nature différente : traction, compression, flexion, torsion ou combinaison de ces sollicitations. L'essai d'endurance le plus simple est celui agissant par flexion rotative. Les essais d'endurance ont été défini par Moore dont le principe est représenté à la Figure 3.8. Dans cet essai, l'éprouvette de fatigue est encastrée d'un côté dans un manchon et chargée à son extrémité libre par un effort transversal  $P$ . Les dimensions de l'éprouvette sont normalisées, jusqu'à l'état de surface qui doit être particulièrement soigné (voir Figure 3.9).

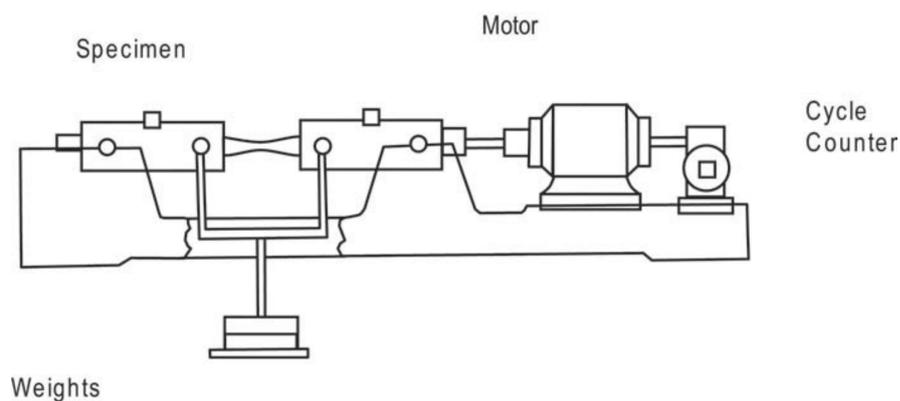


FIGURE 3.8 – Schéma de la machine de test d'endurance de Moore pour une éprouvette en flexion rotative

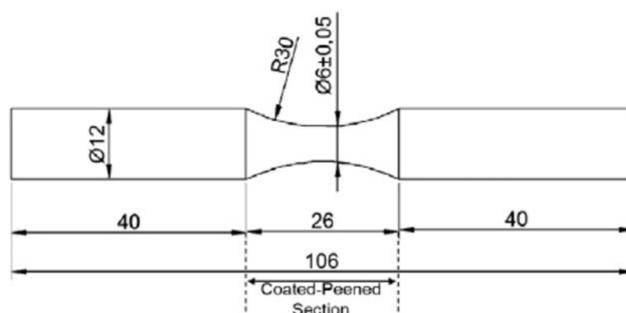


FIGURE 3.9 – Eprouvette de Moore normalisé pour un essai d’endurance

La tension change de signe à chaque demi-révolution de l’éprouvette et le nombre de cycles de tension est égal au nombre de tours de la machine. Cette tension est d’ailleurs alternée puisque la tension moyenne est nulle.

Usinons à présent une série d’éprouvettes du même métal et soumettons chacune d’entre elles à un essai d’endurance en faisant varier la charge  $P$  d’une éprouvette à l’autre. Ces éprouvettes se rompent chacune après un nombre de cycles différent.

Traçons un diagramme en portant en abscisse le nombre  $N$  de cycles (ou son logarithme décimal  $\log_{10} N$ ) et en ordonnée la tension maximale correspondante. Les points caractéristiques des diverses éprouvettes se disposeront (avec une assez forte dispersion) sur une courbe continue appelée *courbe de Wöhler* (Figure 3.10).

Cette courbe sépare le plan du diagramme en deux zones : une zone supérieure pour laquelle les conditions d’essai correspondent à des ruptures et une zone inférieure pour laquelle la rupture n’intervient jamais. Si on utilise les abscisses logarithmiques, la courbe présente alors une partie droite inclinée suivie d’une partie en asymptote horizontale. La valeur de l’asymptote définit une valeur de la contrainte en deçà de laquelle, aucune rupture ne survient même pour un très grand nombre de cycle. La valeur de la contrainte en dessous de laquelle aucune rupture ne survient est appelée *limite d’endurance*. Elle est souvent dénotée par  $\sigma_D$ .

### Domaines de fatigue oligocyclique, d’endurance limitée et illimitée

Une analyse plus approfondie de la courbe de Wöhler permet en réalité de distinguer trois parties (voir Figure 3.11).

Le **domaine oligocyclique** correspond aux contraintes les plus grandes, en particulier à des contraintes supérieures à la limite élastique  $R_e$ . Le nombre

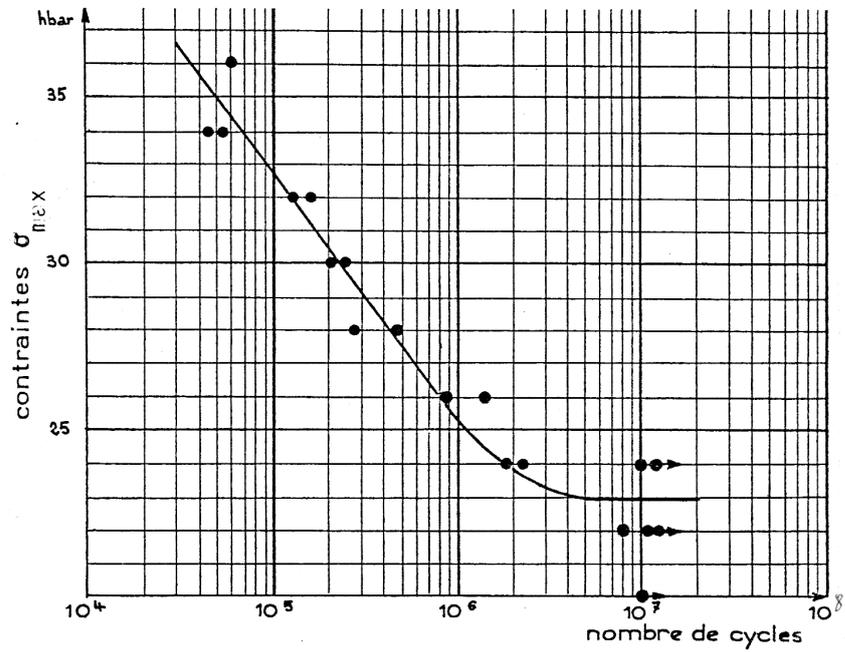


FIGURE 3.10 – Courbe de Wöhler type - Acier doux ( $R_0 = 440$  MPa) - Flexion plane alternée  $\bar{\sigma} = 0$

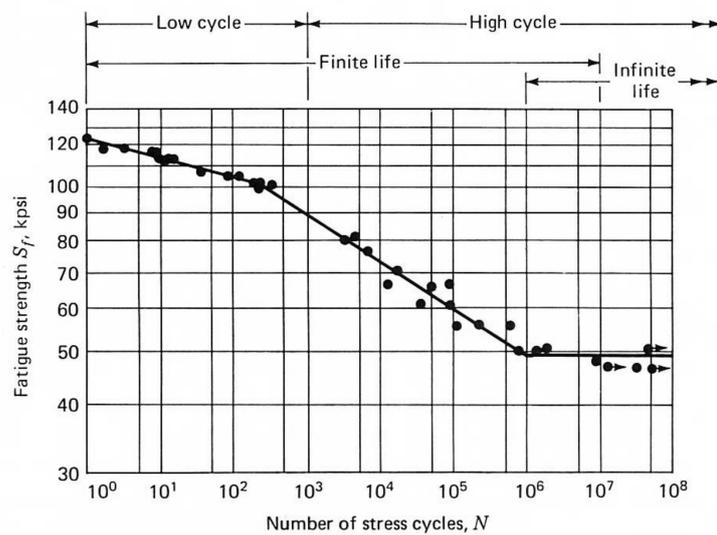


FIGURE 3.11 – Courbe de Wöhler : domaines de fatigue oligocyclique, d'endurance limité et illimité

de cycle avant rupture peuvent aller jusque  $10^4$  voire  $10^5$  pour les aciers doux. Les éprouvettes atteignent généralement un état d'accommodation plastique ou de rochet élastoplastique. L'*accommodation plastique* se produit lorsque la déformation plastique devient périodique de sorte qu'un cycle d'hystérésis élastoplastique se produit. Le *rochet* se produit lorsque la déformation plastique croît sans cesse, ce qui va provoquer la ruine de la structure en un nombre de cycles relativement faible. La fatigue oligocyclique a été étudiée par Masson et Coffin. Ces auteurs montrent que le comportement est dominé par la déformation plastique et ils proposent la loi suivante pour prédire le nombre de cycles  $N$  conduisant à la rupture :

$$N = \left[ \frac{\Delta \epsilon^p}{C} \right]^{-\gamma} \quad (3.2)$$

Diverses autres expressions ont été proposées pour représenter la courbe de Wöhler dans la zone des durées de vie faibles et pour déterminer le nombre de cycles à la rupture en fonction de la contrainte. Parmi celles-ci, on peut encore citer celle de Weibull qui admet une loi hyperbolique de la forme :

$$N = (\sigma_{max} - \sigma_D)^n \quad (3.3)$$

où  $n$  varie de +1 à +2 et celle de Bastenaire :

$$N = \frac{A}{\sigma_{max} - \sigma_D} e^{-(\sigma_{max} - \sigma_D)} \quad (3.4)$$

avec  $\sigma_D$  la limite d'endurance mesurée.

Cet exposé n'a pas pour ambition de faire une revue détaillée des lois décrivant la fatigue oligocyclique qui n'a pas d'application courante en conception de machine. Le lecteur intéressé pourra toutefois consulter l'ouvrage de référence de Collins [8] pour plus de renseignements.

Le **domaine d'endurance limitée** est le domaine où la rupture est atteinte après un nombre limité de cycles compris approximativement entre  $10^5$  et  $10^7$  cycles. La rupture n'est pas accompagnée de déformation plastique d'ensemble et mesurable. La réponse de l'éprouvette atteint sans ce cas un régime adapté élastique. Il peut y avoir une déformation plastique due aux premiers cycles, mais au bout d'un certain nombre de cycles, elle reste constante. C'est le domaine dans lequel travaillent les structures qui pour diverses raisons doivent avoir des masses et des volumes impérativement faibles, comme c'est le cas pour les structures aéronautiques. Il existe de très nombreuses relations pour relier  $\sigma_a$  et  $N$ . Dans ce domaine  $N$  croît quand  $\sigma_a$  décroît. Basquin propose la relation :

$$\sigma_a = A N^b$$

où  $A$  est un coefficient de résistance à la fatigue et  $b$  est un exposant de résistance à la fatigue.

Le **domaine d'endurance illimitée** est également appelé zone de sécurité. Il correspond à la partie de la courbe de Wöhler qui présente une asymptote horizontale (asymptote parallèle à l'axe des  $N$ ) si elle existe. Pour des sollicitations inférieure à la limite d'endurance  $\sigma_D$ , il n'y aura jamais rupture quelque soit le nombre de cycles appliqué.  $\sigma_D$  est la limite de fatigue.

L'asymptote horizontale survient pour les aciers entre  $10^6$  et  $10^7$  cycles. Pour certains alliages d'aluminium ou de cuivre, le coude est beaucoup moins net et la courbe ne prend une allure horizontale que pour un nombre de cycles de l'ordre de  $10^8$  comme illustré à la Figure 3.12. Enfin pour certaines conditions d'essai, comme en fatigue sous corrosion, il n'est pas certain que cette partie horizontale puisse exister.

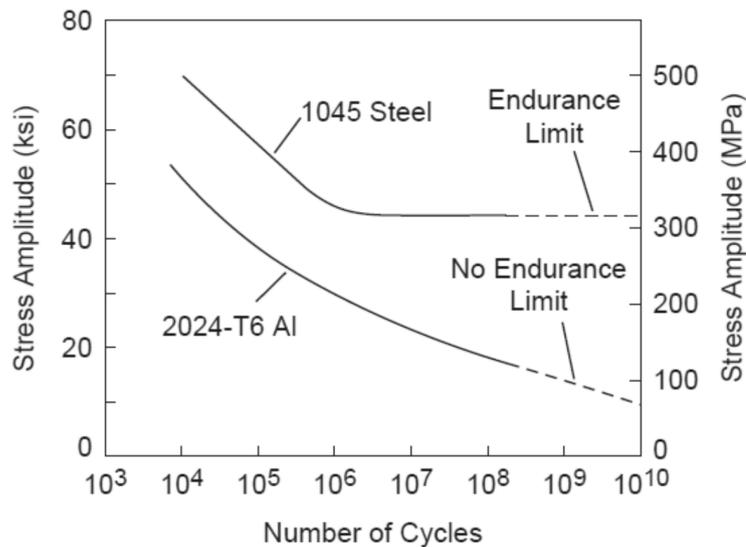


FIGURE 3.12 – Courbe de Wöhler type pour un acier et un alliage d'aluminium

Etant donné que pour certains matériaux il est difficile d'évaluer la limite de fatigue  $\sigma_D$  on introduit la notion de limite de fatigue conventionnelle  $\sigma_D(N)$  ou limite d'endurance. Il s'agit de la plus grande amplitude de la contrainte pour laquelle on constate 50% de ruptures après  $N$  cycles de sollicitations. Selon les cas,  $N$  varie entre  $10^6$  et  $10^9$ , c'est-à-dire supérieure à la durée de vie envisagée de la pièce. Rappelons que les courbes de Wöhler et la notion de limite de fatigue sont établies pour un niveau de contrainte moyenne donnée.

### Nature statistique de la fatigue

La dispersion des résultats des essais de fatigue est un fait d'expérience. Cette dispersion statistique existe malgré les efforts des expérimentateurs pour que maintenir des conditions opératoires soient voisines que possible et pour avoir des éprouvettes aussi identiques que possible. Dès lors on ne peut pas légitimement parler de la limite d'endurance comme d'une valeur fixe et bien déterminée mais on doit regarder la courbe de Wöhler comme une famille de courbes dont chacune représente une probabilité de rupture déterminée  $\mathbb{P}$  (figure 3.13).

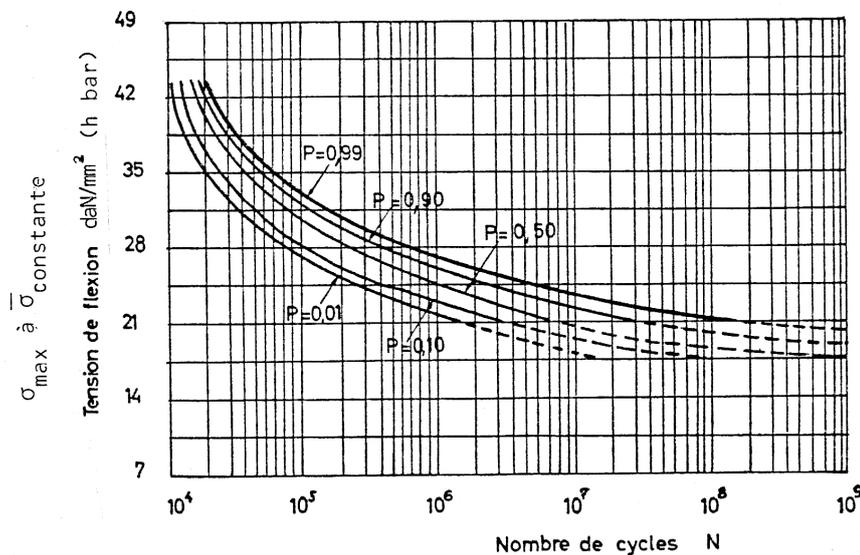


FIGURE 3.13 – Courbes de Wöhler paramétrée en fonction de la la probabilité  $\mathbb{P}$  de rupture - Alliage d'aluminium 75456

Il s'en suit que pour définir une courbe de Wöhler de façon précise, il faut essayer plusieurs éprouvettes au même niveau de tension. La tendance actuelle est d'employer un nombre restreint de niveaux mais d'essayer pour chacun d'eux une population de huit éprouvettes ou plus de manière à pouvoir calculer des valeurs précises de la moyenne et de la dispersion des valeurs de  $\log_{10} N$ . La courbe de Wöhler moyenne est celle pour laquelle 50% des éprouvettes sont rompues (Figure 3.14).

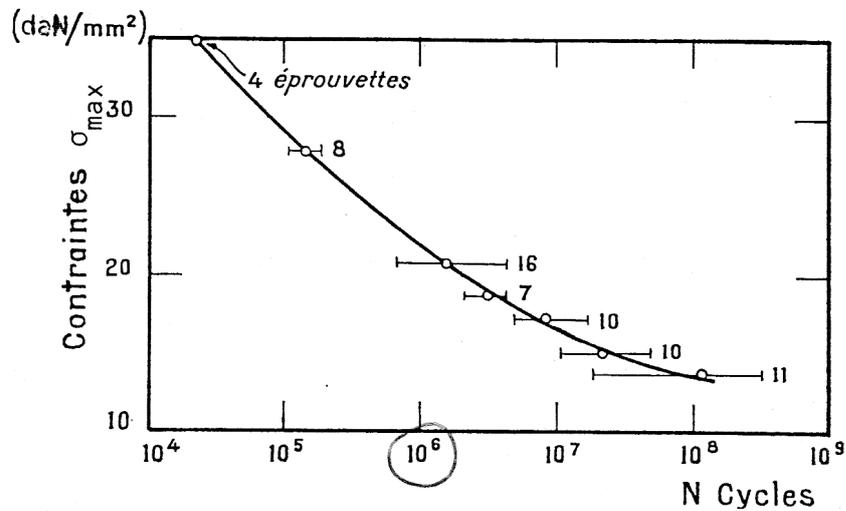


FIGURE 3.14 – Résistance à la fatigue en flexion rotative  $\bar{\sigma} = 0$  d'un alliage duralumin 24 ST superfini. Le nombre de chiffres indiquent le nombre d'essais à chaque niveau de contrainte

### Limite d'endurance

La limite d'endurance conventionnelle est la limite supérieure de l'amplitude de la contrainte périodique qui peut être appliquée pendant un nombre conventionnel de cycles sans amener la rupture.

Ce nombre est généralement un multiple de  $10^6$  soit  $10^7$  ou encore  $3 \cdot 10^7$  cycles pour les aciers. Il peut être de  $10^8$  et quelques fois même  $5 \cdot 10^8$  cycles lorsque le coude de la courbe de Wöler n'est pas net.

On se rappellera en définitive, qu'une courbe de Wöhler conduit à une détermination statistique de la limite d'endurance, mesurée pour des conditions données : un matériau déterminé, un type de sollicitation et pour une tension moyenne constante.

La limite d'endurance théorique est la limite supérieure de la contrainte périodique qui peut être appliquée indéfiniment sans amener la rupture. Cependant, cette limite théorique doit être considérée avec précaution en pratique puisque tous les mécanismes ont une durée de vie limitée par suite de l'usure, de la corrosion et d'autres causes inhérentes à leur service même.

Ces limites d'endurance seront notées :

- $R^\pm$  : sollicitations alternées ;
- $R_0^+$  : sollicitations répétées positives ;

—  $R_-^0$  : sollicitations répétées négatives.

### Les paramètres d'influence sur l'endurance

Les expériences sont conventionnellement réalisées sur des éprouvettes polies et de taille normalisée. Néanmoins on peut réaliser des tests d'endurance sur des spécimens différents. Les résultats montrent l'influence d'un certains nombre de paramètres.

**Accidents de forme (discontinuité dans la géométrie) :** Un accident de forme augmente localement le niveau de contrainte.

**Effet d'échelle :** A niveau de contrainte égale, deux pièces de même géométrie mais de dimensions différentes n'auront pas la même tenue en fatigue. Plus les dimensions d'une pièce croissent, plus sa résistance à la fatigue diminue.

**Qualité de l'usinage :** Généralement, l'endommagement par fatigue apparaît en premier lieu à la surface des pièces. La prise en compte des deux aspects suivants est important en fatigue.

- l'état de surface
- les contraintes résiduelles : l'usinage peut introduire des contraintes résiduelles de traction en surface (équilibrées en profondeur par des contraintes résiduelles de compression) qui se superposent au chargement mécanique.

**Environnement :** Un milieu agressif (températures élevées, milieux corrosifs...) aggrave le phénomène de fatigue. Il apparaît des phénomènes comme le fluage ou la corrosion. Leur action est proportionnelle au temps d'exposition.

**Taille des grains :** Les structures à grains fins présentent une meilleure tenue en fatigue que les structures à gros grains.

**Orientation du fibrage par rapport à la direction des efforts :** L'orientation générale des grains (fibrage) confère au matériau une anisotropie plus ou moins marquée. Les caractéristiques statiques et la tenue en fatigue seront meilleures dans le sens long du fibrage que dans les autres sens (travers long et travers court).

**Taux d'écroutissage :** L'écroutissage résultant des opérations de formage a pour effet de consolider le matériau (augmentation de la limite d'élasticité), et par suite, améliore la tenue en fatigue.

**Traitement thermique :** Suivant que le traitement thermique provoque un adoucissement ou un durcissement du matériau, la tenue en fatigue sera

diminuée ou augmentée. De plus, le traitement thermique peut modifier la taille des grains.

**Les défauts métallurgiques :** Lacunes, défauts interstitiels, précipités et inclusions peuvent être à l'origine de l'endommagement par fatigue.

**La nature du chargement :** Le chargement peut être de nature périodique de pulsation et d'amplitude constantes, variable par bloc ou variable de manière aléatoire. Quand on charge la structure avec un signal périodique, on note une influence de la forme du signal (sinusoïdal, triangulaire, rectangulaire...), du rapport  $R$  et de la contrainte moyenne sur la tenue en fatigue. Par contre, en général on remarque que la fréquence a peu d'influence sauf si on se situe dans les cas de fatigue fluage, de fatigue-corrosion ou de fatigue thermique. Dans le cas signaux de chargement par bloc ou aléatoire, l'endurance est affectée par la présence de surcharges et l'ordre d'apparition des cycles. En particulier il est connu que la répétition périodique d'une surcharge peut retarder la propagation de fissures.

**Influence de la contrainte moyenne.** Lorsque les essais de fatigue sont réalisés à contrainte moyenne  $\sigma_m \neq 0$  non nulle (et constante), la durée de vie est modifiée, en particulier quand cette contrainte moyenne est relativement grande par rapport à la contrainte alternée. En particulier, il faut retenir que une contrainte de traction diminue la durée de vie tandis que une contrainte de compression l'augmente. La limite d'endurance  $\sigma_D$  est aussi modifiée par la superposition d'une contrainte moyenne non nulle. Différents diagrammes permettent de représenter ce phénomène. Une présentation détaillée des diagrammes les plus utilisés peut être trouvée à la Référence [6]

### Diagrammes d'endurance

A l'endurance la composante alternée limite  $\sigma_a$  dépend de la composante moyenne  $\sigma_m$  et réciproquement. La courbe d'interaction entre ces deux composantes s'appelle le *diagramme d'endurance*. Il en existe plusieurs représentations.

En Allemagne, on utilise presque exclusivement le diagramme de Goodman-Smith où l'on porte en abscisse la contrainte moyenne  $\sigma_m$  et en ordonnée  $\sigma_{max}$ . En outre, sur ce diagramme on porte également la courbe et  $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$ . Le diagramme de Goodman-Smith est schématisé à la Figure 3.15-A.

Dans la littérature anglo-saxonne, on utilise surtout le *diagramme de Haigh* schématisé à la Figure 3.15-B où l'on porte  $\sigma_m$  en abscisse et  $\sigma_a$  en ordonnée.

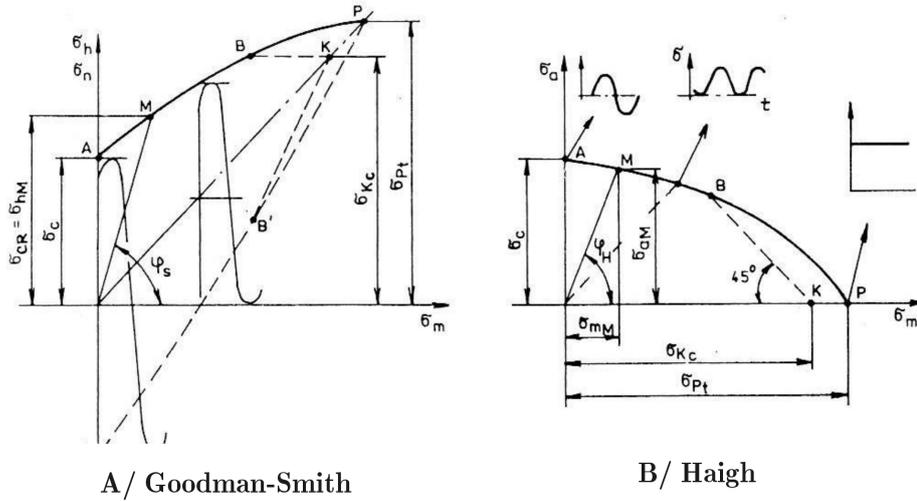


FIGURE 3.15 – Diagrammes d’endurance : A/ Goodman-Smith - B/ Haigh

### 3.1.6 Diagrammes de Haigh

Sur ce diagramme, l’amplitude de contrainte  $\sigma_a$  est portée en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  à laquelle a été réalisé l’essai de fatigue. Deux points particuliers sont à considérer (voir Figure 3.15-B) :

- Le point A qui représente la limite d’endurance  $\sigma_D(N) = R_{\pm}$  en sollicitation purement alternée.
- Le point P qui représente le comportement limite du matériau pour une contrainte alternée nulle.

L’ensemble des limites d’endurance observées pour diverses valeurs de la contrainte moyenne se placent alors sur la courbe AP ajustée en fonction des résultats d’essais.

Un certain nombre de modèles mathématiques pour rendre compte de la courbe délimitant l’interaction entre  $\sigma_a$  et  $\sigma_m$  à partir de données recueillies sur des essais de fatigue menés en condition de flexion alternée (voir Figure 3.16). Goodman propose un modèle linéaire entre la limite d’endurance en condition alternée  $\sigma_a = \sigma_D = R_{\pm}$  et la limite de rupture  $R_m$ .

$$\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right) \quad (3.5)$$

Gerber propose quant à lui de modéliser la courbe par une parabole

$$\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right) \quad (3.6)$$

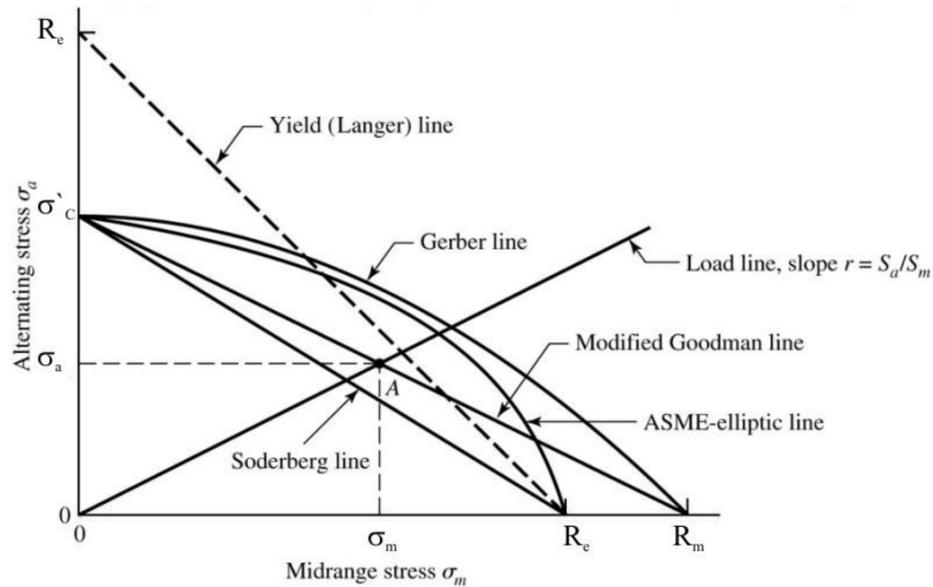


FIGURE 3.16 – Diagramme de Haigh. Modèles de Goodman, Gerber et de Soderberg

Les résultats de test pour des matériaux ductiles montrent généralement une meilleure concordance avec le modèle parabolique de Gerber. Toutefois à cause de la dispersion des résultats d'expérience des tests de fatigue et le fait que les données sur des éprouvettes entaillées coïncident de meilleure manière avec le modèle linéaire de Goodman, il est courant dans la pratique de conception d'adopter la droite de Goodman plus conservatrice. Si la conception de la pièce est basée sur un design élastique à la place d'un design à la rupture, chose courante en conception d'éléments de machine, alors on se tourne vers la droite de Soderberg qui modélise la limite d'endurance en fonction de la contrainte moyenne comme une droite entre les limites d'endurance  $\sigma_a = R_{\pm}$  et  $\sigma_m = R_e$ .

$$\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_e} \right) \quad (3.7)$$

L'expérience montre plusieurs choses. La droite de Söderberg et, dans une moindre mesure, la droite de Goodman sont trop pénalisantes pour  $\sigma_m > 0$  et trop optimistes pour  $\sigma_m < 0$ . La parabole de Gerber est assez juste pour  $\sigma_m > 0$  mais elle est pénalisante pour  $\sigma_m < 0$  puisqu'elle ne rend pas compte de l'augmentation de l'endurance  $\sigma_a$  dans ce domaine. Pour ces différentes raisons et en accord avec l'expérience, la meilleure forme de diagramme de Haigh est celle du diagramme de Goodman adaptée à celui de Haigh de la manière suivante (voir Figure 3.17) :

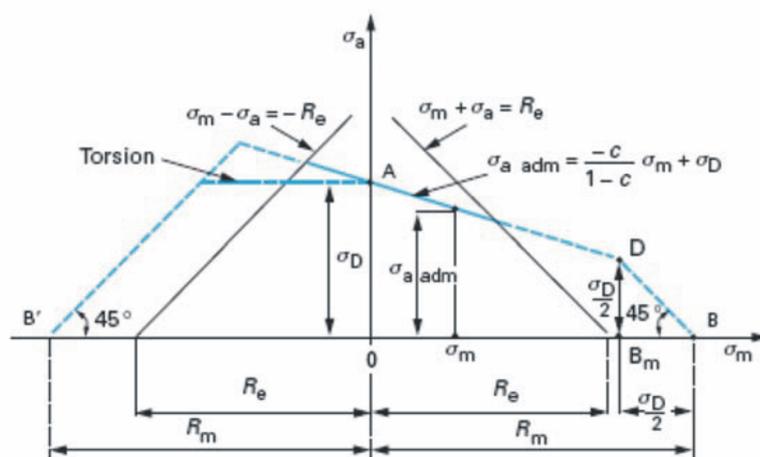


FIGURE 3.17 – Construction du diagramme de Haigh connaissant  $\sigma_D$ ,  $R_e$  et  $R_m$

- On porte une longueur égale à  $\sigma_D/2$  sur l'axe des abscisses à gauche du point  $B$  jusqu'au point  $B_m$ .
- A partir de  $B_m$ , on porte une longueur verticale égale à  $\sigma_D/2$  jusqu'au point  $D$ .
- On relie par une droite le point  $D$  au point  $A$ . On définit ainsi  $\sigma_a^{adm}$ , la frontière du domaine admissible de l'amplitude de la contrainte en fonction de la contrainte moyenne, par l'équation :

$$\sigma_a^{adm} = \frac{-c}{1-c} \sigma_m + \sigma_D \quad \text{pour } \sigma_m \leq R_m - \sigma_D/2 \quad (3.8)$$

avec

$$c = \frac{\sigma_D}{2 R_m}$$

- Pour la compression  $\sigma_m < 0$ , la compression a un effet favorable sur la limite d'endurance, car elle referme les microfissures. On admet donc généralement qu'en compression la limite d'endurance est préservée. On prolonge donc à l'horizontale la valeur  $\sigma_a = \sigma_D$  dans la partie  $\sigma_m < 0$  jusqu'à ce qu'on atteigne la droite reliant  $\sigma_a = R_e$  et  $\sigma_m = -R_e$  qui limite la tenue élastique de l'éprouvette.

### 3.1.7 Diagramme de Goodman - Smith

L'ensemble des limites d'endurance d'un matériau pour la gamme des valeurs de  $\phi$  comprises entre  $-1$  et  $+1$  peut être porté sur un diagramme tel que celui représenté à la Figure 3.18. On y met en abscisse la contrainte moyenne  $\sigma_m$  et en ordonnées les contraintes maximale et minimale  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$ . Le diagramme est construit en reportant les expériences réalisées avec différents couples de sollicitations  $R$  et  $A$ .

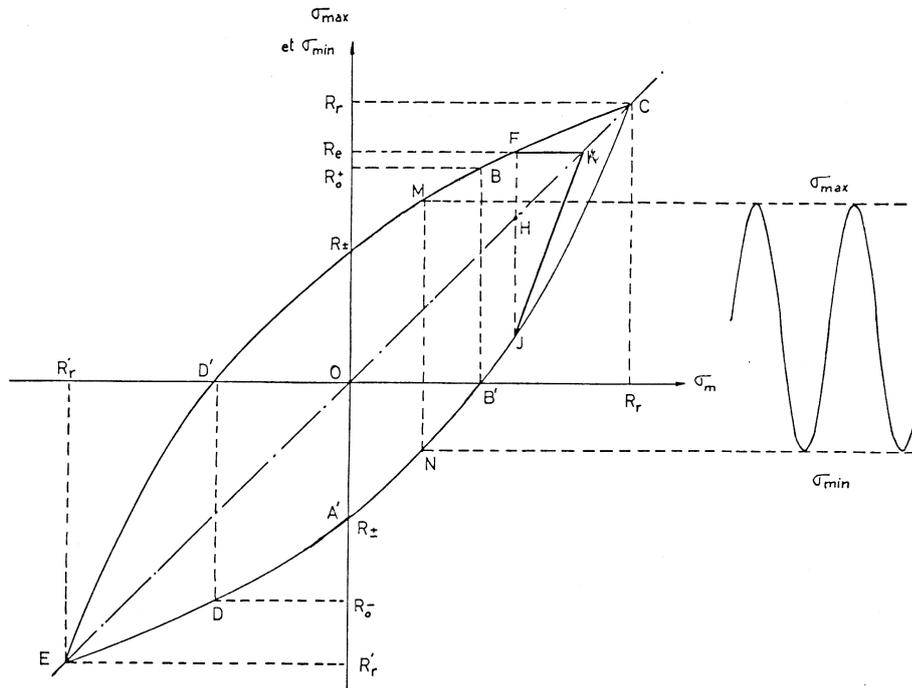


FIGURE 3.18 – Diagramme de Goodman - Smith

En construction des machines, on désire éviter les déformations permanentes. En conséquence on limitera  $\sigma_{max}$  à la limite apparente d'élasticité  $R_e$  de sorte qu'on peut tronquer le diagramme par l'horizontale  $\sigma_{max} = R_e$ .

En ce qui concerne la composante  $\sigma_{min}$ , on doit constamment vérifier la relation  $\bar{\sigma} = (\sigma_{min} + \sigma_{max})/2$ . Dès lors la partie de la courbe CJ doit être remplacée par le segment de droite KJ de sorte que l'on ait toujours la symétrie des points par rapport à la bissectrice du premier quadrant. En l'absence de données plus précises, on peut encore simplifier davantage le diagramme de Goodman, en supposant que les branches AF et A'J sont rectilignes et remplacées par les segments de droites correspondants. En  $\sigma_m =$

0, sachant que l'angle  $\alpha$  entre la courbe et l'horizontale vaut en moyenne  $40^\circ$  et connaissant  $R_e$  et  $R_{\pm}$  pour le matériau utilisé, on peut tracer un diagramme de Goodman linéarisé tel que celui représenté à la Figure 3.19.

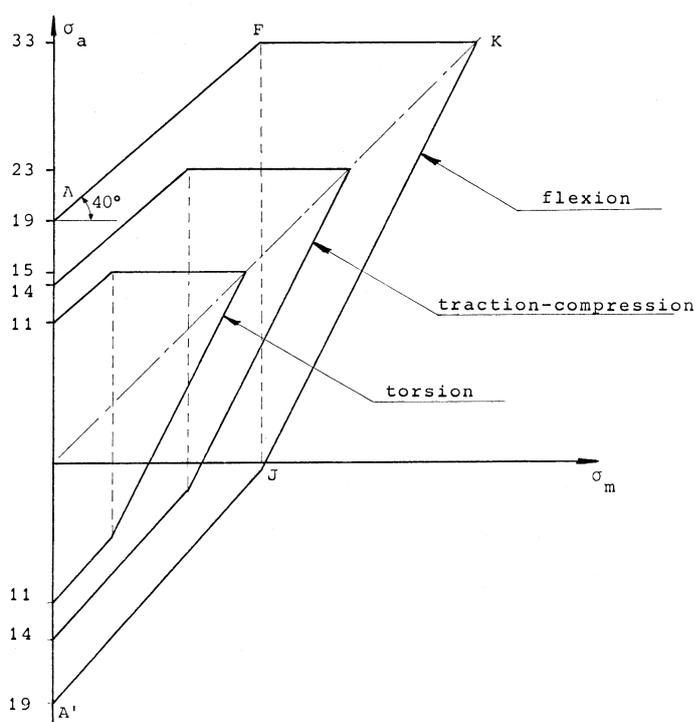


FIGURE 3.19 – Diagramme de Goodman linéarisé (Acier A 37.11)

### 3.1.8 Diagramme VDI

En Allemagne, on utilise souvent le diagramme VDI qui est une simplification du diagramme de Goodman-Smith dans laquelle la courbe supérieure est remplacée par sa tangente en  $\sigma_m = 0$  jusqu'à son point de rencontre  $X$  avec la droite d'ordonnée  $\sigma_{max} = R_e$ . Ce diagramme, représenté à la Figure 3.20, est un peu optimiste pour les grandes valeurs de  $\sigma_m$ , mais ce fait porte peu à conséquence, car à ce niveau, on est en fait limité par la condition de plastification.

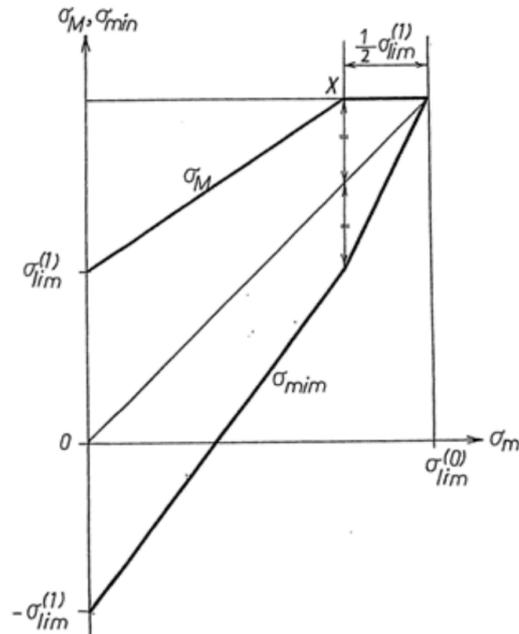


FIGURE 3.20 – Diagramme VDI

### 3.1.9 Diagramme de Soderberg

Afin de simplifier l'utilisation pratique du diagramme Goodman-Smith lors du pré-dimensionnement, Soderberg a proposé de simplifier le problème en remplaçant les polygones segments AFK et A'B'JK respectivement par des segments de droite AK et A'K. Il en résulte un diagramme fortement simplifié représenté à la Figure 3.21.

Ainsi on admet que  $\sigma_a$  diminue linéairement de  $R^\pm$  à 0 quand  $\bar{\sigma} = \sigma_m$  augmente de 0 à  $R_e$ . Si on transpose cette règle dans le plan  $(\bar{\sigma}, \sigma_a)$  typique des diagrammes de Haigh, on obtient un diagramme simple caractérisé par un domaine triangulaire de sécurité pour l'éprouvette normalisée du laboratoire représenté à la Figure 3.22. Les états de contrainte en sécurité se trouvent dans la partie inférieure de la droite d'équation

$$\sigma_a = -C \bar{\sigma} + R^\pm \quad \text{avec} \quad C = R^\pm / R_e \quad (3.9)$$

Cette droite est appelée *Soderberg Failure Line* (SFL). Elle est équivalente au diagramme que l'on pourrait obtenir en linéarisant le diagramme de Haigh.

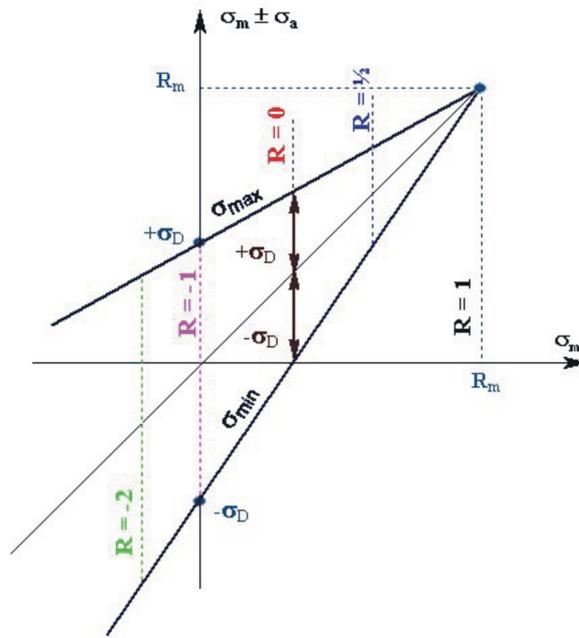


FIGURE 3.21 – Diagramme de Goodman-Smith simplifié

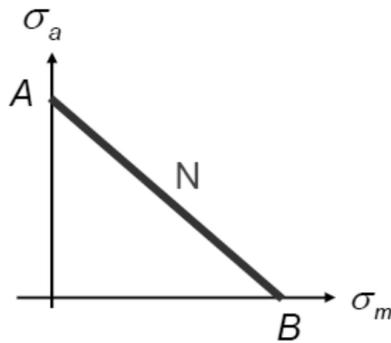


FIGURE 3.22 – Diagramme de Soderberg

### 3.1.10 Sécurité par rapport à la Soderberg Failure Line

Soit le digramme de Soderberg de la Figure 3.23. Soit l'état de tension figuré par le point D ( $\sigma'_a, \sigma'_m$ ). Ce point est intérieur au diagramme de Soder-

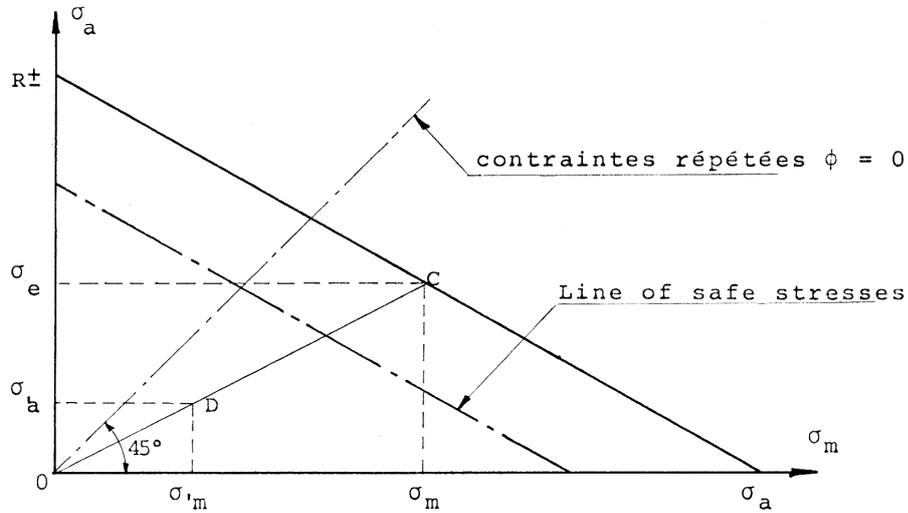


FIGURE 3.23 – Sécurité par rapport à la Soderberg Failure Line

berg. Il s'en suit que la tension  $\sigma_{max}$  développée sur le cycle est inférieure à l'endurance et que la durée de vie de l'éprouvette est pratiquement infinie. Introduisons la notion de *sécurité* et calculons celle-ci par rapport aux tensions limites admissibles en fatigue.

Par D traçons la parallèle à la Soderberg failure line. Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point qui définit une tension statique équivalente  $\bar{\sigma}_{eq}$ . De même elle coupe l'axe des ordonnées en un point qui définit une tension purement alternée équivalente  $\sigma''_{a,eq}$ .

Traçons ensuite le segment OD et prolongeons-le jusqu'à son intersection C avec la SFL. L'état de contrainte en C est défini par sa composante moyenne  $\bar{\sigma}$  et sa composante alternée  $\sigma_a$ .

Par le théorème de Thales, tous les segments issus de O sont découpés dans le même rapport par la SFL et sa parallèle passant par D. On peut donc écrire

$$\frac{\sigma''_{a,eq}}{R_{\pm}} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{R_e} = \frac{OD}{OC} = \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a} \quad (3.10)$$

Les deux premiers rapports expriment une sécurité identique respectivement dans le cas d'une sollicitation purement alternée et purement statique. On considère en conséquence que tous les points de la parallèle passant par D sont caractérisés par le même coefficient de sécurité et on adopte :

$$\frac{1}{K_{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{R_e} = \frac{\sigma''_{a,eq}}{R_{\pm}} \quad (3.11)$$

De même, dans le cas d'une sollicitation en torsion, on écrirait :

$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{\bar{\tau}_{eq}}{R_e''} = \frac{\tau_{a,eq}}{R_{\pm}''} \quad (3.12)$$

### 3.1.11 Fluctuation des charges

Le niveau de charge d'un organe ne reste généralement pas constant au long de sa vie. Il est donc important de pouvoir évaluer l'effet de cycles de charge d'amplitude variable sur la résistance de l'éprouvette normalisée.

Faisons l'hypothèse qu'un certain nombre de cycles  $n_1$  à un niveau  $\sigma_1$  (Figure 3.24) supérieur à la limite d'endurance produise un dommage déterminé inférieur à l'unité, un dommage unitaire conduisant à la rupture. Si l'éprouvette subit une série de sollicitations  $(\sigma_1, n_1)$ ,  $(\sigma_2, n_2)$ ,  $\dots$   $(\sigma_K, n_K)$ , on veut estimer le moment où l'éprouvette arrivera à rupture, c'est-à-dire au dommage unitaire.

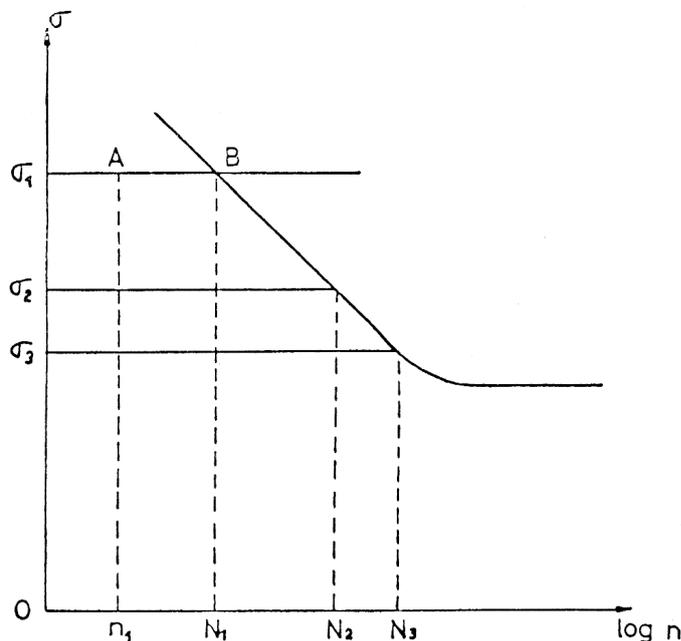


FIGURE 3.24 – Diagramme de Wöhler ( $P = 0.5$ ) - Critère de Miner-Palmgren

### Critère de Palmgren - Miner

Si  $N_1$  est le nombre de cycles qui amène la rupture au niveau  $\sigma_1$ , Miner propose d'estimer le dommage correspondant à  $n_1$  cycles par :

$$D_1 = \frac{n_1}{N_1} \quad (3.13)$$

Supposons que la pièce est sollicitée par  $n_1$  cycles au niveau  $\sigma_1$ , puis  $n_2$  cycles au niveau  $\sigma_2$ , et ainsi de suite jusqu'à la sollicitation  $K$  caractérisée par  $n_K$  cycles au niveau  $\sigma_K$ . *Le critère de dommage cumulé de Palmgren-Miner* prédit que la ruine survient lorsque le dommage cumulé atteint l'unité :

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (3.14)$$

L'expérience a montré que pour les pièces lisses, le critère de Palmgren-Miner est en assez bon accord avec la réalité. Toutefois pour les pièces entaillées, il est aisé de le mettre en défaut en soumettant la pièce à une forte précontrainte statique qui produit des contraintes résiduelles de compression en fond de d'entaille et relève la limite d'endurance alors que par le critère, cette précontrainte devrait avoir un effet quasi nul puisque :

$$\frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{N_i} \ll 1$$

Nonobstant ce critère de Palmgren-Miner peut constituer une approche pragmatique du problème tout en sachant que seuls des essais pratiques à l'aide de programme de mise en charge simulant les cycles réels seront seuls capables de donner des informations valables.

### 3.1.12 Caractéristiques de quelques matériaux utilisés en construction mécanique

#### Formules utilisables à défaut d'informations précises

*Suivant le type de sollicitation*

Si on suppose que l'on connaît la limite d'endurance en *flexion alternée*  $R_{\pm}$ , on déterminera une valeur approchée des autres limites d'endurances en utilisant les formules empiriques suivantes.

Traction - compression :

$$(R_{\pm})_{tc} = 0.8 R_{\pm}$$

Torsion alternée :

— Pour l'acier

$$(R_{\pm})'' = 0.6 R_{\pm}$$

— Pour la fonte :

$$0.8 R_{\pm} < (R_{\pm})'' < R_{\pm}$$

*Suivant le type de matériaux*

### **Acier**

Structure ferritique :

$$R_{\pm} \simeq 0.6 R_0$$

Structure perlitique austénitique :

$$R_{\pm} \simeq 0.4 R_0$$

Structure martensitique :

$$R_{\pm} \simeq 0.33 R_0$$

Aciers coulés :

$$(R_{\pm}) = 0.4 R_0$$

Aciers alliés à haute résistance :

$$R_{\pm} \simeq \alpha R_0 + \beta R_e$$

Formule de Fry, Kessner et Oettel où les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont calculés par interpolation à partir des valeurs suivantes

$$\alpha_1 = 0.15 \quad \beta_1 = 0.57 \quad \text{pour} \quad R_0 = 400N/mm^2$$

et

$$\alpha_2 = 0.43 \quad \beta_2 = 0.0 \quad \text{pour} \quad R_0 = 1400N/mm^2$$

### **Fonte**

Fonte ordinaire :

$$(R_{\pm}) = 0.35 R_0$$

Fonte nodulaire :

$$(R_{\pm}) = 0.4 R_0$$

### **Alliage d'Aluminium**

$$0.25 R_0 \leq (R_{\pm}) \leq 0.45 R_0$$

**Alliage de Magnésium**

$$0.31 R_0 \leq (R_{\pm}) \leq 0.49 R_0$$

**Alliage de Titane**

$$(R_{\pm}) \simeq 0.45 R_0$$

**Nickel**

Nickel en bandes, recuit :

$$(R_{\pm}) = 0.34 R_0$$

Alliage de Ni, suivant mise en oeuvre :

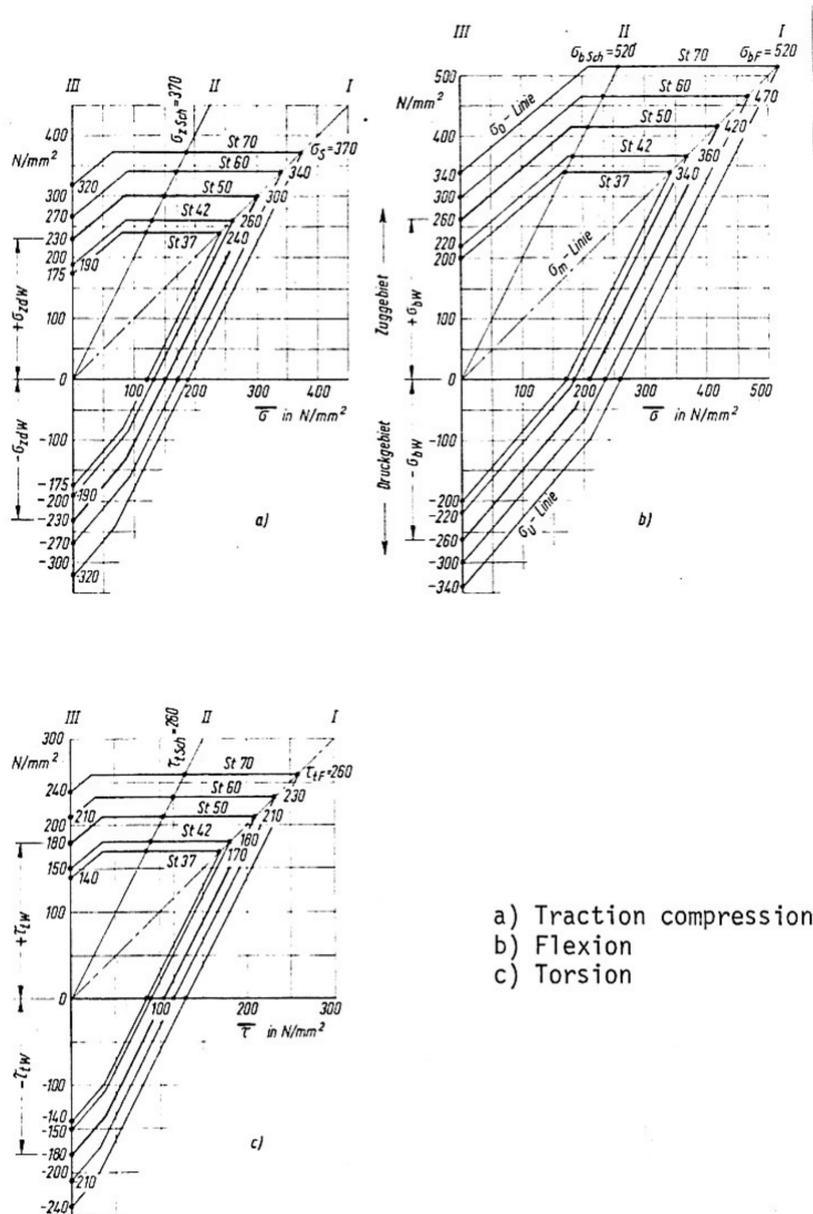
$$0.3 R_0 \leq (R_{\pm}) \leq 0.47 R_0$$

Métal Monel (67%Ni – 30%Cu)

$$(R_{\pm}) = 0.5 R_0$$

Diagramme de Goodman (selon norme DIN)

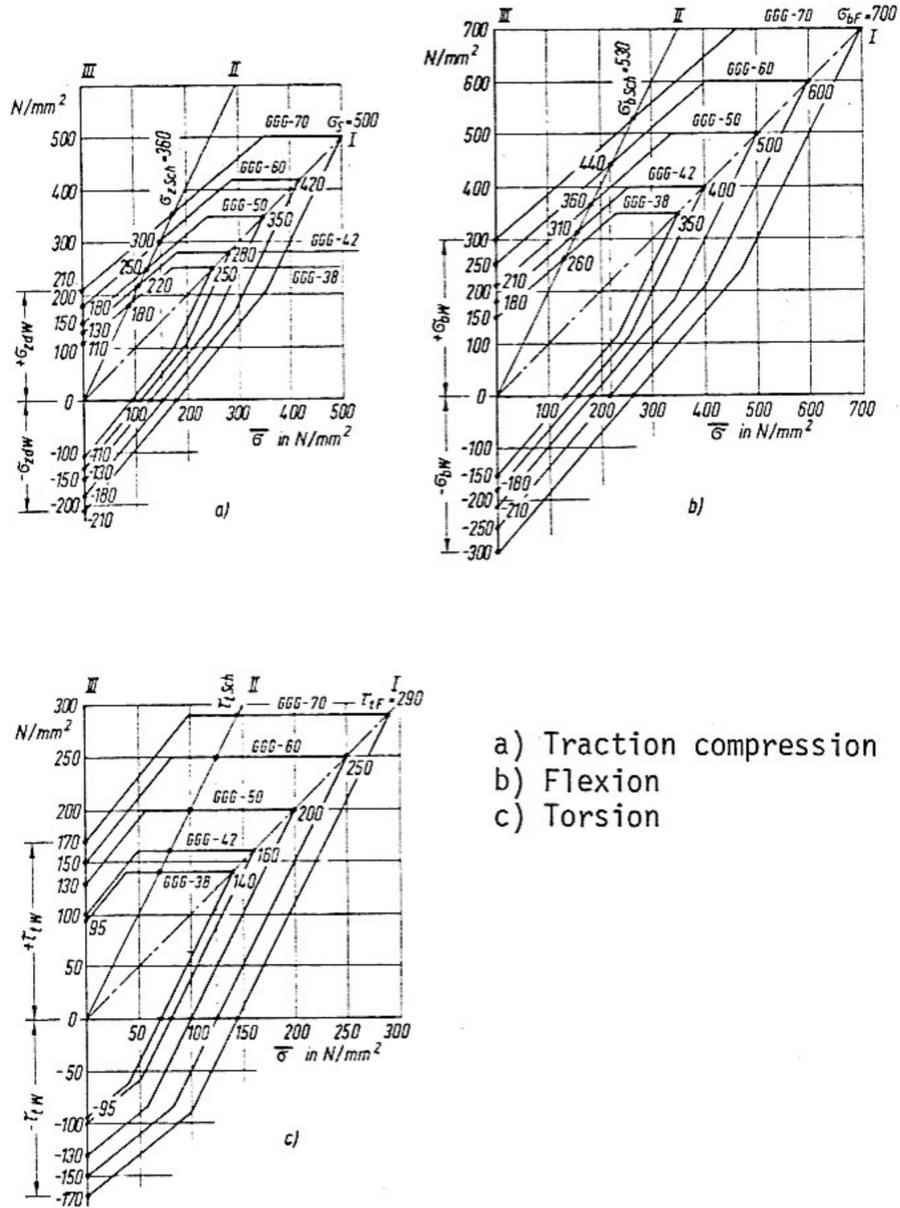
Aciers ordinaires (DIN 17100)



- a) Traction compression
- b) Flexion
- c) Torsion

FIGURE 3.25 – Aciers ordinaires (DIN 17100)

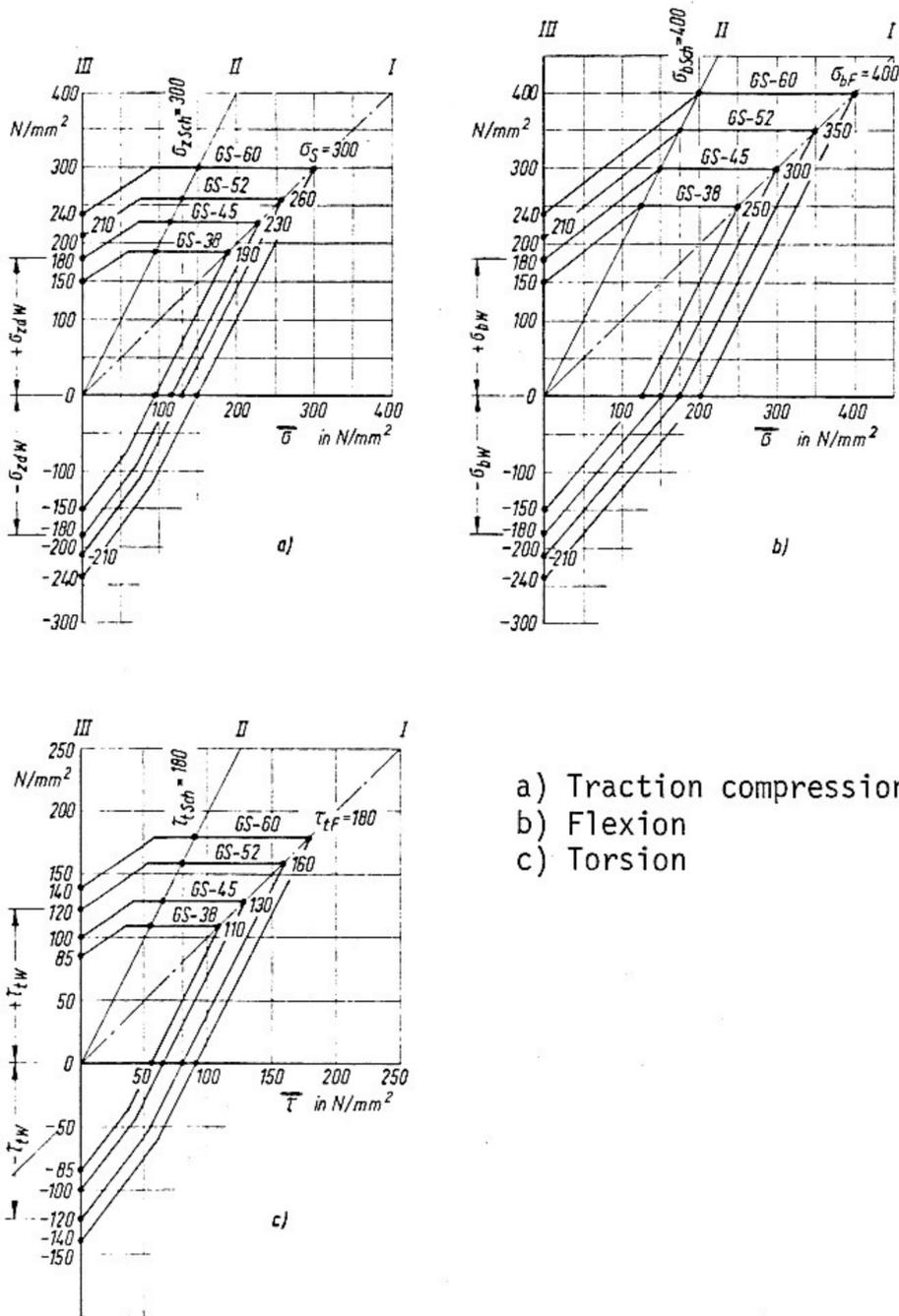
Fonte nodulaires (DIN 1663)



- a) Traction compression
- b) Flexion
- c) Torsion

FIGURE 3.26 – Fonte nodulaires (DIN 1663)

Aciers coulés (DIN 1681)



- a) Traction compression
- b) Flexion
- c) Torsion

FIGURE 3.27 – Aciers coulés (DIN 1681)

Aciers avec traitement thermique (DIN 17200)

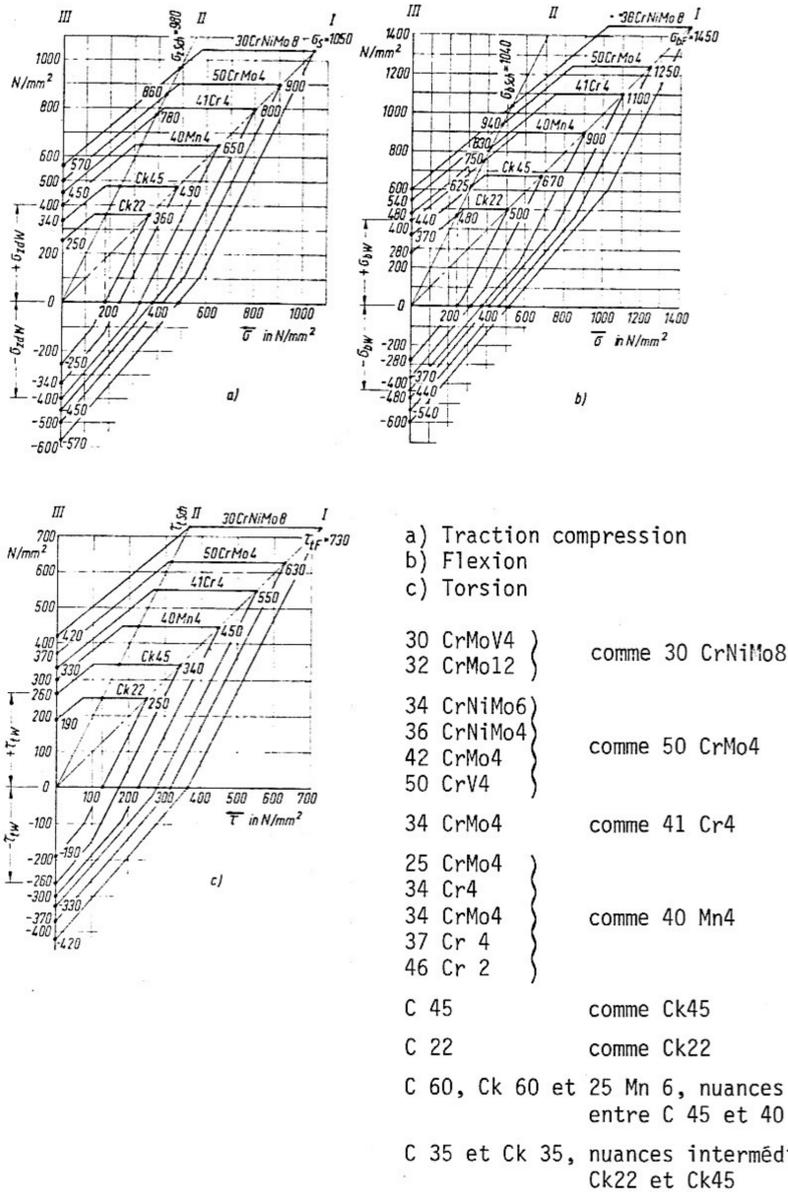
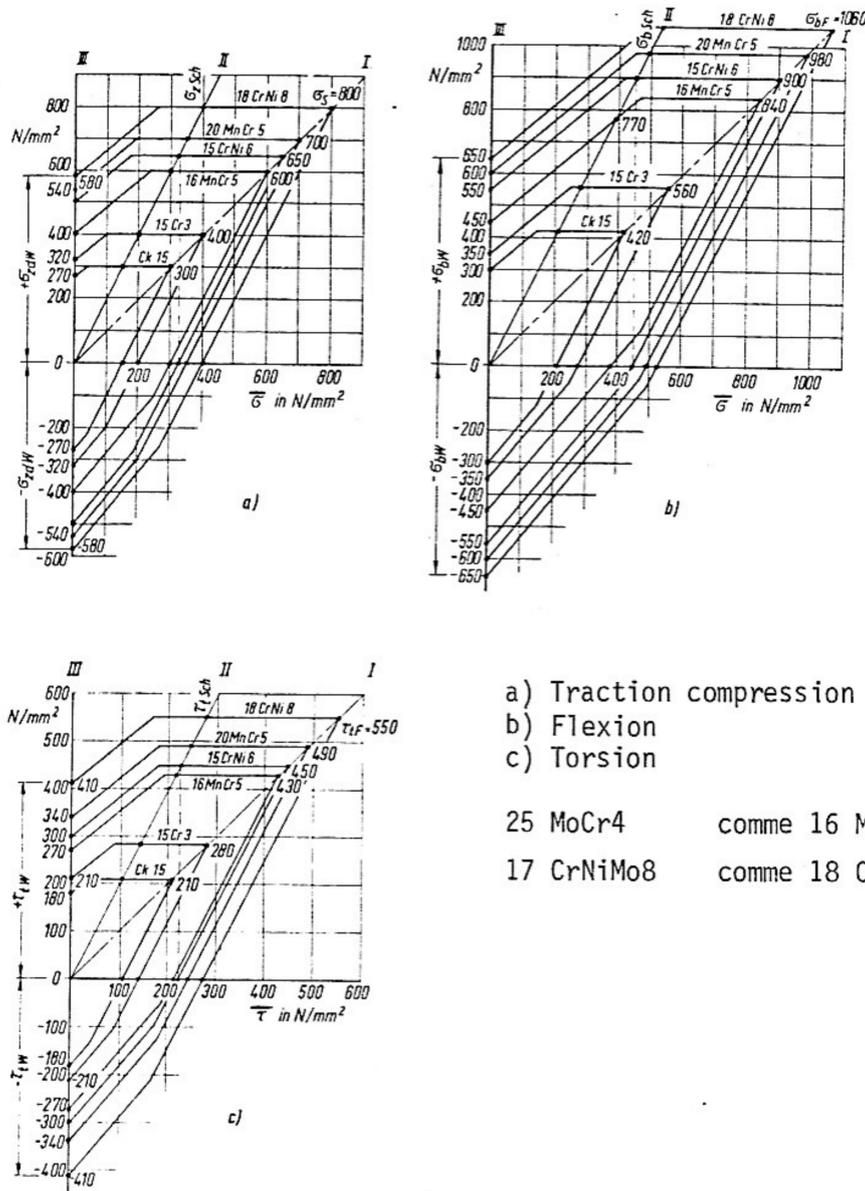


FIGURE 3.28 – Aciers avec traitement thermique (DIN 17200)

Aciers de cémentation (DIN 17210)



- a) Traction compression
- b) Flexion
- c) Torsion

25 MoCr4        comme 16 MnCr5  
 17 CrNiMo8    comme 18 CrNi8

FIGURE 3.29 – Aciers de cémentation (DIN 17210)

## ENDURANCES MOYENNES DE MATÉRIAUX NON REPRIS DANS LES DIAGRAMMES DE GOODMAN-SMITH

Tableau A

| Matière                          | Endurance en sollicitations alternées<br>N/mm <sup>2</sup> |         |         | Endurance en sollicitations répétées<br>N/mm <sup>2</sup> |         |         |
|----------------------------------|--|---------|---------|---|---------|---------|
|                                  | Traction<br>compression                                    | Flexion | Torsion | Traction<br>compression                                   | Flexion | Torsion |
| <u>Fontes grises lamellaires</u> |  |         |         |   |         |         |
| GG 15                            | 37.5   | 70      | 65      | 60  | 120     | 90      |
| GG 20                            | 50   | 95      | 85      | 80  | 160     | 120     |
| GG 25                            | 62.5   | 120     | 105     | 100   | 200     | 150     |
| GG 30                            | 75   | 140     | 130     | 120   | 240     | 180     |
| GG 35                            | 87.5   | 165     | 150     | 140   | 280     | 210     |
| GG 40                            | 100  | 190     | 170     | 160   | 320     | 240     |
| <u>Fontes malléables</u>         |  |         |         |   |         |         |
| GTW 35                           | 100  | 140     | 120     | 180   | 250     | 230     |
| GTS                              | 80   | 120     | 100     | 150   | 220     | 190     |
| <u>Alliages de cuivre</u>        |  |         |         |   |         |         |
| G Cu Zn 33 Pb                    | -  | 65      | 40      | -   | 65      | 40      |
| Cu Zn 40 Mn Pb                   | -  | 240     | 140     | -   | 240     | 140     |
| G Cu Sn 5 Zn Pb                  | -  | 35      | 25      | -   | 35      | 25      |

FIGURE 3.30 – Endurances moyennes de matériaux non repris dans les diagrammes de Goodman-Smith

Tableau B

| Matière                             | Tension de rupture R <sub>0</sub><br>N/mm <sup>2</sup> | Endurance en alterné, exprimée<br>en % de R <sub>0</sub> |         |         | Endurance en répété, exprimée<br>en % de R <sub>0</sub> |         |         |
|-------------------------------------|--|--|---------|---------|---|---------|---------|
|                                     |  | Traction<br>compression                                  | Flexion | Torsion | Traction<br>compression                                 | Flexion | Torsion |
| <u>Alliages d'Al pour estampage</u> |  |  |         |         |   |         |         |
| Al Mg, Al Mg Si                     | 100 - 200  | 50 %   | 70 %    | 40 %    | 80 %  | 45 %    | 40 %    |
| Al Cu Mg, ...                       | 200 - 350  | 35 %   | 50 %    | 30 %    | 50 %  | 45 %    | 30 %    |
|                                     | 350 - 500  | 25 %   | 30 %    | 20 %    | 35 %  | 45 %    | 20 %    |
| <u>Alliages d'Al pour moulage</u>   |  |  |         |         |   |         |         |
| G - Al Si                           | 150 - 260<br>180 - 300                                 | 30 %   | 30 %    | 25 %    | 30 %  | 30 %    | 25 %    |
| <u>Alliage de Mg pour moulage</u>   |  |  |         |         |   |         |         |
| G - Mg Al Zn                        | 160 - 280  | 25 %   | 40 %    | 22 %    | 25 %  | 50 %    | 22 %    |

FIGURE 3.31 – Endurances moyennes de matériaux non repris dans les diagrammes de Goodman-Smith

## 3.2 DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES

### 3.2.1 Introduction

Considérons le cas des matériaux ductiles. L'état de contrainte est déterminé par la résistance des matériaux. Un coefficient d'impact peut éventuellement être introduit dans l'évaluation s'il y a lieu.

La capacité à résister indéfiniment à la fatigue en sollicitation cyclique est mesurée par la limite d'endurance déterminée expérimentalement pour le type de sollicitation.

Les limites d'endurance sont déterminées sur de petites éprouvettes polies et doivent être affectées de facteurs correctifs avant d'être appliquées à des pièces industrielles.

### 3.2.2 Effet d'échelle : coefficient $b_1$

On constate expérimentalement que la limite d'endurance est plus élevée en flexion rotative  $R_{\pm}$  qu'en traction - compression alternée  $(R_{\pm})_{tc}$  et qu'elle diminue quand le diamètre de l'éprouvette augmente.

Cet effet est attribué au gradient de contrainte existant en flexion, auquel correspondrait une action de soutien des couches extérieures de la pièce par les couches sous-jacentes moins sollicitées.

Pour la flexion rotative, le coefficient  $b_1$  peut se déduire du diagramme donné à la Figure 3.32.

La formule est encore applicable aux cas de sections carrées ou rectangulaires en flexion et en torsion à condition de prendre une mesure adéquate de la valeur caractéristique  $d$ .

#### En flexion :

- Pour une section carrée, on prend pour  $d$  le côté.
- Pour une section rectangulaire, on prend pour  $d$  la hauteur mesurée dans le plan de la déformée.

#### En torsion :

- On prend pour  $d$  la diagonale de la section.

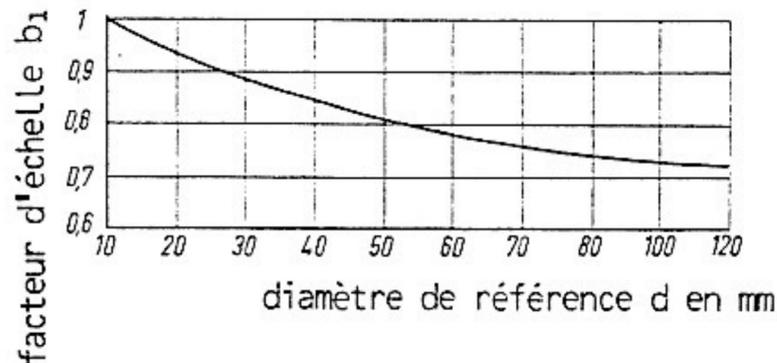


FIGURE 3.32 – Effet d'échelle en flexion rotative

### 3.2.3 Etat de surface : coefficient correcteur $b_2$

La limite d'endurance dépend considérablement du degré de finition de la surface de l'éprouvette ainsi que du sens des rayures d'usinage. Le standard de mesure d'état de surface est généralement le  $R_a$ , la rugosité moyenne arithmétique ISO, ou le  $R_t$ , la rugosité totale utilisée par la DIN.

Du point de vue fatigue, ce seul paramètre ne peut être suffisant pour qualifier l'influence de l'état de surface.

En effet différentes formes de stries de surface présentant le même  $R_a$  peuvent donner lieu à des tenues en fatigue fort différentes. La plupart des expérimentateurs ne désignent pas seulement l'état de surface par les valeurs  $R_a$  ou  $R_t$  : ils introduisent également la méthode utilisée pour la préparation de la pièce.

Pour des pièces tournées grossièrement, on peut ainsi observer des réductions de 15% de la limite d'endurance par rapport au poli standard des éprouvettes de fatigue.

Il est en outre souhaitable d'introduire des stries d'usinage parallèles à la direction de la contrainte principale : dans le cas contraire, on observe une réduction de l'ordre de 26% de la limite de fatigue par rapport à celle obtenue lorsque les stries sont parallèles à la direction de la contrainte principale.

En général, la sensibilité aux défauts de surface est une fonction croissante de la résistance  $R_0$  comme l'illustre la Figure 3.33.

La Figure 3.34 donne une idée de l'influence relative de quelques états de finition particuliers. On notera que le polissage produit des contraintes résiduelles de compression favorables à la tenue en fatigue.

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES<sup>95</sup>

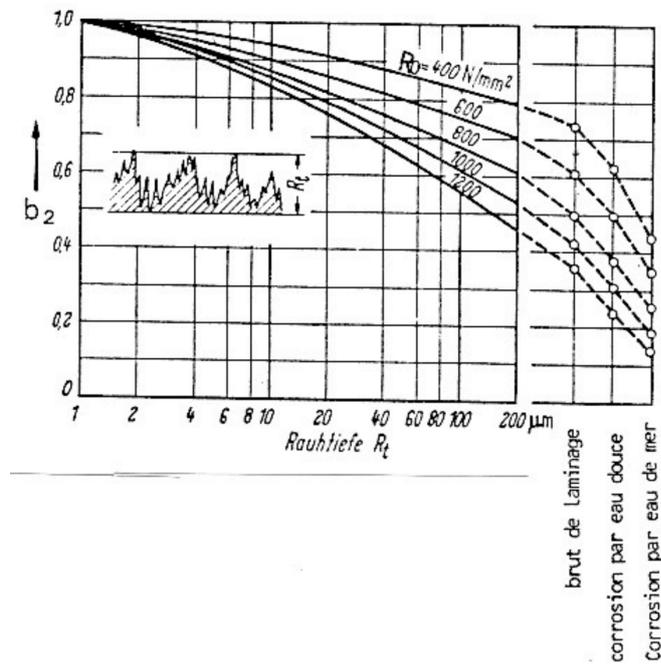


FIGURE 3.33 – Facteur d'état de surface  $b_2$  ( $R_t = 6.5 R_a$ )

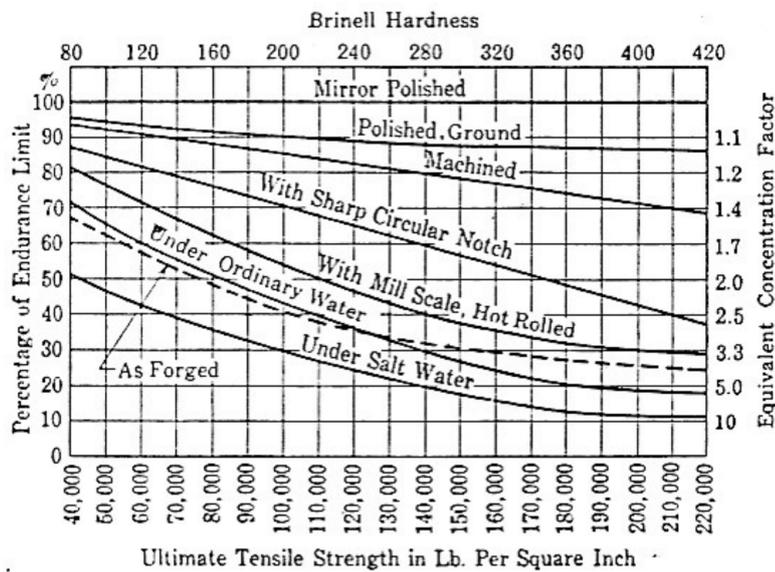


FIGURE 3.34 – Comparaison entre divers états de finition (1 psi = 0,07 bar)

L'influence des conditions de surface est plus importante dans le cas de tor-

sion alternée que dans le cas de flexion ou traction-compression, les contraintes de cisaillement à la surface ayant la même valeur que les contraintes maximales de tension-compression sur les plans diagonaux.

. Les coefficients d'échelle et d'état de surface introduits ci-dessus conduisent à l'utilisation d'une limite d'endurance réduite valant :

$$\boxed{R_{\text{réduite}}^{\pm} = b_1 b_2 R^{\pm}} \quad (3.15)$$

### 3.2.4 Facteur de concentration de contrainte dans les pièces

Si la pièce est entaillée et présente de ce fait une concentration de contrainte (congés, gorges, rainures de cales, trous de graissage, etc.), il apparaît une baisse considérable de la limite d'endurance.

Définissons le *coefficient théorique de concentration de contrainte*  $k_c$  comme étant le rapport entre la contrainte réelle maximum dans la section entaillée et la contrainte moyenne dans cette section c'est-à-dire :

$$\sigma_{\text{max}} = k_c \sigma_{\text{moyen}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{moyen}} = \frac{N}{A} \quad (3.16)$$

Ce coefficient  $k_c$  est le plus généralement déterminé par une méthode expérimentale comme la photoélasticité (voir Figure 3.36) ou bien une méthode numérique comme la méthode des éléments finis (voir Figure 3.37).

Définissons également le *facteur d'entaille*  $k_f$  comme étant le rapport entre les contraintes nominales de rupture par fatigue de la pièce lisse et les contraintes de rupture de la pièce entaillée déterminée expérimentalement.

$$k_f = \frac{R_{\text{pièce lisse}}^{\pm}}{R_{\text{pièce entaillée}}^{\pm}} \geq 1 \quad (3.17)$$

On a pu constater que la diminution de résistance à la fatigue est moindre que celle indiquée par  $k_c$ . C'est pourquoi on a introduit la notion *d'indice de sensibilité à l'entaille* :

$$\boxed{q = \frac{k_f - 1}{k_c - 1}} \quad (3.18)$$

et partant de là :

$$\boxed{k_f = 1 + q(k_c - 1)} \quad (3.19)$$

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES<sup>97</sup>

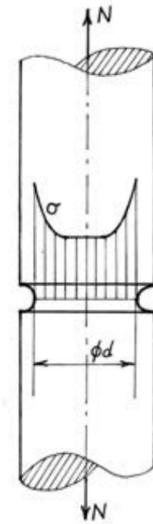


FIGURE 3.35 – Contraintes dans un barreau à gorge

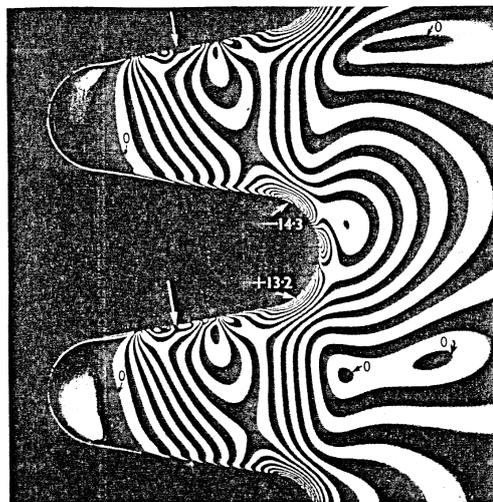


FIGURE 3.36 – Mise en évidence des contraintes par le moyen de la photoélasticité

Les matériaux ductiles présentent généralement une sensibilité à l'entaille plus faible que les matériaux fragiles de par leur aptitude à plastifier localement et à créer ainsi une redistribution des contraintes. Pour des matériaux

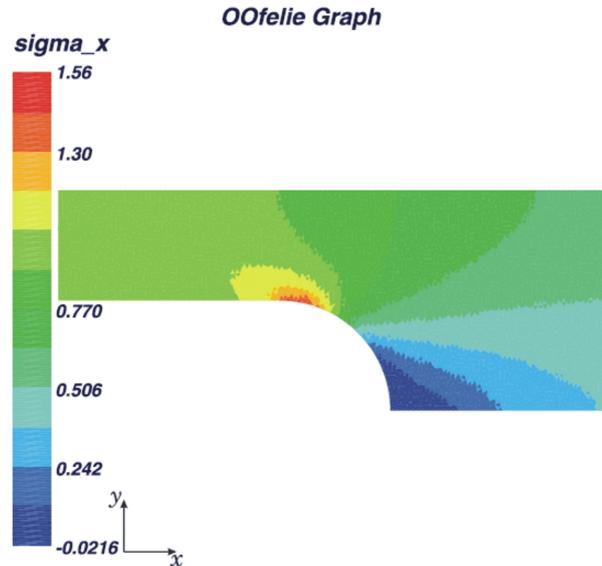


FIGURE 3.37 – Mise en évidence des contraintes par le méthode des éléments finis [17]

ductiles,  $k_f$  s'applique seulement à la composante variable  $\sigma_a$ . On a donc :

$$\sigma_{\max}^{\text{réel}} = \bar{\sigma} + k_f \sigma_a \quad (3.20)$$

$k_f$  dépendant de la géométrie de l'entaille et des caractéristiques du matériau.

Le coefficient  $k_f$  doit être déterminé de préférence par des essais directs. En l'absence de tels renseignements expérimentaux, on déduit  $k_f$ , en fonction du coefficient théorique de concentration de contrainte  $k_c$  et de l'indice de sensibilité à l'entaille  $q$ .  $k_f$  n'est jamais supérieur à 4.0 ; il dépasse quelquefois 3.

#### Détermination de $q$

Sur la base d'essais nombreux, Peterson [15, 16] a proposé de faire varier  $q$  en fonction du rayon  $r$  de l'entaille suivant la loi :

$$q = \frac{1}{1 + a / \sqrt{r}} \quad (3.21)$$

où  $a$  est le coefficient de Neuter.

On trouvera quelques courbes expérimentales types en Figure 3.38. Le tableau 3.1 fournit le coefficient de Neuter  $a$  pour plusieurs types d'acier.

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES<sup>99</sup>

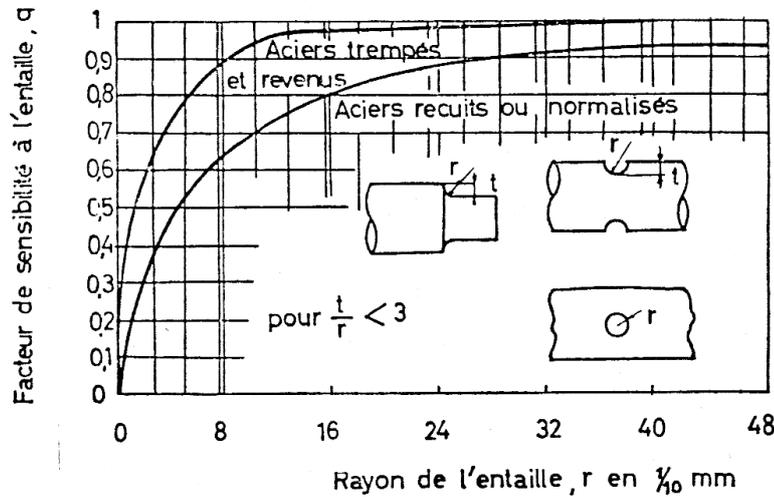


FIGURE 3.38 – Coefficient  $q$  de sensibilité à l'entaille

| Résistance de l'acier $R_0$<br>en $daN/mm^2$ | Paramètre $a$ dans formule<br>( $r$ en $mm$ ) |
|--|---|
| 32   | 0,63  |
| 42   | 0,50  |
| 56   | 0,40  |
| 70   | 0,31  |
| 98   | 0,19  |
| 140  | 0,079   |

TABLE 3.1 – Constante  $a$  fonction de la tension de rupture

Pour les alliages d'aluminium, on adoptera :

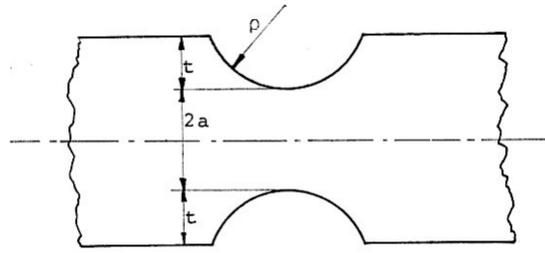
$$q = \frac{1}{1 + 0,89/r} \quad (3.22)$$

#### Détermination de $k_c$ dans le cas d'entailles

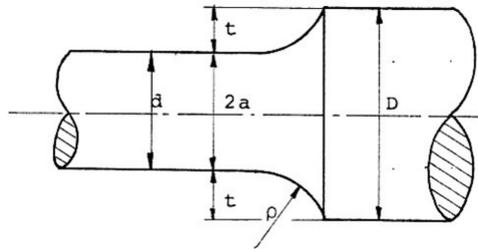
Peterson [15] a établi deux formules approchées permettant de calculer le coefficient  $k_c$  avec une précision suffisante, dans le cas de barres entaillées et de changements brusques de section (Fig. 3.39 a et b).

Pour les barres plates ou rondes, Peterson propose :

$$k_c = 1 + \frac{1}{\sqrt{A(\rho/t) + B(1 + (\rho/a))^2(\rho/a)}} \quad (3.23)$$



A/ Barre plate (type I)



B/ Barre ronde (type II)

FIGURE 3.39 – A/ Barre plate (type I) - B/ Barre ronde (type II)

Pour la flexion et la torsion arbres de révolution à changement brusque de section, on obtient des résultats plus précis en utilisant la formule suivante :

$$k_c = 1 + \frac{1}{\sqrt{A(\rho/t) + B(1 + (\rho/a))^2 + C(\rho/t)^n d/D}} \quad (3.24)$$

où  $a$  est la demi-largeur de la section nette,  $t$  est la profondeur de l'entaille,  $\rho$  est le rayon de l'entaille à la racine, et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des constantes définies au Tableau 3.2 :

Ces formules sont assez lourdes à manipuler. C'est pourquoi il est courant d'utiliser des abaques telles que celles tirées de l'ouvrage de Peterson [15] qui proposent le coefficient  $k_c$  pour des types d'accident géométrique couramment rencontrés en construction de machine. On donne à titre exemplatif quelques abaques abondamment utilisées lors des calculs de la vie courante : les épaulements (changement de section) dans des arbres de section circulaire (Fig. 3.40), les arbres présentant une gorge de décharge (Fig. 3.41), les arbres percés d'un trou (Fig. 3.42), les changements brusques de section droite dans les barres plates (Fig. 3.43), les barres plates entaillées (Fig. 3.44), les tôles rectangulaires percées d'un trou centré (Fig. 3.45).

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES 101

| Mode de sollicitation | Forme | Entaille I |      | Entaille II |      |      |      |
|-----------------------|-------|------------|------|-------------|------|------|------|
|                       |       | A          | B    | A           | B    | C    | n    |
| Traction              | Plate | 0,25       | 0,62 | 0,60        | 1,50 | -    | -    |
|                       | Ronde | 0,25       | 1,00 | 0,77        | 2,10 | -    | -    |
| Flexion               | Plate | 0,25       | 1,40 | 0,60        | 4,00 |      |      |
|                       | Ronde | 0,25       | 1,80 | 0,77        | 3,80 | 0,20 | 3,00 |
| Torsion               | Ronde | 1,00       | 7,00 | 3,40        | 13,0 | 1,00 | 2,00 |
| Cisaillement          | Ronde | 1,00       | 6,70 | -           | -    | -    | -    |

TABLE 3.2 – Coefficients pour les formules de Peterson (3.23) et (3.24)

Il y a un autre cas de figure courant qui appelle quelques commentaires : ce sont les collets. Les figures 61, 62, 63 donnent les coefficients théoriques de concentration de contraintes pour des barres plates soumises à la flexion pour différentes valeurs de  $L/d$ .

Pour les arbres munis de collets, on n'a pas d'abaque donnant directement le coefficient de concentration de contrainte dans le cas de collet sur des arbres de section circulaire. Toutefois, en pratique il est suffisant de choisir l'abaque correspondant au rapport  $L/d$  le plus proche de celui du collet étudié pour une barre plate soumise à la flexion et ensuite de supposer que l'effet de discontinuité pour les arbres de section circulaire est le même que pour les barres plates. Cela veut dire que si on note par

- $k_{tL}$  : le facteur pour le collet étudié de longueur  $L$  pour avec  $D/d$  donné sur un **arbre** ;
- $k_{\infty}$  : le facteur correspondant un collet de grande longueur, c'est-à-dire un **arbre présentant un épaulement** ;
- $k_{tb}$  : le facteur correspondant à une **barre plate** de longueur  $L$  et de rapport  $D/d$  donné ;
- $k_{t\infty}$  : le facteur correspondant à la **barre plate** de longueur infinie et de rapport  $D/d$  donné.

alors on suppose que le coefficient de concentration de contrainte pour les arbres suit le même rapport que celui des barres plates :

$$\frac{k_{tL} - 1}{k_{\infty} - 1} = \frac{k_{tb} - 1}{k_{t\infty} - 1} \quad (3.25)$$

. On en tire le coefficient de concentration de contrainte pour les arbres circulaires avec un collet de longueur  $L$  et un rapport  $D/d$  :

$$k_{tL} = 1 + (k_{\infty} - 1) \frac{k_{tb} - 1}{k_{t\infty} - 1} \quad (3.26)$$

Pour la torsion, les choses sont plus simples, car on observe expérimentalement que le coefficient de concentration de contrainte lors d'une sollicitation en torsion est le même qu'il s'agissait d'un collet de largeur infinie ou d'un collet de largeur finie de même dimension.

### Détermination de $k_c$ pour des entailles non calculables

Malheureusement, la méthode exposée ci-dessus souffre d'une sévère limitation. En réalité, pour un grand nombre d'entailles de la pratique, on est dans l'impossibilité de calculer directement, soit le coefficient concentration de contrainte, soit le gradient, soit les deux. Parmi celles-ci, il faut classer :

- Les entailles vives, pour lesquelles on ne connaît pas d'expression analytique du coefficient de concentration de contrainte.
- Une série d'entailles pour lesquelles les données sont insuffisantes, ou dont le rayon à fond d'entaille est mal défini. C'est notamment le cas des rainures de clavettes, des cannelures, des cannelures sur arbre, etc.
- Les assemblages frettés, dans lesquels l'état de contrainte est complexe et n'est nullement régi par un quelconque rayon.

Ces entailles, que nous appellerons non calculables, sont malheureusement parmi les plus courantes. Elles ne peuvent être traitées qu'à partir de l'expérience et c'est là que gît la difficulté, car les résultats expérimentaux répertoriés dans la littérature sont extrêmement peu nombreux et se limitent souvent à un seul diamètre. Ceci rend ces résultats peu exploitables, en raison de l'effet d'échelle qui peut être très marqué.

Le tableau 3.2.4 fournit en outre un ordre de grandeur des facteurs d'entaille  $k_f$  pour les accidents géométriques les plus courants, en fonction de la nuance d'acier choisie pour élaborer la pièce. Ce tableau est dressé en adoptant implicitement

$$k_{\sigma/\tau} = 1 + q (k_{s/t} - 1)$$

avec  $k_\sigma$  ou  $k_\tau$  le facteur d'entaille  $k_f$  adéquat,  $q$ , l'indice de sensibilité à l'entaille, et  $k_s$  et  $k_t$  les coefficients théoriques de concentration de tension de Peterson. Les facteurs d'entaille  $k_\sigma$  et  $k_\tau$  multiplient la tension moyenne calculée à fond d'entaille.

En conclusion, on dispose maintenant d'une limite d'endurance réduite valant  $b_1 b_2 R_\pm$ . Si  $\sigma_a$  est la contrainte nominale alternée de service ( $\bar{\sigma} = 0$ ),  $k_\sigma$  est le facteur d'entaille, on en déduit la valeur du *coefficient de sécurité* :

$$K_\sigma = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma \sigma_a}$$

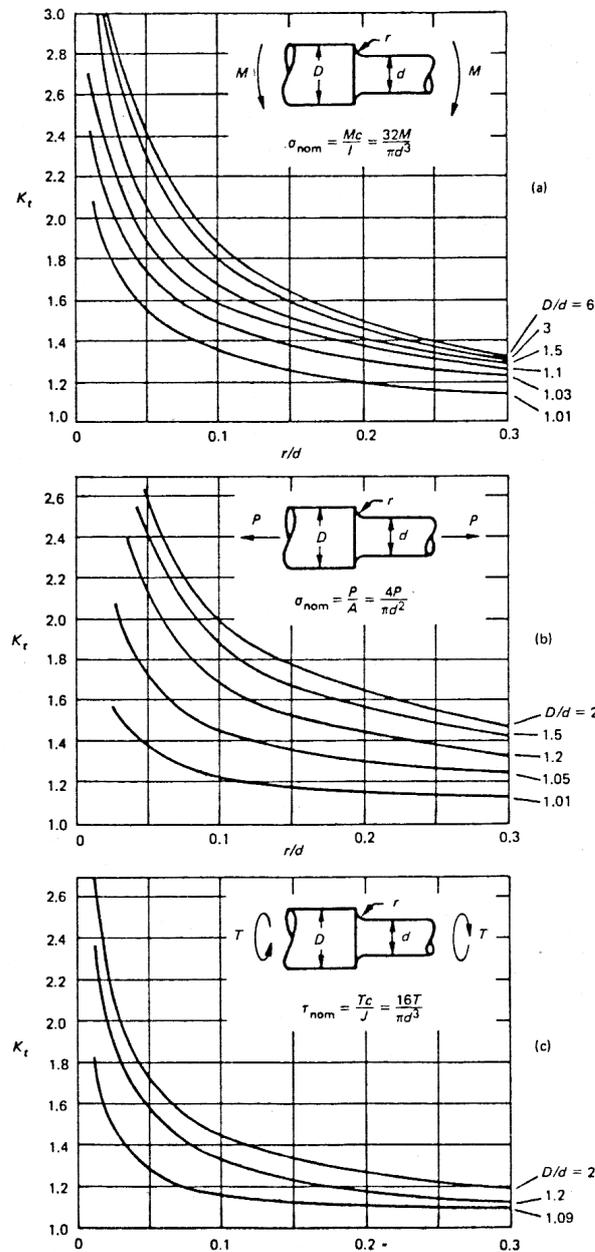


FIGURE 3.40 – Arbre présentant un changement de section (épaulement). (a) Sollicitation de flexion. (b) Sollicitation en traction-compression. (c) Sollicitation en torsion

### 3.2.5 Pièces soumises à des sollicitations pulsatoires

On considère la loi linéaire de Soderberg qui lie les sollicitations de rupture  $\bar{\sigma}$  et  $\sigma_a$ . La loi est représentée à la Figure 3.46. L'ordonnée a été modifiée

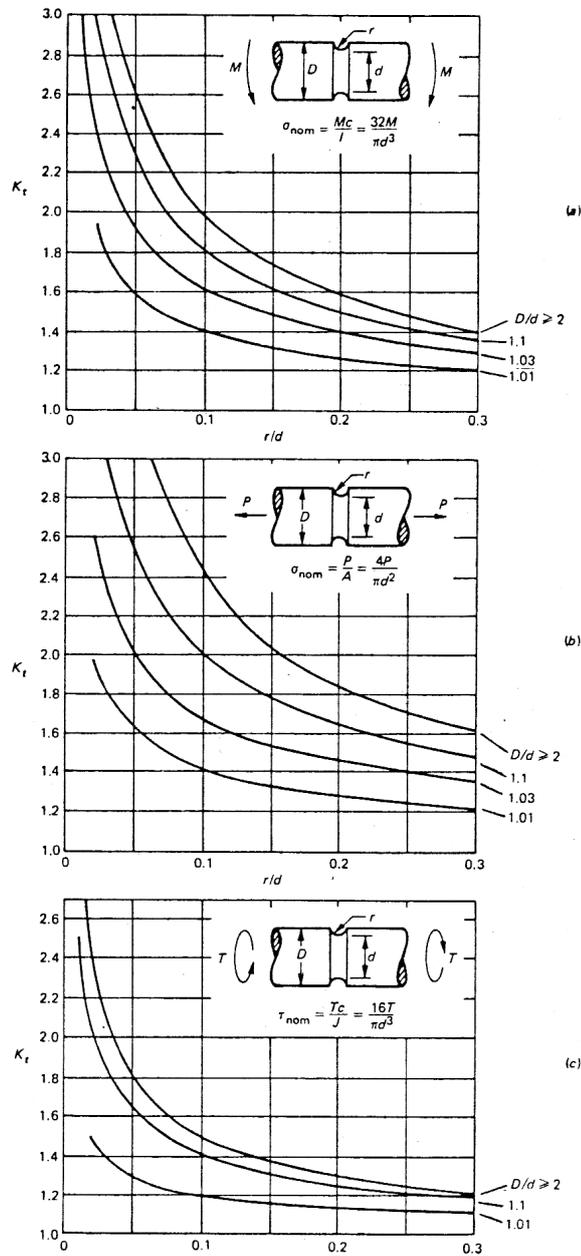


FIGURE 3.41 – Arbre présentant une gorge de décharge. (a) Sollicitation de flexion. (b) Sollicitation en traction-compression. (c) Sollicitation en torsion

pour tenir compte des différents coefficients  $b_1$   $b_2 R^\pm / k_\sigma$  introduits plus haut. L'abscisse a été multipliée par un coefficient  $\psi$  tenant compte du fait que l'on

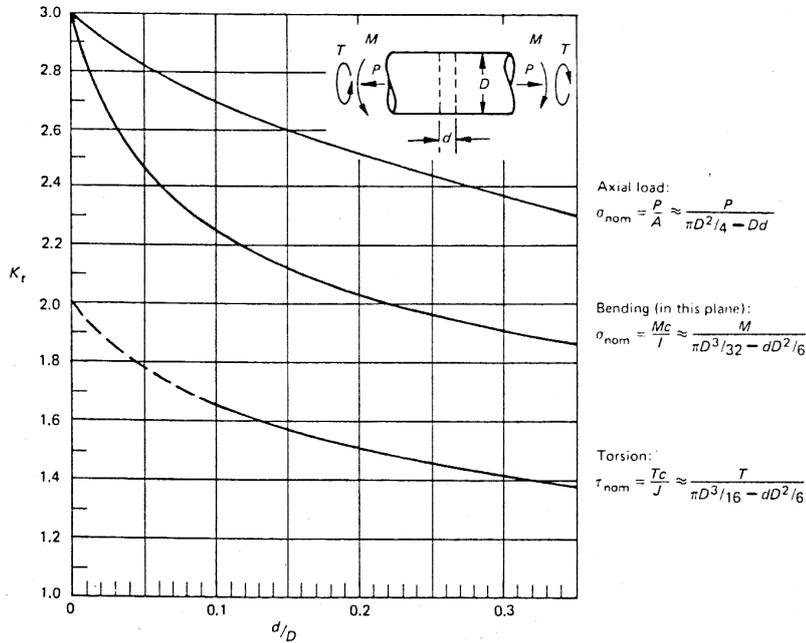


FIGURE 3.42 – Arbre percé d’un trou radial

peut éventuellement tolérer que le moment élastique  $M_e$  soit dépassé d’une quantité telle que la zone plastifiée reste faible et que la flèche résiduelle de flexion reste très petite comparativement à la flèche élastique. Ces conditions sont remplies si l’on adopte un moment critique tel que l’élongation permanente dans la fibre la plus sollicitée soit au plus égale à 7,5% de la déformation élastique  $\epsilon_e$ . Pratiquement on multiplie le module de flexion par  $\psi = M_c/M_e$ . De manière évidente on admet toujours  $\psi = 1$  en traction-compression comptenu de la distribution uniforme des contraintes dans la section droite dans ce cas. Pour la flexion, les coefficients  $\psi$  suggérés sont fournis à la Table 3.4.

Posons

$$R_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma} R_\pm$$

la limite réduite en flexion et

$$R''_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\tau} R''_\pm$$

la limite réduite en torsion.

Le point D représente l’état des sollicitations réelles caractérisées par l’état de contrainte  $\sigma'_a$  et  $\bar{\sigma}'$ . Le point D est intérieur au triangle OAB. Il lui corres-

| Forme de l'entaille                          | Matière            | $k_\sigma$ | $k_\tau$  |
|--|--------------------|------------|-----------|
| Gorge de dégagement circulaire               | St 37-60           | 1.5 - 2.2  | 1.3 - 1.8 |
| Saignée pour jong d'arrêt                    | St 37-60           | 2.5 - 3.0  | 2.5 - 3.0 |
| Epaulement raccordé                          | St 37-60           | 1.5 - 2.0  | 1.3 - 1.8 |
| Rainure de cale (bouts ronds)                | St 37-60           | 1.7        | 1.6       |
|  | $R_0 > 600 N/mm^2$ | 2.0        | 1.8       |
| Rainure de cale ordinaire                    | St 37-60           | 1.5        | 1.4       |
|  | $R_0 > 600 N/mm^2$ | 1.6        | 1.5       |
| Rainure de cale de type Woodruff (demi-lune) | St 30 - 60         | 2.0 - 3.0  | 2.0 - 3.0 |
| Arbres cannelés                              | St 37 - 60         | -          | 2.0 - 2.5 |
| Frettage sans précaution spéciale            | St 37 - 60         | 2.0        | 1.5       |
| Trou radial dans un arbre                    | St 37 - 60         | 1.4 - 1.7  | 1.4 - 1.7 |

TABLE 3.3 – Valeurs approchées des facteurs d'entaille dans le cas de géométries non calculables

| Section | Carré plein | Circulaire | Rectangulaire | Tube creux |
|---------|-------------|------------|---------------|------------|
| $\psi$  | 1,425       | 1,3        | 1,2           | 1,1        |

TABLE 3.4 – Valeur des coefficients  $\psi$  en flexion pour différentes sections droites

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES<sup>107</sup>

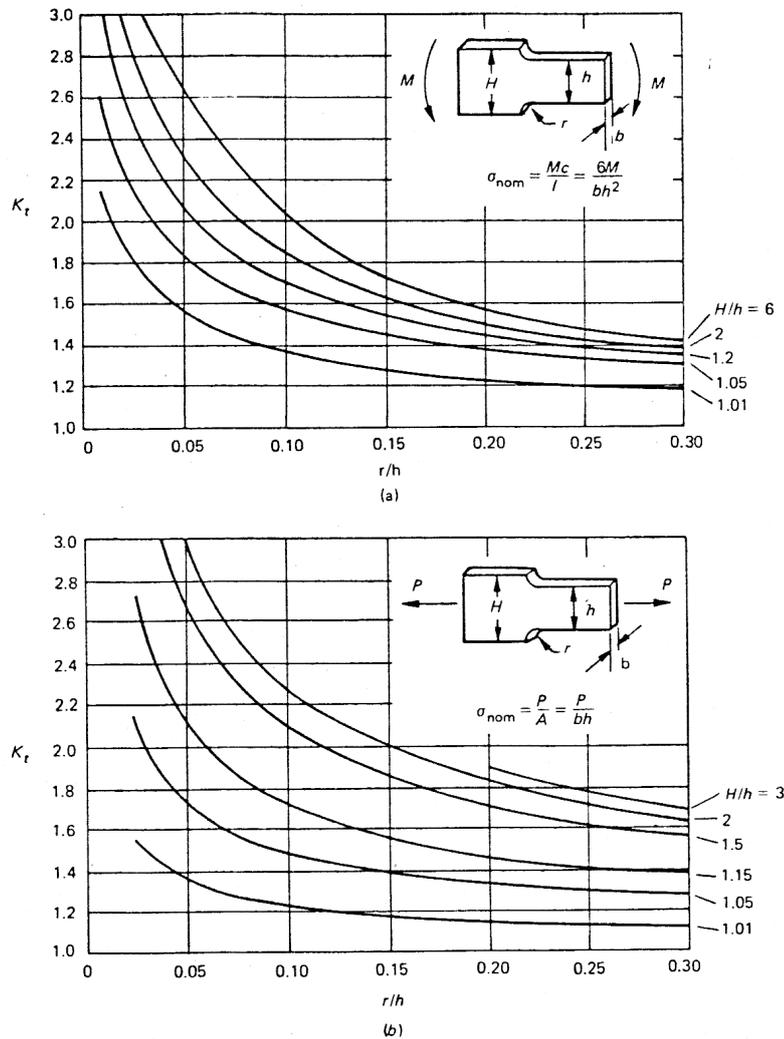


FIGURE 3.43 – Changement de section dans les barres plates. (a) Flexion. (b) Traction-compression

pond donc un coefficient de sécurité  $K_\sigma$ . La Soderberg Safety Line (SSL) qui caractérise l'état de sollicitation est la droite parallèle à la Soderberg Failure passant par le point D.

Compte tenu des nouvelles abscisses et ordonnées à l'origine, le coefficient de sécurité suivant Soderberg vaut à présent :

$$K_\sigma = \frac{\psi R_e}{\sigma_{eq}} = \frac{OC}{OD}$$

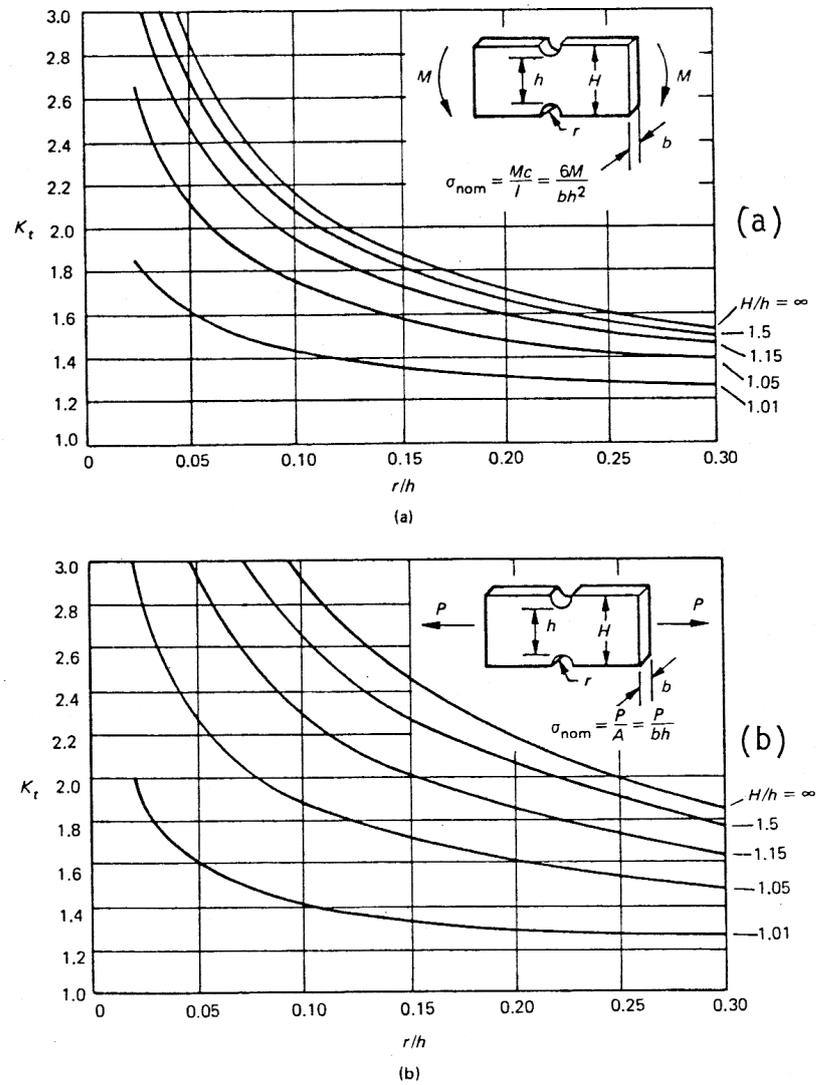


FIGURE 3.44 – Barre plate entaillée. (a) Flexion. (b) Traction-compression

Les triangles  $E'DA$  et  $OBA$  sont semblables. En conséquence on peut écrire :

$$\frac{E'D}{OB} = \frac{E'A'}{OA}$$

soit

$$\frac{\sigma'_a}{R_\phi} = \frac{\sigma_{eq} - \bar{\sigma}'}{\psi R_e}$$

d'où

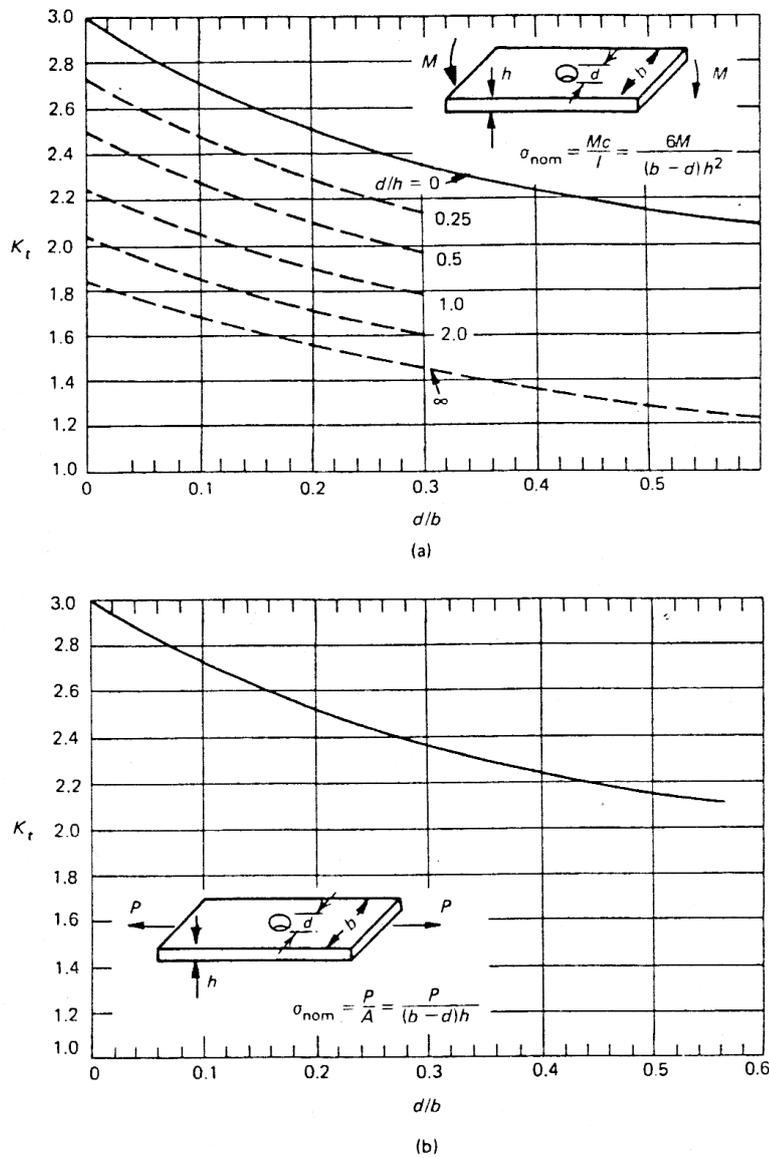


FIGURE 3.45 – Tôle rectangulaire percée d'un trou centré. (a) Flexion. (b) Traction-compression

$$\frac{\sigma_{eq}}{\psi R_e} = \frac{\sigma'_a}{R_\phi} + \frac{\bar{\sigma}'}{\psi R_e} = \frac{1}{K_\sigma}$$

On obtient en définitive :

$$\boxed{\frac{1}{K_\sigma} = \frac{k_\sigma \sigma'_a}{b_1 b_2 R_\pm} + \frac{\bar{\sigma}'}{\psi R_e}} \quad (3.27)$$

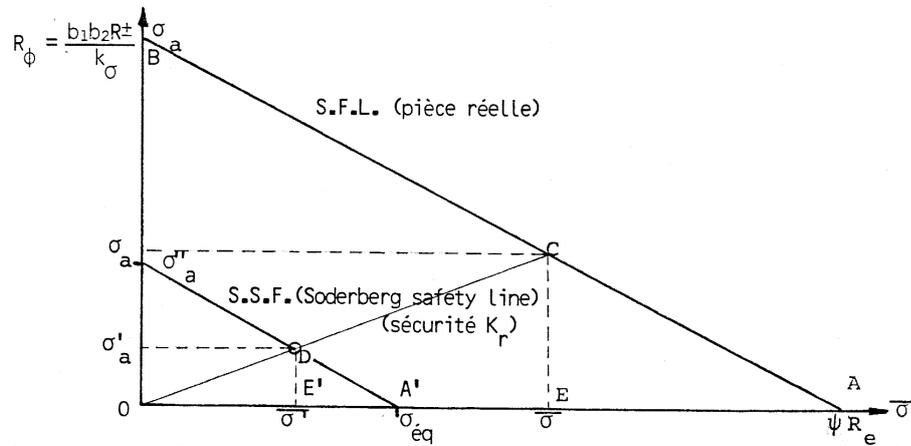


FIGURE 3.46 – Diagramme de Soderberg pour le calcul du coefficient de sécurité pour un état de sollicitation  $\sigma'_a$  et  $\bar{\sigma}$

On utilise souvent la même loi lorsque la compression est prédominante. En réalité, en compression,  $\bar{\sigma}$  n'a pas ou peu d'influence du fait que la compression entrave la progression des fissures. On pourrait donc dans ce cas se contenter de :

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{k_\sigma \sigma'_a}{b_1 b_2 R_\pm} \quad (3.28)$$

Dans le cas d'une torsion pulsatoire, on écrirait semblablement :

$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{k_\tau \tau'_a}{b_1 b_2 R_\pm} + \frac{\bar{\tau}'_m}{\psi R''_e} \quad (3.29)$$

### 3.2.6 Pièces lisses soumises à des sollicitations composées alternées

Sur base de résultats expérimentaux on a constaté que pour l'acier et l'acier coulé, les limites d'endurance en torsion alternée  $R''_\pm$  et en flexion alternée  $R_\pm$  vérifient la relation (voir Figure 3.47) :

$$R''_\pm = 0,58 R_\pm \simeq \frac{1}{\sqrt{3}} R_\pm \quad (3.30)$$

Pour des pièces en acier au carbone et en acier au Ni-Cr, soumises à torsion et flexion alternées agissant en phase, Goush et Pollard [9, 10] proposent un

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES 111

critère empirique de forme elliptique basé sur l'expérience comme illustré à la Figure 3.47 :

$$\left(\frac{\sigma_a}{R_{\pm}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{R''_{\pm}}\right)^2 = 1 \quad (3.31)$$

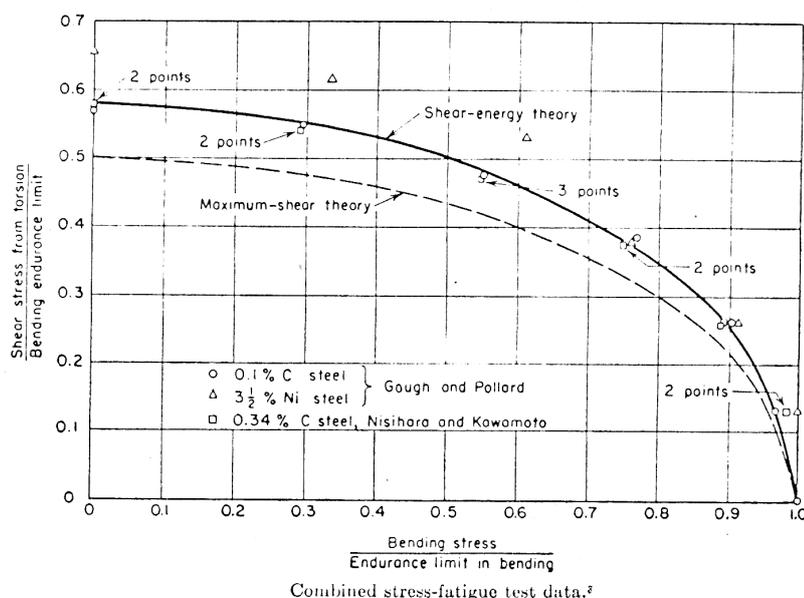


FIGURE 3.47 – Critère elliptique de rupture à la fatigue pour un état de sollicitations composées  $\sigma'_a$  et  $\bar{\sigma}'$  [9, 13]

Cela semble indiquer que le critère de la contrainte tangentielle octaédrale est applicable aux sollicitations alternées agissant en phase dans le cas des aciers et matériaux ductiles. En effet, les relations (3.30) et (3.31) combinées conduiraient à

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = R_{\pm} \quad (3.32)$$

qui est exactement l'expression du critère de contrainte de Von Mises pour un état plan de contrainte.

Dans le cas de sollicitations pulsatoires quelconques, des essais développés par Gough [10] ont pu montrer que la loi liant les contraintes limites de flexion et de torsion restait elliptique et avait pour équation :

$$\left(\frac{\sigma_a}{R_{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{R''_{\pi}}\right)^2 = 1 \quad (3.33)$$

avec cette différence toutefois que les contraintes  $R_{\pi}$  et  $R''_{\pi}$  correspondent à présent aux limites d'endurance calculées respectivement pour chacune

des contraintes moyennes  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\tau}$ , généralement indépendantes. Il n'y a donc plus cette fois de liaison directe entre les dénominateurs des deux termes du premier membre de (3.33).

### 3.2.7 Pièces entaillées soumises à des sollicitations pulsatoires en phase

De multiples essais en laboratoire ont prouvé qu'il était acceptable d'extrapoler les résultats de Gough et Pollard [9, 10] obtenus sur des pièces lisses au cas des pièces entaillées à condition d'adopter la droite de Soderberg relative à la pièce réelle.

L'écriture de la formule fondamentale n'est pas modifiée mais les limites d'endurance  $R_\pi$  et  $R''_\pi$  sont cette fois relatives à la pièce réelle (Voir Figure 3.48).

La pièce réelle travaille donc en sécurité aussi longtemps que la relation suivante est vérifiée :

$$\left(\frac{\sigma_a}{R_\pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{R''_\pi}\right)^2 \leq 1 \quad (3.34)$$

avec corrélativement les valeurs  $R_\pi$  et  $R''_\pi$  issue de l'expression de la droite de Soderberg.

$$R_\pi = R_\phi - C \bar{\sigma} \quad (3.35)$$

avec

$$\begin{aligned} R_\pi &= R_\phi - C \bar{\sigma} & R_\phi &= \frac{b_1 b_2 R_{\pm}}{k_\sigma} \\ C &= \frac{R_\phi}{\psi R_e} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} R''_\pi &= R''_\phi - C'' \bar{\tau} & R''_\phi &= \frac{b_1 b_2 R''_{\pm}}{k_\tau} \\ C'' &= \frac{R''_\phi}{\psi R''_e} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Il s'en suit que si la valeur du premier membre de (3.34) est unitaire, les tensions de travail  $\sigma_a$  et  $\tau_a$  créent un état de contrainte limite. Si ce premier membre reste inférieur à l'unité, on dit que le système travaille en sécurité

### 3.2. DIMENSIONNEMENT POUR PLUS D'UN MILLION DE CYCLES 113

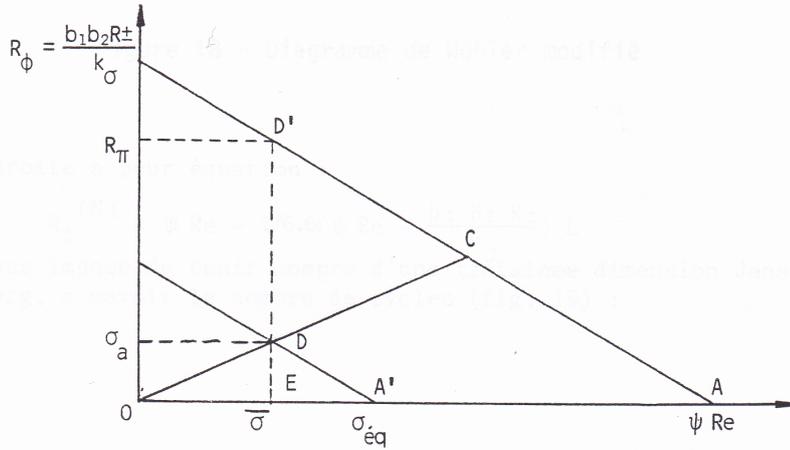


FIGURE 3.48 – Calcul du coefficient de sécurité pour une pièce réelle soumise à un état de sollicitation composée  $\sigma'_a$  et  $\bar{\sigma}'$

et que le régime de sollicitation est caractérisé par un coefficient de sécurité  $K$  :

$$\left(\frac{\sigma_a}{R_\pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{R''_\pi}\right)^2 = \frac{1}{K^2} \leq 1 \quad (3.38)$$

Evaluons maintenant chacun des termes de l'expression (3.34). Examinons la Figure 3.48. La similitude des triangles  $EDA'$  et  $ED'A$  permet d'écrire :

$$\frac{\sigma_a}{R_\pi} = \frac{\sigma_{eq} - \bar{\sigma}}{\psi R_e - \bar{\sigma}} \leq \frac{\sigma_{eq}}{\psi R_e} = \frac{1}{K_\sigma} \quad (3.39)$$

On écrirait de même pour ce qui concerne les contraintes de cisaillement :

$$\frac{\tau_a}{R''_\pi} = \frac{\tau_{eq} - \bar{\tau}}{\psi_c R''_e - \bar{\tau}} \leq \frac{\tau_{eq}}{\psi_c R''_e} = \frac{1}{K_\tau} \quad (3.40)$$

Il n'est pas facile d'obtenir facilement une valeur des coefficients de sécurité partiels  $K_\sigma$  et  $K_\tau$ . Dès lors au stade de l'avant projet, on préfère déterminer une valeur approchée du coefficient de sécurité  $K$  pour autant que celui-ci soit une estimation sécuritaire [5]. Il vient que le coefficient de sécurité  $K$  sera calculé en remplaçant respectivement  $\sigma_a/R_\pi$  et  $\tau_a/R''_\pi$  par leurs valeurs estimées  $1/K_\sigma$  et  $1/K_\tau$  à partir des équations (3.39) et (3.40). Puisque l'on surestime ainsi la valeur de chacun des deux termes, la sécurité globale s'en trouve renforcée d'autant. Cela aboutira à surdimensionner les pièces. Un dimensionnement plus fin pourra être réalisé avec une analyse détaillée à un stade plus avancé du projet.

En définitive on convient de calculer la sécurité globale à l'aide des sécurités partielles  $K_\sigma$  (3.38) et  $K_\tau$  (3.39) en les introduisant directement dans la formule suivante découlant de (3.38) :

$$\frac{1}{K} = \sqrt{\frac{1}{K_\sigma^2} + \frac{1}{K_\tau^2}} = \sqrt{\frac{K_\sigma^2 K_\tau^2}{K_\sigma^2 + K_\tau^2}} \quad K = \frac{K_\sigma K_\tau}{\sqrt{K_\sigma^2 + K_\tau^2}} \quad (3.41)$$

Plus explicitement en introduisant les valeurs issues des équations (3.39) et (3.40), il vient :

$$\frac{1}{K} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a k_\sigma}{b_1 b_2 R_\pm} + \frac{\bar{\sigma}}{\psi R_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a k_\tau}{b_1 b_2 R'_\pm} + \frac{\bar{\tau}}{\psi_c R'_e}\right)^2} \quad (3.42)$$

On insiste toutefois sur le fait que le coefficient de sécurité global ainsi calculé est légèrement sous-estimé et que la méthode travaille en sécurité.

### 3.3 DIMENSIONNEMENT POUR UNE DUREE DE VIE LIMITEE

Ce problème devient de plus en plus important. Il apparaît en effet que certaines pièces devant subir un faible nombre de cycles seraient inutilement lourdes et surdimensionnées si on adoptait la limite d'endurance conventionnelle.

Il paraît en outre plus judicieux dans certains cas d'espèce, de concevoir les pièces pour une durée limitée, quitte à prévoir systématiquement leur remplacement périodique.

En outre certains métaux non ferreux ne possèdent pas de limite d'endurance. Pour ceux-ci, il est nécessaire de dimensionner des pièces faites avec ces matériaux pour une durée de vie limitée.

On remplace dans la méthode ci-dessus la limite d'endurance par la contrainte de rupture par fatigue  $R_\phi(N)$  après N cycles.

Comme la courbe Wöhler n'est généralement pas connue, on adopte l'allure suivante présentée à la Figure 3.49.

Cette droite a pour équation :

$$R_\phi(N) = \psi R_E - \frac{1}{6} \left( \psi R_e - \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma} \right) \log_{10} N \quad (3.43)$$

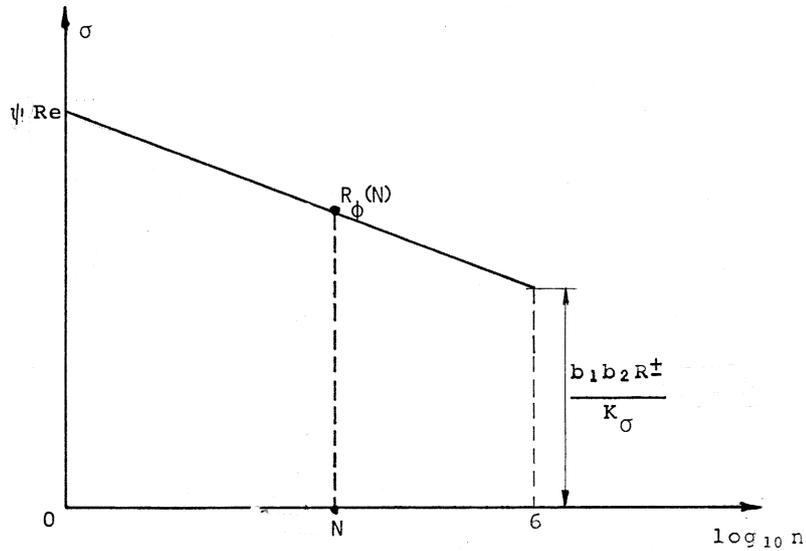


FIGURE 3.49 – Courbe de Wöhler approchée pour le dimensionnement pour une durée de vie limité

Ceci nous impose de tenir compte d'une troisième dimension dans le diagramme de Soderberg, à savoir le nombre de cycles (Figure 3.50)

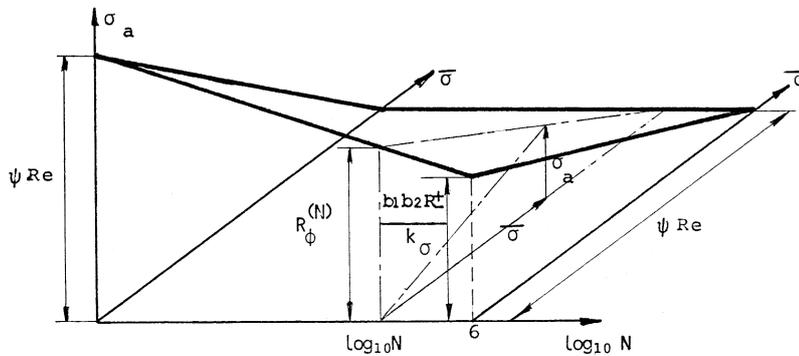


FIGURE 3.50 – Diagramme de Soderberg pour dimensionner à moins de  $10^6$  cycles (flexion)

On en déduit l'expression des sécurités partielles :

$$\frac{1}{K_{\sigma,N}} = \frac{\bar{\sigma}}{\psi R_e} + \frac{\sigma_a}{\psi R_e - \frac{1}{6} (\psi R_e - R_\phi) \log_{10} N} \quad (3.44)$$

avec

$$R_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma}$$

et en procédant de même pour la torsion :

$$\frac{1}{K_{\tau,N}} = \frac{\bar{\tau}}{\psi R_e''} + \frac{\tau_a}{\psi_c R_e'' - \frac{1}{6} (\psi_c R_e'' - R_\phi'') \log_{10} N} \quad (3.45)$$

avec

$$R_\phi'' = \frac{b_1 b_2 R_\pm''}{k_\tau}$$

Si on s'impose une durée de vie limitée inférieure à  $10^6$  cycles, les relations précédentes permettent un calcul immédiat de  $K_{\sigma,N}$  et  $K_{\tau,N}$ . On en déduit le coefficient de sécurité global  $K_N$ .

Par contre, si on s'impose une sécurité  $K_N$  totale et qu'on demande le nombre de cycles qui y correspond, le mieux est de procéder par itérations successives en introduisant une série de différentes valeurs de  $N$  dans chacune des relations en  $K_{\sigma,N}$  et  $K_{\tau,N}$ . La bonne valeur de  $N$  conduit aux sécurités partielles qui, combinées, satisfont à la condition imposée sur  $K_N$ .

Dans le cas où un type seulement de sollicitations intervient dans la mise en charge, on pourra toutefois utiliser la formule suivante, qui fournit le nombre de cycles pour lequel la rupture se produira connaissant  $\sigma_a$  et  $\bar{\sigma}$  (respectivement  $\tau_a$  et  $\bar{\tau}$ ).

$$\log_{10} N = \frac{6(\psi R_e - \sigma_{max})}{(\psi R_e - \bar{\sigma})(1 - \frac{R_\phi}{\psi R_e})} \quad (3.46)$$

avec

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma} + \sigma_a \quad R_\phi = \frac{b_1 b_2 R_\pm}{k_\sigma}$$

Remarquons que nous avons utilisé le facteur d'entaille donné pour une durée de vie infinie alors que l'expérience montre que le facteur d'entaille pour une durée de vie finie est généralement plus faible. Pour un acier, les courbes de Wöhler correspondant aux pièces lisses et entaillées présentent l'allure illustrée à la Figure 3.51. L'intersection des deux tracés intervient pour  $10^4$  cycles, auquel point  $k_f = 1$ , dans le cas de l'acier 1050 HT (normes AISI). En général, ce point se situe vers  $10^3$  cycles pour la plupart des aciers.

Une relation expérimentale mais déjà satisfaisante pour l'acier est :

$$(k_f)_N = \frac{N^{1/3(\log_{10} k_f)}}{k_f} \quad (3.47)$$

### 3.4. CAS DE PIÈCES REELLES SOUMISES A DIVERS NIVEAUX DE CONTRAINTE 117

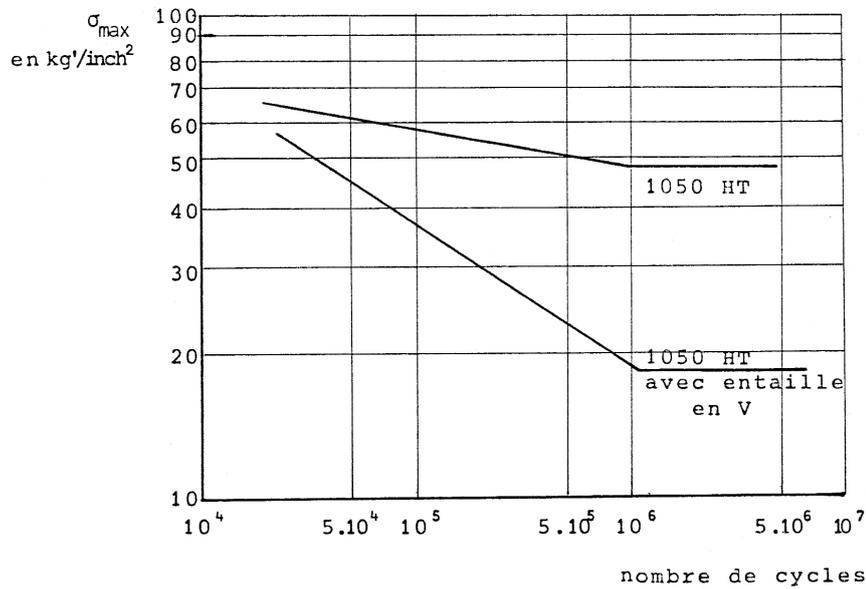


FIGURE 3.51 – Variation du facteur d'entaille avec la durée de vie

où  $(k_f)_N$  est le facteur d'entaille pour une durée de vie limitée inférieure à  $10^6$  cycles.

## 3.4 CAS DE PIÈCES REELLES SOUMISES A DIVERS NIVEAUX DE CONTRAINTE

### 3.4.1 Chargement de la pièce par un série de niveaux de sollicitations constants

Supposons que la pièce soit chargée par une série de niveaux de sollicitations constants caractérisés par l'état de contrainte  $\sigma_a^{(i)}$ ,  $\bar{\sigma}^{(i)}$ ,  $\tau_a^{(i)}$ ,  $\bar{\tau}^{(i)}$ . La pièce subit effectivement ce niveau de sollicitation pendant  $n_i$  cycles.

On admettra le critère de Palmgren Miner. Selon la théorie de Miner, le dommage à chaque niveau de sollicitation constant s'exprime par la quantité :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (3.48)$$

où  $N_i$  est la durée de vie de la pièce (état de sécurité unitaire) si elle était sollicitée en permanence par l'état de contrainte cyclique  $\sigma_a^{(i)}$ ,  $\bar{\sigma}^{(i)}$ ,  $\tau_a^{(i)}$ ,  $\bar{\tau}^{(i)}$ .

Le dommage global est alors donné par :

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i} \quad (3.49)$$

On vérifiera que le dommage reste effectivement inférieur à l'unité.

$$D = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{K} = \leq 1 \quad (3.50)$$

### 3.5 VALEUR DU COEFFICIENT DE SECURITE

Pour le dimensionnement des pièces mécaniques en construction des machines, on adopte généralement un coefficient de sécurité  $K$  de 1,5 à 2. On peut descendre dans certains cas jusqu'à 1,25 si nécessaire mais il importe alors de réaliser des essais de fatigue sur les pièces en vraie grandeur.

A défaut de renseignements plus précis, la norme DIN propose d'utiliser :

- $\mathbf{K} = 2$  lorsque la charge maximale est appliquée 100% du temps (cas des machines rotatives par exemple).
- $\mathbf{K} = 1,5$  lorsque la charge maximale est appliquée 50% du temps (cas des machines-outils généralement).
- $\mathbf{K} = 1,25$  lorsque la charge maximale est appliquée pendant 25% du temps seulement (cas type des engins de levage et de manutention).

Précisons que ce coefficient de sécurité global doit nous prémunir contre différents facteurs d'incertitude à savoir :

1. La limite d'endurance, quand elle est connue, est une valeur nominale correspondant à une probabilité de rupture de 50%, les essais présentant toujours une certaine dispersion.
2. Les variations possibles de la charge, la corrosion, les contraintes résiduelles...

Remarquons par ailleurs que l'on se met généralement du côté de la sécurité à plusieurs reprises lors de l'estimation du coefficient  $K$  :

- On se met du côté de la sécurité  $K$  lorsque on adopte le diagramme linéaire de Soderberg en lieu et place de celui de Goodman ou de Gerber.

- Dans le cas de concentrations de contraintes superposées, on se place en sécurité en adoptant le produit des coefficients de concentration de contraintes des deux discontinuités. En réalité, le coefficient global est plus faible (parfois 20% en moins).
- Enfin on s'est placé du côté de la sécurité lorsque l'on fait l'estimation (3.42) pour calculer le coefficient de sécurité dans le cas de sollicitations pulsatoires en phase.

### 3.6 AMELIORATION DE L'ENDURANCE

Malgré le grand nombre de recherches effectuées dans le domaine de la fatigue des métaux, il se produit encore très régulièrement des ruptures de pièces en fatigue. La plupart de celles-ci ont des causes banales et pourraient être évitées par la connaissance des règles élémentaires concernant le design à la fatigue.

Ainsi lors de la phase de conception, on veillera tout spécialement à éviter les concentrations de tension et à assurer un écoulement aussi réparti et régulier que possible des lignes de forces (congés généreux, etc.), une amélioration du tracé étant généralement plus rentable que le choix d'un acier à meilleure limite d'endurance. On se souviendra aussi que les aciers à haute résistance présentent une forte sensibilité à l'entaille.

La Figure 3.52 donne quelques exemples d'utilisation de **gorges de décharge**.

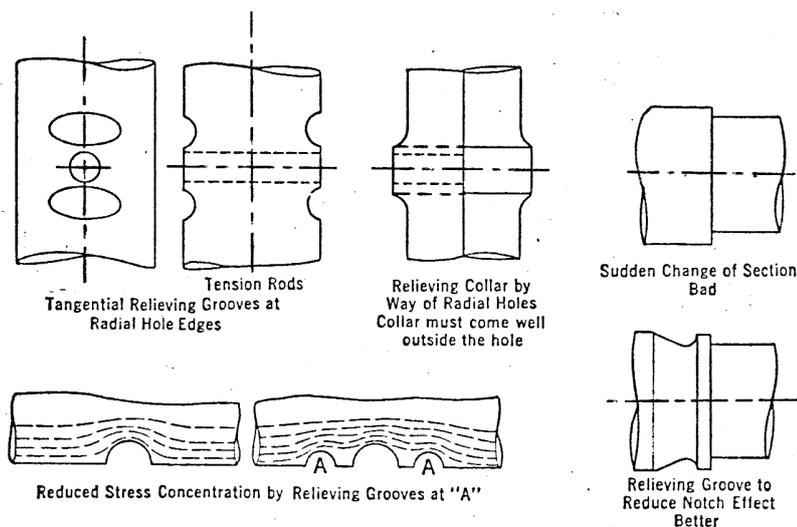


FIGURE 3.52 – Exemples de tracés corrects pour gorges de décharge

Des précautions toutes spéciales devront être prises dans la **localisation des trous** dans une pièce. Une poutre droite soumise à flexion souffre fort peu de l'existence d'un trou à proximité de l'axe neutre. Dans le cas de poutres courbes soumises à flexion, il ne faut pas perdre de vue qu'il y a déplacement de l'axe neutre. Un trou situé à hauteur de l'axe géométrique pourrait occasionner une rupture par fatigue. Les collets de largeur faible produisent une très faible concentration de contrainte (Figure 3.53).

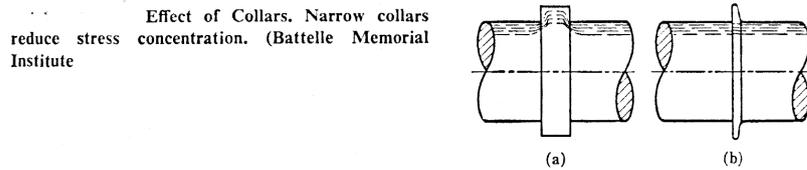


FIGURE 3.53 – Géométrie de collets

La Figure 3.54 montre quelques améliorations dans la conception des vilebrequins d'un moteur à combustion interne.

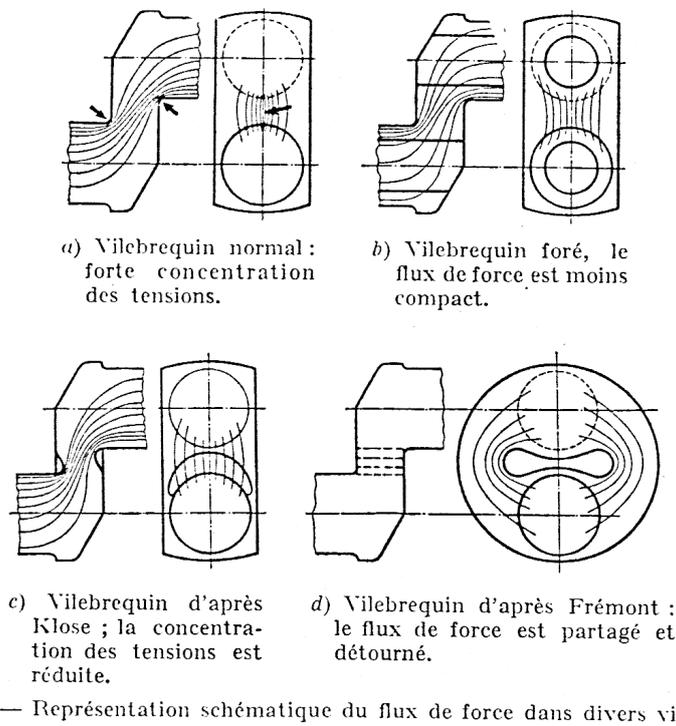
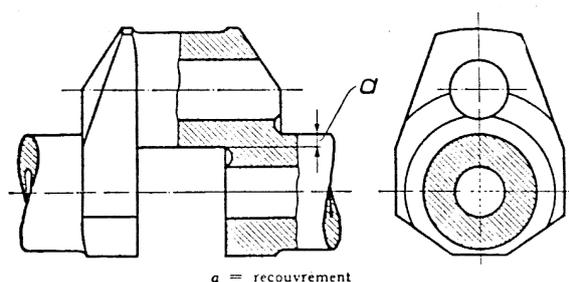


FIGURE 3.54 – Géométrie de vilebrequins

Dans le maneton d'un vilebrequin comportant un trou de graissage, la contrainte peut être quadruplée au droit du trou de sorte que celui-ci est souvent à l'origine d'une rupture par fatigue. Il est conseillé de le disposer assez loin du raccordement au flasque. Les orifices des trous doivent être arrondis avec un rayon aussi grand que possible et soigneusement polis. Comme indiqué aux Figures 3.54 et 3.55, on a pratiqué avec succès des gorges dans les flasques qui constituent en fait des entailles de décharge.



— Vilebrequin avec gorge et avec recouvrement des manetons et des tourillons, destiné à un gros moteur Diesel-Sulzer marin de construction légère.

FIGURE 3.55 – Gorges de décharge dans les vilebrequins

La complexité du phénomène rend le calcul des pièces souvent difficile et hasardeux. Dans certains cas critiques, on est même amené à recourir à des essais simulant au mieux les conditions réelles de fonctionnement. Une autre méthode consiste à surveiller la pièce en service et à étudier la naissance et le développement des fissures. Moyennant les précautions nécessaires pour éviter les accidents, cette méthode est excellente et peu coûteuse et donnera un enseignement de valeur car les sollicitations sont celles de la réalité. D'autre part l'observation du trajet de la fissure et de la cassure peut donner nombre de renseignements intéressants. Observons par exemple le faciès de l'arbre après rupture de la Figure 3.56. Deux trous à la surface sont les extrémités d'une rainure où la rupture par fatigue a démarré. La rupture a progressé graduellement depuis ces deux trous et se sont dirigées vers le centre. La surface qui a subi la rupture en premier lieu a frotté et est devenue presque lisse sous l'action de la charge. La rupture finale est survenue dans la partie où l'on aperçoit une rugosité importante aux alentours du diamètre central. On observe des lignes de progression presque symétriques progressant depuis les rainures de cale vers le centre.

On sait en effet que la fissuration suit un trajet perpendiculaire à la direction de la plus forte tension de traction. L'étude de ce trajet permet de décrire le système de sollicitation qui a provoqué la fissure. On peut ainsi détecter

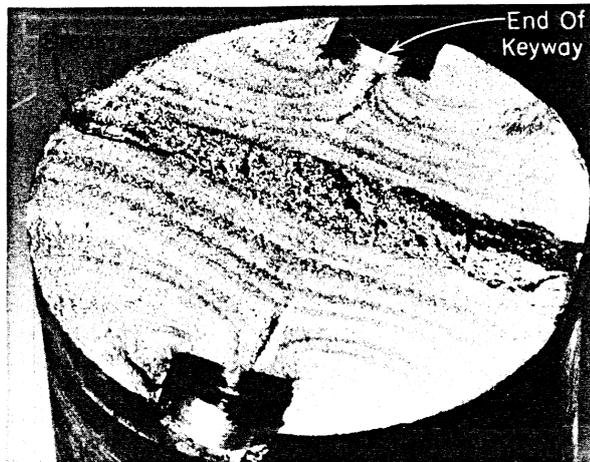


FIGURE 3.56 – Faciès de rupture

des tensions parasites éventuellement non prises en considération lors du projet. L'observation de la fracture peut elle aussi donner un certain nombre de renseignements tels que le niveau de contrainte, le mode de sollicitation (Figure 3.57). Par exemple Une fracture en hélice indique que l'arbre a subi de la torsion alternée comme l'illustre la Figure 3.58.

| Type de sollicitation          | Faible concentrateur local |                               | Faible concentrateur circonférentiel |                               | Concentrateur circonférentiel important |                               |
|--------------------------------|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|---|-------------------------------|
|                                | surcharge cyclique modérée | surcharge cyclique importante | surcharge cyclique modérée           | surcharge cyclique importante | surcharge cyclique modérée              | surcharge cyclique importante |
| Traction-compression cyclique  |                            |                               |                                      |                               |   |                               |
| Flexion simple cyclique        |                            |                               |                                      |                               |   |                               |
| Flexion double cyclique        |                            |                               |                                      |                               |   |                               |
| Flexion symétrique en rotation |                            |                               |                                      |                               |   |                               |

FIGURE 3.57 – Schématisation des cassures de fatigue

L'exécution de la pièce doit, elle aussi, être rigoureusement surveillée. Un

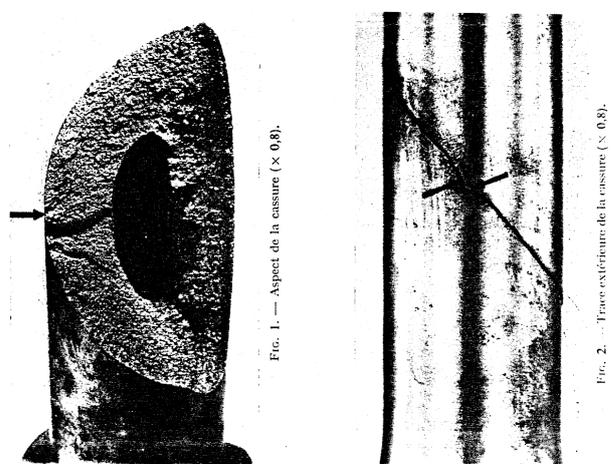


FIGURE 3.58 – Cassure en hélice à 45°

point de soudure déposé malencontreusement en un endroit fort sollicité, un trou qui n'a pas été repassé à l'alésoir, un poinçon mal placé, un trou foré par erreur et rempli de soudure sont autant d'amorces de rupture possibles.

Dans bien des cas, on peut aussi incriminer une utilisation inadéquate du matériel (matériel de levage par exemple).

L'introduction d'entailles microgéométriques et d'hétérogénéités structurales (inclusions) peut également être un facteur déterminant de la vie d'un organe mécanique. Ces entailles peuvent provenir aussi bien de l'élaboration du métal que de l'usinage ou des traitements mécaniques et thermiques, de chocs accidentels. En fonctionnement, une surcharge thermique, l'exposition à de la corrosion ou un défaut de lubrification peuvent être à l'origine de telles entailles.

On notera que de nombreux traitements de surface aussi bien mécaniques que métallurgiques sont actuellement utilisés pour améliorer la tenue en fatigue. Citons le galetage, le grenailage qui ont pour but de créer de fortes contraintes résiduelles, la cémentation et la nitruration visant à créer une couche superficielle dure et comprimée. Le paragraphe suivant est destiné à fournir quelques informations sur ce sujet.

### 3.7 TRAITEMENTS DE SURFACE

Compte tenu des méthodes courantes de mise à forme, on sait que la surface extérieure d'une pièce de machine est la zone caractérisée par la plus

forte densité de défauts de toute sorte.

La fatigue constitue d'autre part un phénomène de *surface* auquel est lié un phénomène de *tension*.

Il s'en suit que le point origine de la propagation des fissures est généralement situé à la peau de la pièce, en un endroit où des contraintes très supportables en temps normal, voient leur action considérablement amplifiée, de par l'effet d'entaille qu'un défaut micro-localisé peut produire. En outre, s'il apparaît que l'application d'une tension de traction variable accélère l'endommagement de la pièce. La compression a par contre un effet assez bénéfique au contraire. Ceci nous indique clairement qu'un gain sérieux peut être obtenu en créant des contraintes résiduelles de compression aux endroits critiques. C'est ce qui est exploité de différentes façons :

#### **A. Traitement mécanique**

1. Surcharge (overstressing)
2. Dressage et formage à froid
3. Martelage - grenailage
4. Galetage (surface rolling)

#### **B. Traitements thermiques**

1. Trempe superficielle
2. Carburation
3. Nitruration

Certaines de ces méthodes sont souvent combinées

### **3.7.1 Traitements mécaniques - plastification locale à froid**

#### **Overstressing**

Cette méthode est couramment utilisée pour les ressorts de suspension d'automobiles. Le schéma des opérations est représenté à la Figure 3.59. Cette méthode ne peut s'appliquer que lorsque la charge dans une direction est nettement plus grande que dans l'autre. Elle n'aurait aucun effet dans le cas de sollicitation alternée. Elle est aussi utilisée pour les barres de torsion, dans l'assemblage de roues de chemin de fer et de disques de turbine (autofrettage). L'utilisation de l'overstressing est limitée par la ductilité des zones soumises à forte contrainte (fond d'entaille).

### Dressage et formage à froid

Les contraintes résiduelles créées par le dressage et le formage ont la même distribution dans la section que celles créées par l'overstressing et peuvent avoir un effet bénéfique si la charge de formage a le même sens que la charge de service, ce qui n'est pas toujours le cas. Un exemple est donné à la Figure 3.60.

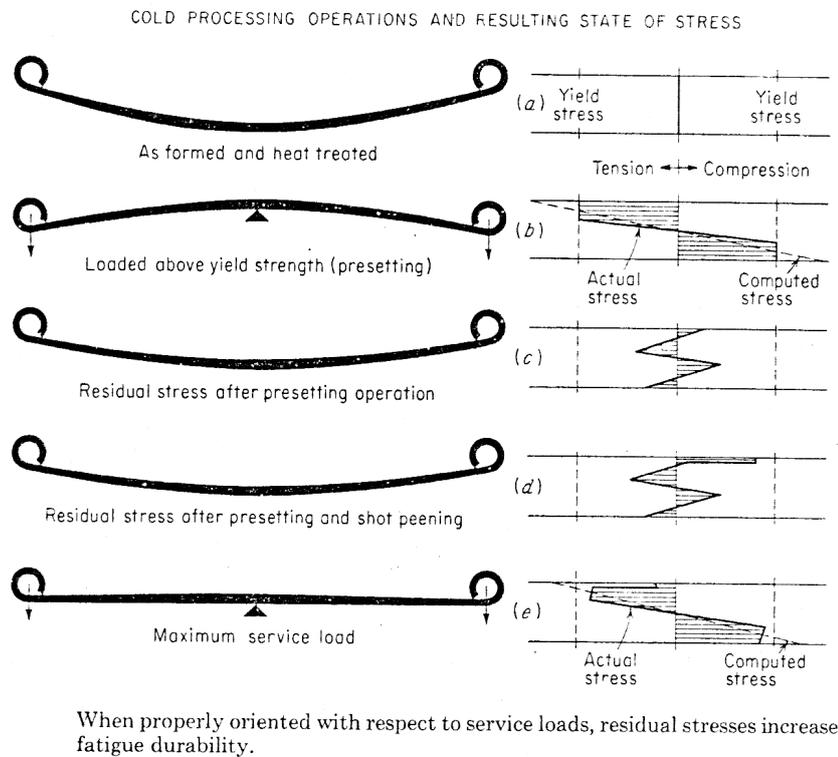


FIGURE 3.59 – Traitement par overstressing

Horger et Lipson [11] ont étudié cet effet sur des axes de ponts arrières de voiture. Ils ont constaté une réduction de 25% de la limite de fatigue pour des axes dressés à froid ( $14 daN/mm^2 \rightarrow 9,1 daN/mm^2$ ). La résistance à la fatigue d'arbres dressés à froid mais utilisant la bonne distribution de contraintes résiduelles (grenailage) peut atteindre plus de  $30 daN/mm^2$  (Voir Figure 3.61).

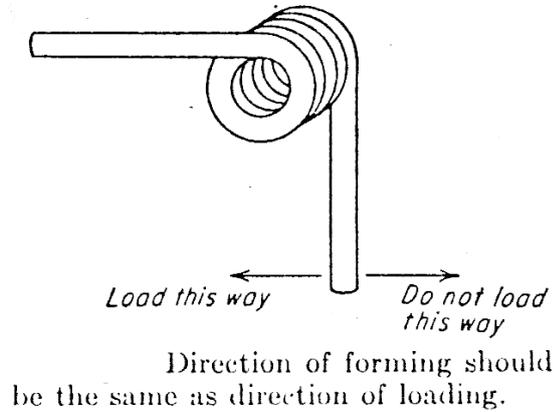
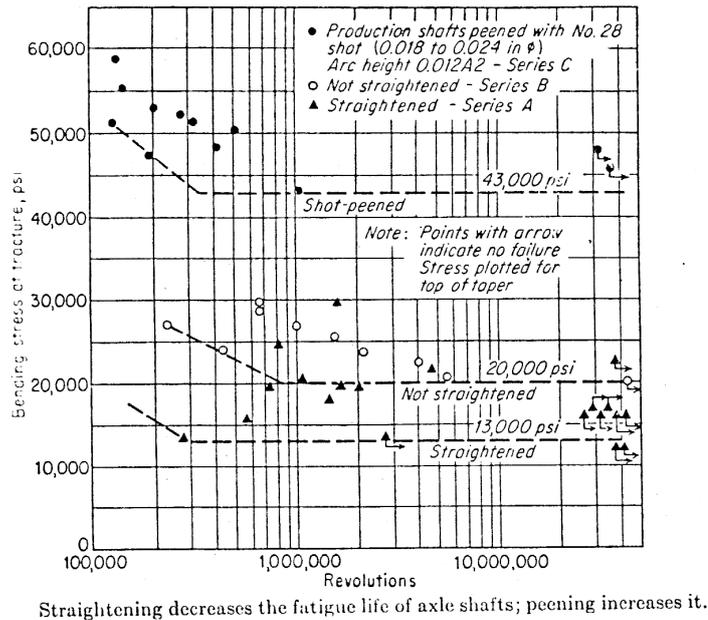


FIGURE 3.60 – Traitement par overstressing. Influence du sens de la surcharge

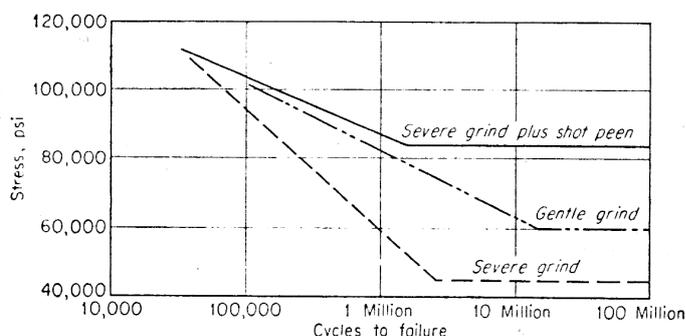
FIGURE 3.61 – Influence du grenailage (  $1 \text{ psi} \cong 7 \text{ N/mm}^2$  )

### Martelage - Grenailage

Ces méthodes produisent une couche superficelle en précontrainte de compression résistant particulièrement bien aux fissures. Le martelage se fait à l'aide d'un marteau pneumatique. Quand l'outil est sphérique, la profon-

deur de la zone comprimée est à peu près égale au diamètre de l'empreinte et la plus grande tension de compression vaut à peu près la moitié de la limite élastique.

Le grenailage est effectué par projection à grande vitesse de petites particules sphériques. C'est la méthode la plus polyvalente parce qu'applicable à toutes les géométries. La taille des grains va de 0.2 à 4 mm de diamètre. Les vitesses sont de 30 à 60 m/s. La profondeur de la zone comprimée dépend de la vitesse et de la taille des grains et va de quelques centièmes de mm à quelques dixièmes. La contrainte maximum se produit légèrement en dessous de la surface. L'importance économique de ce procédé est qu'il permet, outre l'augmentation de charge, de réduire fortement le coût d'usinage et de finition. Un mauvais état de surface après grenailage est meilleur du point de vue fatigue que le meilleur poli sans grenailage (Figure 3.62).



The effect of grinding and peening on reverse-bending fatigue strengths of flat steel bars, Rockwell hardness C-45.

FIGURE 3.62 – Influence du grenailage après rectification

L'effet du grenailage se mesure à l'aide d'éprouvettes de contrôle Almen, lames plates dont on mesure la courbure résiduelle après grenailage dans les mêmes conditions que la pièce étudiée.

### Surface Rolling (galestage)

Dans certains cas, le galestage peut être la technique la plus pratique spécialement pour les pièces de révolution lorsque de petits congés doivent être atteints ou lorsque la couche comprimée doit être importante, comme dans les axes de locomotive. Un dispositif utilisé est représenté à la Figure 3.63. Les rayons des rouleaux vont de 6 à 40 mm avec des pressions allant jusqu'à 10 tonnes. La profondeur de la région comprimée peut aller jusqu'à 12 mm.

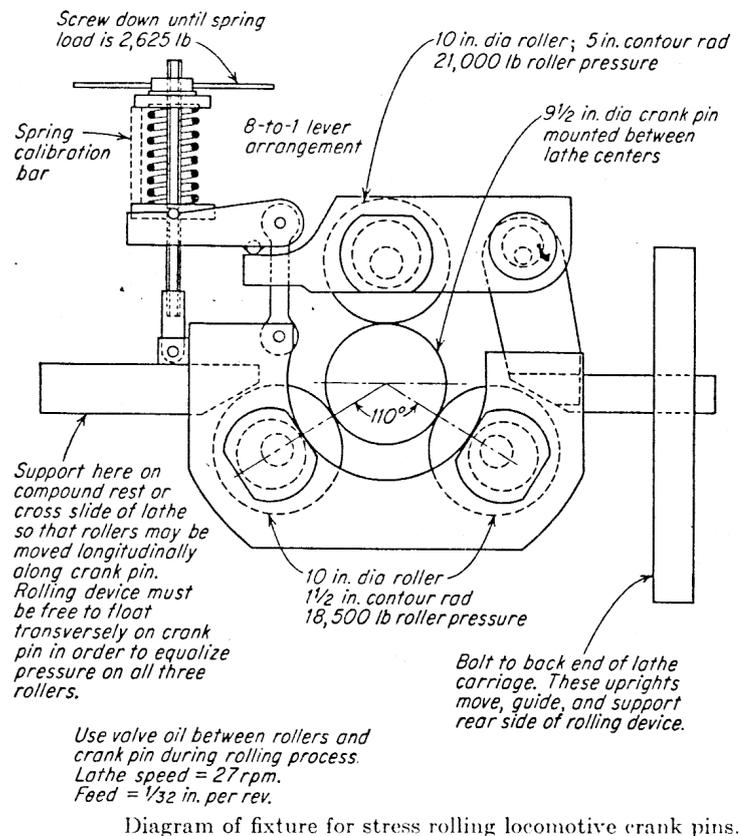


FIGURE 3.63 – Galetage des axes de vilebrequin

### 3.7.2 Traitements thermiques

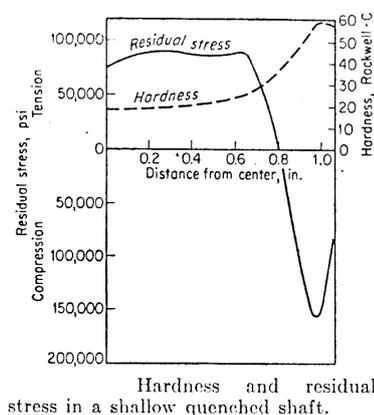
#### Trempe superficielle

La martensite, produite par trempe occupe plus de volume que l'acier qui lui a donné naissance. Cette dilatation a lieu lors du refroidissement à partir de  $370^{\circ}\text{C}$ . Sa dilatation linéaire est de l'ordre de 0,5%. A cette déformation biaxiale de 0,5% correspond une contrainte biaxiale de l'ordre de  $140\text{ kg/mm}^2$ . On voit que les contraintes résiduelles de trempe peuvent être énormes. Le revenu va réduire celles-ci au niveau souhaité.

La trempe superficielle produit à la surface une nette augmentation de la dureté et un pic de contraintes de compression, le coeur étant sous tension de traction (Figure 3.64).

L'exploitation correcte de cette distributon de contrainte a permis l'utilisa-

tion d'acier au carbone là où la pratique courante exigeait un acier allié très trempant.



Hardness and residual stress in a shallow quenched shaft.

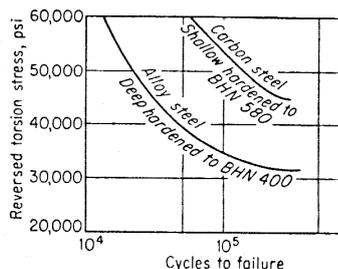


Fig. 9.28 Fatigue of truck shafts.

FIGURE 3.64 – Influence du traitement thermique

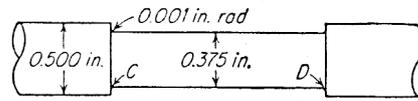
### Chauffage superficielle

Le même principe peut être utilisé en chauffant la surface de la pièce au chalumeau et en la refroidissant rapidement. Un exemple convaincant est présenté à la Figure 3.65.

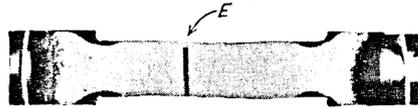
### Cémentation

La diffusion de carbone à haute température dans la couche superficielle accroît son volume. Lors du refroidissement, cette couche est transformée en martensite, le cœur étant mis sous tension de traction. Les tests montrent que ce procédé peut conduire à des améliorations de 200% de la résistance à la fatigue.

Les aciers alliés présentant une meilleure trempabilité peuvent être rendus suffisamment durs par trempe à l'huile et se déforment moins que les aciers au carbone où l'on utilise généralement la trempe à l'eau. Ils sont dès lors tout indiqués pour la cémentation, spécialement lorsqu'aucune opération de finition n'est nécessaire après traitement.



(a) Sketch of cylindrical specimen showing sharp shoulder stress raisers at *C* and *D*



(b) Etched section of specimen fractured at *E*, shoulders *C* and *D* protected by residual compressive stress from flame hardening

Surface compression by shallow hardening.

| Series | Treatment                   | Endurance limit in terms of nominal stress, psi | Location of failure |
|--------|-----------------------------|---|---------------------|
| A      | None                        | 18,000  | Fillet              |
| B      | Oil-quenched and tempered   | 28,000  | Fillet              |
| C      | Fillets only flame-hardened | 32,000  | Body                |
| D      | Flame-hardened all over     | 52,000  | Fillet              |

FIGURE 3.65 – Efficacité du traitement thermique

### Nitruration

Le principe du traitement est semblable à celui de la cémentation. Les contraintes résiduelles sont toutefois plus élevées, ce qui entraîne une résistance à la fatigue encore supérieure. La nitruration présente également l'avantage d'une déformation négligeable après traitement : une forte trempe à ce stade n'est plus indispensable.

La combinaison d'une couche superficielle dure et d'une matière à coeur plus tendre ne suffit pas à expliquer le gain obtenu en fatigue. C'est la combinaison d'une couche dure et comprimée et d'une matière à coeur sous tension de traction qui est la clé de la résistance de pièces telles que les engrenages.

Outre l'augmentation de l'endurance, la création de contraintes résiduelles de compression garantit d'autres effets bénéfiques. La naissance et la propagation des fissures est en effet freinée, spécialement dans les cas de corrosion et de fretting corrosion. Elles permettent également l'utilisation d'aciers plus durs. Les aciers haute résistance présentent en effet une plus grande fragilité

et une sensibilité à l'entaille plus importante. Ces deux effets peuvent être nettement atténués par l'existence des contraintes résiduelles de compression.

En définitive, Il est clair que le phénomène de fatigue est essentiellement complexe et qu'il importe toujours de ne négliger aucun facteur capable de l'influencer. En matière de fatigue, la connaissance la plus précise possible des propriétés du matériau utilisé et de sa structure revêt une importance primordiale.



# Chapitre 4

## ENGRENAGES

### 4.1 INTRODUCTION

#### 4.1.1 Définitions

On appelle roues dentées des corps de révolution pourvus de dents par le contact desquelles un mouvement de rotation ou un couple peut être transmis d'un arbre moteur vers un arbre récepteur.

L'engrènement d'une roue dentée avec une crémaillère transforme la rotation de la roue en un déplacement de translation de la crémaillère et vice-versa.

Les roues menantes et menées, doivent être maintenues à un entraxe constant par un dispositif approprié. L'ensemble constitue *une paire engrenages* (c'est-à-dire deux roues dentées en prise).

#### 4.1.2 Elements historiques

On trouve trace du développement des engrenages depuis l'antiquité en Chine et en Europe. Les engrenages sous leur forme actuelle résultent d'un processus d'évolution assez long. Quelques étapes importantes sont rappelées à la Figure 4.1.

Dans la Chine ancienne, le South Pointing Chariot composé d'un très vieux système d'engrenages permet de voyager à travers le désert de Gobi (Figure 4.1-A). Chez les Romains également, Vitruve discute le principe des engrenages à peigne (Figure 4.1-B).

On retrouve trace des engrenages au Moyen-Age : les systèmes de roues dentées en forme de peigne avec des dents en bois servent à transmettre le mouvement dans les moulins. (Figure 4.1-C)

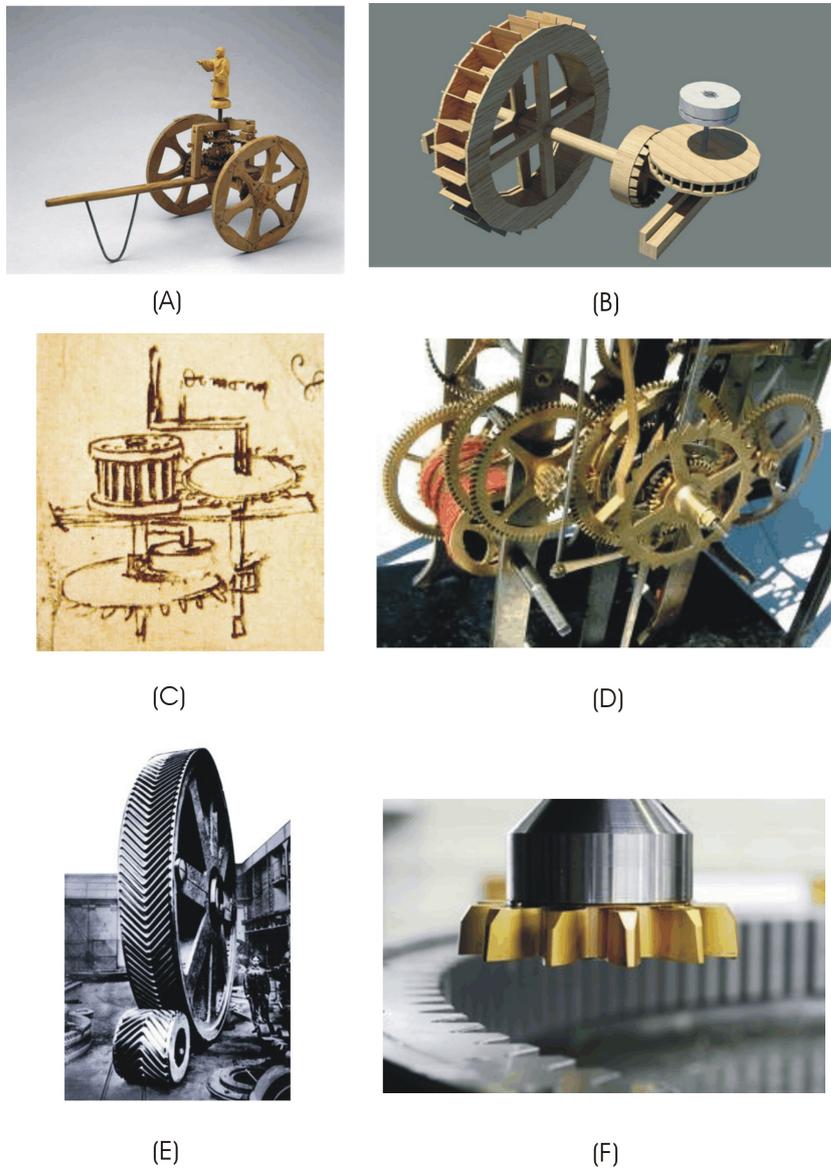


FIGURE 4.1 – Quelques éléments d’histoire des engrenages : A/ South Pointing device en Chine. B/ Engrenages en forme des peigne et de lanterne au Moyen Age. C/ Etudes des engrenages homocinétique par Léonard de Vinci. D/ Développement des engrenages avec l’horlogerie à la Renaissance. E/ Essor des engrenages avec l’ère industrielle et la production mécanique. F/ Production moderne d’engrenages standardisés.

A la Renaissance, Léonard de Vinci, le grand peintre et ingénieur dessine de nombreux engrenages et s’intéresse à la question de l’engrènement homo-

cinétique, c'est-à-dire la préservation d'un rapport constant entre les vitesses d'entrée et de sortie. (Figure 4.1-D)

C'est sous l'impulsion de la navigation et des besoins pour connaître le temps avec précision que l'horlogerie se développe. Les maîtres horlogers améliorent et développent la technique des engrenages homocinétiques. (Figure 4.1-E)

Avec l'ère industrielle, les engrenages prennent une ampleur que nous leur connaissons aujourd'hui. Les engrenages deviennent un élément très important de la mécanique des machines. On utilise l'acier et ils sont fabriqués en grande série. Les techniques de fabrication se perfectionnent. On normalise les dimensions des engrenages. (Figure 4.1-F)

### 4.1.3 Applications des engrenages en mécanique

Les engrenages constituent une vaste famille d'éléments de machine destinés à la transmission de puissance. Ils sont utilisés pour transmettre et convertir le couple et la vitesse dans une grande variété d'applications comme l'illustre quelques applications présentées à la Figure 4.2.

Parmi les autres éléments de transmission et de réduction disponibles, la famille des engrenages se distingue par les avantages et inconvénients suivants qui orientent leur applications privilégiées.

#### Avantages des engrenages

- Les engrenages maintiennent un rapport de vitesse constant au cours du temps, on parle d'une transmission de puissance homocinétique et cela quel que soit la charge.
- Transmission de puissance des plus petites aux plus grandes machines.
- Disposition quelconque des axes des roues, même si les axes parallèles restent la meilleure solution.
- Sécurité de service et durée de vie élevée.
- Entretien restreint (graissage).
- Compacité et encombrement faible.

#### Inconvénients

- Prix de revient relativement élevé (par rapport à d'autres solutions).
- Niveau sonore parfois gênant (dépend du type d'engrenages).
- Transmission rigide entre les arbres.
- Amortissement peu efficace des à-coups et des vibrations.
- Interchangeabilité limitée (même module nécessaire).

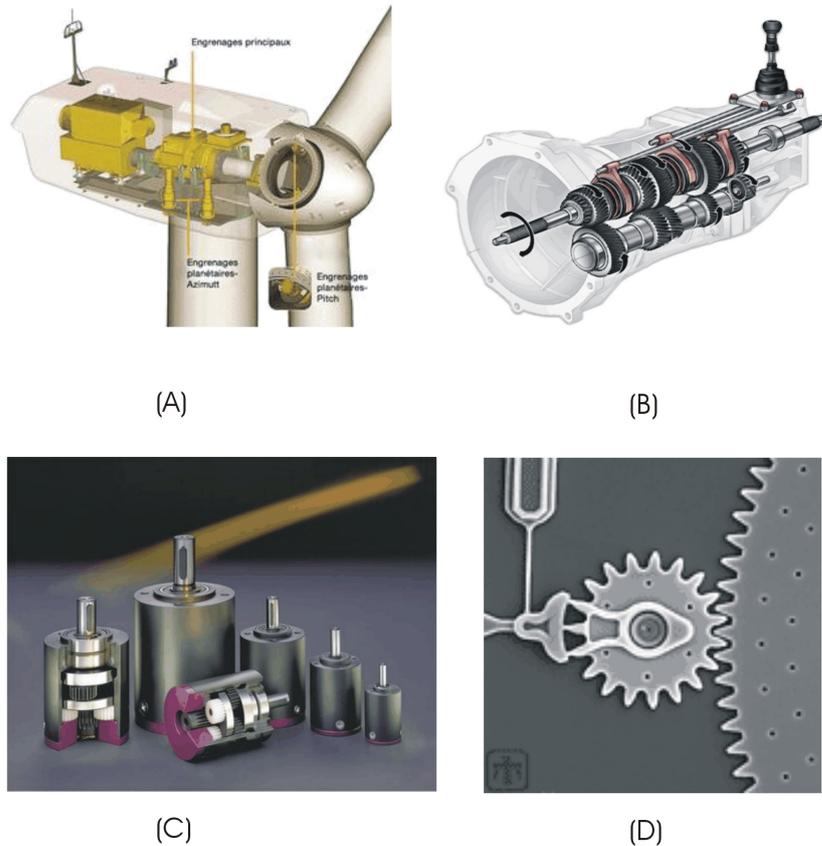


FIGURE 4.2 – Applications des engrenages des machines les plus grandes au plus petites : A/ Boîte de vitesses pour éolonne. B/ Boîte de vitesses d’automobile. C/ Réducteurs pour moteurs électriques d’actionnement mécatronique. D/ Engrenages en Silicium pour un MEMS.

#### 4.1.4 Nomenclature

Dans la suite on convient d’appeler :

**Pignon** : La plus petite des roues dentées. Elle est indiquée 1.

**Roue** : la roue dentée de diamètre maximale. Elle est repérée par l’indice 2. Il s’agit d’une roue à denture extérieure.

**Couronne** : une roue à denture intérieure. Elle est également repérée par l’indice 2.

**Crémaillère** : un profil denté continu et plan.

### 4.1.5 Types d'engrenages

On distingue différents types d'engrenages comme illustrés à la Figure 4.3.

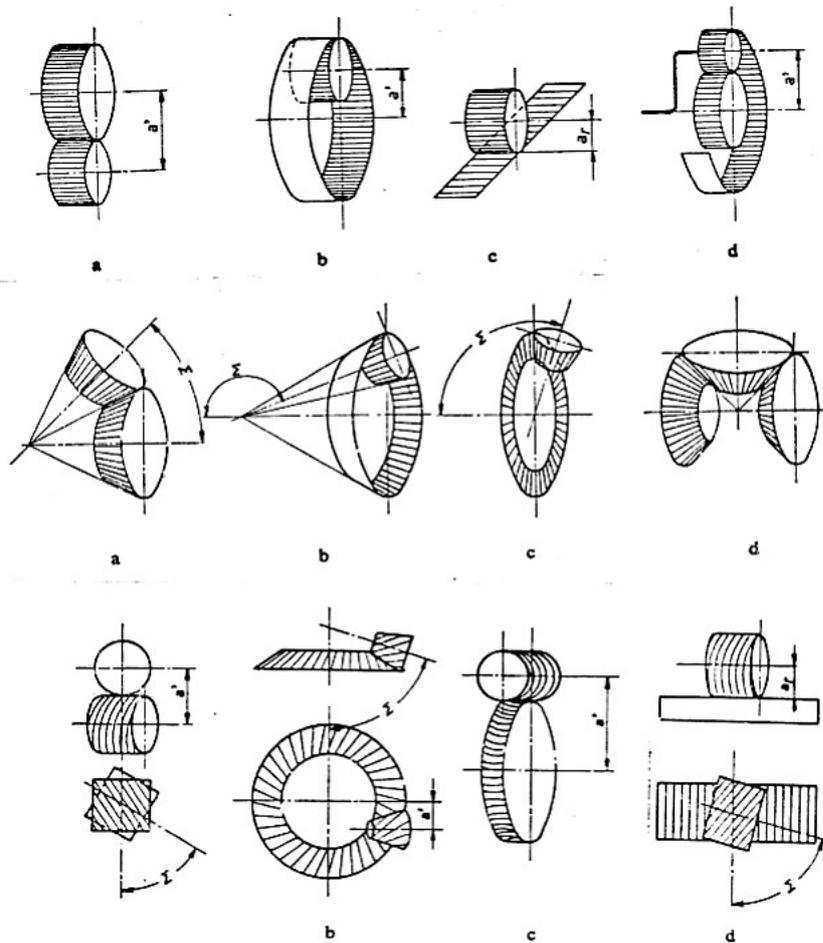
**Engrenages à axes parallèles** (Voir Figure 4.3-A). Les surfaces primitives sont des cylindres qui roulent sans glisser l'un sur l'autre.

**Engrenages à axes concourants** (voir Figure 4.3-B). Les surfaces primitives sont des troncs de cône qui roulent sans glisser l'un sur l'autre.

**Engrenages à axes gauches** (voir Figure 4.3-C). Les axes des roues sont gauches, c'est-à-dire ni concourants ni parallèles. Les surfaces primitives, théoriquement des hyperboloïdes, roulent et glissent l'une sur l'autre. Les surfaces utilisées en pratique sont des cylindres, des troncs de cônes ou des tores.

### 4.1.6 Représentation graphique

Les engrenages font l'objet d'une représentation graphique normalisée rappelée à la Figure 4.4 extraite de la Référence [4].



Types d'engrenages

FIGURE 4.3 – Type d'engrenages. A/ Engrenages à axes parallèles. B/ Engrenages à axes concourants. C/ Engrenages à axes Gauches

## 4.2 CINEMATIQUE DE L'ENGRENAGE A DENTURE DROITE

Considérons d'abord les engrenages à axes parallèles et à dentures droites (Figure 4.5). Les définitions fondamentales et la théorie de l'engrenement, le calcul de résistance seront développées sur ce type d'engrenages puis étendus aux engrenages d'autres natures.

|                           |  | Types de dentures*      |             |         |         |
|---------------------------|--|-------------------------|-------------|---------|---------|
|                           |  | Droite                  | Hélicoïdale | Chevron | Spirale |
| Roue à denture extérieure |  |                         |             |         |         |
| Roue à denture intérieure |  |                         |             |         |         |
| * Indication facultative. |  |                         |             |         |         |
|                           |  | Exemples d'applications |             |         |         |
| Roue cônica               |  |                         |             |         |         |
| Secteur denté             |  |                         |             |         |         |
| Vis sans fin              |  |                         |             |         |         |
| Crémaillère               |  |                         |             |         |         |

FIGURE 4.4 – Représentation graphique normalisée

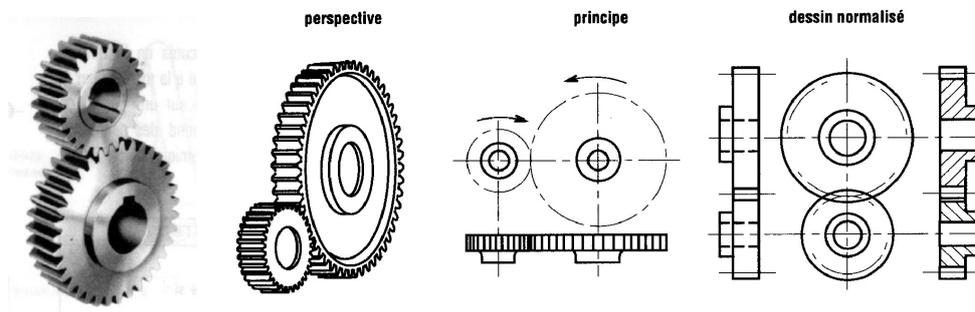


FIGURE 4.5 – Engrenages à axes parallèles et denture droite

### 4.2.1 Définitions fondamentales

#### Rapport de réduction

Deux roues dentées en prise se comportent comme si elles étaient fictivement constituées de deux cylindres de diamètres respectifs  $d_{01}$  et  $d_{02}$  (appelés **diamètres primitifs**) qui roulent sans glisser l'un sur l'autre (Voir Figure 4.6). La condition d'égalité des vitesses tangentielles s'écrit :

$$v_1 = \frac{\omega_1 d_{01}}{2} = v_2 = \frac{\omega_2 d_{02}}{2} \quad (4.1)$$

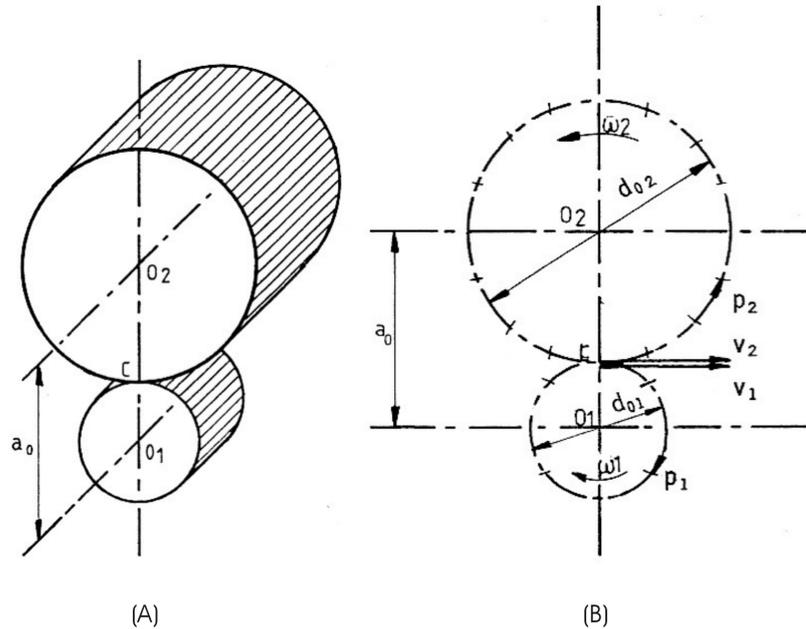


FIGURE 4.6 – Engrenement

où  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont les diamètres des cylindres équivalents qui roulent sans glisser.  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont appelé les **diamètres primitifs** des roues dentées.

Il vient

$$\frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i > 1 \quad (4.2)$$

avec le **le rapport de réduction  $i$** . Le pignon ayant un diamètre inférieur à la roue,  $d_{01} \leq d_{02}$ , nous avons toujours par convention  $i > 1$ .

On notera enfin que ces formules restent valables pour un engrenement à denture intérieure à condition d'affecter d'un signe moins les quantités relatives à la roue soient les quantités  $i$ ,  $a_0$  et tout autre quantité relative à la roue de denture intérieure indiquée 2 telle que le diamètre  $d_{02}$  ou le nombre de dents  $Z_2$ .

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{d_{02}}{d_{01}} = \pm i > 1 \quad (4.3)$$

En négligeant le rendement de transmission, on peut encore écrire la conservation de la puissance entre le pignon et la roue :

$$\mathcal{P}_1 = C_1 \omega_1 = \mathcal{P}_2 = C_2 \omega_2 \quad (4.4)$$

Il est classique de mettre en évidence l'augmentation du couple, inversement proportionnelle au rapport de réduction  $i$ . Ce rapport de réduction est habi-

tuellement reliée au concept de *Mechanical Advantage (MA)* présent dans la littérature anglo-saxonne :

$$M_A = \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i \geq 1 \quad (4.5)$$

### Pas et module

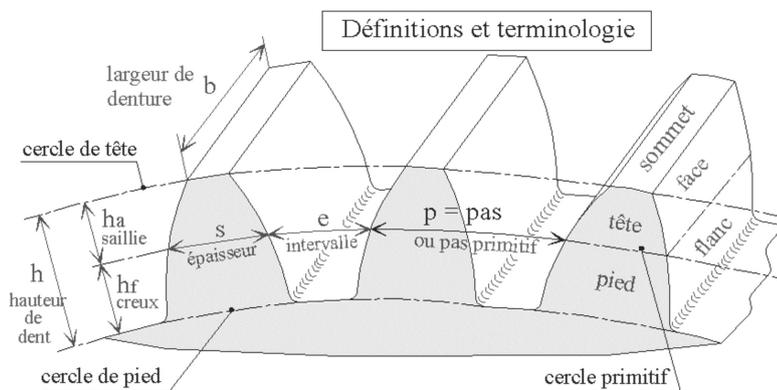


FIGURE 4.7 – Géométrie de l’engrenage

Soit  $Z$  le nombre de dents relatif à la roue de diamètre primitif  $d_0$ . Le **pas primitif**  $p$  des roues cylindriques à denture droite est la longueur de l’arc mesuré sur le cercle primitif entre deux points correspondants à deux flancs correspondants (droits ou gauches) (Voir Figure 4.7).

On peut écrire :

$$\pi d_{01} = Z_1 p_1 \quad \pi d_{02} = Z_2 p_2 \quad (4.6)$$

Soit encore

$$d_{01} = Z_1 \frac{p_1}{\pi} \quad d_{02} = Z_2 \frac{p_2}{\pi}$$

Evidemment les dentures de la roue et du pignon étant compatibles, leurs pas doivent être égaux :

$$p_1 = p_2 = p$$

On définit **module**  $m$  de la dent comme le rapport entre le pas et le nombre  $\pi$ .

$$m = \frac{p}{\pi}$$

Le module métrique  $m$  est très commode pour le calcul. Le module métrique est à la base de la normalisation des engrenages en Europe continentale. Les valeurs du modules  $m$  (en mm) sont normalisées. Elles sont tirées de la série de Renard reprise au Tableau 4.1 ou encore à la Figure 4.8 :

|     |     |     |   |      |     |    |     |    |
|-----|-----|-----|---|------|-----|----|-----|----|
| 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,25 | 1,5 | 2  | 2,5 | 3  |
| 3   | 5   | 6   | 8 | 10   | 12  | 16 | 20  | 25 |

TABLE 4.1 – Tableau des modules normalisés

| Modules 0,5 à 1,5 |           |           | Modules 2 à 6 |            |            | Modules 8 à 25 |           |           |
|-------------------|-----------|-----------|---------------|------------|------------|----------------|-----------|-----------|
| $m$               | $p$       | $p_b$     | $m$           | $p$        | $p_b$      | $m$            | $p$       | $p_b$     |
| 0,5               | 1,570 796 | 1,476 066 | 2             | 6,283 185  | 5,904 263  | 8              | 25,132 74 | 23,617 05 |
| 0,6               | 1,884 956 | 1,771 279 | 2,5           | 7,853 982  | 7,380 329  | 10             | 31,415 93 | 29,521 31 |
| 0,8               | 2,513 274 | 2,361 705 | 3             | 9,424 778  | 8,856 394  | 12             | 37,699 11 | 35,425 58 |
|                   |           | 2,952 131 |               |            |            |                |           |           |
| 1                 | 3,141 593 |           | 4             | 12,566 371 | 11,808 526 | 16             | 50,265 48 | 47,234 10 |
| 1,25              | 3,926 991 | 3,690 164 | 5             | 15,707 963 | 14,760 657 | 20             | 62,831 85 | 59,042 63 |
| 1,5               | 4,712 389 | 4,428 197 | 6             | 18,849 556 | 17,712 789 | 25             | 78,539 82 | 73,803 29 |

FIGURE 4.8 – Module métrique, pas et pas de base

On peut écrire les valeurs des diamètres primitifs en fonction du nombre de dents respectifs des roues et du module commun  $m$  :

$$d_{01} = Z_1 m \quad d_{02} = Z_2 m$$

Il en découle que le rapport de réduction s'exprime aussi généralement en fonction du rapport du nombre de dents sur la roue et le pignon.

$$i = \frac{Z_2}{Z_1}$$

### Entraxe

En examinant la Figure 4.9, on voit que l'**entraxe**  $a_0$  la distance entre les deux axes de rotation des engrenages vaut la demi-somme des diamètres primitifs :

$$a_0 = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} \quad (4.7)$$

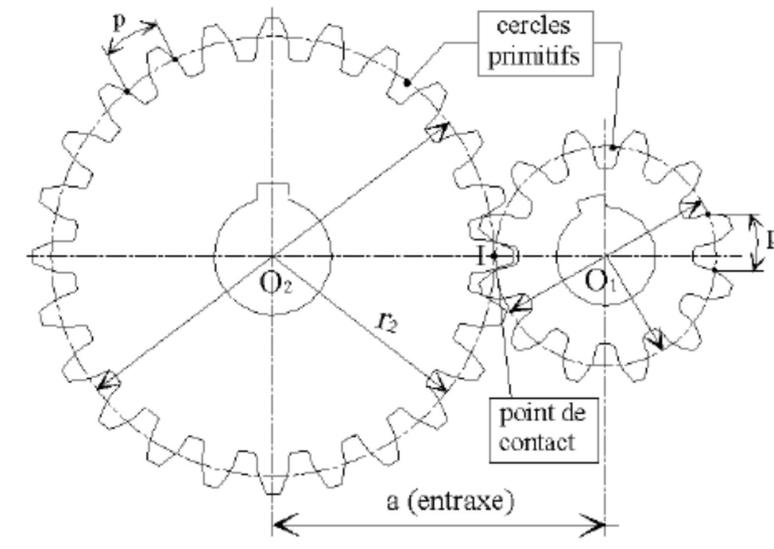


FIGURE 4.9 – Définition de l'entraxe

On peut encore écrire

$$a_0 = \frac{d_{01} \pm d_{02}}{2} = m \frac{Z_1 \pm Z_2}{2}$$

### Diametral pitch

Dans la littérature anglo-saxonne et en particulier dans la méthode AGMA, on préfère faire intervenir la notion de *diametral pitch*  $P_d$  à la place du module :

$$P_d = \frac{Z}{d'} \quad [d'] = \text{inch} \quad (4.8)$$

Le pas diamétral est évidemment lié au module métrique par la relation :

$$P_d = \frac{1}{m'} \quad [m'] = \text{inch}$$

soit encore

$$P_d = \frac{25.4 \text{ mm}}{m} \quad [m] = \text{mm}$$

## 4.2.2 Cinématique de l'engrènement

### Motivation

Pour avoir un rapport de réduction constant avec le temps, il faut que les dents possèdent un profil particulier, conjugué l'un par rapport à l'autre. A titre de contre-exemple, les dents en forme de peigne et lanterne (Figure 4.11) donnent lieu à des fluctuations de la vitesse instantanée. Ce n'est donc pas un bon profil.

Pour que l'on ait une paire engrènement, il faut que la transformation soit **homocinétiq**ue. Cette propriété est obtenue lorsque l'on vérifie trois conditions :

1. Le rapport des vitesses angulaires doit rester constant et égal au rapport d'engrènement c'est-à-dire au rapport des diamètres primitifs.
2. Les forces de contact passent constamment par le point de tangence des diamètres de base.
3. Le contact entre les dents successives ne doit pas subir d'interruption.

### Conditions cinématiques pour une transmission homocinétiq

ue

Soient deux roues dentées de cercles primitifs  $d_{01}$  et  $d_{02}$  en contact au point C (Figure 4.10). Pour qu'il y ait transmission du mouvement du pignon 1 à la roue 2, les profils des dents doivent rester constamment en contact. Supposons pour simplifier que les roues 1 et 2 soient remplacées par des morceaux de corps solides tournant autour des pivots centrés en  $O_1$  et  $O_2$ .

Le contact entre les corps a lieu au point A. Supposons le contact sans frottement. Les forces de contacts entre les corps 1 et 2 sont dirigées selon la normale aux deux profils. Les forces de contact exercent un moment autour des centres  $O_1$  et  $O_2$  dont le module dépend des bras de levier formés par les perpendiculaires abaissées depuis  $O_1$  et  $O_2$  sur la ligne d'action de la force de contact. Soient respectivement B et C les pieds des perpendiculaires abaissés depuis  $O_1$  et  $O_2$  sur la ligne d'action et  $r'_1$  et  $r'_2$  les longueurs deux bras de leviers centrés en  $O_1$  et  $O_2$ .

Dans une position quelconque, la première condition pour que les profils des dentures que l'on cherche à déterminer soit valide, il faut qu'il ait non pénétration des corps lorsque l'on a rotation des dentures 1 et 2. Cette condition de non pénétration revient à exprimer qu'il les vitesses selon la normale commune doivent être identiques :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

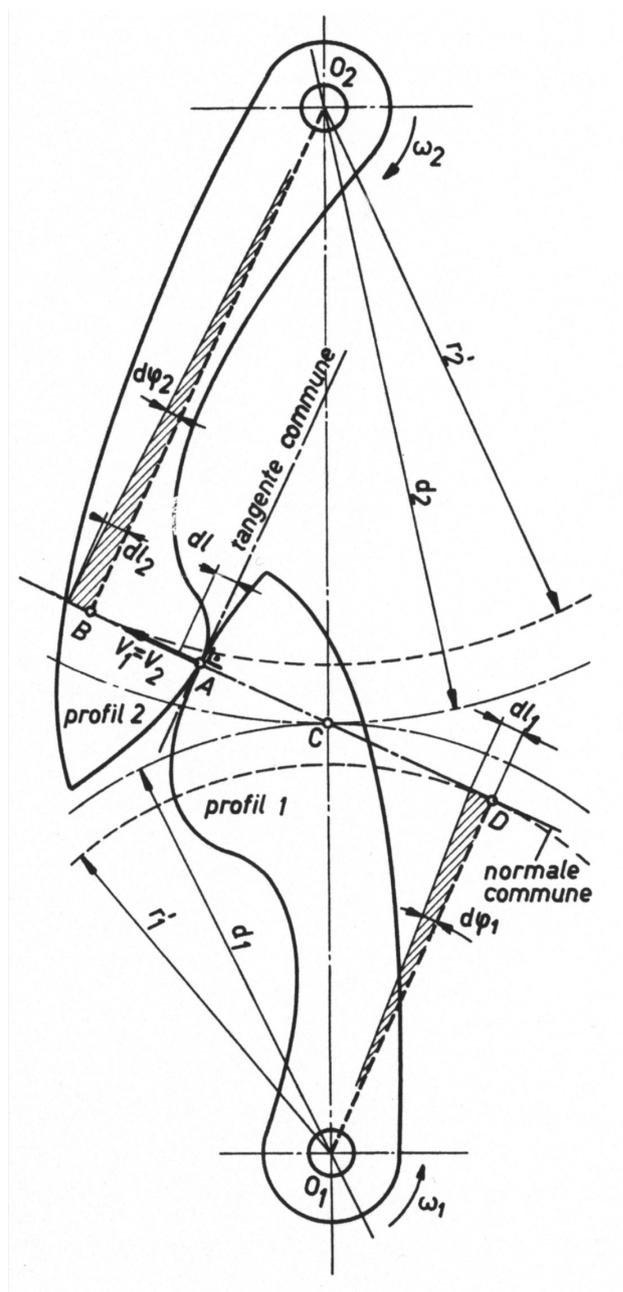


FIGURE 4.10 – Cinématique de l'engrènement

Cette équation revient à dire que les vitesses doivent avoir même direction, même sens et même intensité.

Exprimons que *les vecteur ont même intensité*. Il est commode d'adopter une

approche fondée sur les travaux virtuels et de considérer des déplacements infinitésimaux. Si le profil 1 est déplacé de la distance  $dl_1$  dans la direction de la normale, le profil 2 se déplace de la même valeur :

$$dl_1 = dl_2 = dl$$

Pendant l'intervalle de temps  $dt$  les deux roues doivent tourner chacune des angles élémentaires  $d\phi_1$  et  $d\phi_2$ . Les distances  $dl_1$  et  $dl_2$  s'expriment par :

$$dl_1 = r'_1 d\phi_1 \quad dl_2 = r'_2 d\phi_2$$

Etant donné que  $dl_1 = dl_2 = dl$ , il vient

$$r'_1 d\phi_1 = dl = r'_2 d\phi_2$$

Cette dernière relation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{r'_2}{r'_1} = \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{d\phi_1/dt}{d\phi_2/dt} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Le rapport des vitesses est égal à l'inverse des rapports des rayons et donc à l'inverse des vitesses angulaires des deux roues dentées.

Pour un profil de dents quelconque, les rayons  $r'_1$  et  $r'_2$  pourraient être modifiés à chaque instant avec le changement de point de contact A. Pour que le rapport des vitesses angulaires  $\omega_1/\omega_2$  reste constant quelle que soit la position du point de contact, il faut que le rapport  $r'_2/r'_1$  le reste aussi. *Ceci revient à dire que les lignes d'action des forces de contact doivent rester tangentes respectivement aux deux cercles de rayons constants  $r'_1$  et  $r'_2$  centrés en  $O_1$  et  $O_2$ .*

En second lieu, on exprime que *les vecteurs vitesses ont même direction et même sens*. Cette condition nous amène à montrer que la ligne d'action des forces de contact est unique et constante qu'elle doit être simultanément tangente aux cercles de rayon  $r'_1$  et  $r'_2$ . La ligne d'action passe alors par le point C situé sur l'entraxe entre  $O_1$  et  $O_2$ .

Cette condition s'obtient en observant que l'on a similitude entre les triangles  $O_1CD$  et  $O_2BC$ . Cela permet d'écrire :

$$\frac{\overline{O_2B}}{\overline{O_1D}} = \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$$

Etant donné que  $\overline{O_2B} = r'_2$ ,  $\overline{O_1D} = r'_1$ ,  $\overline{O_2C} = d_{02}/2$ ,  $\overline{O_1C} = d_{01}/2$ , il vient

$$\frac{r'_2}{r'_1} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i$$

*La normale commune en tout point de contact de deux profils homocinétiques doit passer par le même point central C commun aux deux profils de fonctionnement.*

Il s'agit de la *loi des profils d'engrenages*. Suivant cette loi, si l'un des profils des dents est fixé, alors le profil de l'autre roue dentée s'en trouve déterminé. Ce deuxième profil se nomme alors le *profil conjugué*.

Enfin la troisième condition énoncée précédemment impose qu'en chaque instant le contact existe au moins entre une dent du pignon et une dent de la roue. Elle sera étudiée lorsque l'on calculera la longueur et le rapport de contact.

### Profils de dentures conjugués

Pour avoir un rapport de réduction constant avec le temps, il faut que les dents possèdent un profil particulier, conjugué l'un par rapport à l'autre. Il existe une infinité de profils conjugués qui conviennent et vérifient la loi homocinétique. Toutefois en pratique seuls un petit nombre de courbes sont utilisées. Les plus connus sont les courbes cycloïdales en horlogerie et de développantes de cercle (odontoïde) en mécanique pour la transmission de puissance.

A titre de contre-exemple, les dents en forme de peigne donnent lieu à des fluctuations de la vitesse instantanée (voir Figure 4.11). Ce n'est donc pas un bon profil et il ne respecte pas la condition de préservation du rapport des vitesses au cours du temps.

Les dentures cycloïdales (Figure 4.12) sont à la base des transmissions dans les mécanismes d'horlogerie. Ils ne sont plus utilisés dans les machines, à cause des difficultés de fabrication et de contrôle. Le rendement mécanique et les conditions de contact sont cependant meilleurs qu'entre les profils de dents en développante de cercle. Les profils cycloïdaux imposent un entraxe et des cercles générateurs de rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  égaux sur les deux roues. Les dentures d'horlogerie sont souvent des dentures pseudo-cycloïdales.

Pour la transmission de puissance, la mécanique recourt aux dentures en développante de cercle qui sont plus faciles à fabriquer. La denture en odontoïde fait l'objet de la section suivante.

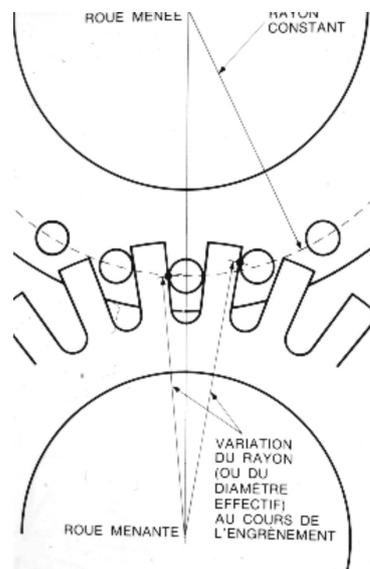


FIGURE 4.11 – Engrenages en forme de peigne et lanterne

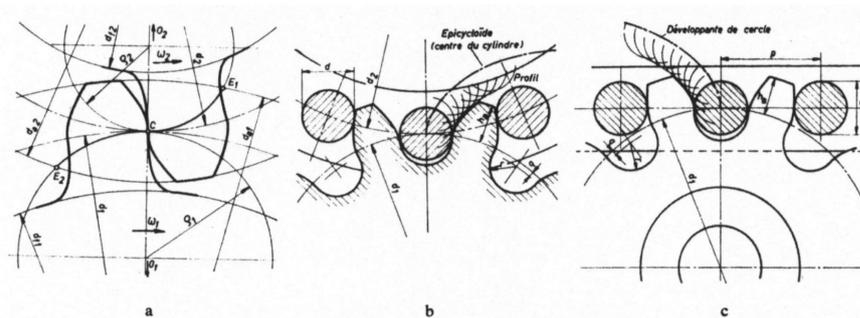


FIGURE 4.12 – Dentures en cycloïde

### 4.2.3 Denture en développante de cercle

#### Développante de cercle

On appelle **développante de cercle** ou odontoïde, la courbe décrite par un point d'une droite (ou une corde) qui roule sans glisser sur la circonférence d'un cercle. La circonférence porte le nom de **cercle de base**.

L'équation de la courbe en développante de cercle s'obtient de manière pragmatique en coordonnées polaires ( $r$ ,  $\phi$ ). Il suffit de remarquer que par définition la longueur de la tangente NA est équivalente à celle de l'arc NO, puisque la corde roule sans glisser sur un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O'$

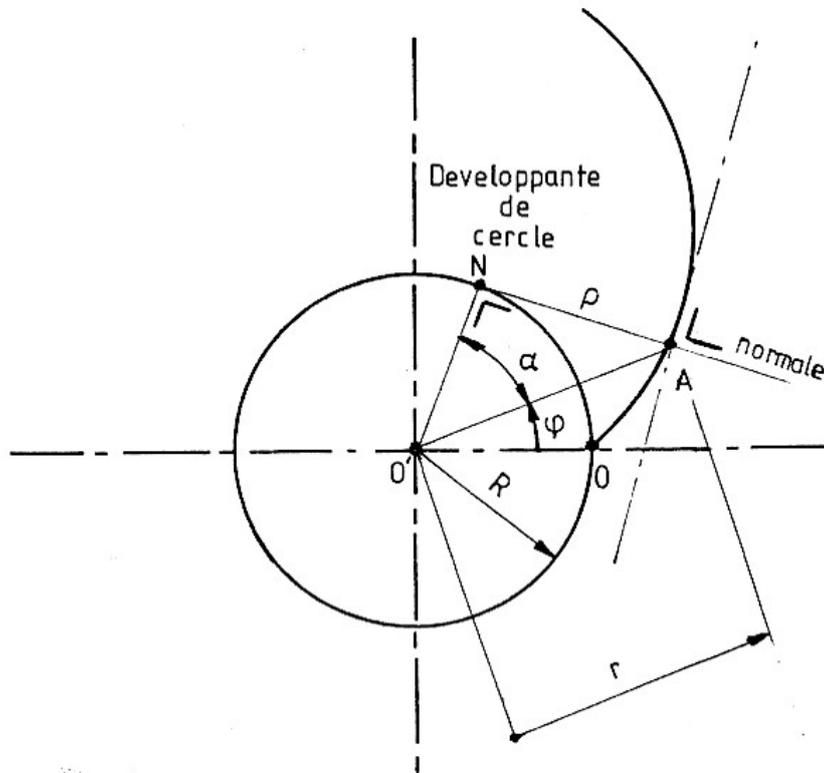


FIGURE 4.13 – Génération de la denture en odontoïde

(voir Figure 4.13). Dans ces conditions on a

$$R(\alpha + \phi) = R \operatorname{tg}(\alpha) \quad (4.9)$$

où l'angle  $\alpha$  est la mesure (en radians) de l'angle entre le segment ON et le segment OA. Il est coutumier de définir la *fonction involute*  $\operatorname{inv}(\bullet)$  :

$$\phi = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv}(\alpha) \quad (4.10)$$

On peut encore écrire :

$$r \cos \alpha = R \quad (4.11)$$

où  $r = |OA|$  est le rayon en coordonnées polaires du point mesuré à partir de l'origine O qui matérialise le point racine de l'odontoïde. Soit

$$r = \frac{R}{\cos \alpha} \quad (4.12)$$

### Méthode numérique pour calculer la développante de cercle

La méthode numérique pour calculer la développante de cercle est la suivante :

1. A un angle  $\phi$  en coordonnées polaires, il correspond un angle  $\alpha$  par la relation (4.10)
2. A un angle  $\alpha$ , il correspond un rayon  $r$  en utilisant (4.12)
3. La zone de  $r$  retenue sera limitée par le cercle de pied et le cercle de tête de la dent (zone active).

### Propriétés du profil en développante de cercle

Le profil en développante de cercle possède quelques propriétés remarquables qui sont exploitées dans les engrenages :

- La normale à la développante est toujours tangente au cercle de base.
- La tangente à la développante ne coupe pas le profil de la dent.
- Le rayon de courbure  $\rho$  en un point quelconque de la développante a son centre sur le cercle de base.
- Deux développantes d'un même de cercle base sont équidistantes en tout point (distance mesurée sur le cercle de base).
- L'angle  $\alpha$  est appelé *angle de pression* ou angle d'incidence : il varie en tout point de la développante

#### 4.2.4 Dimensions de la dent

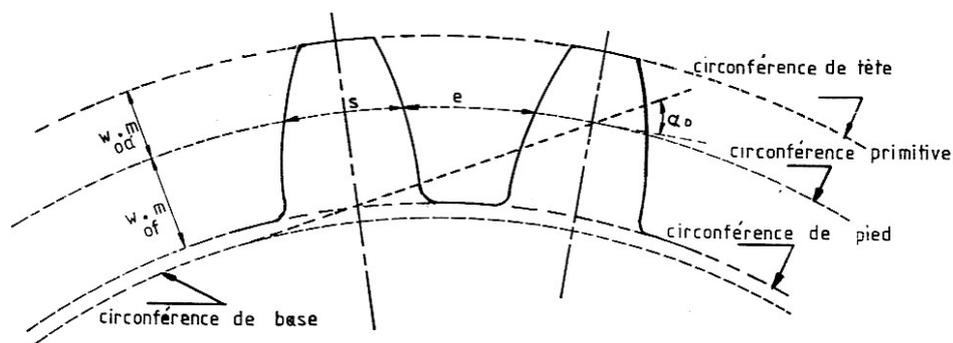


FIGURE 4.14 – Forme de la dent

Pour les engranages et les dentures industrielles, on adopte une géométrie de la dent en développante de cercle. Il convient encore de spécifier un certain nombre de paramètres tels que la distance entre les dents, leur hauteur, leur profondeur, leur épaisseur... La norme ISO exprime toutes les dimensions de la dent en fonction du module  $m$

Soit  $s$  l'épaisseur de la dent au niveau du diamètre primitif. Evidemment pour qu'il y ait un engrenement possible, elle doit être identique à  $e$ , la largeur du creux correspondant entre deux dents.

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi d_0}{2Z} = \frac{\pi m}{2} = 1,5708 m \quad (4.13)$$

L'*addendum*  $h_a$  est la hauteur de la dent normale mesurée par rapport au cercle primitif (saillie).

$$h_a = m w_{0a} \quad w_{0a} = 1,00 \text{ (ISO)} \quad (4.14)$$

Le *dédendum*  $h_f$  est la profondeur normalisée du creux entre dents, mesurées par rapport au cercle primitif.

$$h_f = m w_{0f} \quad w_{0f} = 1,25 \text{ (ISO)} \quad (4.15)$$

On en déduit également le diamètre de pied :

$$d_f = d_0 - 2 h_f = d_0 - 2,50 m \quad (4.16)$$

ainsi que le diamètre de tête :

$$d_a = d_0 + 2 h_a = d_0 + 2,00 m \quad (4.17)$$

Les rayons minimaux et maximaux de la roue dentée sont données par :

$$r_{\min} = d_f/2 \quad r_{\max} = d_a/2$$

On note que le flanc de la dent ne peut pas être toujours intégralement tracée en développante de cercle. Le tracé en développante de cercle n'est possible que si

$$r_{\min} > d_f/2$$

Pour que la forme en développante de cercle soit possible, il faut que le cercle de pied reste extérieur au cercle de base  $R_b$

$$d_f/2 > R_b$$

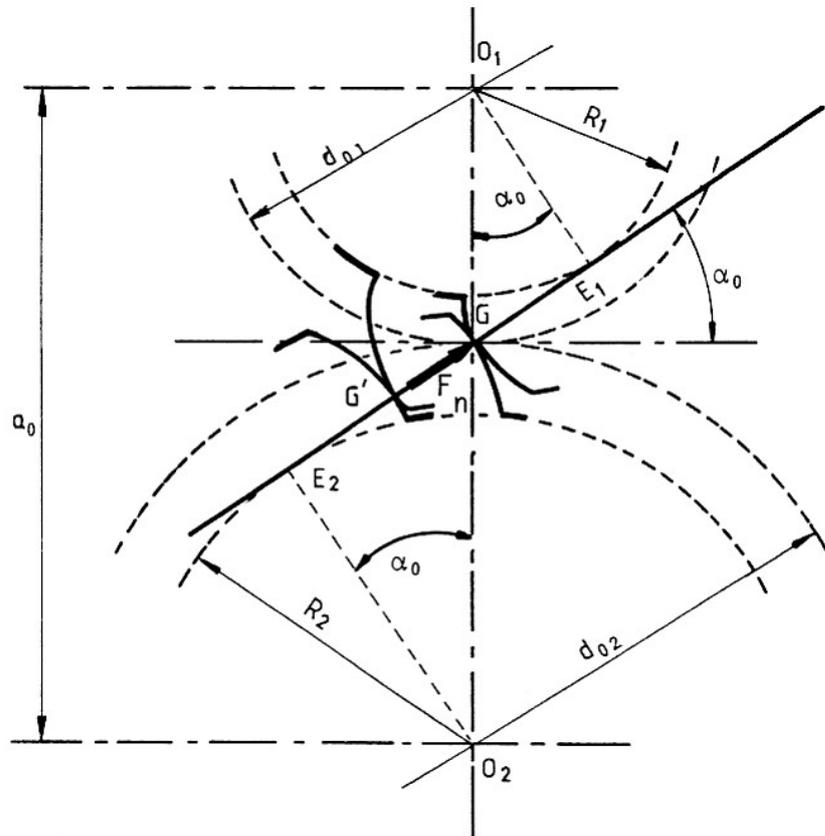


FIGURE 4.15 – Ligne d'action des efforts de contact et angle de pression

### 4.2.5 Angle de pression

Etant donné la définition de la développante de cercle, **la ligne d'action** des efforts de contact transmis normalement aux profils des dents antagonistes reste tangente aux deux cercles de base (voir Figure 4.15).

La ligne d'action des efforts est inclinée par rapport à la tangente commune aux cylindres primitifs. Cette ligne d'action passe constamment par le point de contact  $G$  (pitch point) situé à l'intersection de la ligne d'entraxe et les cercles primitifs quel que soit le point où le contact physique  $G'$  a lieu. A ce point de contact (virtuel)  $G$ , les deux pinions ont la même vitesse appelée vitesse au cercle primitif.

La droite tangente aux cercles de base et passant par le point  $G$  sur la ligne d'entraxe est unique. Dès lors l'angle entre la ligne d'action et la tangente aux cercles primitifs reste *constant*. L'angle  $\alpha_0$  entre la ligne d'action de la

force de contact et le vecteur vitesse, tangent au cercle primitif est appelé **angle de pression**.

Dans la norme ISO, les angles de pression  $\alpha_0$  sont normalisés et peuvent prendre un petit nombre de valeurs :  $14,5^\circ$  (rare),  $20^\circ$  (le plus courant), ou encore  $25^\circ$ .

Connaissant l'angle de pression, on peut établir la relation qui lie l'entraxe  $a_0$ , les rayons  $R_i$  des cercles de base et les diamètres des cercles primitifs  $d_{0i}$ . En observant la Figure 4.15, on voit que les rectangles  $O_1E_1G$  et  $O_2E_2G$  sont rectangles, et il vient

$$R_i = \frac{d_{0i}}{2} \cos \alpha_0 \quad (4.18)$$

#### 4.2.6 Forces normales et tangentielles entre dents

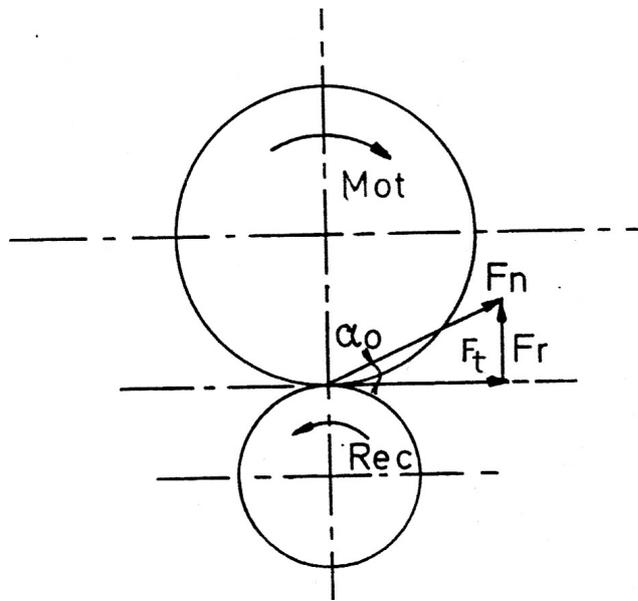


FIGURE 4.16 – Action de l'engrènement sur la sollicitation de l'arbre moteur

La ligne d'action étant inclinée d'un angle  $\alpha_0$ , la force normale  $F_n$  réellement transmise de dent à dent se décompose en une force radiale  $F_r$  et une composante tangentielle  $F_t$  (Figure 4.16).

$$F_t = F_n \cos \alpha_0 \quad (4.19)$$

$$F_r = F_n \sin \alpha_0 \quad (4.20)$$

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (4.21)$$

En réalité, c'est la force tangentielle  $F_t$  qui est donnée, car elle est calculée par le couple et la puissance transmise.

$$F_t \frac{d_{0i}}{2} \omega_i = \mathcal{P} \quad (4.22)$$

Connaissant  $F_t$  on peut calculer la force normale  $F_n$  :

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha_0} \quad (4.23)$$

et surtout la force radiale  $F_r$

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (4.24)$$

On retiendra que la force radiale  $F_r$  tend toujours à écarter les deux roues en prise.

#### 4.2.7 Influence de la variation d'entraxe

Le **déport de denture** consiste à modifier l'entraxe *en maintenant les cercles de base identiques*. Soit  $\delta$  l'accroissement d'entraxe. Même si les cercles de base restent identiques, les diamètres primitifs  $d'_0$  et les angles de pression  $\alpha'$  se trouvent modifiés.

Soit deux roues dentées de même module et caractérisées par les rayons des cercles de base  $R_1$  et  $R_2$ . Soit  $d_{01}$  et  $d_{02}$  les diamètres primitifs correspondant à l'entraxe  $a_0$  pour un angle de pression  $\alpha_0$ .

Comme esquissé à la Figure 4.17 on suppose un accroissement  $\delta$  de l'entraxe normal.

$$a' = a_0 + \delta \quad (4.25)$$

Les diamètres primitifs  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont changés en les diamètres primitifs  $d'_{01}$  et  $d'_{02}$  caractérisés par  $\alpha' \neq \alpha_0$ .

On peut écrire dans les deux situations, d'une part dans le cas de l'entraxe normal  $a_0$  :

$$R_1 = \frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0 \quad R_2 = \frac{d_{02}}{2} \cos \alpha_0$$

d'autre part dans la situation d'un entraxe modifié  $a' = a_0 + \delta$  :

$$R_1 = \frac{d'_{01}}{2} \cos \alpha' \quad R_2 = \frac{d'_{02}}{2} \cos \alpha'$$

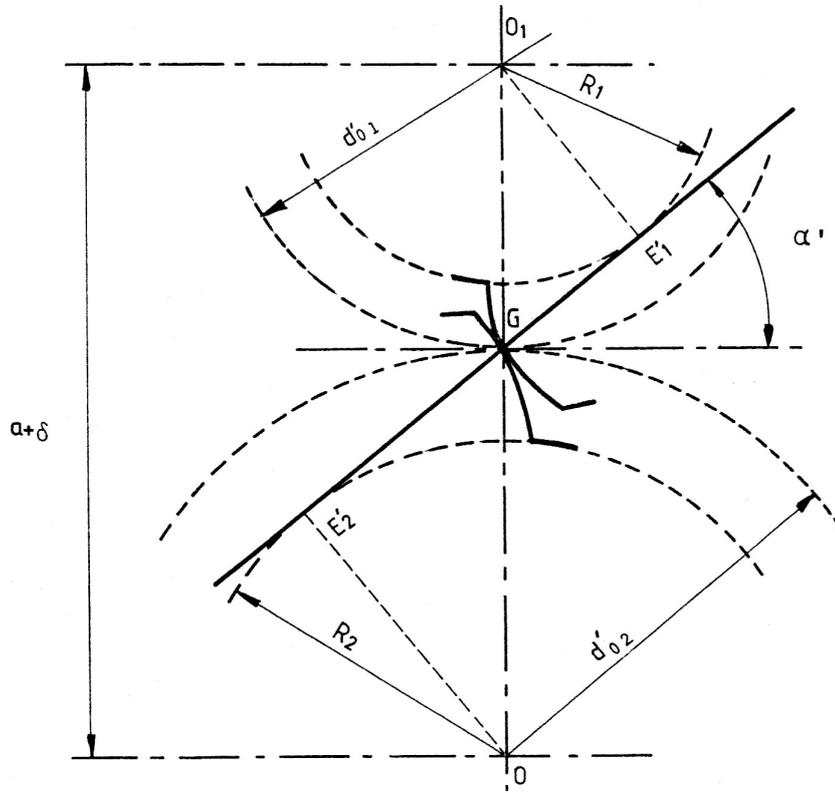


FIGURE 4.17 – Effet de la variation d'entreaxe

le rapport  $R_1/R_2$  restant constant, il vient en divisant membre à membre

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{d_{02}}{2} \cos \alpha_0}{\frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0} = \frac{\frac{d'_{02}}{2} \cos \alpha'}{\frac{d'_{01}}{2} \cos \alpha'} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{\frac{d'_{02}}{2}}{\frac{d'_{01}}{2}} = i$$

et donc

$$\frac{d'_{02}/2}{d'_{01}/2} = i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4.26)$$

Ce qui montre qu'une variation d'entreaxe ne modifie pas le rapport de réduction.

Néanmoins comme  $\alpha' \neq \alpha_0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} a' = a + \delta &= \frac{d'_{01}}{2} + \frac{d'_{02}}{2} = \frac{d_{01}}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} + \frac{d_{02}}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \\ &= \frac{d_{01} + d_{02}}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} = a_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \end{aligned}$$

La valeur modifiée de l'angle de pression  $\alpha'$  vaut :

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha_0}{1 + \frac{\delta}{a_0}} \quad (4.27)$$

Une majoration de l'entre axe  $\delta$  augmente l'angle de pression  $\alpha' > \alpha_0$  puisque le cosinus diminue dans les mêmes conditions.

Si la force de contact  $F_n$  entre dents reste identique, le couple transmis reste invariable puisque le rayon primitif  $R_j$  n'est pas altéré

$$C_j = F_n R_j$$

Dès lors comme le couple reste constant  $C_j = F_n \cdot R$ , la force normale  $F_n$  reste constant et est toujours dirigé suivant la tangente commune. Par contre, l'augmentation de  $a_0$  conduit à une diminution de  $F_t$  mais aussi et surtout à une majoration de  $F_r$  l'effort réactif radial puisque  $\alpha'$  augmente. Il vient :

$$F_r' = F_n \sin \alpha' > F_r \quad (4.28)$$

$$F_t' = F_n \cos \alpha' < F_t \quad (4.29)$$

#### 4.2.8 Influence de la variation de diamètre primitif. Notion de crémaillère d'engrènement

Si on examine la Figure 4.13, on voit très clairement que le rayon de courbure  $\rho$  de l'odontoïde au point A ( $\rho = NA$ ) est une fonction du rayon du cercle de base  $R$  :

$$R = r_i \cos \alpha_i = \rho \cot \alpha_i$$

Au niveau du diamètre primitif on a

$$r_i = \frac{d_0}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \alpha_0$$

de sorte que

$$\rho = \frac{d_0}{2} \sin \alpha_0$$

Il est clair à ce stade que  $\rho$  tend vers l'infini lorsque  $Z_2(r_2)$  tend vers l'infini.

Si on maintient  $\alpha_0 = 20^\circ$  et si on fait tendre  $R_2(d_{02})$  vers l'infini, le rayon de courbure  $E_2'G = \rho$  tend également vers l'infini et le profil en odontoïde

dégénère en un profil plan, perpendiculaire à  $E_1E_2$  donc incliné d'un angle  $\alpha_0$  sur la verticale (voir Figure 4.18).

Le profil limite obtenu lorsque  $R_2(d_{02}, Z_2)$  tend vers l'infini est le profil trapézoïdal normalisé qui correspond à la crémaillère d'engrènement représenté à la Figure 4.19, toutes les dimensions étant exprimées en unités module.

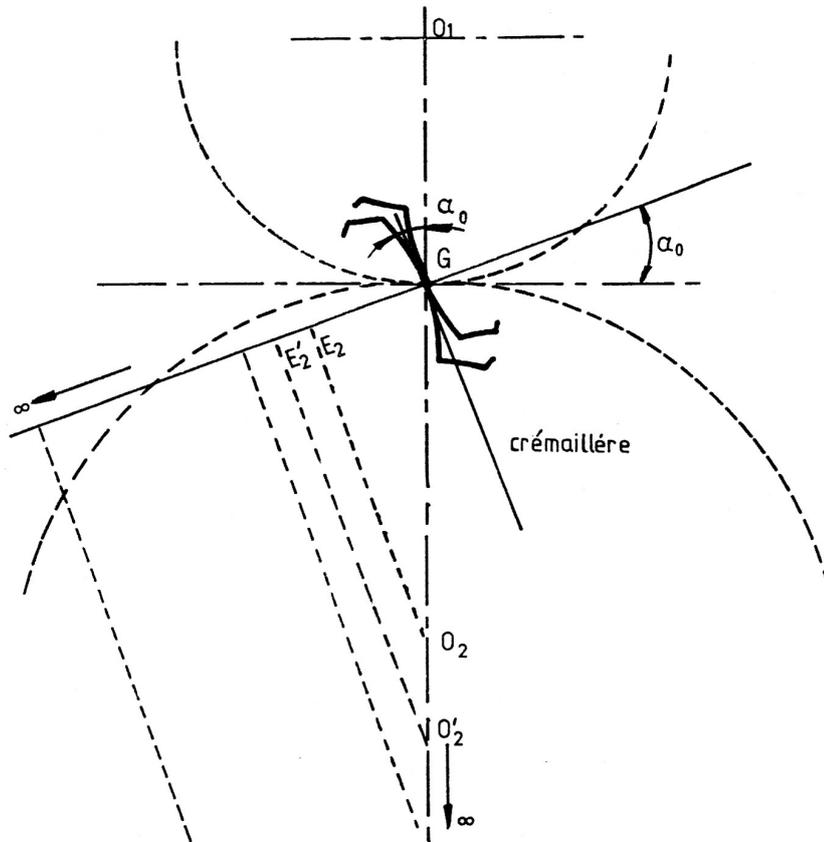


FIGURE 4.18 – Notion de crémaillère comme limite d'une roue dentée lorsque  $Z \rightarrow \infty$

#### 4.2.9 Interférence de denture

L'interférence de denture survient lorsqu'on a contact entre la tête de la dent et la roue dentée antagoniste en un point situé à l'intérieur du cercle de base. Etant donné que la distance qui sépare le point de tangence des cercles

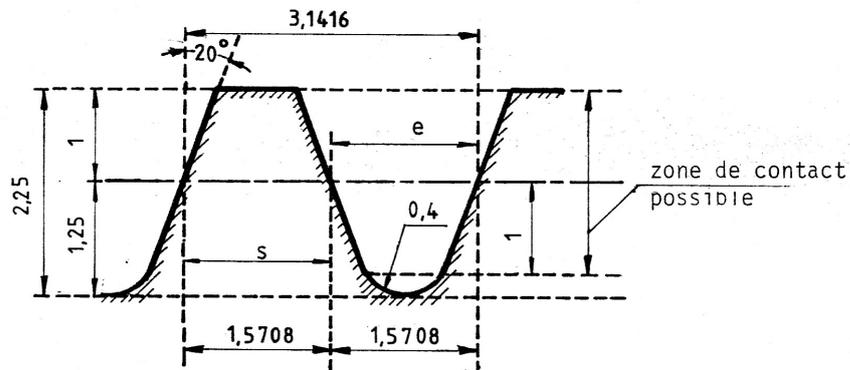


FIGURE 4.19 – Crémaillère d'engrènement

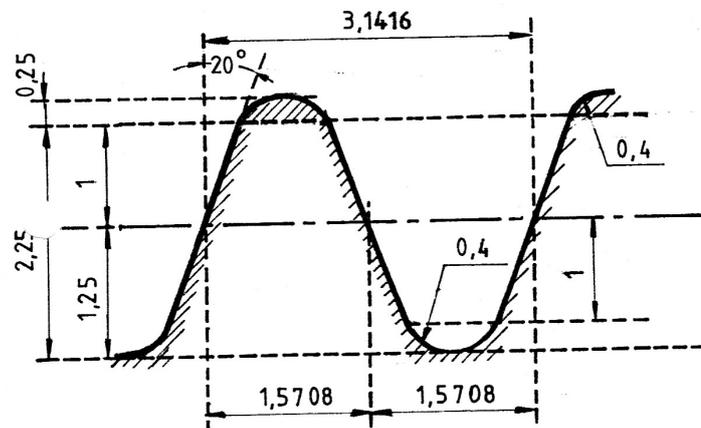


FIGURE 4.20 – Crémaillère de taille normalisée

primitifs est plus grand du côté pignon, l'interférence survient en premier lieu sur le pignon.

Lors de l'engrènement, le contact entre les dentures suit la ligne d'action ( $E_1E_2$ ) portée par la tangente commune aux cercles de base, inclinée de l'angle de pression  $\alpha$  par rapport à la tangente commune aux deux cercles primitifs. Ceux-ci sont en contact virtuel au point de tangence G sur la ligne d'entraxe. Lorsque le nombre de dents du pignon devient faible, on s'aperçoit que le cercle de tête de la roue sort de la ligne d'action. Il se produit alors une *interférence d'engrènement*.

Basons nos développements sur le schéma de la Figure 4.21.

Notons tout d'abord que la distance  $h$  qui sépare le cercle primitif et le point  $E$  de tangence du cercle de base est plus faible du côté pignon (indice 1).

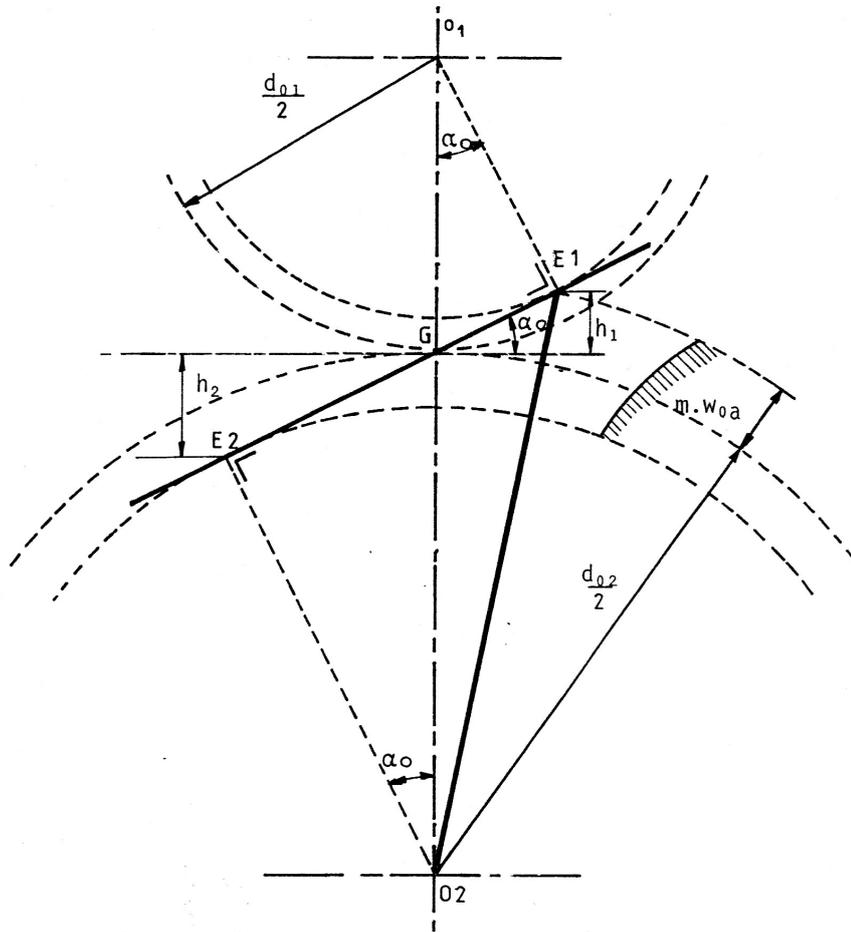


FIGURE 4.21 – Interférence de dentures

En effet on peut écrire

$$E_i G = \frac{d_{0i}}{2} \sin \alpha_0 \quad (4.30)$$

de sorte que

$$h_i = E_i G \sin \alpha_0 = \frac{d_{0i}}{2} \sin^2 \alpha_0 \quad (4.31)$$

$h_1$  est donc nécessairement inférieur à  $h_2$ . L'interférence des dentures apparaîtra d'abord du côté pignon (indice 1) puisque  $h_a = m$  des deux côtés.

L'engrènement se développe dans l'intervalle  $E_1 E_2$  sur la tangente commune aux cercles de base. Le résultat d'une interférence est illustré à la Figure 4.21. On évite le contact de la tête de la dent de la roue (indicée 2) en un point de la dent antagoniste, situé à l'intérieur du cercle de base 1 si on satisfait la

condition :

$$\frac{d_{a2}}{2} = \frac{d_{02}}{2} + m < O_2E_1 \quad (4.32)$$

Calculons les différents termes de cette équation en s'aidant de la Figure 4.21

$$O_2E_1 = \sqrt{(O_2E_2)^2 + (E_1E_2)^2}$$

$$O_2E_2 = R_2 = \frac{d_{02}}{2} \cos \alpha_0$$

$$E_1E_2 = \frac{d_{01}}{2} \sin \alpha_0 + \frac{d_{02}}{2} \sin \alpha_0$$

et

$$O_2E_1 = \sqrt{\frac{d_{02}^2}{4} \cos^2 \alpha_0 + \frac{d_{01}^2}{4} \sin^2 \alpha_0 + \frac{d_{02}^2}{4} \sin^2 \alpha_0 + \frac{d_{01} d_{02}}{2} \sin^2 \alpha_0}$$

L'équation (4.32) s'écrit

$$\frac{d_{02}}{2} + m \leq \sqrt{\frac{d_{02}^2}{4} + \left( \frac{d_{01}^2}{4} + \frac{d_{01} d_{02}}{2} \right) \sin^2 \alpha_0}$$

Divisons les deux membres par  $d_{01}/2$  et introduisons le rapport de réduction  $i = d_{02}/d_{01}$  ainsi que l'expression du module  $m = d_{01}/Z_1$ , il vient

$$\begin{aligned} i + \frac{2}{Z_1} &\leq \sqrt{i^2 + (1 + 2i) \sin^2 \alpha_0} \\ \frac{2}{Z_1} &\leq -i + \sqrt{i^2 + (1 + 2i) \sin^2 \alpha_0} \\ Z_1 &\geq \frac{2}{-i + \sqrt{i^2 + (1 + 2i) \sin^2 \alpha_0}} \\ Z_1 &\geq 2 \frac{i + \sqrt{i^2 + (1 + 2i) \sin^2 \alpha_0}}{(1 + 2i) \sin^2 \alpha_0} \end{aligned}$$

Soit au final la condition s'écrit

$$\boxed{Z_1 \geq \frac{2}{(1 + 2i) \sin^2 \alpha_0} \left( i + \sqrt{i^2 + (1 + 2i) \sin^2 \alpha_0} \right)} \quad (4.33)$$

Il s'en suit qu'à une valeur de  $i$  correspond une valeur de  $Z_1$ , nombre de dents en dessous duquel on a interférence de denture.

Pour les dimensions normalisées de la dent et un angle de pression  $\alpha_0 = 20^\circ$ , on montre que

$$Z_1 \geq 12,32 \quad \text{soit} \quad Z_1 \geq 13 \quad \text{pour} \quad i = 1$$

Dans ces conditions, la hauteur utile mesurée vers le creux de la dent à partir des cercles primitifs, lorsque le pied de dent est entièrement en développante vaut :

$$\begin{aligned} h'_1 &= \frac{d_{01}}{2} - R_1 = \frac{d_{01}}{2}(1 - \cos 20^\circ) \\ &= Z_1 m \sin^2 10^\circ = 13 \sin^2 10^\circ m = 0,392 m \end{aligned}$$

La hauteur utile sous le diamètre primitif est donc inférieure au module (tracé du flanc de la dent à définir entre le cercle de base et le cercle de pied).

A côté de l'interférence de denture qui survient lors de l'engrènement des roues dentées, on peut avoir également un phénomène d'interférence lors de la génération et la taille de l'engrenage par la crémaillère. On parle alors *d'interférence de taille*.

La crémaillère correspond à un cercle de rayon infini et donc aussi à un nombre infini de dents. On peut utiliser les formules précédentes à condition de faire tendre le rapport  $i$  vers l'infini.

$$i = \frac{d_{02}}{d_{01}} \rightarrow \infty$$

Le nombre de dents minimum  $Z_1$  en dessous duquel il y a interférence peut être calculé à partir de l'expression précédente. Il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} Z_1 &= \frac{2}{(1+2i) \sin^2 \alpha_0} \left( i + \sqrt{i^2 + (1+2i) \sin^2 \alpha_0} \right) \quad (4.34) \\ &= \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} = 17,09 \end{aligned}$$

Dès lors, en pratique, l'interférence de taille est détectée en-dessous de 17 dents, limite notée par  $Z_g$ .

$$Z_g = 17 \quad (4.35)$$

Ce même résultat aurait pu être obtenu plus directement en tenant un raisonnement purement géométrique basé sur le schéma de la Figure 4.22.

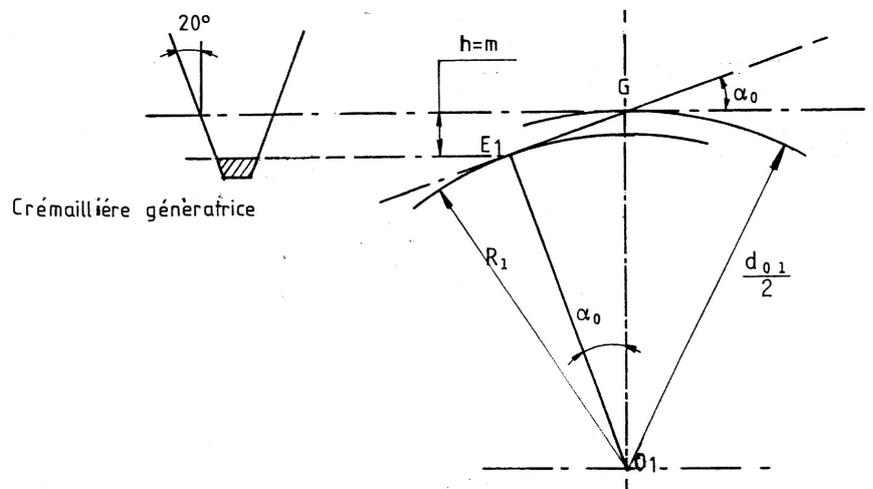


FIGURE 4.22 – Interférence de taille

Le profil de la crémaillère de taille n'entame pas le cercle de base au point  $E_1$  si la distance  $h$  est supérieure à un module  $m$  qui est la distance d'addendum. Il vient :

$$h = E_1G \sin \alpha_0 = \frac{d_{01}}{2} \sin \alpha_0$$

Soit la condition de non interférence :

$$h < m$$

Il vient

$$m \leq \frac{Z_1 m}{2} \sin \alpha_0$$

$$Z_1 \geq \frac{2}{\sin \alpha_0} = Z_g \quad (4.36)$$

L'interférence est évitée dès que

$$Z \geq 17 \text{ dents} \quad (4.37)$$

On peut également calculer la valeur de la hauteur utile du dédentum des dents du pignon ainsi taillé :

$$h_1'' = \frac{d_{01}}{2} (1 - \cos 20^\circ)$$

$$= Z_g m \sin^2 10^\circ = 17 \sin^2 10^\circ m = 0,512 m$$

En pratique on peut tolérer descendre jusque 14 dents, car jusqu'à ce nombre, l'interférence reste faible.

### 4.2.10 Déport de denture

#### Notion de déport

L'interférence de taille peut être évitée de plusieurs manières :

- Augmenter l'angle de pression  $\alpha$ . On notera que cette disposition augmente la composante réactive  $F_r$  de la force normale sur la denture  $F_n$ .
- Diminuer  $w_{0a}$ . Par exemple dans les dentures Stub, on adopte  $W_{0a} = 0,785m$ . Cette pratique est actuellement abandonnée à cause du mauvais recouvrement qu'elle induit.
- Augmenter  $Z_1$  pour atteindre  $Z_g = 14$  dents au minimum. Ceci n'est pas toujours possible à cause de l'encombrement qu'en résulte.
- Déporter l'outil de taille vers l'extérieur de la roue de manière à translater la ligne de référence de l'outil de taille (Voir Fig. 4.23).

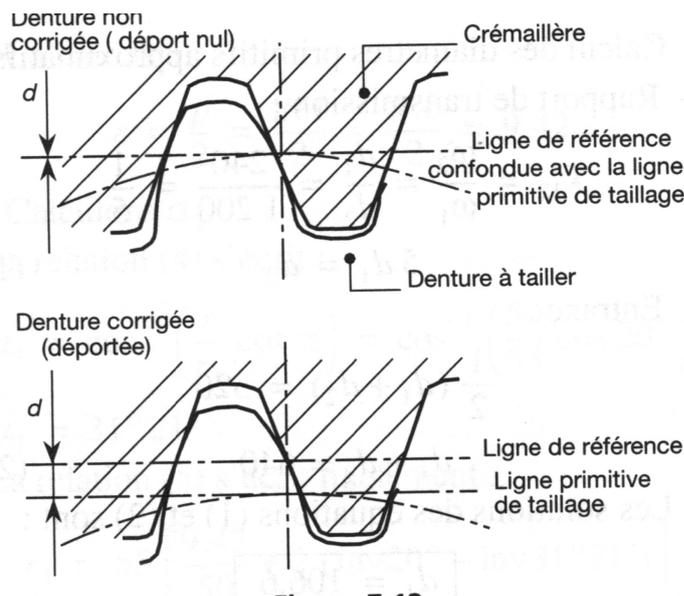


FIGURE 4.23 – Notion de correction de denture

Le déport est réalisé de sorte que le point  $A_1$  caractéristique de l'addendum de l'outil de coupe arrive à la même hauteur que le point de tangence sur le cercle de base. On définit le déport par la lettre  $X$

$$X = x m \tag{4.38}$$

Le déport est mesuré en mm puisque le module  $m$  l'est également.

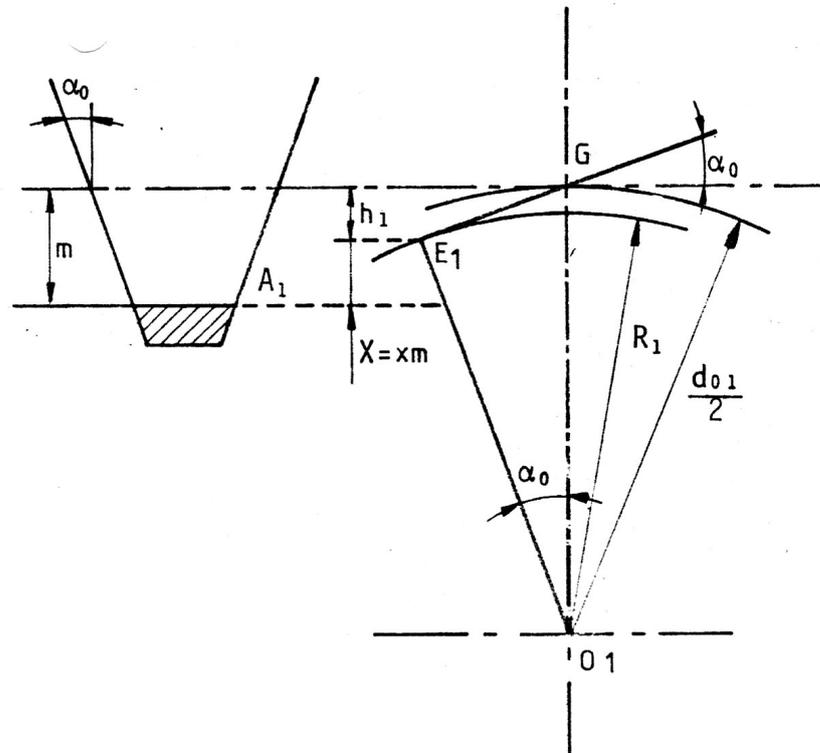


FIGURE 4.24 – Interférence de taille et déport

En observant la Figure 4.24, il vient :

$$h_1 + x m = m$$

$$h_1 = E_1 G \sin \alpha_0 = \frac{d_{01}}{2} \sin \alpha_0$$

$$\frac{Z_1 m}{2} \sin \alpha_0 + x m = m$$

En se rappelant que

$$Z_g = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0}$$

on a

$$\frac{Z_1}{g} + x = 1$$

d'où

$$x_{th} = \frac{Z_g - Z_1}{Z_g} = \frac{17 - Z_1}{17} \quad (4.39)$$

En pratique on définit  $Z'_g = 14$  et on a

$$x_{pratique} = \frac{14 - Z_1}{17} \quad (4.40)$$

A ce stade, plusieurs remarques s'imposent :

1. Dans le cas d'une denture déportée, on observe que la circonférence moyenne ne se superpose pas à la circonférence primitive initiale de la géométrie normalisée.
2. Le déport de l'outil de  $X$  mm dans un sens ou dans un autre entraîne un déplacement correspondant de la circonférence de tête et de pied.

$$\begin{aligned} d_{fx} &= d_f + 2X = d_0 - 2,5m + 2m \\ d_{ax} &= d_a + 2X = d_0 + 2m + 2xm \end{aligned}$$

3. L'épaisseur de la dent au niveau du diamètre primitif est majoré (minorée) du fait du retrait  $X > 0$  [pénétration  $X < 0$ ] de la crémaillère de taille (Voir Figure 4.25). L'épaisseur de la dent mesurée au diamètre primitif normal vaut maintenant :

$$S_{0x} = S_0 \pm 2X \tan \alpha \quad (4.41)$$

4. Le déport maximum positif est limité par l'intersection des flancs en développante de cercle : la hauteur  $2m$  de la dent doit rester en deçà du rayon caractéristique de l'intersection des flancs.
5. D'une manière générale, pour une couronne dentée par exemple, le déport positif est celui qui conduit à une dent plus résistante. La Figure 4.26 montre l'évolution de la forme de la dent lorsque l'on réalise un déport positif ou négatif et que l'on la compare à la forme normalisée.

### Calcul de la géométrie de la dent après déport

La Figure 4.27 met en évidence la propriété fondamentale de l'odontoïde à savoir que l'arc  $\widehat{OA'E_1}$  vaut le rayon de courbure en B  $\rho_B = BE_1$ . Dès lors on peut écrire :

$$\widehat{OA'} = R_1(\tan \alpha_B - \alpha_B) = R_1 \operatorname{inv}(\alpha_B) = R_1 \phi_B \quad (4.42)$$

On calcule ensuite la largeur de la dent au rayon  $r_B$  dans le cas d'une roue déportée. En se référant au schéma de la Figure 4.28, on peut écrire

$$S_B = (S_{0x} - 2\widehat{CC'}) \frac{2r_B}{d_{01}}$$

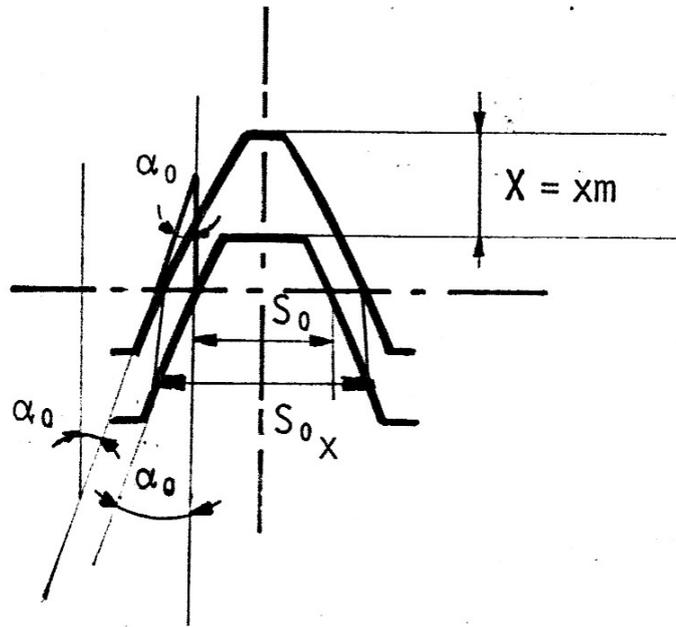


FIGURE 4.25 – Evolution des épaisseurs au niveau du diamètre primitif normal

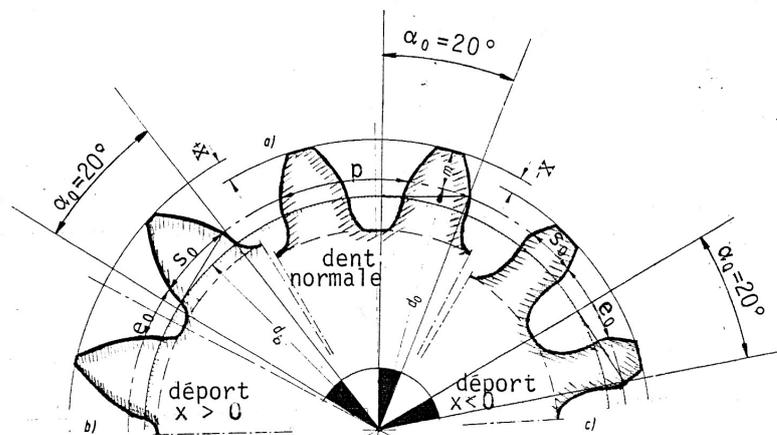


FIGURE 4.26 – Evolution de la forme de la dent avec signe du déport

où  $X$  et  $x$  sont pris en valeur relative. On détermine

$$S_{0x} = S_0 + 2X \tan \alpha_0 = \frac{\pi m}{2} + 2 x m \tan \alpha_0$$

$$\widehat{CC'} = \widehat{AA'} \frac{d_{01}}{2R_1}$$

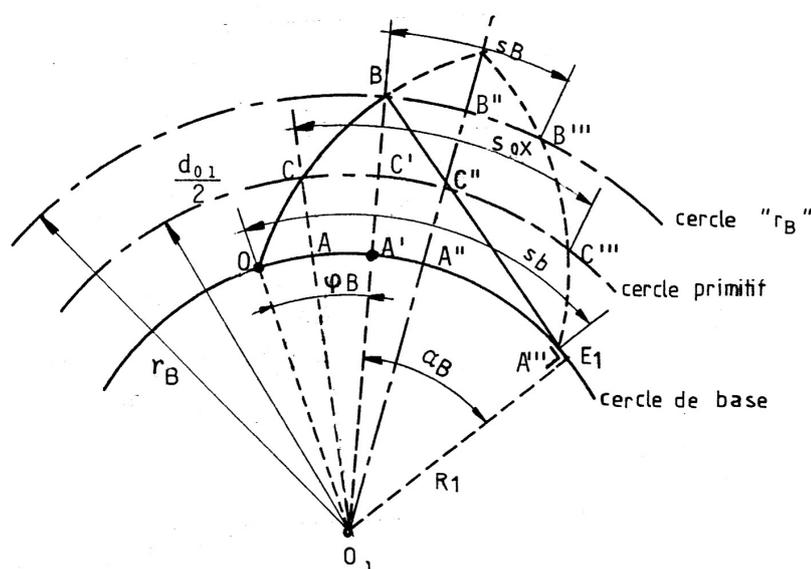


FIGURE 4.27 – Profil et épaisseur de la dent avec déport

$$\widehat{AA'} = R_1 [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)]$$

Il vient

$$S_B = \left[ \frac{\pi m}{2} + 2 x m \tan \alpha_0 - Z_1 m [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \frac{2 r_B}{d_{01}}$$

$$S_B = \left[ \frac{\pi m}{2} + 2 x m \tan \alpha_0 - Z_1 m [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \frac{2 r_B}{Z_1 m}$$

$$S_B = 2 r_B \left[ \frac{1}{Z_1} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x \tan \alpha_0 \right) - [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \quad (4.43)$$

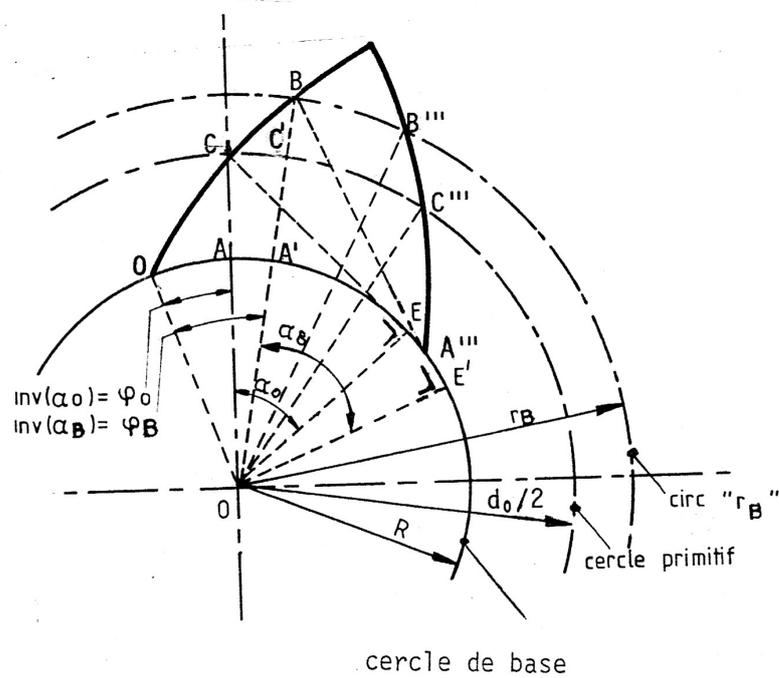
Or

$$r_B \cos \alpha_B = R_1 = \frac{d_{01}}{2} \cos \alpha_0 = \frac{Z_1 m}{2} \cos \alpha_0$$

$$2 r_B = Z_1 m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_B} \quad (4.44)$$

Partant de là, on a finalement

$$S_B = Z_1 m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_B} \left[ \frac{1}{Z_1 m} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x \tan \alpha_0 \right) - [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \quad (4.45)$$

FIGURE 4.28 – Épaisseur  $S_B$  de la dent au rayon  $r_B$ 

### Calcul du déport maximum

Considérons un déport positif  $x > 0$ . Le déport ne peut être augmenté infiniment. A un certain moment, les deux portions d'odontoïde se rejoignent et la dent à une épaisseur nulle. Soit la valeur du déport  $x_M$  pour lequel on obtient une épaisseur de dent nulle  $S_B = 0$ .

La condition  $S_B = 0$  s'exprime à l'aide de l'équation (4.43). Il vient

$$\frac{1}{Z} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x_M \tan \alpha_0 \right) = [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)]$$

En utilisant l'équation (4.44), on peut exprimer le rayon  $r_B$  correspondant,

$$r_B^M = \frac{d_0}{2} + m + x_M m = \frac{d_{ax}}{2}$$

$$r_B^M = \frac{Zm}{2} + m + x_M m = \frac{Zm \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_B}$$

On obtient

$$\frac{Z}{2} + 1 + x_M = \frac{Z \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_B}$$

avec

$$x_M = \frac{14 - Z}{17}$$

On obtient le système à résoudre pour déterminer  $Z$  et  $\alpha_B$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{Z} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x_M \tan \alpha_0 \right) = [\text{inv}(\alpha_B) - \text{inv}(\alpha_0)] \\ \frac{Z}{2} + 1 + \frac{14-Z}{17} = \frac{Z \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_B} \end{cases}$$

Ce système peut être résolu par approximations successives. On trouve  
— Solution analytique

$$x_M = 0,458 \quad Z = 6,21 \quad \alpha_B = 50^\circ 75' 10''$$

— Solution pratique

$$x_M = 0,418 \quad Z = 7 \quad \alpha_B = 47^\circ 59' 49''$$

On ne pourra donc jamais descendre en dessous de 7 dents. un nombre plus faible entraîne automatiquement une troncature de la dent et donc une hauteur inférieure à 2 modules.

### Calcul de l'entraxe après déport

Reprenons la relation fixant la largeur de la dent au rayon  $r_B$  sachant que le pas mesuré au rayon  $r_B$  vaut toujours

$$p_B = S_{B,1} + S_{B,2}$$

et introduisons les coefficients de déport en valeurs relatives.

Si le pas est à présent mesuré au niveau de la circonférence primitive du système déporté, il s'agit alors du pas de référence  $p'$  qui vérifie les relations

$$\begin{aligned} \pi d'_{01} &= Z_1 p' \\ \pi d'_{02} &= Z_2 p' \end{aligned}$$

Suite aux relations (4.43), le pas  $p_B$  caractéristique des rayons  $r_{B1}$  et  $r_{B2}$  est donné par :

$$\begin{aligned} p_B &= 2r_{B1} \left[ \frac{1}{Z_1} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x_1 \tan \alpha_0 \right) - [\text{inv}(\alpha_{B1}) - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \\ &+ 2r_{B2} \left[ \frac{1}{Z_2} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x_2 \tan \alpha_0 \right) - [\text{inv}(\alpha_{B2}) - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \end{aligned}$$

S'il s'agit du pas de référence, on adopte

$$\begin{aligned} 2r_{B1} &= d'_{01} & p_B &= p' \\ 2r_{B2} &= d'_{02} & \alpha_{B1} &= \alpha_{B2} = \alpha' \end{aligned}$$

Ce qui donne Suite aux relations (4.43), le pas  $p_B$  caractéristique des rayons  $r_{B1}$  et  $r_{B2}$  est donné par :

$$\begin{aligned} p_B &= d'_{01} \left[ \frac{1}{Z_1} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x_1 \tan \alpha_0 \right) - [\text{inv}(\alpha') - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \\ &+ d'_{02} \left[ \frac{1}{Z_2} \left( \frac{\pi}{2} + 2 x_2 \tan \alpha_0 \right) - [\text{inv}(\alpha') - \text{inv}(\alpha_0)] \right] \end{aligned}$$

Sachant que

$$d'_{01} = \frac{Z_1 p'}{\pi} \quad d'_{02} = \frac{Z_2 p'}{\pi}$$

On peut simplifier l'expression

$$2(x_1 + x_2) \tan \alpha_0 = (Z_1 + Z_2) [\text{inv}(\alpha') - \text{inv}(\alpha_0)]$$

On obtient la formule fondamentale donnant  $\alpha'$  l'angle de pression dans le système déporté :

$$\boxed{\text{inv}(\alpha') = \text{inv}(\alpha_0) + 2 \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \tan \alpha_0} \quad (4.46)$$

$\alpha'$  étant connu, on peut en déduire l'entraxe corrigé

$$\begin{aligned} a &= \frac{d'_{01} + d'_{02}}{2} = \frac{d_{01} \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha'} + \frac{d_{02} \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha'} \\ a &= a_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} = m \frac{Z_1 + Z_2}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Une formule approchée, résultant d'un développement en série tronqué peut être utilisé en première approximation.

$$\boxed{a = a_0 + \frac{(x_1 + x_2) m}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \right)}}} \quad (4.48)$$

On a, évidemment, le cas particulier,

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = a$$

A ce stade, plusieurs remarques s'imposent :

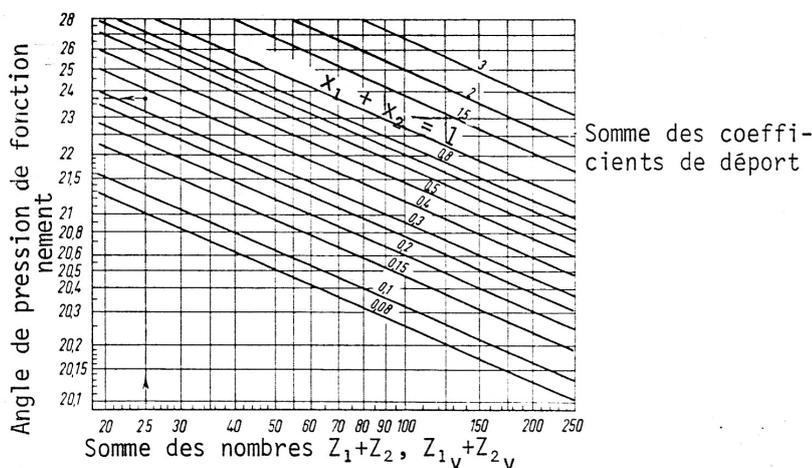


FIGURE 4.29 – Angle de pression fonction de la somme des déports  $x_1 + x_2$  et de la somme du nombre de dents  $Z_1 + Z_2$  ou  $Z_{1v} + Z_{2v}$

1. Toutes les fomules démontrées ci-dessus restent valables dans le cas d'une denture intérieure à condition d'affecter d'un signe 'moins' les grandeurs  $Z_2$ ,  $i$ ,  $a_0$ ,  $a$ , ainsi que tout diamètre indicé 2. On considère en outre qu'un déport  $x_2$  positif conduit à déplacer la crémaillère de taille fictive vers le centre de la roue 2, dans la direction des têtes des dents réelles de la courronne.
2. Ordre de grandeurs préconisés pour la somme  $x_1 + x_2$

**Grande Résistance**

$$x_1 + x_2 \simeq 0,9$$

**Grand Recouvrement**

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) &= 0,7 \quad \text{pour } Z_1 + Z_2 \leq 20 \\ -0,2 < (x_1 + x_2) < 0,7 &\quad \text{pour } 20 < Z_1 + Z_2 \leq 60 \\ (x_1 + x_2) &= -0,2 \quad \text{pour } Z_1 + Z_2 > 60 \end{aligned}$$

3. Roues dentées particulières  $x_1 + x_2 = 0,5$ . Elles sont normalisées DIN3995 ( $Z \geq 8$ ). Cette denture présente une très grande résistance mécanique et est préconisée pour des effort (couples) alternés.

**Exemple de procédure de déport**

*Premier Cas : l'entraxe n'est soumis à aucune contrainte d'encombrement*

Supposons qu'un calcul de résistance conduise aux valeurs particulière de  $m, Z_1, Z_2$ . La procédure est alors systématique.

- On choisit  $x_1 + x_2$  e, fonction de  $Z_1 + Z_2$  et de la condition fonctionnelle requise.
- On se fixe  $x_1$  en adoptant la formule suggérée par l'ISO

$$x_1 = \lambda \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} + (x_1 + x_2) \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (4.49)$$

avec

$$0,5 < \lambda < 0,75$$

On prend en moyenne  $\lambda = 0,6$ .

- On en déduit  $x_2$

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$$

et la valeur de l'entraxe réel par l'équation (4.48)

*Second Cas : l'entraxe est imposé*

Les valeurs  $m, Z_1, Z_2$  fournies par le calcul de résistance doivent à présent vérifier la valeur l'entraxe imposé  $\bar{a}$  :

$$\bar{a} \simeq \frac{Z_1 m}{2} (1 + i) = a_0$$

L'égalité stricte des deux membres est rarement vérifiée dans le cas des dentures droites car  $m$  est normalisé,  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des entiers premiers entre eux avec un rapport de réduction  $i = Z_2/Z_1$  fixé par l'application.

- Le problème sera résolu en introduisant un déport de denture tel que l'entraxe modifié soit égal à l'entraxe imposé  $\bar{a}$ . Dans ces conditions on écrit

$$\bar{a} = a_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'}$$

On en déduit une valeur de  $\alpha'$ .

$$\cos \alpha' = \frac{a_0}{\bar{a}} \cos \alpha_0$$

- On en déduit la valeur de  $\alpha'$  et, partant de là, la somme des déports  $x_1 + x_2$  par calcul

$$a = a_0 + \frac{(x_1 + x_2) m}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \right)}}$$

ou par utilisation de l'abaque (4.29).

— On fixe ensuite  $x_1$

$$x_1 = \lambda \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_2} + (x_1 + x_2) \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

avec  $0,5 < \lambda < 0,75$  (on prend réductivement la valeur moyenne  $\lambda = 0,6$ ).

— On en déduit  $x_2$

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$$

### 4.2.11 Notion de recouvrement de dentures

#### Définition

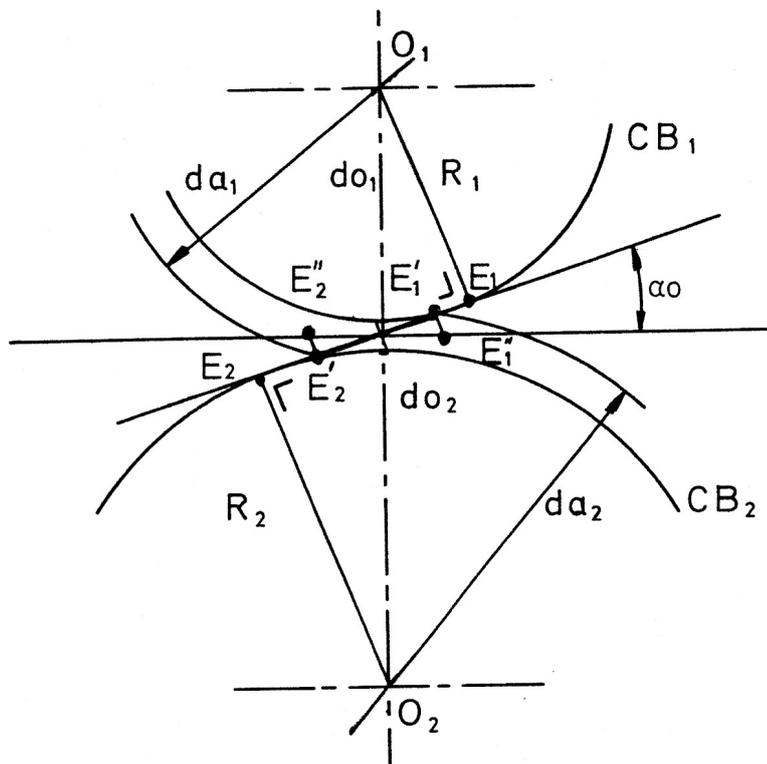


FIGURE 4.30 – Recouvrement de dentures

Quand le nombre de dents du pignon est maintenu supérieur au nombre limite caractéristique de l'interférence, soit que  $Z_1 \geq Z_{lim}(i, \alpha_0)$ , le contact des dents a lieu le long de la ligne de pression  $E_1E_2$  (Voir Figure 4.30). Le

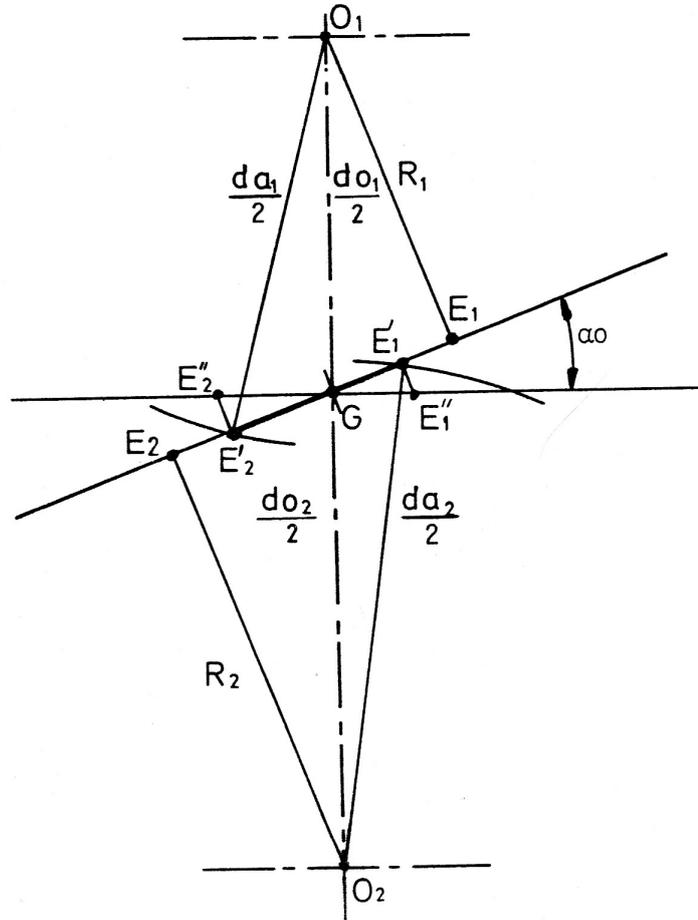


FIGURE 4.31 – Recouvrement de dentures. Calcul de la longueur de la ligne d'action

contact survient entre les intersections de la ligne d'action avec respectivement les cercles d'addendum et de dédendum des dents des engrenages en opposition.

On note par  $E'_1$  l'interaction du cercle de tête de la roue 2  $d_{a2}$  avec la ligne de pression et par  $E'_2$  l'interaction du cercle de tête de la roue 1  $d_{a1}$  avec la ligne de pression. Dans le cas d'une rotation en sens horlogique de la roue 2, le contact débute en un point  $E'_2$  et se termine en  $E'_1$  situés dans l'intervalle compris entre les deux points de tangence aux cercles de base respectifs (voir Figure 4.31). On dit qu'il y a approche entre  $E'_2$  et  $G$  et retraite entre  $G$  et  $E'_1$ .

Les points de début et de fin de contact entre les dents  $E'_1$  et  $E'_2$  définissent

l'engrènement de la roue et du pignon. La longueur mesurée le long de la ligne d'action entre ces deux points de début et de fin de contact est appelée *longueur de de conduite* (Voir Figure 4.30).

Par convention, le **recouvrement** se mesure sur la tangente commune aux circonférences de base. Le recouvrement est défini comme le rapport de la longueur de conduite au pas de base  $p_b$ .

Soit  $\ell$  la **longueur de conduite**  $E'_1 E'_2$ .

$$\ell = E'_1 E'_2 \quad (4.50)$$

La projection de la longueur de conduite sur la tangente au cercle de base est  $E''_1 E''_2$ . C'est le paramètre  $e_\alpha$  :

$$e_\alpha = \frac{\ell}{\cos \alpha_0} = E''_1 E''_2 \quad (4.51)$$

Le pas de base  $p_b$  est par définition la distance qui sépare deux profils homologues mesurée sur une tangente au cercle de base. On note que le pas  $p_b$  est un invariant même dans le cas d'un déport de denture puisque  $Z$  et  $R$  sont simultanément constants.  $p_b$  est par ailleurs lié au pas primitif  $p$  par la même relation que les diamètres correspondants. En effet :

$$\begin{aligned} 2 \pi R &= Z p_b \\ \pi d_0 &= Z p \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_b}{p} = \frac{2R}{d_0}$$

et dès lors puisque  $2 R = d_0 \cos \alpha_0$ , on a

$$p_b = p \cos \alpha_0 \quad (4.52)$$

Le **rapport de conduite**  $\varepsilon_\alpha$  est le rapport de la longueur de conduite  $\ell$  au pas de base  $p_b$ .

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\ell}{p_b} \quad (4.53)$$

De manière équivalente, on peut réécrire l'expression du rapport de conduite :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\ell}{p_b} = \frac{e_\alpha \cos \alpha_0}{p_b} = \frac{e_\alpha}{p} \quad (4.54)$$

Il faut que ce paramètre  $\varepsilon_\alpha$  soit au moins égal à l'unité pour que l'on ait continuité du contact, c'est-à-dire qu'une dent soit en approche lorsque la précédente termine sa retraite.

$$\varepsilon_\alpha \geq 1 \quad (4.55)$$

Pour éviter les chocs, il est convenu en pratique de choisir  $\varepsilon_\alpha$  supérieur à 1, soit en pratique  $\varepsilon_\alpha \geq 1,25$  au moins. On considère qu'un recouvrement  $\varepsilon_\alpha = 2$  est excellent. Ce nombre indique quel est en moyenne le nombre de dents en contact.

### Calcul du recouvrement

Calculons à présent le rapport de conduite dans le cas d'un déport nul. Le résultat sera ensuite étendu sans démonstration au cas d'un déport non nul.

Le calcul de la longueur de la ligne d'action s'organise comme suit. On va d'abord calculer la longueur  $E_1E_2$ . Ensuite pour calculer la longueur  $E'_1E'_2$ , on remarque qu'il faut retrancher de  $E_1E_2$  les longueurs  $E_1E'_1$  et  $E_2E'_2$ . Après les avoir calculées, on sera alors en mesure de dégager l'expression de  $E'_1E'_2$ .

De l'examen des triangles rectangles  $O_2E_2G$  et  $O_1E_1G$  on tire

$$E_1E_2 = \frac{d_{01}}{2} \sin \alpha_0 + \frac{d_{02}}{2} \sin \alpha_0 = a_0 \sin \alpha_0 \quad (4.56)$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} E_2E'_2 &= E_1E_2 - E_1E'_1 \\ E_1E'_1 &= E_1E_2 - E_2E'_2 \end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles  $O_1E_1E'_1$  et  $O_2E_2E'_2$  nous donne :

$$\begin{aligned} E_1E'_1 &= \sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2} \\ E_2E'_2 &= \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} \end{aligned}$$

avec  $R_{ai}$  le rayon de la tête de dent et  $R_i$  le rayon du cercle de base de la roue dentée  $i$ . Ces rayons sont calculables et leur valeur est donnée par :

$$\begin{aligned} R_{ai} &= \frac{d_{oi}}{2} + m \\ R_i &= \frac{d_{oi}}{2} \cos \alpha_0 = \frac{Z_i m}{2} \cos \alpha_0 \end{aligned}$$

Il vient donc dans le cas de roues normales :

$$\begin{aligned}
 E'_1 E'_2 &= E_1 E_2 - E_1 E'_1 - E_2 E'_2 \\
 &= E_1 E_2 - (E_1 E_2 - E_2 E'_1) - (E_1 E_2 - E_1 E'_2) \\
 &= E_1 E'_2 + E_2 E'_1 - E_1 E_2
 \end{aligned}$$

On peut alors calculer la longueur de conduite :

$$\ell = e_\alpha \cos \alpha = \sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2} + \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} - a_0 \sin \alpha_0 \quad (4.57)$$

ainsi que le recouvrement :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{e_\alpha}{p} = \frac{\ell}{p \cos \alpha_0} = \frac{\sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2} + \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} - a_0 \sin \alpha_0}{p \cos \alpha_0} \quad (4.58)$$

Dans ces conditions, on peut calculer le nombre de dents  $Z_1$  qui, pour un de réduction  $i$  donné, conduit à un rapport de réduction  $\varepsilon_\alpha > 1,25$  fixé à l'avance. Pour obtenir une expression exploitable pour le calcul pratique, on remplace  $Z_2$  par sa valeur en fonction de  $i$  et  $Z_1$  ainsi que la valeur du pas  $p$  et des diamètres primitifs en fonction du module  $m$ .

$$Z_2 = Z_1 i \quad p = \pi m \quad d_0 = Z m$$

Après quelques manipulations algébriques, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\alpha &= \frac{\sqrt{m^2(\frac{Z_1}{2} + 1) - \frac{Z_1^2 m^2}{4} \cos \alpha_0}}{\pi m \cos \alpha_0} \\
 &+ \frac{\sqrt{m^2(\frac{iZ_1}{2} + 1) - \frac{i^2 Z_1^2 m^2}{4} \cos \alpha_0} - \frac{mZ_1}{2}(i + 1) \sin \alpha_0}{\pi m \cos \alpha_0}
 \end{aligned} \quad (4.59)$$

et en simplifiant haut et bas par  $m$ , on trouve

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{(\frac{Z_1}{2} + 1) - \frac{Z_1^2}{4} \cos \alpha_0} + \sqrt{(\frac{iZ_1}{2} + 1) - \frac{i^2 Z_1^2}{4} \cos \alpha_0} - \frac{Z_1}{2}(i + 1) \sin \alpha_0}{\pi \cos \alpha_0} \quad (4.60)$$

On démontre que dans le cas d'une denture intérieure, la deuxième racine doit être affectée d'un signe "moins".

### 4.3 RESISTANCE DES DENTURES DROITES

Une denture se définit complètement à partir du module  $m$  dont la valeur approximative résulte d'un calcul de résistance des matériaux.

La résistance des dentures est examinée au travers de deux critères :

1. La résistance à la flexion des dents
2. La résistance à la pression de contact

Les contraintes de référence sont calculées dans des situations idéalisées et affectées d'une série de coefficients pour tenir compte de la situation réelle.

Les expressions génériques de la contrainte ou de la pression de contact de référence sont à l'origine de la procédure de vérification des dentures selon les normes AGMA et ISO.

#### 4.3.1 Résistance à la flexion

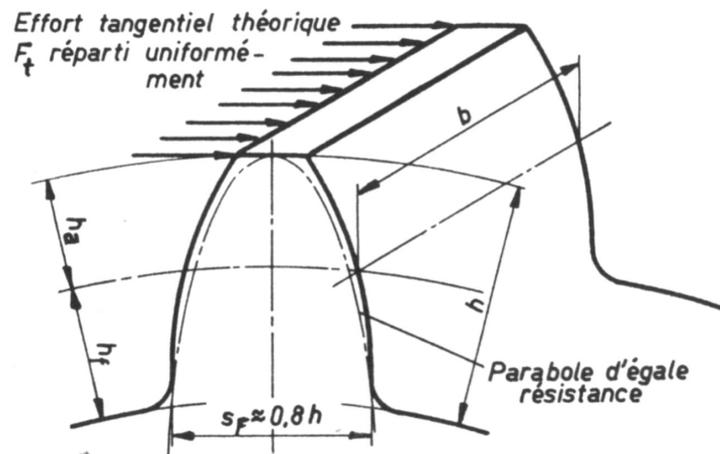


FIGURE 4.32 – Situation idéalisée de calcul de résistance à la flexion de la dent

La résistance de la dent se calcule en faisant l'approximation que la dent est assimilée à une poutre encastrée, fléchiée par la composante tangentielle  $F_t$  de la force de contact que l'on supposera située à son sommet afin de se placer dans le cas le plus défavorable.

L'approximation néglige volontairement l'effet de la composante radiale  $F_r$ , génératrice de compression, car elle renforce la résistance à la fatigue de la dent.

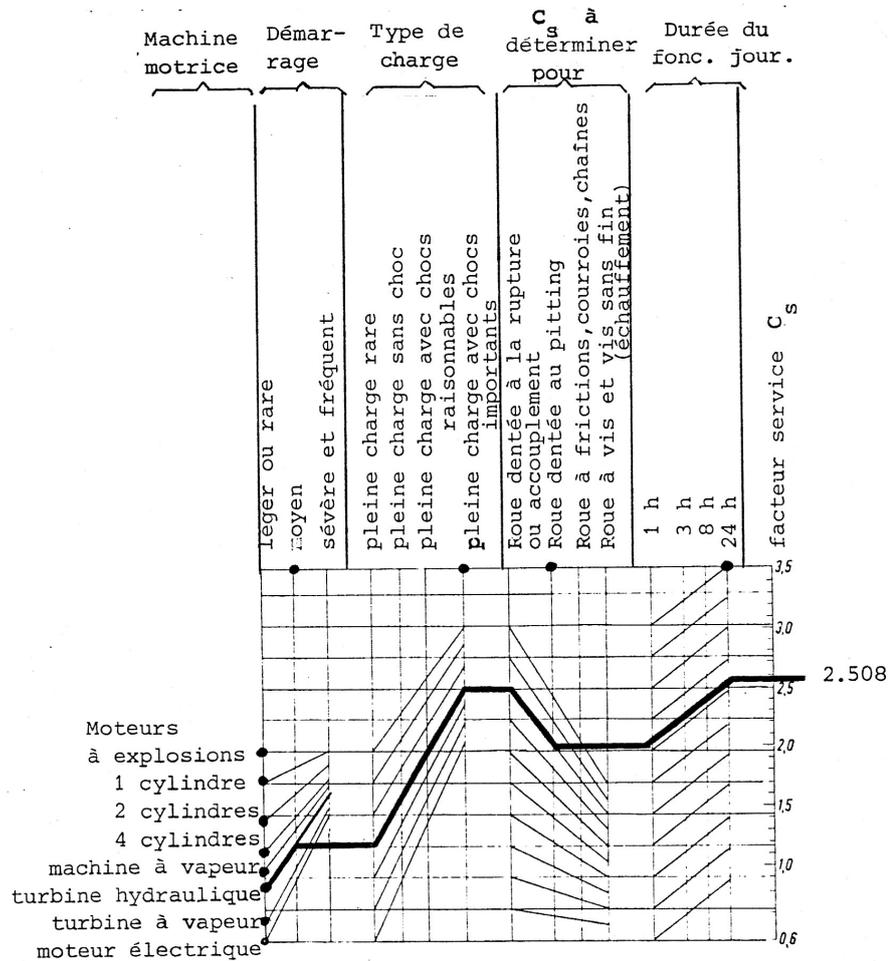


FIGURE 4.33 – Facteurs d'application de la charge ou facteurs de service d'après Richter-Ohlendorf

La valeur de la force de flexion sur la dent est estimée à partir de la puissance transmise et de la vitesse de rotation :

$$F_t = C_s \frac{\mathcal{P}}{v} = C_s \frac{\mathcal{P} 60}{\pi d_0 N} \quad (4.61)$$

On a tenu compte d'un facteur de service  $C_s$  rendant compte de l'irrégularité

de la force dans différentes applications à défaut de plus amples informations. Il peut s'estimer à partir de l'abaque de Richter Olhendorf (Voir Figure 4.33).

Pour rappel, on suppose connues les données géométriques suivantes :

- La hauteur de la dent est  $h = 2,25 m$  ;
- La largeur de la dent est  $b = k m$ , avec  $k$  un facteur de forme dont la valeur est à définir ;
- L'épaisseur de la dent au niveau du diamètre primitif est donnée par :

$$e = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$$

Dès lors, le moment de flexion maximal à l'encastrement est donné par :

$$M = F_t h = F_t 2,25 m$$

Le moment d'inertie de la section (rectangulaire) de la dent est classiquement donné par :

$$I = \frac{b e^3}{12} = b \frac{\pi^3 m^3}{96} = k \frac{\pi^3 m^4}{96}$$

La contrainte maximale de flexion vaut :

$$\sigma = \frac{M y}{I} = \frac{M e/2}{I}$$

En introduisant les valeurs précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_t (2,25 m) (\pi m/4)}{b \pi^3 m^3/96} = \frac{F_t (2,25 m) (\pi m/4)}{k \pi^3 m^4/96} \\ &= 5,47 \frac{F_t}{b m} = 5,47 \frac{F_t}{k m^2} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Il s'agit de la **formule de Lewis (1892)** [12].

La contrainte de flexion ainsi estimée doit maintenant être comparée à une contrainte admissible par le matériau  $R_\phi$ . Selon la DIN 3990, on adopte les tensions admissibles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Mouvements lents} \quad R_\phi &= \frac{R_0^{Flex}}{2.5} \\ \text{Mouvements rapides} \\ \text{- avec couples répétés} \quad R_\phi &= \frac{R_0^+}{2} \\ \text{- avec couples alternés} \quad R_\phi &= \frac{R_0^\pm}{2.5} \end{aligned}$$

TABLE 4.2 – Valeurs des coefficients de Lewis pour  $\alpha_0 = 20^\circ$ 

|          |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Z_1$    | 10    | 20    | 30    | 50    | 75    | 100   | 300   |
| $\Phi_L$ | 0,201 | 0,320 | 0,358 | 0,408 | 0,433 | 0,446 | 0,471 |

avec  $R_0^{Flex}$  la limite admissible en flexion,  $R_0^+$  la limite admissible en traction, et  $R_0^\pm$  la contrainte admissible en traction compression.

La comparaison entre la contrainte de flexion de référence et la contrainte admissible permet de vérifier la résistance de la dent :

$$5,47 \frac{F_t}{k m^2} \leq R_\phi \quad (4.63)$$

Pour un matériau donné, la formule permet de déterminer le module :

$$m \geq 2,34 \sqrt{\frac{F_t}{k R_\phi}} \quad (4.64)$$

On choisit le module normalisé immédiatement supérieur dans la série de Renard.

### Méthode de Lewis

Dans l'approche américaine proposée par Lewis [12] et reprise ultérieurement par l'AGMA [2], la formule donnant l'estimation de la contrainte de flexion en pied de dent s'écrit en fonction du pas diamétral  $p_d = 1/m'$  avec  $m'$  exprimé en pouces.

$$\sigma = \frac{F_t p_d}{\Phi_L(Z_1) b} \quad (4.65)$$

Pour améliorer l'estimation de l'approximation poutre, Lewis établit par ailleurs une table de coefficients  $\Phi_L(Z_1)$  tenant compte de la géométrie. Le coefficient  $\Phi_L(Z_1)$  est fonction du nombre de dents (voir Table 4.2).

Le choix du module est alors réalisé sur base de la formule suivante :

$$m \geq \frac{F_t}{\Phi_L(Z_1) b R_\phi} \quad (4.66)$$

### Calcul de la résistance à la flexion selon la méthode AGMA [2, 1]

On calcule une tension de flexion de référence basée sur l'estimation de Lewis. On peut également calculer une tension de compression, mais celle-ci est généralement négligée. On multiplie la tension de flexion résultante par **une série de coefficients** tenant compte de l'état réel de la géométrie, de l'engrènement, de la qualité de fabrication, de la régularité de l'application de la charge, etc. On compare enfin le produit résultant de cette opération à une tension admissible (HD à coeur) en fonction de la durée de vie exigée (limite d'endurance en rapport avec le nombre de cycles).

$$\sigma = \frac{F_t}{b m J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \quad (4.67)$$

1/ **L'effet de géométrie** est introduit par le facteur  $J$  tient compte de la géométrie de la dent. Il est déterminé suivant un algorithme complexe défini par la norme AGMA 908-B89 [2]. Il est donné soit sous forme de tables ou d'abaques. Remarquons que les facteurs  $J$  sont différents pour les pignons et pour les roues ainsi que pour les dentures intérieures. Le facteur  $J$  dépend en particulier de la géométrie du pied de la dent et du nombre de dents  $Z$  (Voir Figures 4.34 et 4.35). Le choix entre le chargement en tête de dent (tip loading) ou entre le point le plus haut de chargement sur une seule dent (Highest Point of Single Tooth Contact - HPSTC) dépend de la précision de la fabrication des engrenages. Si l'engrenage a été fabriqué avec une bonne précision (meilleurs procédés de fabrication), alors on peut supposer qu'il y a généralement partage de la charge entre plusieurs dents et le HPSTC peut être choisi. Dans le cas contraire, une mauvaise qualité de denture entraîne souvent une situation où une seule dent doit supporter seule toute la charge et il est admis que l'on se place en sécurité en considérant le cas le plus défavorable où une seule dent est chargé au niveau du diamètre de tête.

2/ Le **facteur  $K_v$  ou facteur dynamique** tient compte des charges dynamiques et des vibrations induites par les impacts entre dents antagonistes. Les charges vibratoires sont appelées erreurs de transmission et sont plus pénalisantes avec les engrenages de moindre précision. En l'absence de données, on peut approcher  $K_v$  par des courbes telles que celles de la Figure 4.36 ou de manière équivalente par les formules suivantes :

$$K_v = \left( \frac{A}{A + \sqrt{200V_t}} \right)^B \quad (4.68)$$

| Gear teeth | Pinion teeth |   |    |   |    |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------------|--------------|---|----|---|----|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|            | 12           |   | 14 |   | 17 |   | 21   |      | 26   |      | 35   |      | 55   |      | 135  |      |
|            | P            | G | P  | G | P  | G | P    | G    | P    | G    | P    | G    | P    | G    | P    | G    |
| 12         | U            | U |    |   |    |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 14         | U            | U | U  | U |    |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 17         | U            | U | U  | U | U  | U |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 21         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.24 | 0.24 |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 26         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.24 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |      |      |      |      |      |      |
| 35         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.24 | 0.26 | 0.25 | 0.26 | 0.26 | 0.26 |      |      |      |      |
| 55         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.24 | 0.28 | 0.25 | 0.28 | 0.26 | 0.28 | 0.28 | 0.28 |      |      |
| 135        | U            | U | U  | U | U  | U | 0.24 | 0.29 | 0.25 | 0.29 | 0.26 | 0.29 | 0.28 | 0.29 | 0.29 | 0.29 |

| Gear teeth | Pinion teeth |   |    |   |    |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------------|--------------|---|----|---|----|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|            | 12           |   | 14 |   | 17 |   | 21   |      | 26   |      | 35   |      | 55   |      | 135  |      |
|            | P            | G | P  | G | P  | G | P    | G    | P    | G    | P    | G    | P    | G    | P    | G    |
| 12         | U            | U |    |   |    |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 14         | U            | U | U  | U |    |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 17         | U            | U | U  | U | U  | U |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 21         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.33 | 0.33 |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 26         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.33 | 0.35 | 0.35 | 0.35 |      |      |      |      |      |      |
| 35         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.34 | 0.37 | 0.36 | 0.38 | 0.39 | 0.39 |      |      |      |      |
| 55         | U            | U | U  | U | U  | U | 0.34 | 0.40 | 0.37 | 0.41 | 0.40 | 0.42 | 0.43 | 0.43 |      |      |
| 135        | U            | U | U  | U | U  | U | 0.35 | 0.43 | 0.38 | 0.44 | 0.41 | 0.45 | 0.45 | 0.47 | 0.49 | 0.49 |

FIGURE 4.34 – Exemple de facteur  $J$  tenant compte de la géométrie de la dent selon l'AGMA [2]. Extrait de la référence [14]

où  $V_t$  est la vitesse tangentielle au diamètre primitif exprimée en  $m/s$ . Les facteurs A et B sont définis comme suit :

$$A = 50 + 56(1 - B)$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \quad \text{for } 6 \leq Q_v \leq 11$$

Le facteur  $Q_v$  est relatif à la qualité et du procédé de fabrication des roues dentées.

Ces courbes sont valides en dessous de la vitesse tangentielle maximale :

$$V_{t \max} = \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200}$$

Pour les engrenages de qualité  $Q_v \leq 5$ , la relation suivante remplace les précédentes :

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200V_t}}$$

3/ La contrainte de flexion doit être majorée pour tenir compte d'une **répartition inégale de l'effort  $F_n$  sur la largeur de la dent** : On remplace  $b$

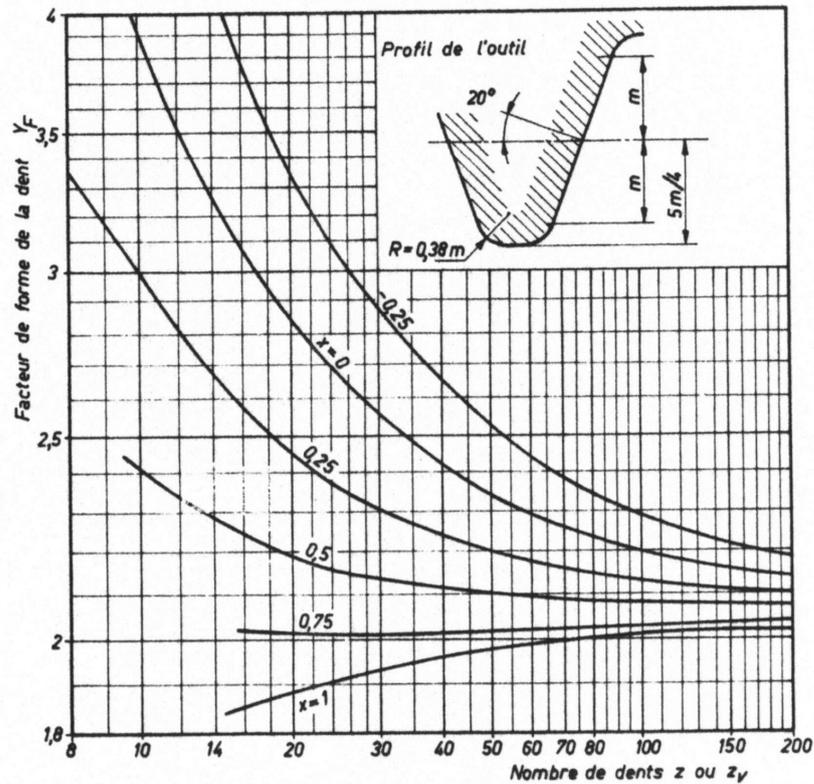


FIGURE 4.35 – Facteur  $Y_F$  tenant compte de la géométrie de la dent et du déport de denture  $x$

par  $b'$  :

$$b' = \frac{b}{K_m} \quad K_m > 1$$

$C_m$  est une fonction de la qualité de fabrication  $Q_v$ .

4/ L'effort  $F_n$  n'est pas appliqué progressivement mais un **effet de choc** intervient. La fluctuation des contraintes dans la dent provient de la variabilité de la charge. On doit introduire un effort tangentiel majoré :

$$F'_t = F_t K_A \quad K_A > 1$$

Pour estimer  $K_A$  on peut soit utiliser l'abaque de Richter-Ohlendorf (4.33) soit le tableau simplifié 4.3.1 suggéré par l'AGMA.

5/ Le **facteur de taille**  $K_s$  est similaire au facteur de taille introduit pour la résistance à la fatigue. Les engrenages de grande taille ont une moindre

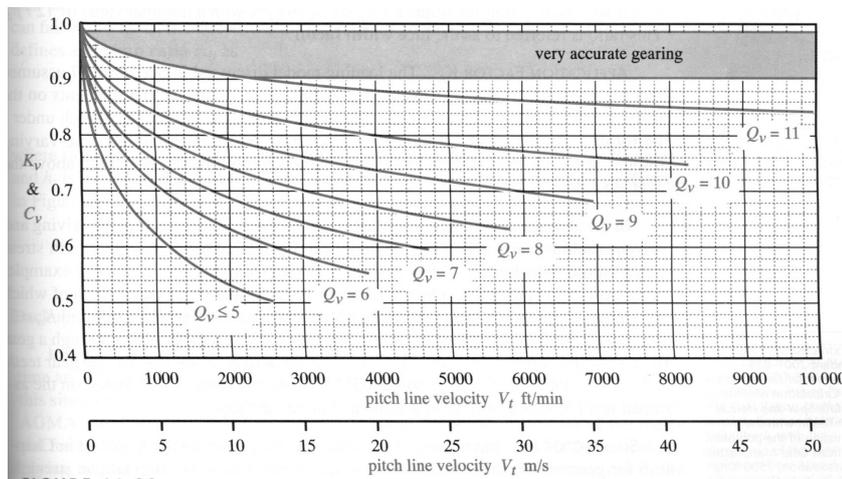


FIGURE 4.36 – Facteur  $K_v$  tenant compte de la vitesse tangentielle et de la qualité  $Q_v$  de fabrication des engrenages. Extrait de la référence [14]

TABLE 4.3 – Facteur d'applications  $K_A$

| Driven Machine \ Driving machine         | Uniform                              | Moderate shock | Heavy shock |
|--|--------------------------------------|----------------|-------------|
|  | Uniform<br>(electric motor, turbine) | 1.00           | 1.25        |
| Light shock<br>(Multi cylinder engine)   | 1.25                                 | 1.50           | < 2.00      |
| Medium shock<br>(Single cylinder engine) | 1.50                                 | 1.75           | < 2.25      |

résistance. Toutefois, on prend généralement

$$K_s = 1$$

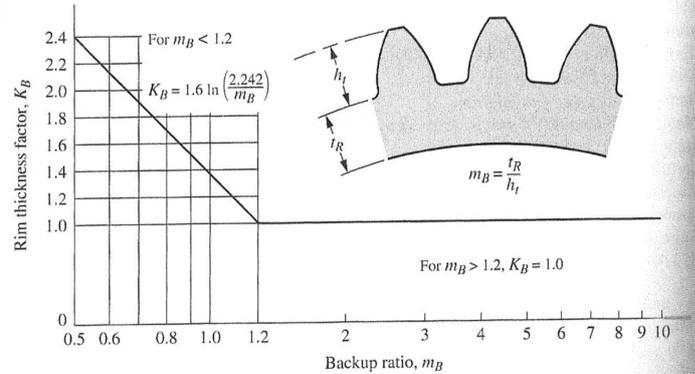
6/ Le **facteur d'épaisseur de jante**  $K_B$  a été introduit récemment par l'AGMA pour tenir compte de situations dans lesquelles un engrenage de grand diamètre est fait d'une jante de faible dimension et de rayons plutôt que d'un tambour solide. On a observé que ceux-ci peuvent périr prématurément à cause des contraintes radiales élevées qui naissent dans la jante et cela bien avant rupture de la dent. Le facteur  $K_B$  est donné à la Figure 4.37.

7/ Le **facteur**  $K_I$  reflète le fait que les engrenages sur une **roue folle** sont soumis à un plus grand nombre de cycles de sollicitation par unité de temps et plus de charges alternées de hautes amplitudes que leurs homologues montés

392

Chapter 9 ■ Spur Gear Design

**FIGURE 9-20** Rim thickness factor,  $K_B$  (Extracted from AGMA 2001-C95 Standard, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, with permission of the publisher, American Gear Manufacturers Association, 1500 King Street, Suite 201, Alexandria, VA 22314)



**FIGURE 4.37** – Facteur  $K_B$  tenant compte de l'épaisseur et de la rigidité de la jante de la roue dentée. Extrait de la référence [14]

en roues fixes. Pour tenir compte de cette solution, on prend  $K_I = 1,25$  pour les roues folles et  $K_I = 1,00$  pour les roues fixes.

8/ La contrainte de flexion maximale admissible dépend de la **durée de vie** que l'on veut imposer. La pression devra être comparée à

$$R'_\phi = R_\phi K_L \quad K_L < 1$$

où  $R_\phi$  est l'endurance correspondant à un nombre de cycles de référence et le facteur  $K_L$  un facteur de réduction compte tenu du nombre de cycles souhaités.

### 4.3.2 Résistance à la pression de contact

Le second critère est la résistance de la dent à la pression de contact. On calcule la pression de contact au niveau du flanc des dents puis on la multiplie par une série de coefficients qui tiennent compte de l'engrènement réel.

On compare ensuite cette pression à une valeur limite fonction des caractéristiques mécaniques superficielles du matériau (HB superficielle) et de la durée de vie désirée avant apparition de lésions de surface.

Lorsque deux cylindres élastiques semi-infinis sont appliqués l'un contre l'autre et pressés avec un effort  $F_n$  le contact est régi par la théorie de Hertz. Le contact s'établit sur une zone rectangulaire, de largeur  $2l$  tandis que la pression de contact varie transversalement selon une loi de répartition semi-elliptique, caractéristique de la théorie de Hertz.

Tableau LXV  
*Caractéristiques mécaniques des matériaux*  
 Toutes les caractéristiques mécaniques sont données en daN/mm<sup>2</sup>

| Matériaux            |   | Éprouvette à l'état final              |  | Caractéristiques de la denture |       |                                    |
|----------------------|---|--|--|--------------------------------|-------|------------------------------------|
| Désignation<br>Norme | Type et<br>traitement<br>thermique      | Contrainte<br>de rupture<br>$\sigma_B$ | Résistance<br>dynamique<br>$\sigma_{fa}$ | Dureté HB                      |       | Pression<br>limite<br>$p_{H\ lim}$ |
|                      |   |  |  | Cœur                           | Flanc |                                    |
|                      | Fonte grise                             | 20                                     | 9  | 200                            |       | 36                                 |
|                      |   | 25                                     | 12                                       | 210                            |       | 40                                 |
| 20                   | Fonte<br>nodulaire                      | 42                                     | 19                                       | 150                            |       | 35                                 |
|                      |   | 50                                     | 20                                       | 170                            |       | 40                                 |
| 50<br>60             | Acier moulé                             | 50                                     | 20                                       | 140                            |       | 37                                 |
|                      |   | 60                                     | 24                                       | 170                            |       | 46                                 |
|                      | Aciers de<br>construction<br>au carbone | min. 42                                | 19                                       | 125                            |       | 43                                 |
|                      |   | min. 50                                | 24                                       | 150                            |       | 50                                 |
|                      |   | min. 60                                | 28                                       | 180                            |       | 62                                 |
|                      |   | min. 70                                | 32                                       | 210                            |       | 72                                 |
| 4<br>Si 5<br>Mo 4    | Aciers<br>d'amélio-<br>ration           | 50 à 60                                | 22 à 26                                  | 140                            |       | 41                                 |
|                      |   | 65 à 80                                | 30 à 34                                  | 185                            |       | 54                                 |
|                      |   | 75 à 90                                | 34 à 40                                  | 210                            |       | 61                                 |
|                      |   | 75 à 90                                | 36 à 44                                  | 260                            |       | 77                                 |
|                      |   | 70 à 80                                | 36 à 42                                  | 230                            |       | 63                                 |
|                      |   | 95 à 110                               | 46 à 54                                  | 300                            |       | 77                                 |
| Cr 5<br>Ni 6         | Aciers de<br>cémentation                | 45 à 60                                | 25                                       | 170                            | 590   | 20                                 |
|                      |   | 50 à 65                                | 27                                       | 190                            | 740   | 22                                 |
|                      |   | 80 à 110                               |  | 270                            | 650   | 42                                 |
|                      |   | 90 à 120                               |  | 310                            | 650   | 44                                 |
| Si 4<br>4            | Acier pour<br>trempé<br>superficielle   | 65 à 80                                |  | 220                            | 595   | 31                                 |
|                      |   | 90 à 105                               |  | 270                            | 560   | 34                                 |
|                      |   | 90 à 110                               |  | 275                            | 590   | 35                                 |
| 4<br>Si 5            | Aciers pour<br>cyanuration              | 140 à 180                              |  | 460                            | 595   | 32                                 |
|                      |   | 150 à 190                              |  | 470                            | 550   | 35                                 |

FIGURE 4.38 – Caractéristiques mécaniques de flexion et de pression de contact admissibles pour une série de matériaux habituels utilisés dans la fabrication des engrenages

On obtient

$$p_{max} = \frac{2 P'}{\pi l} \quad (4.69)$$

où  $P' = F_n/b$  est la charge normale par unité de longueur selon la largeur de la dent,  $l$  est la demi largeur d'empreinte et  $b$  est la largeur de contact, ici la largeur de la plus petite des deux roues dentées. (voir Figure 4.40 )

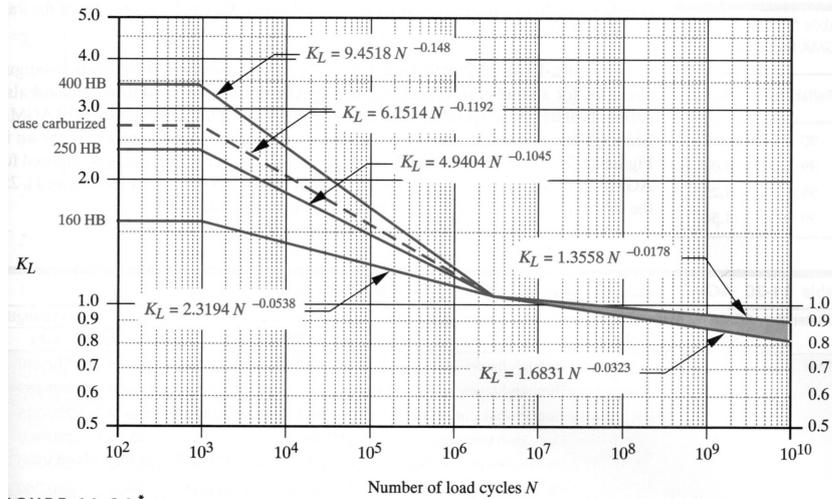


FIGURE 4.39 – Facteur  $K_L$  de modification de la contrainte limite d'endurance à considérer. Extrait de la référence [14]

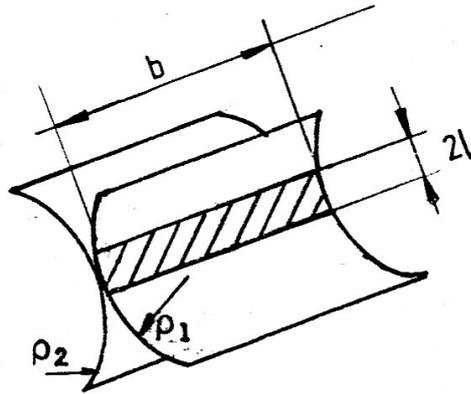


FIGURE 4.40 – Contact hertzien de deux cylindres convexes

La théorie de Hertz nous enseigne que la longueur de la demi ellipse vaut :

$$l = \sqrt{4P'\rho(\kappa_1 + \kappa_2)}$$

avec le rayon de courbure équivalent :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les rayons de courbure des surfaces cylindriques représentant

les dents tandis que

$$\kappa_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$$

Posons :

$$\frac{1}{\pi E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} = \kappa_1 + \kappa_2$$

On a :

$$l = \sqrt{\frac{4P'\rho}{\pi E^*}}$$

Retournons maintenant au calcul de la pression de contact. Il vient :

$$p_{max} = \frac{2P'}{\pi l} = \frac{2P'}{\pi} \sqrt{\frac{\pi E^*}{4P'\rho}}$$

Soit après simplifications

$$p_{max} = \sqrt{\frac{P' E^*}{\pi \rho}}$$

En suivant la Ref. [5], on peut montrer en étudiant le profil de denture en développante de cercle que :

$$\rho = \frac{d'_{01}}{2} \cos \alpha' \operatorname{tg} \psi \left[ 1 - \frac{1}{i+1} \operatorname{tg} \psi \cot \alpha' \right]$$

Dans le cas particulier d'un contact au point G, point de contact des deux diamètres primitifs, situé sur la ligne d'entraxe, on a  $\alpha' = \psi$  :

$$\rho = \frac{d'_{01}}{2} \sin \alpha' \frac{i}{i+1}$$

Ecrivons l'expression de la pression maximale de contact :

$$P' = \frac{F_n}{b} = \frac{F_t}{b \cos \alpha'}$$

Pour un contact en tête de dent, on peut écrire :

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t E^*}{\pi b \cos \alpha' d'_{01} \cos \alpha' \operatorname{tg} \psi (1 + i - \cot \alpha' \operatorname{tg} \psi)} \frac{2(i+1)}{}}}$$

Tandis que pour un point de contact sur les diamètres primitifs ( $\alpha' = \psi$ ) :

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t E^*}{\pi b \cos \alpha' d'_{01} \sin \alpha' i} \frac{2(i+1)}{}}$$

où

$$d'_{01} = d_{01} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} = Z_1 m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'}$$

### Calcul de la résistance à la pression de contact - méthode AGMA

Dans l'approche employée dans la méthode AGMA, on calcule d'abord la pression de contact maximale au point de contact des cercles primitifs en utilisant la théorie de Hertz.

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t}{b d_{01}} \frac{(i+1)}{i} \frac{2E^*}{\pi \sin \alpha' \cos \alpha_0}} \quad (4.70)$$

La pression de contact théorique a peu de chance d'exister en réalité du fait des imperfections de la réalisation et du montage. On introduit donc un certain nombre de coefficients.

$$p_{max} = C_p \sqrt{\frac{F_t}{b d_0 I} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \quad (4.71)$$

1/ Le **coefficient**  $C_p$  est le **coefficient élastique** qui rend compte de la différence éventuelle des modules élastiques de la roue et du pignon :

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right]}}$$

2/ Le facteur  $I$  tient compte des **rayons de courbure des dents** en prise et de l'angle de pression et du diamètre primitif :

$$I = \frac{\rho \cos \alpha'}{d'}$$

Comme le facteur géométrique  $J$  pour la contrainte de flexion, la norme définit soit des tables, soit des abaques permettant de calculer le facteur  $I$  en fonction du nombre de dents du pignon et de la roue. Le facteur  $I$  est différent du facteur  $J$  calculé précédemment.

3/ La pression doit être majorée pour tenir compte d'un coefficient tenant compte de la **répartition inégale** de l'effort  $F_n$  sur la largeur de la dent. On remplace  $b$  par  $b'$  :

$$b' = \frac{b}{C_m} \quad C_m > 1$$

Le facteur  $C_m$  dépend de la qualité de fabrication via la coefficient  $Q_v$ .

4/ L'effort  $F_n$  n'est pas appliqué progressivement mais un **effet de choc** intervient et on doit introduire un effort tangentiel majoré :

$$F'_t = \frac{F_t}{C_v} \quad C_v < 1$$

Dans la norme AGMA, le facteur  $C_v$  est donné par la même expression que  $K_v$  décrit pour la résistance à la flexion.

5/ La pression max admissible dépend de la **durée de vie** que l'on veut imposer. La pression devra être comparée à

$$R'_\phi = R_\phi C_L \quad C_L < 1$$

$R_\phi$  l'endurance correspondant à un nombre de cycles de référence.  $C_L$  est une fonction du nombre de cycles.

6/ Un **coefficient de lubrification** tient compte de l'effet de la lubrification, qui a un effet sur la durée de vie.

$$R'_\phi = R_\phi C_{Lub} \quad C_{Lub} < \text{ou} > 1$$

La lubrification a généralement un effet positif sur la durée de vie. Dans la norme AGMA, on utilise la pression hertzienne au point de contact sur le cercle primitif avec les coefficients de correction.

$$p_{max} = \sqrt{\frac{F_t}{b d_{01}} \frac{C_a C_m}{C_v} \frac{(i+1)}{i} \frac{2E^*}{\pi \sin \alpha' \cos \alpha_0}} \leq \frac{p_{lim} C_L C_{Lub}}{K} \quad (4.72)$$

K coefficient de sécurité supplémentaire.

## 4.4 ENGRENAGES A DENTURE HELICOIDALE

On peut également concevoir des roues dentées pour lesquelles le profil des dents suit une hélicoïde. La fabrication de tels roues dentées résulte alors d'un mouvement synchronisé du déplacement axial de l'outil de coupe et de la rotation du cylindre brut de l'engrenage. Comme l'indique la Figure 4.41, il en résulte une roue cylindrique dont les dents s'enroulent sur le cylindre primitif. Les dents sont inclinées d'un angle  $\beta_0$  sur la direction de l'axe de rotation tandis que l'angle d'hélice est le complémentaire de  $\beta_0$ . Les dentures peuvent être obliques à gauche ou obliques à droite. D'ailleurs les deux roues à dentures hélicoïdales doivent avoir des hélices de sens opposés pour pouvoir s'engrener l'une avec l'autre. L'angle d'hélice est généralement compris entre  $8^\circ$  et  $20^\circ$ .

$$8^\circ \leq \beta \leq 20^\circ$$

Les engrenages à dentures en chevrons sont composés de deux engrenages jointifs à denture hélicoïdale à angles d'hélice  $\beta$  égaux et opposés. Dans les

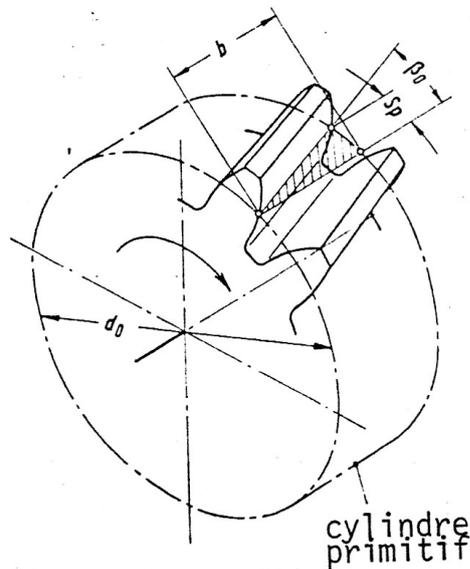


FIGURE 4.41 – Géométrie de la roue hélicoïdale

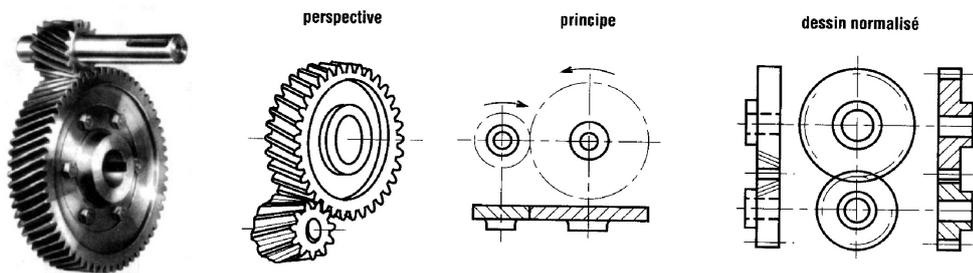


FIGURE 4.42 – Engrenages à dentures hélicoïdales

cas dentures à chevrons, on choisit généralement un angle d'hélice  $\beta$  beaucoup plus élevé compris entre  $30^\circ$  et  $44^\circ$ .

Les roues à dentures hélicoïdales et à chevrons sont utilisées dans le cas de vitesses circonférentielles élevées pour lesquelles les dentures droites ne conviennent plus à cause du bruit et du facteur de charge dynamique trop élevés.

Le grand intérêt de la denture hélicoïdale est l'application progressive de l'effort à la dent. Plusieurs dents sont en prise simultanément conduisant à un meilleur recouvrement.

**Avantages (par rapport aux dentures droites)**

- Toujours plusieurs dents en prise de sorte que l'on a une meilleure régularité de la transmission à haute vitesse.
- Moins d'usure et un niveau sonore plus bas conduisant à une réduction des chocs ds à la plus faible flexion des dents.
- Possibilité de façon précise d'obtenir des entraxes de dimension souhaitée en modifiant l'angle d'hélice.
- Possibilité de transmettre un mouvement entre deux axes orthogonaux non concourants.

#### Inconvénients

- Plus chère que les dentures droites.
- Création d'une composante axiale de l'effort de contact.
- Impose souvent la mise en place dans les paliers de roulements spécifiques capables de reprendre ce type d'effort.
- Solution possible : inverser le sens de l'hélice sur deux roues dentées portées par un même arbre, ou bien adopter des roues dentées en chevron.

#### 4.4.1 Paramètres fondamentaux des dentures hélicoïdales

La taille d'une roue à denture hélicoïdale est obtenue par le moyen d'un outil crémaillère ou de son équivalent (Hobb) décalée d'un angle  $\beta_0$ , par rapport à la génératrice (axe) de la roue. L'enlèvement de copeaux est obtenu par le mouvement de va-et-vient de l'outil parallèlement aux dents de la crémaillère. Le mouvement d'avance rectiligne de la crémaillère perpendiculairement à l'axe de rotation de la roue est synchronisé avec le mouvement de rotation de cette roue (Voir Figure 4.43).

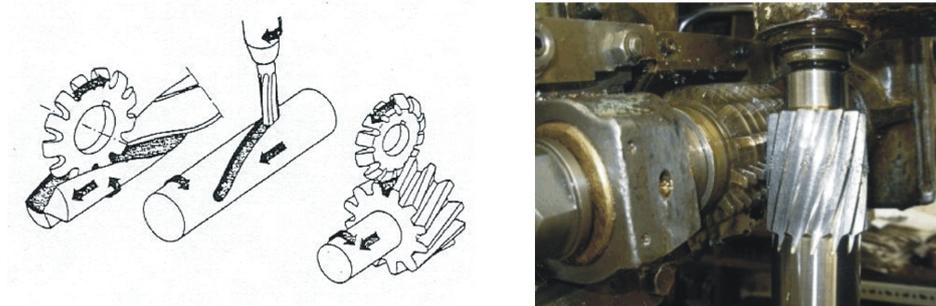


FIGURE 4.43 – Fabrication des engrenages à dentures hélicoïdales par hobbing par fraise mère

### Module et pas apparents

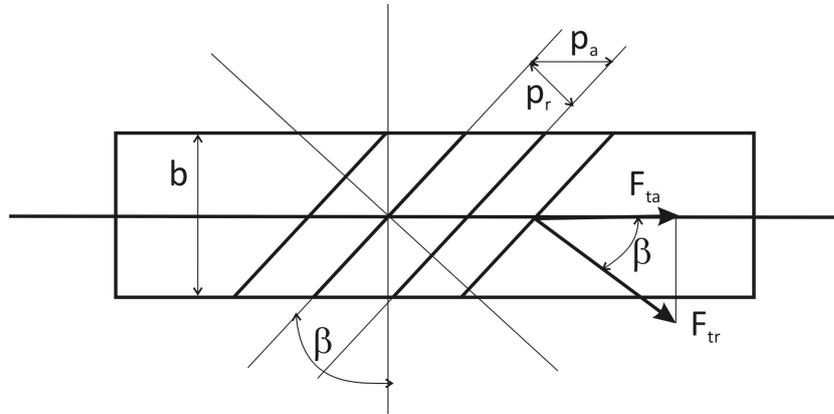


FIGURE 4.44 – Géométrie des dentures hélicoïdales : pas et modules réels et apparents

Les profils sont toujours en développante de cercle mais l'axe des dents est incliné d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe principal du cylindre primitif (voir Figure 4.44). La section réelle est celle perpendiculaire aux flancs des dents. Le pas primitif est le même que celui de la crémaillère pour une denture droite. Le module réel est donc celui qui est lié au pas réel. Il est normalisé et il est donné par celui de la crémaillère de taille :

$$p_r = \pi m_r$$

La section apparente est celle située dans le plan moyen de la roue perpendiculaire à l'axe de rotation. Dans la section apparente, le pas primitif apparent ou tangent  $p_t$  est défini par :

$$p_t = \pi m_t$$

Les pas apparents et réels sont liés par la valeur de l'angle d'hélice (voir Figure 4.44) :

$$p_t = \frac{p_r}{\cos \beta_0}$$

Le module apparent est lié au module réel :

$$m_t = \frac{m_r}{\cos \beta_0}$$

On peut encore définir le pas axial  $p_x$  comme la distance entre deux flancs correspondants dans un plan de coupe contenant l'axe de rotation

$$p_x = \frac{p_r}{\sin \beta_0}$$

### 4.4.2 Forces sur la denture hélicoïdale

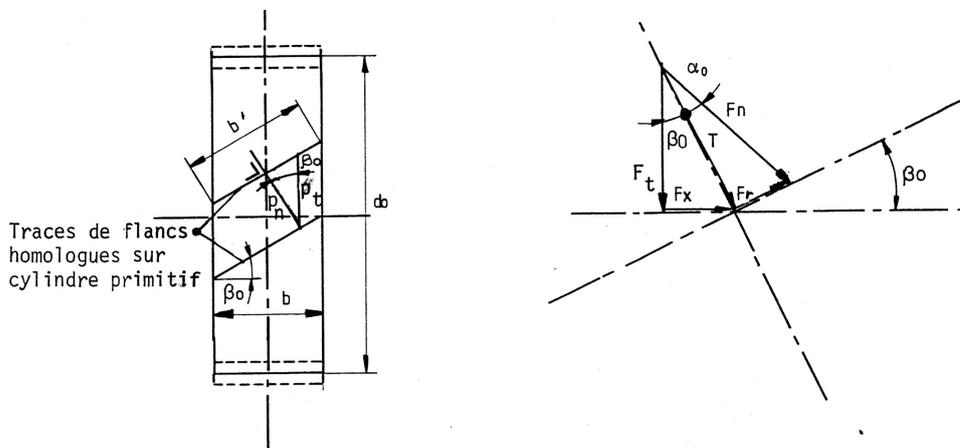


FIGURE 4.45 – Décomposition des efforts d'engrènement dans le cas d'une denture hélicoïdale

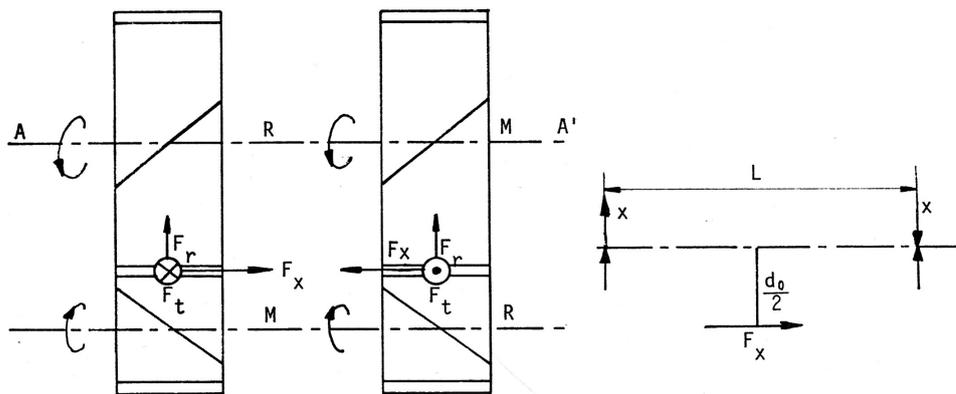


FIGURE 4.46 – Décomposition des efforts d'engrènement dans le cas d'une denture hélicoïdale

Comme dans le cas des dentures droites, l'effort  $F_n$  réellement transmis est celui qui est produit normalement aux flancs des dents. Il vient en conséquence (Figure 4.45)

$$F_r = F_n \sin \alpha_0 \quad (4.73)$$

$$T = F_n \cos \alpha_0 \quad (4.74)$$

$F_r$  est une force radiale tendant à repousser les roues. La composante  $T$  est située à la fois dans le plan normal à la dent et dans le plan tangent au cylindre primitif.

La composante  $T$  se décompose à son tour en une partie tangentielle et une autre axiale :

$$F_x = T \sin \beta_0 \quad (4.75)$$

$$F_t = T \cos \beta_0 \quad (4.76)$$

C'est la force tangentielle  $F_t$  dans le plan circonférentielle qui est donnée par la puissance :

$$F_t = \frac{\mathcal{P} 60}{\pi d_0 N} \quad (4.77)$$

La composante  $F_t$  est tangentielle. Elle est dirigée dans le sens du mouvement pour une roue réceptrice et, à l'opposé, dirigée dans le sens contraire du mouvement pour une roue motrice.

La force normale  $T$  au profil dans le plan réel s'obtient à partir de  $F_t$  par la relation :

$$T = \frac{F_t}{\cos \beta_0} \quad (4.78)$$

et la composante axiale  $F_x$

$$F_x = T \sin \beta_0 = F_t \tan \beta_0 \quad (4.79)$$

Finalement la force radiale tendant à repousser les engrenages s'obtient par l'expression :

$$F_r = T \tan \alpha_0 = F_t \frac{\tan \alpha_0}{\cos \beta_0} \quad (4.80)$$

$F_r$  est toujours dirigé vers le centre de la roue considérée.

La composante  $F_x$  dépend du signe de  $\beta_0$  mais aussi du type de roue, motrice ou réceptrice. L'existence de  $F_x$  au niveau de la circonférence primitive

| $\beta_0$ | $\frac{\tan \alpha_0}{\cos \beta_0}$ | $\tan \beta_0$ |
|-----------|--------------------------------------|----------------|
| 10        | 0,369                                | 0,176          |
| 15        | 0,377                                | 0,268          |
| 20        | 0,387                                | 0,364          |
| 25        | 0,401                                | 0,466          |
| 30        | 0,420                                | 0,577          |

TABLE 4.4 – Tableau des valeurs pour les composantes axiales et radiales en fonction des angles courants

entraîne l'apparition d'un couple  $F_x d_0/2$  qui est repris au niveau des appuis (voir Figure 4.46) par des réactions  $R_x$  égales et opposées.

$$R_x \cdot L = F_x \frac{d_0}{2}$$

#### 4.4.3 Angle de pression apparent

L'angle de pression qui correspond à l'inclinaison du profil trapézoïdal de la crémaillère, n'est pas le même dans un plan normal à la denture et dans le plan moyen de la roue.

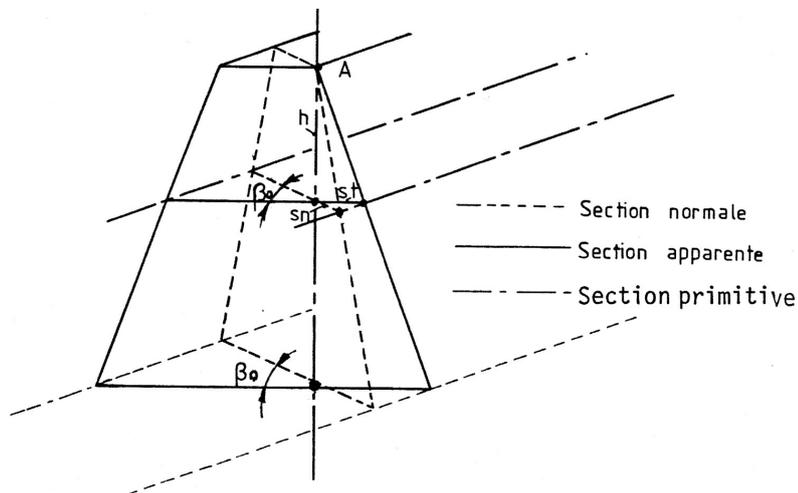


FIGURE 4.47 – Angle de pression apparent

Coupons les flancs de la crémaillère (Figure 4.47) par un plan normal à la dent (section en traits interrompus) et par un plan perpendiculaire à l'axe de

rotation (section en traits continus) passant par le même point A. Coupons ces plans particuliers par le plan primitif de la crémaillère, matérialisé par les traits d'axe. On définit ainsi un triangle dont les côtés  $s_t$  et  $s_n$  sont les demi-pas respectivement contenus dans les plans apparent et normal. Si  $h$  mesure la distance entre A et le plan primitif, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} s_n &= s_t \cos \beta_0 \\ s_t &= h \tan \alpha_{0t} \\ s_n &= h \tan \alpha_0 \end{aligned}$$

En éliminant  $h$ ,  $s_t$  et  $s_n$ , il vient la proposition :

$$\tan \alpha_{0t} \cos \beta_0 = \tan \alpha_0 \quad (4.81)$$

On peut obtenir la même expression en utilisant les valeurs des modules normaux et apparents,

$$\boxed{\tan \alpha_{0t} = \frac{\tan \alpha_0}{\cos \beta_0}}$$

#### 4.4.4 Dimensions générales des roues

Comme pour les dentures droites, la dent dans le plan normal est normalisée. Les hauteurs et diamètres d'addendum et de dedendum sont donnés en fonction du module normal  $m_n$  :

$$\begin{aligned} h_a &= 1,00 m_n & d_a &= Z m_t + 2m_n \\ h_f &= 1,25 m_n & d_f &= Z m_t - 2,5m_n \\ S_{0n} &= \frac{\pi m_n}{2} & S_{0t} &= \frac{\pi m_t}{2} = \frac{S_{0n}}{\cos \beta_0} \end{aligned}$$

En outre, on peut écrire comme pour les dentures droites

$$\pi d_0 = p_t Z$$

soit

$$d_0 = Z m_t = Z \frac{m_n}{\cos \beta_0}$$

Il s'ensuit que l'entraxe se calcule par la formule

$$a_0 = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = \frac{Z_1 + Z_2}{2 \cos \beta_0} m_n$$

qui montre que la valeur obtenue est rarement un nombre entier de millimètres. Deux solutions pour remédier à ce problème. Soit réaliser un déport de denture adéquat, soit introduire l'angle d'hélice  $\beta_0$  adéquat qui rend  $a_0$  entier.

#### 4.4.5 Nombre de dents et diamètre primitif de la denture droite équivalente

En première approximation, on peut admettre que la roue circulaire à denture hélicoïdale définit un cylindre de révolution qui est coupé par un plan perpendiculaire à la direction des dents dans la zone de contact. Etant donné que la section d'un cône par un plan est une ellipse, on est amené à considérer à un tracé elliptique porteur d'une denture droite. Afin de traiter par la suite la roue à denture hélicoïdale comme une roue à denture droite fictive, on veut calculer la courbure du cylindre elliptique au niveau de l'engrènement (Figure 4.48).

Le petit axe de l'ellipse n'est pas déformé, il vaut  $d_0$  diamètre primitif de la roue cylindrique. Le rayon de courbure au niveau du petit axe est donc donné par  $d_0/2$  le demi diamètre primitif de la roue à denture droite.

Le grand axe de l'ellipse est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont l'angle adjacent à  $d_0$  vaut  $\beta_0$ , l'angle d'inclinaison des dents (Voir Figure 4.48).

Après calcul [5], on trouve le diamètre virtuel  $d_v$  selon le grand et le petit axe de l'ellipse :

$$a = \frac{d_0}{2 \cos \beta_0} \quad b = \frac{d_0}{2}$$

La courbure au niveau du petit axe vaut donc

$$d_v = 2 \rho = \frac{d_0}{\cos^2 \beta_0}$$

On peut ensuite écrire avec  $Z_v$  le nombre de dents virtuel associé à  $d_v$

$$Z_v m_n = d_v = \frac{d_0}{\cos \beta_0} = \frac{Z m_t}{\cos \beta_0}$$

et comme

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta_0}$$

on tire l'estimation

$$Z_v^{(1)} = \frac{Z}{\cos^3 \beta_0} \quad (4.82)$$

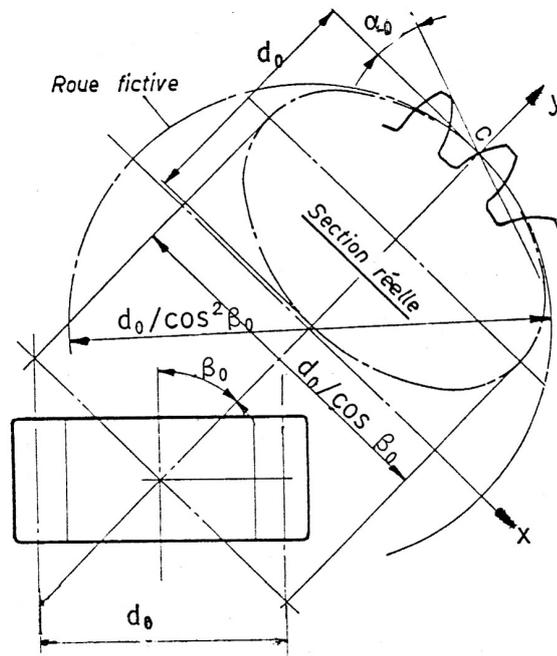


FIGURE 4.48 – Denture droite équivalente

Ceci n'est qu'une première estimation. Une étude plus approfondie de l'engrènement dans la coupe normale permet d'obtenir la vraie valeur de nombre virtuel de dents. Elle donnée par la relation :

$$Z_v^{(2)} = Z \frac{\text{inv}(\alpha_{0t})}{\text{inv}(\alpha_0)} \quad (4.83)$$

Traitons un exemple. Soient les caractéristiques suivantes pour un engrenage à denture hélicoïdale :

$$Z = 20 \text{ dents}$$

$$\alpha_0 = 20^\circ$$

$$\beta_0 = 15^\circ$$

Il vient

$$Z_v^{(1)} = \frac{20}{\cos^3 15^\circ} = 22,19 \text{ dents}$$

$$\alpha_{0t} = \tan^{-1} \left( \frac{\tan 20^\circ}{\cos 15^\circ} \right) = 20,6469^\circ$$

$$Z_v^{(2)} = 20 \frac{\text{inv}(20,6469^\circ)}{\text{inv}(20^\circ)} = 22,07 \text{ dents}$$

### 4.4.6 Déport de dentures hélicoïdales

Tout ce qui a été dit à propos des dentures droites est applicable aux dentures hélicoïdales, à condition de considérer la roue droite équivalente :

— Module normalisé  $m_n$  :

$$m_n = m_t \cos \beta_0$$

— Angle  $\alpha_0$  :

$$\tan \alpha_0 = \tan \alpha_{0t} \cos \beta_0$$

— Nombre équivalent de dents :

$$Z_v = \frac{Z}{\cos^3 \beta_0}$$

On peut ainsi écrire par analogie avec les développements introduits au niveau de l'étude du déport des dentures droites ( $X$  et  $x$  les déports en valeurs absolues et relatives).

$$X = x m_n$$

Les diamètres d'addendum et de dedendum deviennent

$$\begin{aligned} d_a &= d + 2 m_n + 2 X \\ d_f &= d - 2 m_n + 2 X \end{aligned}$$

Les demi pas au diamètre primitif valent :

$$\begin{aligned} S_{0n} &= \frac{\pi m_n}{2} + 2 x m_n \tan \alpha_0 \quad (\text{dans plan normal}) \\ S_{0t} &= \frac{\pi m_t}{2} + 2 x m_n \tan \alpha_{0t} \quad (\text{dans plan moyen}) \end{aligned}$$

L'entraxe  $a_0$  est donné par :

$$a \cong a_0 + \frac{(x_1 + x_2) m_n}{\sqrt[4]{1 + 26 \frac{x_1 + x_2}{Z_{1v} + Z_{2v}}}}$$

L'entraxe  $a$  peut être calculé exactement à partir des caractéristiques de la denture droite équivalente, à condition de négliger la variation de  $\beta_0$  sur la hauteur de la dent (même "pas" d'hélice, mais développement  $\pi d$  différent).

#### 4.4.7 Longueur de recouvrement d'une denture hélicoïdale. Paramètre de recouvrement

Soit  $S_p$  le décalage entre les sections apparentes des dents dans les plans transversaux limitant la largeur de la roue et mesuré dans le plan tangent aux cylindres primitifs des roues en prise (voir Figures 4.41 et 4.49).

On peut écrire

$$S_p = b \tan \beta_0$$

avec  $\beta_0$  l'angle d'inclinaison des dents dans le plan tangent au cylindre primitif dans la roue.

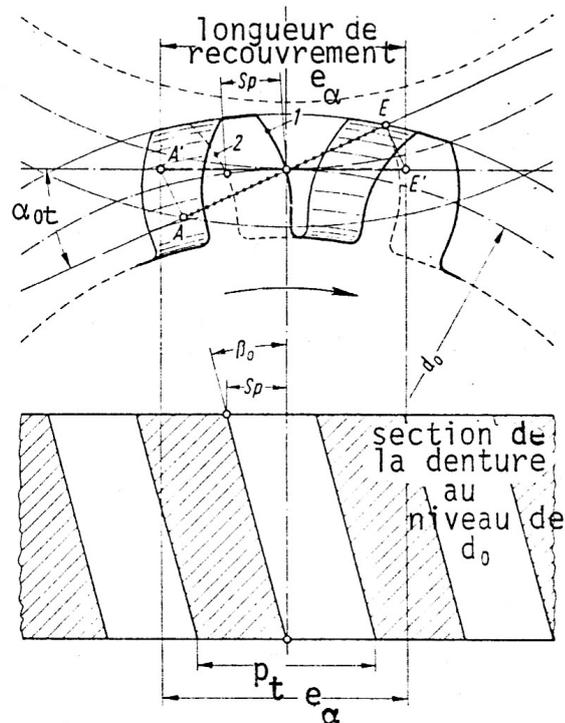


FIGURE 4.49 – Recouvrement des dentures hélicoïdales

Lorsque le flanc d'une dent en prise au niveau du plan limite de la roue passe du premier point d'approche au dernier point de retraite, on parcourt une distance  $e_\alpha$ , la longueur de conduite projetée mesurée sur l'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et du plan tangent aux cylindres primitifs.

Lorsque cette face de la dent dépasse le point de retraite, la face arrière de la dent décalée de  $S_p$  par rapport à celle-ci est encore en phase de retraite. Cette situation concerne d'ailleurs une portion plus ou moins importante de la dent.

On peut dès lors définir la longueur de recouvrement réelle totale comme la somme de  $e_\alpha$ , calculée comme dans le cas de dentures droites, i.e.

$$e_\alpha = \frac{l}{\cos \alpha_{0t}}$$

et de  $S_p$ , décalage linéaire des sections.

Il vient

$$\begin{aligned} e_\gamma &= e_\alpha + S_p \\ \epsilon_\gamma &= \epsilon_\alpha + \frac{S_p}{p_t} = \epsilon_\alpha + \frac{b \tan \beta_0}{\pi m_t} \end{aligned}$$

Comme  $m_t = m_n / \cos \beta_0$ , on a

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \frac{b \sin \beta_0}{\pi m_n} = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta$$

En général, le paramètre

$$\epsilon_\beta = \frac{b \sin \beta_0}{\pi m_n} \approx 1,2$$

Il en résulte que la taille oblique des dentures améliore considérablement la qualité du recouvrement.

On notera que le rapport de conduite  $\epsilon_\alpha$  est évalué dans le plan moyen de la roue où l'on a un angle de pression tangent  $\alpha_{0t}$ .

#### 4.4.8 Résistance des dentures hélicoïdales

Une fois calculés les efforts normaux aux dentures, on peut traiter la résistance des dentures hélicoïdales. C'est l'effort  $T$  tangent au cercle primitif qui sollicite la dent en flexion.

Le module est donc choisi tel que

$$\boxed{m_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{T}{k R_\phi}}} \quad (4.84)$$

avec

$$b = k m_r \quad (4.85)$$

$k$  choisi entre 6 et 10 afin d'avoir continuité du mouvement. Le module réel  $m_r$  est choisi dans les séries des nombres normaux de Renard.

On a donc

$$m_t = \frac{m_r}{\cos \beta_0}$$

Pour qu'il y ait continuité, il faut que la roue dentée ait au moins une certaine largeur. Il faut que l'arc parcouru lorsque le contact court le long du flanc de la dent soit plus grand que l'arc du pas apparent.

$$b \tan \beta_0 \geq p_t = \frac{\pi m_r}{\cos \beta_0}$$

Il vient

$$\boxed{b \geq \frac{\pi m_r}{\sin \beta_0}} \quad (4.86)$$

Pour  $\beta_0 = 25^\circ$ , on trouve

$$\boxed{b \geq 7,4 m_r} \quad (4.87)$$

## 4.5 CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES

### 4.5.1 Détermination de la géométrie approchée

#### Dentures droites

*Sélection de  $Z_1$  et de  $d_{01}$*

On sait que le diamètre primitif  $d_{01}$  doit être supérieur au diamètre de pied  $d_f$ , d'au moins 2,5 modules  $m$ . Assimilant le diamètre de pied soit au diamètre de l'arbre légèrement majoré (pignon arbré), soit au diamètre extérieur du moyeu (pour un pignon rapporté), on écrira en première approximation :

$$d_{01} - 2,5 m = d_{01} \left(1 - \frac{2,5}{Z_1}\right) \geq C \cdot d$$

avec

$$C = 1,2 \quad \text{pour un pignon arbré}$$

$$C = 1,8 \quad \text{pour un pignon rapporté}$$

#### 4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 205

avec  $d$ , diamètre de l'arbre portant le pignon, compte tenu éventuellement d'une rainure de cale si nécessaire. Il en découle la formule :

$$d_{01} \geq \frac{C \cdot d \cdot Z_1}{Z_1 - 2,5}$$

$d_{01}$  sera donc déterminé dès que  $Z_1$  sera fixé, ou vice versa.

Le nombre de dents  $Z_1$  peut être choisi en respectant les règles suivantes (DIN)

$$\begin{aligned} 20 < Z_1 < 25 & \text{ si } 5 \text{ m/s} < v_0 \\ 18 < Z_1 < 22 & \text{ si } 1 \text{ m/s} < v_0 < 5 \text{ m/s} \\ 15 < Z_1 < 20 & \text{ si } v_0 < 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

avec

$$v_0 = \frac{\pi d_{01} N}{60}$$

On remarque que  $Z_1 = 20$  appartient à tous les intervalles ; cette valeur est adoptée dans une première itération. Le diamètre primitif  $d_{01}$  s'en déduit :

$$d_{01} = \frac{20 C \cdot d}{20 - 2,5}$$

soit

$$\begin{aligned} d_{01} &= 1,37 d \quad \text{pour un pignon arbré} \\ d_{01} &= 2,05 d \quad \text{pour un pignon rapporté} \end{aligned}$$

On en déduit la valeur du module théorique  $m^*$  :

$$m^* = \frac{d_{01}}{Z_1}$$

que l'on normalise à la valeur juste supérieure  $m$  dans la série de Renard.

Un nouveau diamètre primitif s'en déduit

$$d_{01} = 20 m$$

qui permet de calculer la vitesse  $v_0$  réelle.

Ce résultat permet d'ajuster le nombre de dents à une valeur supérieure, si nécessaire, tout en maintenant la valeur du module évaluée précédemment.

Un calcul itératif conduit à déterminer :

$$\begin{aligned} Z_1 \\ m \\ d_{01} \\ Z_2 &= i Z_1 \\ d_{02} &= Z_2 m \\ a_0 &= d_{01} \frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

On admettra une légère erreur sur le rapport de réduction  $i$ , typiquement jusque 3 à 5 %, de manière à permettre un choix de  $Z_1$  et de  $Z_2$  qui soient des nombres premiers entre eux. On évitera ainsi le risque d'une usure localisée sur quelques dents seulement.

On note que dans le cas où  $a_0$  et  $i$  sont fixés simultanément,  $d_{01}$  et  $d_{02}$  le sont également. En effet :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{d_{01} + d_{02}}{2} \\ i &= \frac{d_{02}}{d_{01}} \end{aligned}$$

dont on déduit les solutions du système,  $d_{01}$  et  $d_{02}$ .

*Largeurs du pignon  $b_1$  et de la roue  $b_2$*

Les largeurs  $b_1$  et  $b_2$  sont choisies dans un premier temps en respectant les règles de bonne pratique suivantes.

a) La largeur  $b_2$  de la roue est plus faible que celle du pignon  $b_1$  sauf dans le cas de pignon arbré.

$$b_2 = 0,9 b_1 \quad b_1 - b_2 \leq 5 \text{ mm}$$

b) La largeur du pignon  $b_1$  doit être choisie de manière à conduire à des paramètres  $\psi_d$  et  $\psi_m$  compatibles avec l'application :

Valeur du paramètre  $\psi_d = b_1/d_{01}$

— Faible vitesse ( $v_0 < 1 \text{ m/s}$ ), denture et pivoterie de qualité moyenne (roue folle, crabotage) :

$$\psi_d = 0,23 + 0,0857 i$$

#### 4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 207

- Vitesse moyenne (entre  $\sim 1 \text{ m/s} < v_0 < 5 \text{ m/s}$ ), denture et pivoterie de bonne qualité normale.

$$\psi_d = 0,50 + 0,0857 i$$

- Grande vitesse et durée de vie élevée ; denture et pivoterie très soignées ( $v_0 \simeq 5 \text{ m/s}$  et plus).

$$\psi_d = 0,80 + 0,0857 i$$

- Très grande vitesse ( $v_0 \gg 5 \text{ m/s}$ ), durée de vie élevée ; la meilleure précision pour l'ensemble.

$$\psi_d = 1,20 + 0,0857 i$$

Valeur du paramètre  $\psi_M = b_1/m$  ( $\psi_m = 15$  en moyenne)

- Denture coulée, de mauvaise qualité.

$$8 < \psi_m < 10$$

- Denture soignée mais problème de parallélisme, déformée d'arbre (roue en porte-à-faux).

$$10 < \psi_m < 15$$

- Denture soignée et parallélisme très correct.

$$15 < \psi_m < 30$$

- Meilleure qualité de denture, appui très rigide et excellent parallélisme.

$$30 < \psi_m$$

c) Les valeurs  $b_{1m}$  et  $b_{1d}$  sont généralement différentes. On adoptera alors leur moyenne dans les calculs ultérieurs.

#### Dentures hélicoïdales

La méthode développée pour la denture droite est valable jusqu'au calcul du module apparent

$$m_t = \frac{d_{01}}{Z_1} \quad \text{non normalisé}$$

La largeur de la dent  $b'_1$  doit toujours être supérieure à la largeur  $b'_2$  de la roue

$$b'_1 > b'_2$$

La largeur du pignon est ensuite choisie en fonction des paramètres  $\psi_m$  et  $\psi_d$ , d'écriture modifiée.

$$\psi_m = \frac{b_1}{m_t}$$

$$\psi_d = \frac{b_1}{d_{01}}$$

On notera que  $\psi_m$  ne peut dépasser 30 quand  $\beta_0$  est supérieur à  $25^\circ$ .

La norme DIN permet ensuite de déterminer l'inclinaison provisoire des dents  $\beta_0$  en fixant temporairement  $\epsilon_\beta = 1.2$  dans une première étape du calcul :

$$\epsilon_\beta = \frac{S_p}{p_t} = \frac{b_2 \tan \beta_0}{\pi m_t} = \frac{0.9 b_1 \tan \beta_0}{\pi m_t} = 1.2$$

et partant de là :

$$\beta_0 = \tan^{-1} \left( 3.5 \frac{m_t}{b_1} \right)$$

que l'on arrondit à un nombre entier de degrés.

On en déduit la valeur du module normal théorique  $m^*$  que l'on normalise à la valeur supérieure.

$$m_n^* = m_t \cos \beta_0 \leq m_n^{\text{ISO}}$$

Toute la géométrie sera recalculée en adoptant ce module normalisé et la valeur arrondie de  $\beta_0$  :

$$Z_1$$

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta_0}$$

$$d_{01} = Z_1 m_t$$

$$d_{02} = i d_{01}$$

$$Z_2 = i Z_1$$

$$a_0 = d_{01} \frac{1+i}{2}$$

$$b_1 = 3.5 \frac{m_t}{\tan \beta_0} \quad \text{et} \quad b'_1 = \frac{b_1}{\cos \beta_0}$$

$$b'_2 = \frac{b'_1}{1.1} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{b_1}{1.1}$$

Le calcul de la vitesse périphérique  $v_0$  au cercle primitif va permettre d'ajuster le nombre de dents. L'angle d'hélice  $\beta_0$  peut être modifié ultérieurement de manière à conduire à un entraxe fixé à l'avance.

$$a_0 = \frac{Z_1 m_n}{\cos \beta_0} \frac{1+i}{2}$$

## 4.5.2 Méthode simplifiée de dimensionnement selon l'ISO

### Domaine d'application

Cette méthode permet le dimensionnement rapide des engrenages pour un avant-projet. Elle s'applique aux engrenages dont la géométrie est conforme aux normes ISO.

Les cas envisagés sont ceux de la mécanique générale, de la grosse mécanique et des engrenages à grande vitesse.

### Pression de contact

Le regroupement des facteurs de la méthode générale ISO permet d'écrire :

$$a^3 \geq \frac{K_A \mathcal{P}}{k n_1 Z_N^2} \frac{(u \pm 1)^3}{u} K_i \quad (4.88)$$

avec

- $\mathcal{P}$  la puissance à transmettre en kW,
- $a$  l'entraxe en mm,
- $K_A$  le facteur d'application donné au Tableau de la Figure 4.50,
- $b$  la largeur de denture,
- $k$  le rapport  $b/a$  entre la largeur de denture et l'entraxe ,
- $Z_N$  le facteur de Whöler,
- $u$  le rapport d'engrenage  $u = Z_2/Z_1$
- $K_i$  un facteur tenant compte du type d'engrenage, des matériaux, de la vitesse au diamètre primitif, de la qualité des dentures,
- $n_1$  la fréquence de rotation en Hz.

On considère  $u + 1$  dans le cas d'un engrenage extérieur et  $u - 1$  pour un engrenage intérieur.

### Flexion de la dent

$$Z_1 \leq Z_\infty \frac{u \pm 1}{u} \quad (4.89)$$

### Valeurs des coefficients

Les calculs ci-dessus demandent la connaissance des coefficients  $K_A$ ,  $Z_N$ ,  $K_i$  et  $Z_\infty$

#### A/ Facteur d'application $K_A$

On considère les facteurs d'application suivants donnés au tableau ci-dessous avec les conditions suivantes :

- A : moteur électrique ou turbine
- B : moteur polycylindrique
- C : moteur monocylindrique
- I : machine menée sans chocs
- II : machine menée avec chocs modérés
- III : machine menée avec chocs caractérisés
- a : jusqu'à 12 heures de fonctionnement par jour
- b : plus de 12 heures de fonctionnement par jour

|   | I    |      | II   |      | III  |      |
|---|------|------|------|------|------|------|
|   | a    | b    | a    | b    | a    | b    |
| A | 1    | 1,16 | 1,25 | 1,45 | 1,5  | 1,75 |
| B | 1,25 | 1,45 | 1,5  | 1,75 | 1,75 | 2,25 |
| C | 1,5  | 1,75 | 1,75 | 2,25 | 2,25 | 2,85 |

FIGURE 4.50 – Valeurs du facteur d'application  $K_A$

#### B/ Facteur de Whöler $Z_N$

On choisira un nombre H d'heures de fonctionnement souhaitées et on calculera :

$$N = 3,6 H n_1 10^{-4} \quad (4.90)$$

Si  $N \geq 1$ , on aura

$$Z_N = 1$$

Si  $N < 1$ , on calculera

$$Z_N = (N)^{-0,1}$$

#### C/ Facteur de pression superficielle $K_i$

4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 211

|  | I                 |            | II                |            | III               |            | IV                |            |
|--|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|
|  | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ |
| $v \leq 5$ m/s   | $1,60 \cdot 10^4$ | 21         | $2,95 \cdot 10^4$ | 28         | $3,31 \cdot 10^4$ | 29         | $4,05 \cdot 10^4$ | 30         |
| $5 < v \leq 10$ m/s  | $1,76 \cdot 10^4$ | 21         | $3,24 \cdot 10^4$ | 28         | $3,77 \cdot 10^4$ | 30         | $4,63 \cdot 10^4$ | 29         |
| $10 < v \leq 15$ m/s   | $1,88 \cdot 10^4$ | 21         | $3,43 \cdot 10^4$ | 28         | $4,15 \cdot 10^4$ | 31         | $5,16 \cdot 10^4$ | 32         |
| $15 < v \leq 30$ m/s   | $1,98 \cdot 10^4$ | 21         | $3,65 \cdot 10^4$ | 27         | $4,63 \cdot 10^4$ | 31         | $5,79 \cdot 10^4$ | 32         |
| $30 < v \leq 50$ m/s   | $2,16 \cdot 10^4$ | 22         | $3,95 \cdot 10^4$ | 27         | -                 | -          |                   | -          |
| Pour les dentures droites, multiplier $K_i$ par 1,4 et $Z$ par 1,2 |                   |            |                   |            |                   |            |                   |            |

FIGURE 4.51 – Valeurs des facteurs  $K_i$  et  $Z_\infty$  - Mécanique générale

Ce facteur est donné dans les Tableaux 4.51 à 4.53 rédigés en  $mm^2/N$ .

Le tableau de la Figure 4.51 est relatif aux *engrenages de la mécanique générale*. Les nomenclatures I, II, III et IV sont relatives aux cas suivants :

- I** Pignon et roue en acier cémenté trempé. Rectification - Qualité 5 et 6.
- II** Pignon comme I, roue en acier allié traité pour 350 HB. Rectification. Qualités ISO 5 et 6.
- III** Pignon comme roue en II, roue en acier allié 270 brinell - Usinage soigné par génération - Qualité ISO 6 et 7.
- IV** Pignon en acier allié 270 HB, roue en acier allié 225 HB - Usinage soigné - Qualité ISO 6 et 7.

Les dentures sont généralement hélicoïdales et parfois droites. Dans ce dernier cas, multiplier les valeurs de  $K_i$  par 1,4 et  $z_\infty$  par 1,2.

Les largeurs de dentures ne dépasseront pas le diamètre du pignon, surtout quand la qualité diminue. Les valeurs moyennes de  $k$  sont 0,35 avec une variation de 0,2 à 0,5. La valeur de  $k$  sera d'autant plus petite que  $u$  est grand. On prendra aussi une plus faible largeur pour les dentures droites. Pour celles-ci, on doit limiter  $v$  à 5 m/s.

Le tableau 4.52 est relatif à la *grosse mécanique*.

- I** Pignon en acier allié traité pour 350 HB, roue en acier allié 270 HB.
- II** Pignon en acier 270 HB et roue en acier 225 HB.

Les qualités d'exécution sont moins fines (ISO 7 à 10), les modules sont grands et les vitesses limitées. On prendra les valeurs de  $k$  proches de 0,25. On prendra  $K_A = 1,75$  et plus.

|                             | I                 |            | II                |            |
|-----------------------------|-------------------|------------|-------------------|------------|
|                             | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ |
| Denture en chevron $v < 5$  | $2,31 \cdot 10^4$ | 20         | -                 | -          |
| Denture en chevron $v < 10$ | $2,64 \cdot 10^4$ | 23         | $3,54 \cdot 10^4$ | 25         |
| Denture droite $v < 5$      | $3,31 \cdot 10^4$ | 23         | $4,51 \cdot 10^4$ | 27         |

FIGURE 4.52 – Valeurs des facteurs  $K_i$  et  $Z_\infty$  - Grosse mécanique. A appliquer avec  $K_A \geq 1.75$

|                 | I                 |            | II                |            | III               |            | IV                |            |
|-----------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|
|                 | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ | $K_i$             | $z_\infty$ |
| Qualité ISO 4   | $1,84 \cdot 10^4$ | 23         | $3,37 \cdot 10^4$ | 36         | $3,76 \cdot 10^4$ | 40         | $4,62 \cdot 10^4$ | 40         |
| Qualité ISO 5,6 | $2,84 \cdot 10^4$ | 25         | $5,22 \cdot 10^4$ | 36         | $5,78 \cdot 10^4$ | 40         | $7,04 \cdot 10^4$ | 40         |

FIGURE 4.53 – Valeurs des facteurs  $K_i$  et  $Z_\infty$  - Engrenages à grande vitesse

Le tableau de la Figure 4.53 est relatif *aux engrenages à grande vitesse*.

Les roues sont hélicoïdales simples avec un angle d'hélice faible ou modéré.

La construction est très rigide. Elles sont massives. La qualité est fine (ISO 4 à 6). La préférence est accordée aux solutions permettant un assez grand nombre de dents. Les largeurs de denture sont souvent supérieures au diamètre primitif du pignon ( $b$  de 1 à  $1,5 d_{01}$ ). On prend des valeurs de  $k$  de 0,35 (pour un rapport de réduction  $u$  grand) à 0,5 (rapport  $u$  petit). La forme des dents après rectification tiendra compte des dilatations et déformations en service qui donneront alors la forme théorique.

**I** Pignon et roue en acier de cémentation, cémenté et trempé.

**II** Pignon cémenté et trempé, roue en acier allié 350 HB.

**III** Roue en acier 270 HB, pignon en acier allié 350 HB.

**IV** Pignon en acier 210 HB, roue en acier 225 HB. Denture en chevron de haute qualité.

*D/ Nombre de dents limite  $Z_\infty$*

Ceux-ci sont donnés au sein dans des Tableaux des Figures 4.51 à 4.53 en regard des facteurs de pression superficielle.

### 4.5.3 Exemples d'application de la méthode ISO simplifiée

#### Exercice 1 : denture droite

##### Énoncé

Calculez par la méthode ISO simplifiée l'engrenage d'un réducteur entraîné par moteur électrique (sans chocs) à 16 Hz, d'une puissance nominale de  $\mathcal{P} = 300 \text{ kW}$ , avec une réduction de  $4 (\pm 3 \%)$  et destiné à un motoriser un treuil de traction utilisé 8 heures par jour. Durée de vie souhaitée 20.000 heures.

On suppose que l'on prend des engrenages droits de classe IV de mécanique générale avec ou non déport de denture pour une plus grande résistance. On impose un module  $m = 8$ . On adoptera un angle de pression standard  $\alpha_0 = 20^\circ$ . En outre le rapport  $k$  entre l'entraxe et la largeur de dent vaudra 0,35.

Déterminer les caractéristiques des engrenages  $Z_1, Z_2, a, X_1, X_2$  et  $\alpha'$ .

##### Solution

La **pression de contact** permet de déterminer l'entraxe. Le regroupement des facteurs de la méthode ISO permet d'écrire :

$$a^3 = \frac{K_A \mathcal{P}}{k n_1 Z_N^2} \frac{(u \pm 1)^3}{u} K_i$$

avec

- $\mathcal{P}$  la puissance à transmettre en kW,
- $a$  l'entraxe en mm,
- $n_1$  la fréquence de rotation en Hz,
- $K_A$  le facteur d'application,
- $b$  la largeur de denture,
- $k$  le rapport  $b/a$  entre la largeur de denture et l'entraxe ,
- $Z_N$  le facteur de Wöhler,
- $u$  le rapport d'engrenage  $u = Z_2/Z_1$
- $K_i$  un facteur tenant compte du type d'engrenage, des matériaux, de la vitesse au diamètre primitif, de la qualité des dentures.

L'évaluation de toutes les données permet de déterminer :

- $\mathcal{P}=300 \text{ kW}$ ,
- $n_1=16 \text{ Hz}$ ,
- $k = b/a = 0,35$ ,

—  $u = 4$ .

Pour déterminer le facteur d'application de la charge, on utilise le tableau de la Figure 4.50. On a un moteur électrique (A), l'opération se passe sans choc (I) et le fonctionnement a lieu 8 heures par jour (a). Il vient donc

$$K_A = 1$$

Pour le facteur de Wöhler, on considère le fait que le treuil travaille 8 heures par jour à une fréquence de 16 Hz. Il vient

$$N = 3,6 * 20.000 * 16 * 10^{-4} = 115,2 \geq 1$$

On prend donc

$$Z_N = 1$$

On détermine maintenant le facteur  $K_i$ .

Pour cela on fait l'hypothèse que la vitesse périphérique est comprise entre 5 et 10 m/s, quitte à revenir après sur celle-ci.

$$5 \leq v \leq 10 \text{ m/s}$$

Ainsi avec un engrenage à denture de droite de classe IV de mécanique générale, le Tableau de la Figure 4.51 fournit :

$$K_i = 4,63 \cdot 10^4 * 1,4$$

. Le facteur 1,4 provient du fait que l'on a une denture droite. De même, pour le  $Z_\infty$ , on a

$$Z_\infty = 29 * 1,2 = 34,8$$

Il vient la valeur de l'entraxe minimale :

$$a^3 \geq \frac{1\,300}{0,35 * 16 * 1,0^2} \frac{5^3}{4} * 6,482 \cdot 10^4 = 108.515.625$$

soit

$$a \geq 476,98 \text{ mm}$$

On peut déterminer maintenant le **nombre de dents** en résolvant deux équations

$$a = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = \frac{m}{2}(Z_1 + Z_2) \geq 477$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 4$$

Or on impose

$$m = 8$$

ce qui conduit à

$$(Z_1 + Z_2) \geq 119,25$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 4$$

Soit

$$Z_1 \geq 23,85$$

On prend

$$Z_1 = 24$$

Si on prend  $Z_1 = 24$  dents alors

$$Z_2 = 24 * 4 = 96$$

On doit prendre  $Z_1$  et  $Z_2$  premiers entre eux de sorte qu'on ajoute une unité à  $Z_2$ .

$$Z_2 = 97$$

On calcule maintenant **l'entraxe réel** résultant du nombre de dents choisis :

$$a_0 = (Z_1 + Z_2) \frac{m}{2} = (24 + 97) \frac{8}{2} = 484 \text{ mm}$$

Calculons également les **diamètres primitifs** des deux roues dentées

$$d_{01} = Z_1 m = 24 * 8 = 192 \text{ mm}$$

$$d_{02} = Z_2 m = 97 * 8 = 776 \text{ mm}$$

**Vérifions maintenant l'hypothèse de départ** qui supposait que la vitesse était dans l'intervalle  $5 \leq v \leq 10 \text{ m/s}$ .

$$v = \pi d_{01} n_1 = \pi 192 10^{-3} * 16 = 9,65 \text{ m/s}$$

ce qui rentre bien dans le cadre de notre hypothèse. Si ce n'était pas le cas, on effectuerait un cycle supplémentaire en partant de la vitesse trouvée maintenant.

Vérifions à présent si le **critère de flexion** de la dent est également vérifié.

$$Z_1 \leq Z_\infty \frac{u+1}{u}$$

On injecte les valeurs courantes

$$Z_{\infty} = 29 * 1,2 = 34,8 \quad Z_1 = 24 \quad u = 4$$

et on trouve,

$$Z_1 \leq 34,8 \frac{4+1}{4} = 43,5$$

Ce qui valide la démarche.

Calculons maintenant les **dépports**  $X_1$  et  $X_2$ .

Un déport conduisant à une grande résistance nécessite

$$x_1 + x_2 = 0,9$$

avec  $x = X/m$ .

A partir de ce point de départ, on fixe  $x_1$  au moyen de la relation :

$$x_1 = \lambda \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} + (x_1 + x_2) \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Avec

$$\lambda = 0,6$$

on trouve

$$x_1 = 0,6 \frac{97 - 24}{24 + 97} + 0,9 \frac{24}{24 + 97} = 0,5405$$

On en déduit

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = 0,9 - 0,5405 = 0,3595$$

Calculons le nouvel entraxe,

$$a = a_0 + \frac{(x_1 + x_2) m}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \right)}} = 484 + \frac{0,9 * 8}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{0,9}{24 + 97} \right)}} = 490,89 \text{ mm}$$

Calculons maintenant l'**angle de pression** après déport

$$\begin{aligned} \text{inv}(\alpha') &= \text{inv}(\alpha_0) + 2 \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \tan \alpha_0 \\ &= 0,0149 + \frac{2 * 0,9}{24 + 97} \tan 20^\circ = 0,0203 \end{aligned}$$

En inversant la fonction involute

$$\text{inv} \alpha' = \tan \alpha' - \alpha' = 0,0203$$

donne

$$\alpha' = 22^\circ$$

**Exercice 2 : denture droite et entraxe fixé****Énoncé**

Calculez par la méthode ISO simplifiée l'engrenage d'un réducteur entraîné par moteur électrique (sans chocs) à 16 Hz, d'une puissance nominale de  $\mathcal{P} = 300 \text{ kW}$ , avec une réduction de 4 ( $\pm 3\%$ ) et destiné à un motoriser un treuil de traction utilisé 8 heures par jour. Durée de vie souhaitée 20.000 heures.

On prend des engrenages à denture droite. L'entraxe est fixé à 400 mm. On adopte un angle de pression standard  $\alpha_0 = 20^\circ$ . En outre le rapport  $k$  entre l'entraxe et la largeur de dent vaudra 0,35.

Déterminer les caractéristiques des engrenages  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $m$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  et  $\alpha'$ . Fixer la classe de matériau à utiliser.

**Solution**

L'entraxe étant fixé

$$a = 400 \text{ mm}$$

nous allons déterminer la classe du matériau à utiliser.

L'équation de la pression de contact donne :

$$a^3 \geq \frac{K_A \mathcal{P}}{k n_1 Z_N^2} \frac{(u \pm 1)^3}{u} K_i$$

Si on utilise les coefficients déterminés de manière identique à l'exercice 1, on trouve

$$400^3 \geq \frac{1,0 * 300,0}{0,35 * 16 * 1^2} \frac{(4 + 1)^3}{4} K_i$$

soit

$$K_i \leq 27306$$

En se référant au Tableau de la Figure 4.51, pour des engrenages à denture droite de mécanique générale, cela correspond à des **engrenages de classe I** pour lesquels on a

$$K_i = 1,76 \cdot 10^4 * 1,4 = 24.640$$

On choisit donc un pignon et une roue en acier cémenté trempé, avec rectification pour atteindre une qualité 5 ou 6 ISO.

Vérifions maintenant la tenue à la flexion. Pour des engrenages à denture droite de classe I, on a

$$Z_{\infty} = 21 * 1,2 = 25,2$$

On insert cette valeur dans l'équation de la résistance à la flexion

$$Z_1 \leq Z_{\infty} \frac{u+1}{u}$$

et on trouve,

$$Z_1 \leq 25,2 \frac{4+1}{4} = 31,5$$

On calcule maintenant les caractéristiques de la denture comme dans l'exercice 1.

$$a = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = \frac{m}{2}(Z_1 + Z_2) = 400$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 4$$

On se donne cette fois un nombre de dents sur le pignon

$$Z_1 = 25$$

ce qui conduit à

$$\frac{m}{2}(25 + 4 * 25) = 400$$

soit

$$m = 6,4 \text{ mm}$$

On doit prendre  $m$  dans la série normalisé de Renard qui comprend soit les valeurs 6 et 8. On choisit de prendre la plus proche soit

$$m = 6$$

Comme on a diminué le module, on doit recalculer le nombre de dents qui correspond à cette nouvelle valeur du module. On détermine alors les **nombres de dents**  $Z_1$  et  $Z_2$  de manière définitive :

$$(Z_1 + Z_2) \frac{6}{2} \leq 400$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 4$$

On trouve

$$Z_1 = 26$$

et on prend  $Z_2$  premier vis-à-vis de  $Z_1$

$$Z_2 = 26 * 4 + 3 = 107$$

Calculons les **diamètres primitifs** des deux roues dentées

$$d_{01} = Z_1 m = 26 * 6 = 156 \text{ mm}$$

$$d_{02} = Z_2 m = 107 * 6 = 642 \text{ mm}$$

**Vérifions maintenant l'hypothèse de départ** qui supposait que la vitesse était dans l'intervalle  $5 \leq v \leq 10 \text{ m/s}$ .

$$v = \pi d_{01} n_1 = \pi 156 10^{-3} * 16 = 7,84 \text{ m/s}$$

ce qui confirme notre hypothèse.

Calculons les déports  $x_1 + x_2$  qui réaliseront exactement notre entraxe de  $a=400 \text{ mm}$ . On calcule d'abord l'**entraxe réel** résultant du nombre de dents choisis :

$$a_0 = (Z_1 + Z_2) \frac{m}{2} = (26 + 107) \frac{6}{2} = 399 \text{ mm}$$

On réalise un déport pour atteindre la valeur de  $400 \text{ mm}$ . L'équation de l'entraxe après déport nous donne :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \frac{(x_1 + x_2) m}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \right)}} \\ &= 399 + \frac{(x_1 + x_2) * 6}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{26 + 107} \right)}} = 400 \text{ mm} \end{aligned}$$

La solution de l'équation donne

$$x_1 + x_2 = 0,175$$

A partir de ce résultat, on fixe  $x_1$  au moyen de la relation :

$$x_1 = \lambda \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} + (x_1 + x_2) \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Avec

$$\lambda = 0,6$$

on trouve

$$x_1 = 0,6 \frac{107 - 26}{26 + 107} + 0,175 \frac{26}{26 + 107} = 0,3996$$

On en déduit

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = 0,175 - 0,3996 = -0,2246$$

Calculons maintenant l'angle de pression après déport

$$\begin{aligned} \text{inv}(\alpha') &= \text{inv}(\alpha_0) + 2 \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \tan \alpha_0 \\ &= 0,0149 + \frac{2 * 0,175}{26 + 107} \tan 20^\circ = 0,0159 \end{aligned}$$

En inversant la fonction involute, on obtient

$$\alpha' = 20,5^\circ$$

### Exercice 3 : denture hélicoïdale et entraxe fixé

#### Enoncé

Calculez par la méthode ISO simplifiée l'engrenage d'un réducteur entraîné par moteur électrique (sans chocs) à 16 Hz, d'une puissance nominale de  $\mathcal{P} = 300 \text{ kW}$ , avec une réduction de 4 ( $\pm 3\%$ ) et destiné à un motoriser un treuil de traction utilisé 8 heures par jour. Durée de vie souhaitée 20.000 heures.

On considère des engrenages hélicoïdaux de mécanique générale. On choisit un angle d'hélice  $\beta_0 = 20^\circ$  L'entraxe est fixé à 450 mm.

Déterminer les caractéristiques des engrenages  $Z_1, Z_2, m_n, X_1, X_2, \alpha$ . Fixer la classe de matériau à utiliser.

#### Solution

Faisons l'hypothèse d'une vitesse primitive comprise entre 5 et 10 m/s. Dans ce cas l'engrenage restera un engrenage de mécanique générale.

On utilise les tableaux pour extraire les valeurs de coefficients de l'équation de la pression de contact :

$$a^3 \geq \frac{K_A \mathcal{P}}{k n_1 Z_N^2} \frac{(u \pm 1)^3}{u} K_i$$

On trouve

4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 221

- $\mathcal{P} = 300 \text{ kW}$
- $u = 4$
- $n_1 = 16 \text{ Hz}$
- $k=0,35$
- $K_A = 1,0$  à partir du Tableau 4.50
- $Z_N = 1,0$  car

$$N = 3,6 \cdot 20.000 \cdot 16 \cdot 10^{-4} = 115,2 > 1$$

Si on utilise les coefficients ainsi déterminés, on trouve

$$450^3 \geq \frac{1,0 * 300,0}{0,35 * 16 * 1,0^2} \frac{(4 + 1)^3}{4} K_i$$

On déduit :

$$K_i \leq 54.432$$

Cette valeur correspondent à un engrenage hélicoïdal de classe IV de mécanique générale. En effet si on suppose que la vitesse tangentielle est comprise entre 5 et 10 m/s, on trouve dans le Tableau de la Figure 4.51 :

$$K_i = 4,63 \cdot 10^4$$

et

$$Z_\infty = 29$$

Contrairement aux exercices 1 et 2, il n'y pas de coefficients multiplicateur car l'engrenage est à denture hélicoïdale.

L'équation de résistance à la flexion nous donne

$$Z_1 \leq 29 \frac{4 + 1}{4} = 33,74$$

Le calcul des caractéristiques de la denture peut maintenant être réalisé. Nous avons un système de deux équations

$$a = \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = \frac{m_n Z_1 + Z_2}{2 \cos \beta_0} = 450$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 4$$

En se donnant  $Z_1 = 25$  dents,

$$\frac{m_n (25 + 4 * 25)}{2 \cos 20^\circ} = 450$$

nous en déduisons un module normal de

$$m_n = 6,77 \text{ mm}$$

On choisit de prendre la valeur normale la plus proche soit

$$m_n = 6$$

On doit recalculer le nombre de dents qui correspond à cette nouvelle valeur du module. On détermine alors les **nombre de dents**  $Z_1$  et  $Z_2$  de manière définitive :

$$\begin{aligned} \frac{(Z_1 + Z_2) 6}{\cos 20^\circ} \frac{1}{2} &\leq 450 \\ \frac{Z_2}{Z_1} &= 4 \end{aligned}$$

On trouve

$$Z_1 = 28$$

et on prend  $Z_2$  premier vis-à-vis de  $Z_1$

$$Z_2 = 28 * 4 - 1 = 111$$

On vérifie maintenant la validité de notre hypothèse de vitesse tangentielle. On calcule d'abord le diamètre primitif

$$d_{01} = \frac{m_n}{\cos \beta_0} Z_1 = 178,78 \text{ mm}$$

La vitesse tangentielle est donnée par

$$v = \pi d_{01} n_1 = \pi 178,78 10^{-3} * 16 = 8,9866 \text{ m/s}$$

Pour la largeur de l'engrenage, on prend d'abord la valeur moyenne  $k = 0,35$

$$b = 450 \cdot 0,35 = 157,5 \text{ mm}$$

que l'on arrondi à

$$b = 158 \text{ mm}$$

Calculons les déports  $x_1 + x_2$  qui réaliseront exactement notre entraxe de  $a=450$  mm. On calcule d'abord l'**entraxe réel** résultant du nombre de dents choisis :

$$a_0 = \left( \frac{Z_1 + Z_2}{\cos \beta_0} \right) \frac{m_n}{2} = (28 + 111) \frac{6}{2} = 443,7 \text{ mm}$$

4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 223

On réalise un déport pour atteindre la valeur de 450 mm. L'équation de l'entraxe après déport nous donne :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \frac{(x_1 + x_2) m_n}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{Z_{v1} + Z_{v2}} \right)}} \\ &= 443,7 + \frac{(x_1 + x_2) * 6}{\sqrt[4]{1 + 26 \left( \frac{x_1 + x_2}{Z_{v1} + Z_{v2}} \right)}} = 450 \text{ mm} \end{aligned}$$

avec

$$Z_{v1} = \frac{Z_1}{\cos \beta_0} = 33,74$$

et

$$Z_{v2} = \frac{Z_2}{\cos \beta_0} = 133,77$$

On en déduit la somme des déports :

$$x_1 + x_2 = 1,1$$

A partir de ce résultat, on fixe  $x_1$  au moyen de la relation :

$$x_1 = \lambda \frac{Z_{v2} - Z_{v1}}{Z_{v2} + Z_{v1}} + (x_1 + x_2) \frac{Z_{v1}}{Z_{v1} + Z_{v2}}$$

Si on prend

$$\lambda = 0,6$$

on trouve

$$x_1 = 0,6 \frac{133,77 - 33,74}{133,77 + 33,74} + 0,175 \frac{33,74}{33,74 + 133,77} = 0,58$$

On en déduit

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = 1,10 - 0,58 = 0,52$$

Calculons maintenant l'angle de pression après déport

$$\begin{aligned} \text{inv}(\alpha') &= \text{inv}(\alpha_0) + 2 \frac{x_1 + x_2}{Z_{v1} + Z_{v2}} \tan \alpha_0 \\ &= 0,0149 + \frac{2 * 1,10}{33,74 + 133,77} \tan 20^\circ = 0,01968 \end{aligned}$$

En inversant la fonction involute, on obtient

$$\alpha' = 21,5^\circ$$

#### 4.5.4 Méthode de dimensionnement selon l'AGMA

Dans une série de normes, l'AGMA propose une approche de dimensionnement des engrenages. On suit ici la norme AGMA - 218.01.

L'AGMA permet de vérifier les dentures contre deux types de ruptures :

1. La rupture des dentures à la pression de surface.
2. La rupture des dentures en flexion.

Dans les deux cas la formule proposée est exprimée en fonction de la puissance transmise entre le pignon et la roue.

##### Puissance transmise à la pression superficielle (pitting)

$$P_{ac} = \frac{n_p F}{1,91 \cdot 10^7} \frac{I C_v}{C_{SF}} \left[ \frac{d S_{ac}}{C_p} \right]^2 \quad (4.91)$$

##### Puissance transmise à la flexion (rupture)

$$P_{at} = \frac{n_p F}{1,91 \cdot 10^7} \frac{J K_v}{K_{SF}} d S_{at} m \quad (4.92)$$

Les coefficients sont définis par les normes AGMA [1, 2]

- $S_{ac}$  et  $S_{at}$  sont les contraintes admissibles en MPa données aux Figures 4.56 et 4.57,
- $P_{ac}$  et  $P_{at}$  sont les puissances transmissibles limites à la pression de contact et en flexion exprimées en kW,
- $N_p$  est la vitesse de rotation du pignon en tr/min,
- $F$  est la largeur de la roue, l'élément le plus étroit, en mm,
- $I$  et  $J$  sont les facteurs géométriques définis par l'AGMA pour les concentrations de contraintes que l'on peut déterminer grâce notamment aux Figures 4.54 et 4.55
- $d$  le diamètre du pignon en mm. Il est donné par

$$d = \frac{2 a}{i \pm 1}$$

avec  $a$  l'entraxe,  $i$  le rapport de réduction ( $i \neq 1$ ). Le signe + est à considérer pour les dentures extérieures tandis que l'on prend le signe - pour les dentures intérieures,

#### 4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 225

- $m = m_n / \cos \beta_0$  est le module apparent en mm pour les dentures hélicoïdales,
- $C_{SF}$  et  $K_{SF}$  sont les facteurs de service donnés par l'abaque de Richter-Ohlendorff à défaut d'autres données plus précises,
- $C_v$  et  $K_v$  les facteurs dynamiques donnés par des abaques ou les formules :

$$C_v = K_v = \left[ \frac{A}{A + \sqrt{200 v_t}} \right]^B$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{0,667}}{4}$$

$$A = 50 + 56(1 - B)$$

$$v_{t \max} = [A + (Q_v -)]^2 / 200$$

avec  $Q_v$  la qualité de la denture ( $6 \leq Q_v \leq 11$ )

- $C_p$  est le coefficient élastique donné par

$$C_p = \left[ \pi \left\{ \frac{1 - \mu_P^2}{E_P} + \frac{1 - \mu_R^2}{E_R} \right\} \right]^{-1/2}$$

### 4.5.5 Exercices Méthode AGMA

#### Exercice 1 : denture droite

##### Enoncé

Soit à transmettre 110 kW via un réducteur ( $i = 4$ ) à engrenages à denture droite. L'arbre d'entrée tourne à 500 tr/min. Le pignon est calé sur l'arbre. Recherchez les caractéristiques de l'engrènement ( $Z_1, Z_2, d_{01}, d_{02}, m, b_1, b_2$ ) et faites un choix de matériau pour le pignon. Entraînement par moteur électrique, démarrage moyen. Chocs raisonnables, 16 h/jour, durée de vie 50 000 heures. Utilisez la norme AGMA.

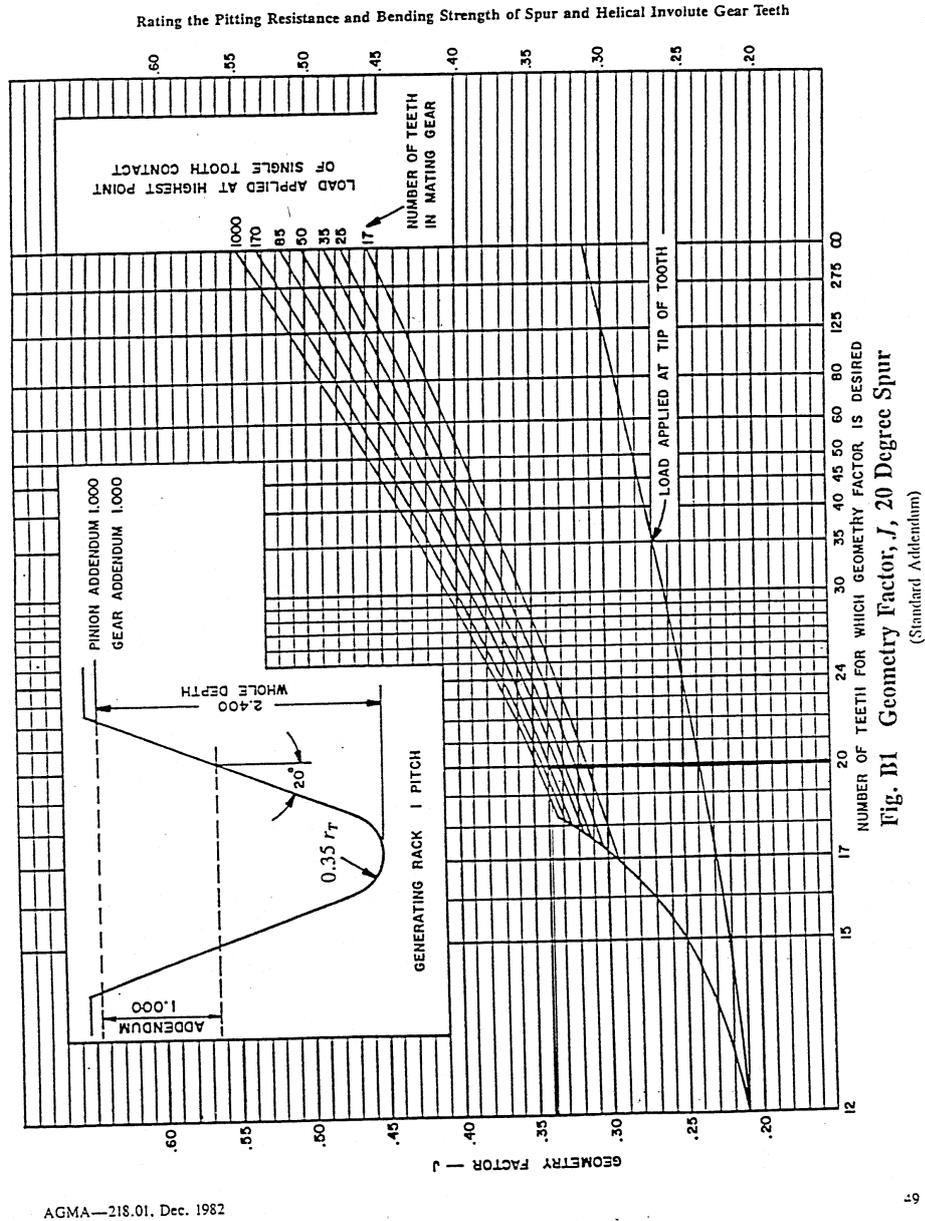
##### Solution

*Caractéristiques du pignon et de la roue*

On calcule d'abord les caractéristiques de l'engrenage.

Pour un pignon rapporté, on a

$$d_{01} - 2,5 m = d_{01} \left( 1 - \frac{2,5}{Z_1} \right) \geq C d$$



AGMA—218.01, Dec. 1982

49

FIGURE 4.54 – Facteur géométrique *J*

avec  $C = 1,8$  car on est face à un pignon rapporté.

En prenant un nombre de dents au pignon valant  $Z_1 = 20$ , nous pouvons déduire la valeur minimale que doit avoir le diamètre primitif en fonction du diamètre de l'arbre :

$$d_{01} = 2,05 \cdot d$$

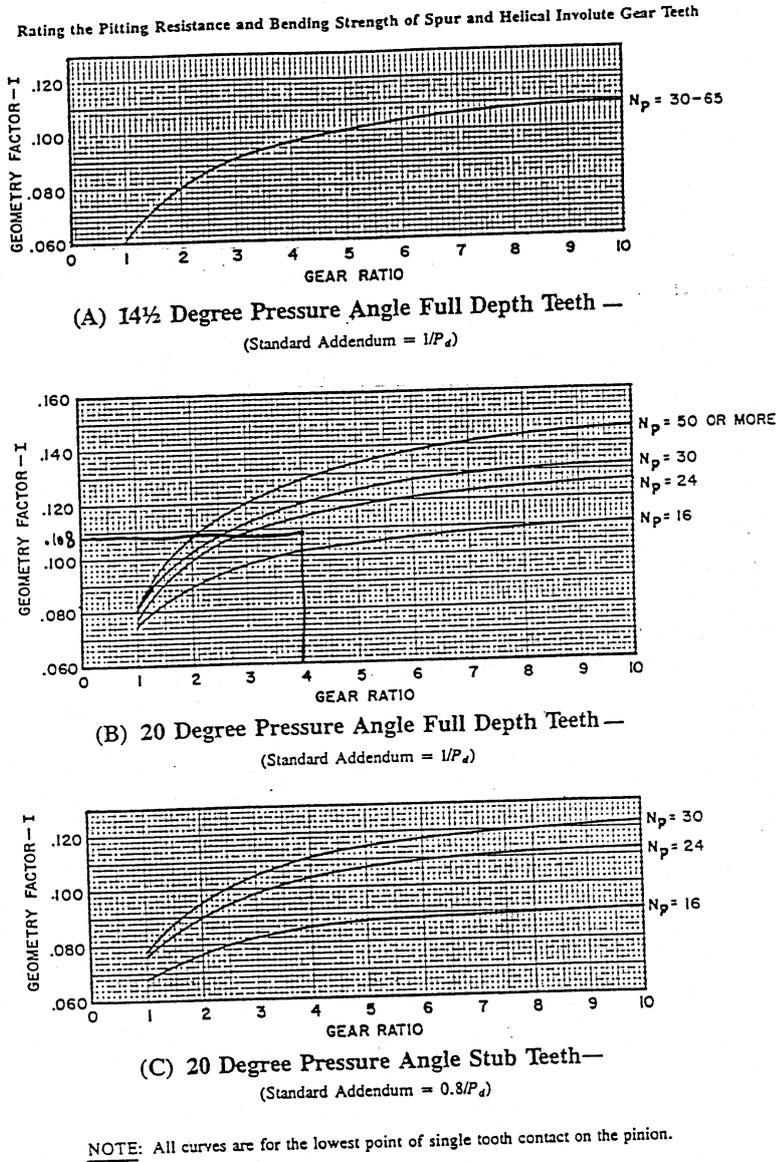


Fig. A2 External Spur Pinion Geometry Factor,  $I$   
(for Standard Center Distances)

AGMA—218.01. Dec. 1982

FIGURE 4.55 – Facteur géométrique  $I$  pour la pression de contact

Connaissant la puissance et la vitesse de rotation, on calcule  $d$  par la formule

Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth

Table 5  
Allowable Contact Stress Number,  $s_{ac}$ 

| Material                   | AGMA Class   | Commercial Designation | Heat Treatment                          | Minimum Hardness at Surface                                  | $s_{ac}$ , lb/in <sup>2</sup>                         | (MPa)         |               |
|----------------------------|--------------|------------------------|---|--|---|---------------|---------------|
| Steel                      | A-1 thru A-5 | —                      | Through Hardened and Tempered (Fig. 14) | 180 BHN & less   | 85-95 000   | ( 590- 660)   |               |
|                            |              |                        |   | 240 BHN  | 105-115 000   | ( 720- 790)   |               |
|                            |              |                        |   | 300 BHN  | 120-135 000   | ( 830- 930)   |               |
|                            |              |                        |   | 360 BHN  | 145-160 000   | (1 000-1 100) |               |
|                            |              |                        |   | 400 BHN  | 155-170 000   | (1 100-1 200) |               |
|                            | —            | —                      | —                                       | Flame* or Induction Hardened*                                | 50 HRC  | 170-190 000   | (1 200-1 300) |
|                            |              |                        |   | 54 HRC   | 175-195 000   | (1 200-1 300) |               |
|                            |              |                        |   | Carburized* & Case Hardened*                                 | 55 HRC  | 180-200 000   | (1 250-1 400) |
|                            |              |                        |   | 60 HRC   | 200-225 000   | (1 400-1 550) |               |
|                            |              |                        |   | AISI 4140 Nitrided*  | 48 HRC  | 155-180 000   | (1 100-1 250) |
| Cast Iron                  | 20 thru 40   | —                      | —                                       | As Cast  | 50- 60 000  | (340-410)     |               |
|                            |              |                        |   | As Cast  | 175 BHN   | 65- 75 000    | (450-520)     |
|                            |              |                        |   | As Cast  | 200 BHN   | 75- 85 000    | (520-590)     |
|                            |              |                        |   | 140 BHN  | 90-100% of $s_{ac}$ value of steel with same hardness |               |               |
|                            |              |                        |   | 165 BHN  | 72 000  | (500)         |               |
|                            |              |                        |   | 180 BHN  | 78 000  | (540)         |               |
| Nodular (Ductile) Iron     | A-7-a        | 60-14-18               | Annealed                                | 180 BHN  | 72 000  | (500)         |               |
|                            | A-7-c        | 80-55-06               | Quenched & Tempered                     | 230 BHN  | 83 000  | (570)         |               |
|                            | A-7-d        | 100-70-03              | " "                                     | 270 BHN  | 94 000  | (650)         |               |
|                            | A-7-e        | 120-90-02              | " "                                     | 270 BHN  | 94 000  | (650)         |               |
| Malleable Iron (Pearlitic) | A-8-c        | 45007                  | —                                       | 165 BHN  | 72 000  | (500)         |               |
|                            | A-8-e        | 30005                  | —                                       | 180 BHN  | 78 000  | (540)         |               |
|                            | A-8-f        | 53007                  | —                                       | 195 BHN  | 83 000  | (570)         |               |
|                            | A-8-l        | 80002                  | —                                       | 240 BHN  | 94 000  | (650)         |               |
| Bronze                     | Bronze 2     | AGMA 2C                | Sand Cast                               | Tensile Strength Minimum 40 000 lb/in <sup>2</sup> (275 MPa) | 30 000  | (205)         |               |
|                            | Al/Br 3      | ASTM B-148-52 Alloy 9C | Heat Treated                            | Tensile Strength Minimum 90 000 lb/in <sup>2</sup> (620 MPa) | 65 000  | (450)         |               |

\*The range of allowable stress numbers indicated, may be used with the case depths prescribed in paragraph 14.2

FIGURE 4.56 – Caractéristiques mécaniques des aciers

des arbres de manège. Le rapport  $P/N$  étant inférieur à l'unité, nous avons :

$$d_n [mm] = 130 \sqrt[4]{\frac{p[kW]}{N[tr/min]}} = \sqrt[4]{\frac{110}{500}} = 89,03 \text{ mm}$$

Diamètre extérieur de l'arbre (habillage) :

$$d = 89 + 2 t_1 = 89 + 2 \cdot 10 = 109 \text{ mm}$$

Dès lors :

$$d_{01} = 2,05 \cdot 109 = 223,45 \text{ mm}$$

4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 229

Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth

**Table 6**  
**Allowable Bending Stress Number,  $s_{af}$**

| Material                   | AGMA Class                       | Commercial Designation                         | Heat Treatment                          | Minimum Hardness Surface                                   | Core    | $s_{af}$ lb/in <sup>2</sup>                    | (MPa)     |       |
|----------------------------|----------------------------------|--|---|--|---------|--|-----------|-------|
| Steel                      | A-1                              | —  | Through Hardened and Tempered (Fig. 15) | 180 BHN  | —       | 25-33 000                                      | (170-230) |       |
|                            |                                  |  |   | 240 BHN  | —       | 31-41 000                                      | (210-280) |       |
|                            | thru                             | —  | —                                       | 300 BHN  | —       | 36-47 000                                      | (250-320) |       |
|                            |                                  |  |   | 360 BHN  | —       | 40-52 000                                      | (280-360) |       |
|                            | A-5                              | —  | —                                       | 400 BHN  | —       | 42-56 000                                      | (290-390) |       |
|                            |                                  |  |   | 50-54 HRC  | —       | 45-55 000                                      | (310-380) |       |
|                            | —                                | —  | —                                       | Flame or Induction Hardened* With Type A Pattern (Fig. 16) | —       | —  | —         | —     |
|                            |                                  |  |   |  | —       | —  | 22 000    | (150) |
|                            | —                                | —  | —                                       | Flame or Induction Hardened With Type B Pattern (Fig. 16)  | —       | —  | —         | —     |
|                            |                                  |  |   |  | —       | —  | —         | —     |
| —                          | —                                | —  | Carburized* & Case Hardened*            | 55 HRC   | —       | 55-65 000                                      | (380-450) |       |
|                            |                                  |  |   | 60 HRC   | —       | 55-70 000                                      | (380-480) |       |
| —                          | —                                | —  | —                                       | 48 HRC   | 300 BHN | 34-45 000                                      | (230-310) |       |
|                            |                                  |  |   | 46 HRC   | 300 BHN | 36-47 000                                      | (250-325) |       |
|                            |                                  |  |   | 60 HRC   | 300 BHN | 38-48 000                                      | (260-330) |       |
|                            |                                  |  |   | 54-60 HRC  | 350 BHN | 55-65 000                                      | (380-430) |       |
| Cast Iron                  | 20<br>30<br>40                   | —  | As Cast                                 | —  | —       | 5 000  | (35)      |       |
|                            |                                  |  |   | 175 BHN  | —       | 8 500  | (69)      |       |
|                            |                                  |  |   | 200 BHN  | —       | 13 000   | (90)      |       |
|                            |                                  |  |   | 140 BHN  | —       | 90-100% of $s_{af}$ for steel of same hardness |           |       |
| Nodular (Ductile) Iron     | A-7-a<br>A-7-c<br>A-7-d<br>A-7-e | 60-40-18<br>80-55-06<br>100-70-03<br>120-90-02 | Annealed<br>& Tempered<br>" "<br>" "    | —  | —       | —  | —         |       |
|                            |                                  |  |   | 180 BHN  | —       | —  | —         |       |
|                            |                                  |  |   | 230 BHN  | —       | —  | —         |       |
|                            |                                  |  |   | 270 BHN  | —       | —  | —         |       |
| Malleable Iron (Pearlitic) | A-8-c<br>A-8-e<br>A-8-f<br>A-8-i | 45007<br>50005<br>53007<br>80002               | —<br>—<br>—<br>—                        | —  | —       | 10 000   | (70)      |       |
|                            |                                  |  |   | 165 BHN  | —       | 13 000   | (90)      |       |
|                            |                                  |  |   | 180 BHN  | —       | 16 000   | (110)     |       |
|                            |                                  |  |   | 195 BHN  | —       | 21 000   | (145)     |       |
| Bronze                     | 2                                | AGMA 2C  | Sand Cast<br>Sand Cast                  | Tensile Strength Minimum                                   | —       | 5 700  | (40)      |       |
|                            |                                  |  |   | 40 000 lb/in <sup>2</sup> (275 MPa)                        | —       | —  | —         |       |
| Bronze                     | A/Br 3                           | ASTM B-148-52 Alloy 9C                         | Heat Treated                            | Tensile Strength Minimum                                   | —       | 23 600   | (160)     |       |
|                            |                                  |  |   | 90 000 lb/in <sup>2</sup> (620 MPa)                        | —       | —  | —         |       |

\* The range of allowable stress numbers indicated, may be used with the case depths prescribed in paragraph 14.2  
 † The overload capacity of nitrided gears is low, since the shape of the effective S-N curve is flat. The sensitivity to shock should be investigated before proceeding with the design.  
 AGMA—218.01, Dec. 1968

FIGURE 4.57 – Caractéristiques mécaniques des aciers

On en déduit le module théorique :

$$m^* = \frac{d_{01}}{Z_1} = \frac{223,45}{20} = 11,1725 \text{ mm}$$

Il est normalisé à

$$m = 12$$

Nous recalculons la valeur du diamètre primitif correspondant au module normalisé :

$$d_{01} = 20 \cdot 12 = 240 \text{ mm}$$

On calcule ensuite les caractéristiques de la roue dentée.

$$Z_2 = Z_1 \cdot i = 20 \cdot 4 = 80$$

En bonne pratique, on choisit deux nombres premiers entre eux pour minimiser l'usure même si on commet une petite erreur de rapport de réduction. On prend donc

$$Z_2 = 79 \text{ dents}$$

L'entraxe  $a_0$  est de :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{d_{01} + d_{02}}{2} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} m = Z_1 m \frac{1+i}{2} \\ &= 594 \text{ mm} \end{aligned}$$

*Largeur des dents*

On va calculer le ratio

$$\psi_d = \frac{b_1}{d_{01}}$$

On peut calculer la vitesse tangente au diamètre primitif

$$v_t = \frac{\pi d_{01} N}{60} = 6,28 \text{ m/s}$$

On utilise donc la formule :

$$\psi_d = 0,8 + 0,0857 i = 0,8 + 0,0857 \frac{79}{20} = 1,1385$$

Il vient

$$b_1 = \psi_d d_{01} = 1,1385 \cdot 20 = 22,77 \text{ mm}$$

D'autre part on doit avoir

$$b_2 = 0,9 b_1 = 20,5 \text{ mm}$$

Si  $b_1 - b_2 \leq 5 \text{ mm}$  alors on doit garder la valeur de  $b_2$ . Sinon, et c'est notre cas, on prend

$$b_2 = b_1 - 5 \text{ mm} = 17,77 \text{ mm}$$

*Vérification à la résistance à la flexion et à la pression de contact et choix du matériau*

La denture sera vérifiée en écrivant l'équation de la puissance maximale transmissible respectivement à la pression superficielle (pitting) et à la flexion.

La norme AGMA définit les contraintes admissibles via la puissance maximale transmise à la pression (pitting)

$$\mathcal{P}_{ac} = \frac{N_p F}{1,91 \cdot 10^5} \frac{I C_v}{C_{SF}} \left[ \frac{d S_{ac}}{C_p} \right]^2$$

4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 231

De même la norme définit la puissance maximale transmise à la flexion (rupture)

$$\mathcal{P}_{at} = \frac{N_p F}{1,91 \cdot 10^5} \frac{J K_v}{K_{SF}} d S_{at} m$$

Calculons la contrainte admissible maximale à la pression de contact.

— Vitesse de rotation au pignon.

$$N_p = 500 \text{ tr/min}$$

— Largeur de la roue (élément le plus étroit);

$$F = 268 \text{ mm}$$

— Rapport de réduction;

$$i = 3,95$$

— Facteur service suivant Richter Ohlendorf

$$C_{sf} = 2.0$$

— Facteur géométrique  $I$ . Il est déterminé à partir de la figure  $A_2 B$  (voir Figure 4.55) avec  $Z_1 = 20$ ;  $Z_2 = 79$ . Il vient

$$I = 0,108$$

— Le diamètre primitif de la roue dentée (pignon ou de la roue)

$$d = \frac{2 a}{1 + i} = \frac{2 \cdot 594}{1 + 3,95} = 240 \text{ mm}$$

—  $C_v$  : Facteur dynamique. Il dépend des coefficients A et B par la relation :

$$C_v = K_v = \left[ \frac{A}{A + \sqrt{200 V_t}} \right]^B$$

où

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{0,667}}{4}$$

avec  $Q_v$ , la qualité de la denture comprise entre 6 et 11 et

$$V_t = 6.28 m/s < = V_t^{max} = \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200} = 23.83 m/s$$

et

$$A = 50 + 56(1 - B)$$

Lorsque nous prenons une denture de qualité  $Q_v = 7$ , on trouve

$$B = 0,7314 \quad A = 65,04$$

et donc

$$C_v = 0,7275$$

—  $C_p$  Coefficient élastique.

$$C_p = \left[ \pi \left( \frac{1 - \nu_P^2}{E_P} + \frac{1 - \nu_R^2}{E_R} \right) \right]^{-1/2}$$

Avec, pour l'acier :  $\nu_P = \nu_R = 0,3$  et  $E_P = E_R = 217500 \text{ MPa}$ .  
Soit

$$C_p = 195$$

En considérant les valeurs de toutes les grandeurs, nous pouvons écrire pour la pression superficielle :

$$110 < \frac{500 \ 268 \ 0,108 \ 0,7275}{1,91 \ 10^7 \ 2} \left( \frac{240 \ S_{ac}}{195} \right)^2$$

$$110 < 0,000417495 \ S_{ac}^2$$

On trouve que la contrainte maximale de pression du matériau doit être au moins égale à :

$$S_{ac} \geq 513,3 \text{ MPa}$$

En ce qui concerne la résistance à la flexion :

— Vitesse de rotation au pignon.

$$N_p = 500 \text{ tr/min}$$

— Largeur de la roue (élément le plus étroit)

$$F = 268 \text{ mm}$$

— Rapport de réduction

$$i = 3,95$$

#### 4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 233

— Facteur service suivant Richter Ohlendorf

$$K_{sf} = 2.2$$

—  $K_v$  : Facteur dynamique. Il est identique à  $C_v$

$$K_v = 0,7275$$

— Facteur géométrique  $J$ . On Il est déterminé à partir de la figure B1 (voir Figure 4.54) avec  $Z_1 = 20$  ;  $Z_2 = 79$ . Il vient

$$J = 0,34$$

En considérant les valeurs de toutes les grandeurs, nous pouvons écrire pour la contrainte maximale de la flexion :

$$110 < \frac{500 \cdot 268 \cdot 0,34 \cdot 0,7275}{1,91 \cdot 10^7 \cdot 2,2} \cdot 240 S_{at} \cdot 12$$

On trouve que la contrainte maximale à la flexion du matériau doit être au moins égale à :

$$S_{at} \geq 48,42 \text{ MPa}$$

Avec les valeurs des contraintes  $S_{ac}$  et  $S_{at}$  et à l'aide des tables 4.56 et 4.57, nous pouvons choisir l'acier A1.

### Exercice 2 : denture droite

#### Enoncé

Soit à transmettre 55 kW via un réducteur ( $i = 4$ ) à engrenages à denture droite. L'arbre d'entrée tourne à 500 tr/min. Le pignon est un pignon arbré. Recherchez les caractéristiques de l'engrènement ( $Z_1, Z_2, d_{01}, d_{02}, m, b_1, b_2$ ) et faites un choix de matériau pour le pignon. Entraînement par moteur électrique, démarrage moyen. Chocs raisonnables, 16 h/jour, durée de vie 50 000 heures. Utilisez la norme AGMA.

#### Solution

**Exercice 3 : denture hélicoïdale****Énoncé**

Un pignon à denture hélicoïdale calé en bout d'arbre, entraîne une roue dont les caractéristiques sont :  $m = 4$ ,  $Z_2 = 91$ ,  $b_2 = 45 \text{ mm}$ ,  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $\beta_0 = 20^\circ$ ,  $N_2 = 750 \text{ tr/min}$ . La puissance reçue par la roue vaut 100 kW. Un moteur électrique entraîne le pignon ( $N_1 = 3000 \text{ tr/min}$ ) par l'intermédiaire d'un accouplement qui ne transmet que de la torsion. On demande de choisir les caractéristiques du pignon ( $Z_1, b_1, d_{01}$ ) et de vérifier la fixation du pignon sur l'arbre. L'entraînement par le moteur électrique se fait selon un démarrage moyen, chocs raisonnables, 16h/jour, durée de vie 50.000 heures. Utilisez la norme AGMA.

**Solution**

On calcule d'abord les caractéristiques du pignon.

$$i = \frac{3000}{750} = 4$$

Ce qui donne

$$Z_1 = \frac{Z_2}{i} = \frac{91}{4} = 22,75$$

On adopte

$$Z_1 = 23 \text{ dents}$$

Le rapport de réduction réel est :

$$i_{\text{réel}} = \frac{91}{23} = 3,956$$

soit une erreur de 1,1 %.

On calcule le module tangent :

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta_0} = \frac{4}{\cos 20^\circ} = 4,257$$

Soit le diamètre primitif du pignon :

$$d_{01} = m_t Z_1 = 4,257 \cdot 23 = 97,9 \text{ mm}$$

On en déduit la vitesse tangente au niveau du diamètre primitif

$$v = \frac{\pi d_{01} N}{60} = \frac{\pi \cdot 97,9 \cdot 10^{-3} \cdot 3000}{60} = 15,38 \text{ m/s}$$

#### 4.5. CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES ENGRENAGES 235

Cette vitesse est comprise entre 20 et 25 m/s de sorte que pour un nombre de dents égal  $Z_1 = 23$ , on peut calculer :

$$\epsilon_\beta = \frac{b_2 \tan \beta_0}{\pi m_t} \geq 1,22$$

$$b_2 > 1,2 \frac{\pi m_t}{\tan \beta_0} = 44,09 \text{ mm}$$

On choisit

$$b_2 = 45 \text{ mm}$$

On trouve

$$b_1 = 1,1 b_2 = 49,5 \text{ mm}$$

On finit par calculer l'entraxe :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{Z_1 m_n}{\cos \beta_0} \frac{1+i}{2} = \frac{23 \cdot 4}{\cos 20^\circ} \frac{1+3,956}{2} \\ &= 214,23 \text{ mm} \end{aligned}$$



# Chapitre 5

## TRANSMISSIONS PAR COURROIE ET POULIES

### 5.1 GENERALITES



FIGURE 5.1 – Applications industrielles des transmission par courroie. Source Extremultus

Les courroies sont des liens flexibles utilisés pour transmettre des puissances moyennes entre arbres parallèles ou non, séparés généralement par des distances d'entraxes importantes.

Ce lien flexible s'enroule à la périphérie de poulies respectivement menante (ou motrice) et menée (ou réceptrice) calées sur chaque arbre. La courroie transmet les efforts tangentiels d'une manière conservative ou non suivant

le type de système envisagé, c'est-à-dire en préservant ou non l'égalité des efforts périphériques  $Q$ .

Ce transfert de puissance ne peut néanmoins s'opérer sans un effet d'adhérence efficace au contact des jantes. Une résistance suffisante au glissement d'ensemble n'apparaîtra dès lors qu'à la condition d'imposer une contrainte initiale de traction dans les brins de la courroie. Il en résulte que cette tension initiale qui doit être développée artificiellement dépend essentiellement de la puissance à transmettre et qu'elle doit croître avec elle.

Les courroies utilisées en pratique présentent une section transversale soit rectangulaire mince (courroies plates), soit trapézoïdale (de type normal ou étroit). Les dimensions des sections habituelles sont normalisées.



FIGURE 5.2 – Applications industrielles des transmission par courroie au début de l'ère industrielle. Source Extremultus

La solution par courroie s'est développée très tôt à l'époque industrielle du fait de nombreux avantages qu'elle propose.

Les avantages des transmissions par courroies sont les suivants :

- Entraxe élevé ;
- Bon rendement ;
- Fonctionnement silencieux ;
- Construction et montage simples ;
- Entretien aisé et fonctionnement sans lubrification ;
- Prix de revient raisonnable ;
- Amortissement partiel des chocs, des à-coups et des vibrations grâce à l'élasticité de la courroie et le frottement interne de la matière ;
- Normalisation des dimensions des poulies et des largeurs des courroies (suite des nombres de Renard de la série  $R_{20}$  )pour les courroies plates) ;
- Possibilité de créer une variation de vitesse par des montages utilisant des poulies étagées ou coniques.

Des inconvénients doivent être également cités :

- Encombrement important ;
- Risques d'accident plus importants que d'autres systèmes tels que les engrenages ;
- Charges radiales généralement élevées sur arbres et paliers d'appui ;
- Rapport de réduction non rigoureux, par suite du glissement élastique de la courroie sur les jantes de la poulie ;
- Sensibilité à l'humidité, à la température et à la poussière.

A début de l'ère industrielle, les machines fonctionnaient à des vitesses angulaires relativement faibles (quelques centaines de tours par minute). Elles disposaient de volants d'inertie de grandes dimensions propices à la réalisation de poulies et devaient transmettre leur mouvement à des machines réceptrices situées à grandes distances.

Les courroies d'abord plates ont été remplacées progressivement par des courroies à section trapézoïdale pour suivre l'augmentation de la vitesse de rotation et de la puissance des machines.

Aujourd'hui les distances entre le moteur et le récepteur sont souvent faibles, car on assigne un moteur par axe ou par fonction. Les puissances et les vitesses de rotation des systèmes de transmission sont de plus en plus élevées, rendant plus difficile le choix clair entre engrenages et poulies modernes.

Il faut remarquer qu'une même courroie peut entraîner plusieurs récepteurs par exemple la pompe à eau et l'alternateur sur un moteur à piston. Même si cette situation était courante dans le temps, cette situation tend à disparaître de nos jours.

L'évolution des technologies apportées aux courroies a permis d'apporter des réponses aux principales critiques qui leur étaient souvent faites :

- Augmentation de la puissance transmise par la mise en oeuvre de matériaux plus performants comme les matériaux synthétiques, composites ou métalliques ;
- Emploi de courroies multiples ou poly-trapézoïdales ;
- Rigueur du rapport de transmission par usage de courroies crantées synchrones.

Il est actuellement possible de concevoir des transmissions par courroie capable de transmettre des puissances allant jusque 400 kW ainsi que des vitesses linéaires au-delà de 60 m/s.

En ce qui concerne le rendement d'une transmission par courroie, la littérature mentionne généralement que l'on puisse atteindre une valeur proche de 98 % pour le type plat, et proche de 96 % pour le type trapézoïdal.

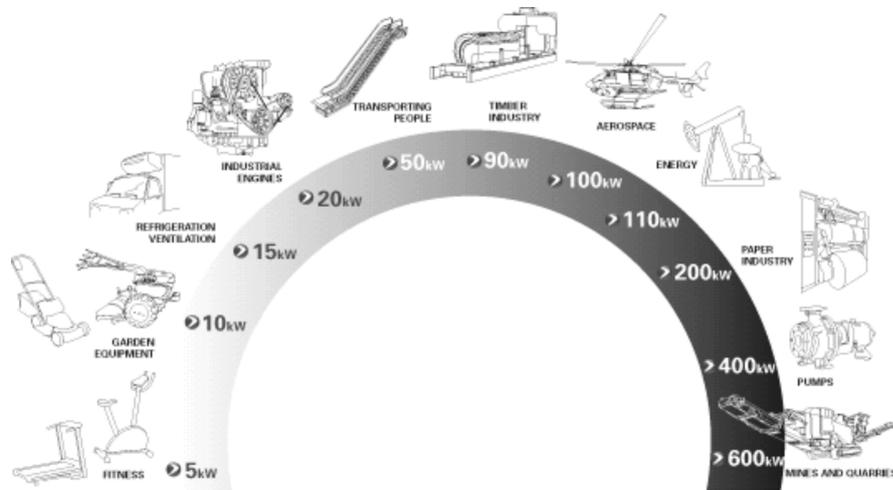


FIGURE 5.3 – Applications industrielles des transmissions par courroie dans l'industrie moderne.

La qualité et le rendement d'une transmission par courroie sont étroitement liés à la précision de position des poulies lors du montage.

Les pertes de puissance dans la transmission par courroie ont pour origine les phénomènes suivants :

- Le glissement élastique ou le glissement d'ensemble de la courroie sur les poulies ;
- Le frottement interne de la matière constitutive de la courroie, lors de l'alternance de l'incurvation, de l'extension et de la relaxation (phénomène d'hystérésis) ;
- La résistance de l'air au mouvement de la courroie, des poulies et des galets ;
- Les pertes par frottement au niveau des appuis.

Les pertes supplémentaires qui apparaissent dans le cas des courroies trapézoïdales résultent d'une transmission non conservative des efforts tangentiels aux jantes : une part de l'effort transmis est utilisée pour l'extraction des courroies hors de leur gorge à la sortie des poulies, l'effet de coin ayant tendance à les y maintenir bloquées au-delà du point de tangence théorique.

### Dispositions des poulies

On peut réaliser des transmissions du mouvement de rotation par courroies et poulies quelles que soient les positions des arbres d'entrée et de sortie. On distingue deux grands cas de figures représentés à la figure 5.4.

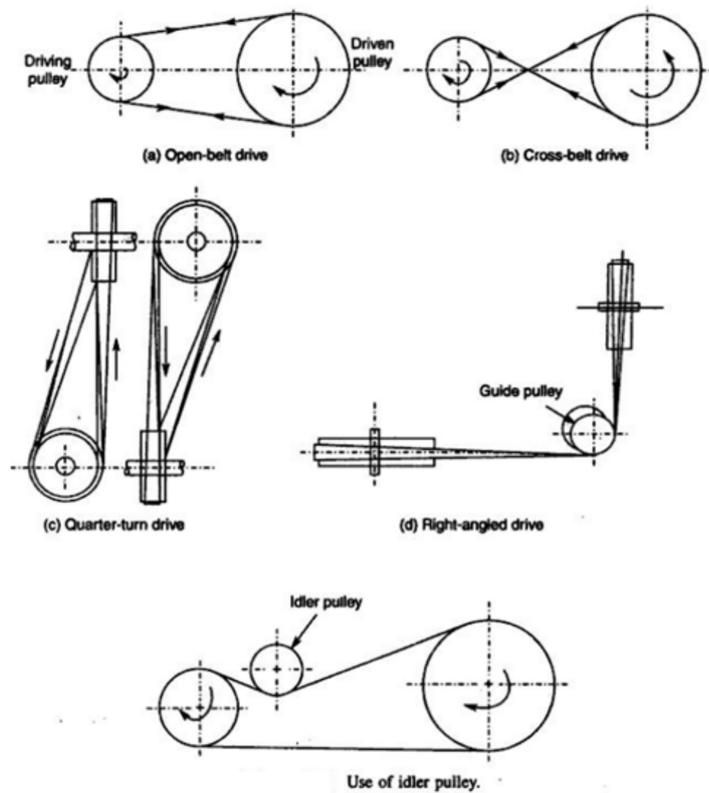


FIGURE 5.4 – Disposition des poulies.

Arbres à axes parallèles

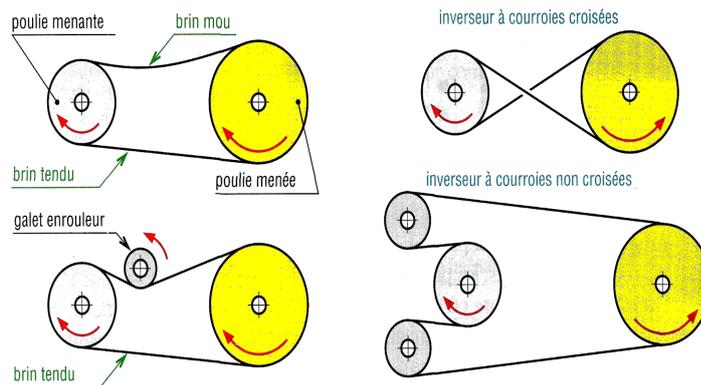


FIGURE 5.5 – Configurations à axes parallèles des poulies.

Lorsque les arbres sont parallèles (voir Figure 5.5), le sens de rotation des

poulies est préservé sauf si on croise la courroie.

Dans le cas d'une inversion du sens de rotation si on utilise une courroie croisée, le frottement entre les brins de la courroie est souvent préjudiciable à sa durée de vie.

### Arbres à axes quelconques

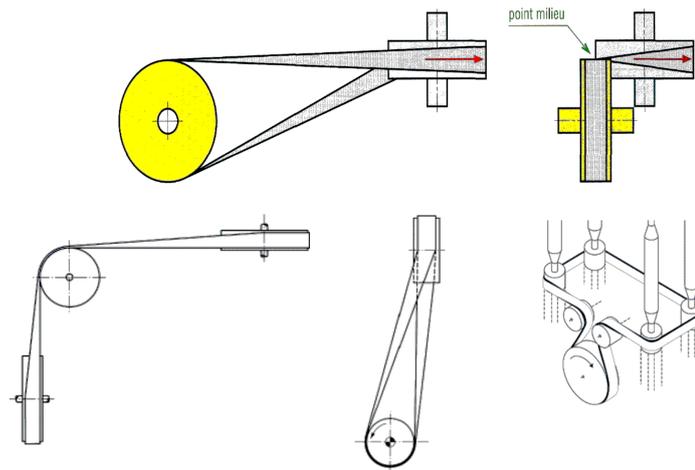


FIGURE 5.6 – Configurations à axes quelconques des poulies.

Dans une configuration à axes quelconques (voir Figure 5.6), on utilise des poulies folles de renvoi assurant l'entrée et la sortie de la courroie hors du plan de chacune des poulies motrices et réceptrices.

## 5.2 FORMULES FONDAMENTALES

### 5.2.1 Définitions et relations de base

La Figure 5.7 présente la géométrie d'une transmissions par courroie sans tendeur entre deux arbres et poulies à axes parallèles. La poulie motrice est repérée par l'indice 1. La poulie réceptrice est notée 2. On note respectivement par  $\omega_1$  ( $N_1$ ) et  $\omega_2$  ( $N_2$ ) les vitesses de rotation qui les animent en radians par seconde ou en tours par minutes, par  $R_1$  ( $d_1$ ) et  $R_2$  ( $d_2$ ) leur rayon et diamètre primitifs.

Supposons que la courroie épouse parfaitement les poulies tout au long des arcs d'enroulement. L'arc sur lequel s'enroule la courroie au niveau de la jante de la poulie s'appelle *l'arc embrassé*. Notons par  $\Omega_1$  l'arc embrassé sur

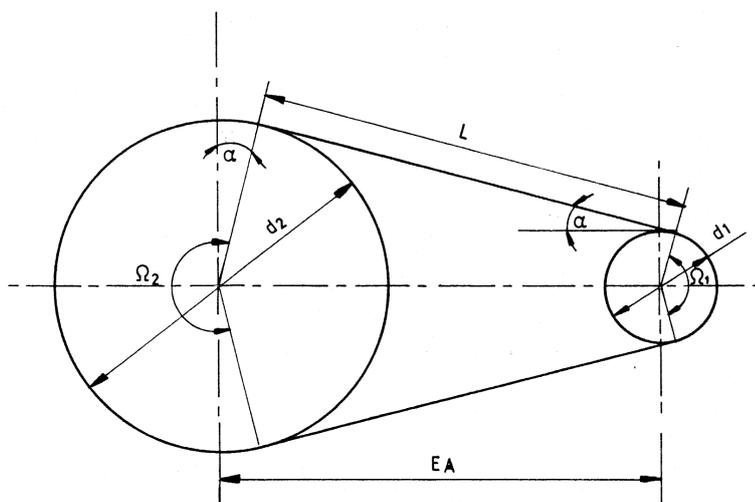


FIGURE 5.7 – Transmission par courroie entre deux axes parallèles

la poulie 1 et par  $\Omega_2$  celui sur la grande poulie. Pour autant que la tension dans la courroie soit suffisante, la courroie suit la tangente commune aux deux poulies. Les parties de la courroie qui sont à l'air sont dénommées *brins*. La distance entre les deux axes des poulies est appelé *entraxe* et il est noté par  $a$  ou  $EA$ .

On appelle  $\alpha$  l'angle fait par le brin avec l'horizontale. Il est également lié à l'angle embrassé sur les poulies :

$$\Omega_1 = \pi - 2\alpha \quad (5.1)$$

et

$$\Omega_2 = \pi + 2\alpha \quad (5.2)$$

Les brins tendus  $A_1A_2$  et mous  $B_1B_2$  de la courroie sont supposés rectilignes. Ces hypothèses supposent que la raideur en flexion de la courroie est faible et que les tensions  $T$  et  $t$  dans les brins tendus ou mous sont élevées devant les actions transversales. En particulier le poids propre de la courroie est supposé négligeable.

### Longueur de la courroie

La longueur théorique de la courroie s'obtient en ajoutant aux longueurs des segments  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$ , les longueurs des arcs  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ .

La longueur des brins vaut

$$A_1A_2 = B_1B_2 = a \cos \alpha$$

Les longueurs des arcs d'enroulement autour des poulies valent respectivement

$$A_1B_1 = \frac{d_1}{2} \Omega_1 = \frac{d_1}{2} (\pi - 2\alpha)$$

$$A_2B_2 = \frac{d_2}{2} \Omega_2 = \frac{d_2}{2} (\pi + 2\alpha)$$

Par ailleurs, la valeur de l'angle  $\alpha$  peut être calculé par la relation (voir Figure 5.7) :

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{d_2 - d_1}{2a}} \quad (5.3)$$

On trouve la longueur de courroie  $L$  :

$$\boxed{L = 2a \cos \alpha + \pi \frac{d_1 + d_2}{2} + 2\alpha \frac{d_2 - d_1}{2}} \quad (5.4)$$

L'angle  $\alpha$  étant souvent petit, il est commode d'utiliser une formule approchée.

$$\alpha \simeq \sin \alpha = \frac{d_2 - d_1}{2a}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a^2}$$

Il vient

$$L = 2a \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a^2} \right] + (\pi - 2\alpha) \frac{d_1}{2} + (\pi + 2\alpha) \frac{d_2}{2}$$

Après simplification, on peut écrire la formule donnant une estimation approchée de la longueur de la courroie  $L$  en fonction de l'entraxe  $a$  :

$$L \simeq 2a + \pi \frac{d_2 + d_1}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a} \quad (5.5)$$

En règle générale, cette longueur théorique de courroie calculée par la relation (5.4) est différente de la longueur réelle puisque la courroie est prise parmi les valeurs standards proposées dans les catalogues. Celles-ci sont généralement choisies en fonction des séries de Renard.

### Rapport de réduction idéal

Les guidages de deux poulies sont supposés parfaitement rigides et sans frottement.

Le moteur développe sur la poulie 1 une puissance  $\mathcal{P}_1$ , un couple  $C_1$  et une vitesse de rotation  $\omega_1 = N_1 \frac{\pi d_1}{60}$ . L'organe récepteur absorbe une puissance  $\mathcal{P}_2$ , un couple  $C_2$  et tourne à une vitesse  $\omega_2 = N_2 \frac{\pi d_2}{60}$ .

La conservation de la puissance s'écrit :

$$\mathcal{P}_1 = C_1 \omega_1 = \mathcal{P}_2 = C_2 \omega_2 \quad (5.6)$$

On en tire le rapport de réduction idéal  $i$  du système :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{C_2}{C_1} = i \quad (5.7)$$

Définissons  $v$  la vitesse de déplacement de la courroie au niveau des roues 1 et 2. La caractéristique d'une courroie est de transmettre (de façon idéalisée) sa vitesse tangentielle aux poulies :

$$v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2} = v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2} \quad (5.8)$$

Cette hypothèse permet d'écrire le rapport de réduction idéal

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2} = i \quad (5.9)$$

### 5.2.2 Rendement global et rapport de réduction réel

Soit la géométrie de la transmission schématisée à la Figure 5.8.

On a supposé en première approximation que la transmission de puissance s'effectuait de manière idéale, c'est-à-dire que la puissance et que les efforts étaient préservés. En réalité la variation de tension de la courroie le long de l'arc d'enroulement sur chacune des poulies provoque une variation de sa déformation et il est à l'origine d'un phénomène de glissement permanent. Ce glissement fonctionnel ne doit pas être confondu avec le patinage éventuel de la courroie sur l'une des poulies en cas de surcharge. Le glissement fonctionnel introduit une variation du rapport de réduction qui est une fonction croissante du couple transmis. Il peut atteindre 2 à 3% du rapport théorique.

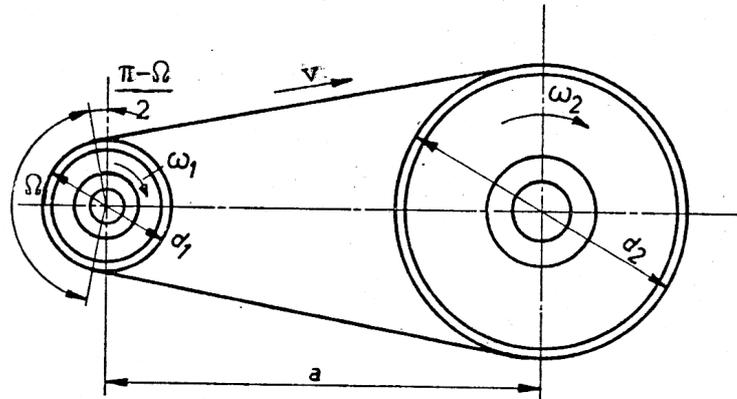


FIGURE 5.8 – Transmission par courroie

Le glissement permanent est en réalité nécessaire au bon fonctionnement d'une transmission par courroie car il régularise l'évolution de la tension dans la courroie lors de son passage sur les poulies.

Le glissement fonctionnel justifie également la recherche d'une certaine qualité des états de surface des jantes ou des gorges des poulies ainsi que l'emploi de revêtements résistants à l'usure sur les courroies.

On définit par  $\eta_0$  le rendement global du système de transmission. Ce rendement peut être décomposé en deux parties :  $\eta_g$  le rendement de glissement et  $\eta_e$  le rendement d'extraction de la courroie hors de la gorge de la poulie.

On peut écrire la conservation de la puissance au rendement près :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\mathcal{P}_2}{\eta_0} \quad \text{avec} \quad \eta_0 = \eta_g \eta_e \quad (5.10)$$

Notons  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement les efforts périphériques sur les poulies responsables respectivement du couple développé ou absorbé. On peut écrire :

$$\mathcal{P}_1 = C_1 \omega_1 = Q_1 v_1 = Q_1 \frac{d_1}{2} \omega_1 = \frac{Q_1 \pi d_1 N_1}{60}$$

$$\mathcal{P}_2 = C_2 \omega_2 = Q_2 v_2 = Q_2 \frac{d_2}{2} \omega_2 = \frac{Q_2 \pi d_2 N_2}{60}$$

Dans le cas de courroies plates, on a égalité des efforts périphériques  $Q_i$  dans les brins à l'entrée et à la sortie des poulies. Par contre dans le cas de

poulies trapézoïdales, on doit exercer un effort d'extraction à la sortie de la poulie et on a une diminution de l'effort  $Q_i$  :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 && \text{Cas des courroies plates} \\ Q_1 > Q_2 &= \eta_e Q_1 && \text{Cas des courroies trapézoïdales} \end{aligned}$$

Divisant membre à membre, on obtient :

$$\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \eta_0 = \eta_g \eta_e = \frac{Q_2 d_2 N_2}{Q_1 d_1 N_1}$$

Comme

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \eta_e$$

on obtient le *rapport de réduction réel* des vitesses (définition cinématique du rapport de réduction) :

$$\frac{N_1}{N_2} = i_r = \frac{1}{\eta_g} \frac{d_2}{d_1}$$

Le rapport de réduction réel  $i_r$  est donc toujours supérieur au simple rapport  $i$  des diamètres qui définit le rapport de réduction idéal :

$$\frac{i_r}{i} = \frac{1}{\eta_g} \quad \text{avec} \quad i = \frac{d_2}{d_1} \quad (5.11)$$

## 5.3 ETUDE DYNAMIQUE

### 5.3.1 Effort périphérique équivalent

On base les développements qui vont suivre sur les schémas de la Figure 5.9. Supposons que l'on travaille dans un régime de vitesse établi. Les vitesses de rotation des poulies, respectivement  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , sont stationnaires et constantes.

Les tensions dans les brins tendus et mous sont respectivement notés par  $T$  et  $t$ . Une poulie motrice ou réceptrice développe un effort périphérique équivalent  $Q$ , par l'intermédiaire de la courroie de section  $S$  couvrant un angle  $\Omega$  de la jante. Il produit le couple  $C$  au rayon primitif  $R$  de la courroie :

$$C = Q R \quad (5.12)$$

Compte tenu de l'équilibre de la poulie, on obtient la relation entre les efforts  $T$  et  $t$  développés respectivement dans le brin tendu et le brin mou de la courroie et le couple développé ou absorbé par la poulie

$$C = (T - t) R \quad (5.13)$$

De manière équivalente, on voit que l'effort périphérique équivalent  $Q$  vaut la différence des efforts dans les brins tendus et mous :

$$Q = T - t \quad (5.14)$$

On remarque que si on écrit ces relations pour les deux poulies,

$$\begin{aligned} C_1 &= (T - t) R_1 \\ C_2 &= (T - t) R_2 \end{aligned}$$

on retrouve le *mechanical advantage* de la transmission qui est aussi le rapport de réduction (définition statique du rapport de réduction) :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{i}$$

### 5.3.2 Formule fondamentale d'Euler

Étudions l'équilibre radial et tangentiel d'un élément de courroie d'angle  $d\phi$  sous l'action des efforts appliqués. (Voir Figure 5.10).

Rappelons que l'on fait l'hypothèse d'un fonctionnement en régime stationnaire et que la vitesse de rotation est constante. On va noter par  $m'$  la masse par unité de longueur de la courroie. Si  $\rho$  est la densité du matériau de la courroie et  $S$  sa section droite, on a  $m' = \rho S$ .

L'élément de courroie est soumis à un ensemble de forces :

- $T$  et  $T + dT$  les forces de traction de la courroie dirigés suivant les tangentes tracées de part et d'autre de l'élément ;
- $dN$  la réaction radiale de la poulie sur l'élément ;
- $dF$  la force de frottement entre la poulie et la courroie. Elle est opposée à la direction  $d\theta$  ;
- $F_{ge}$  la force centrifuge agissant sur l'élément de courroie et tendant à réduire  $dN$ , donc par la suite  $dF$ .

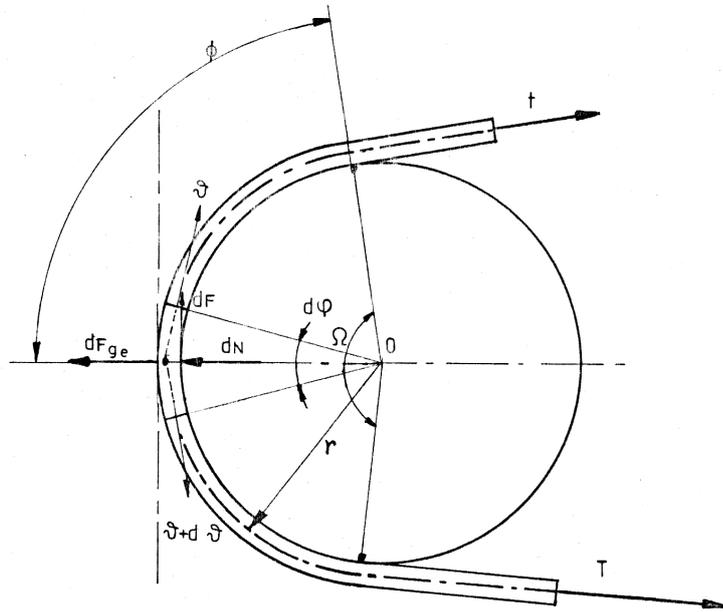
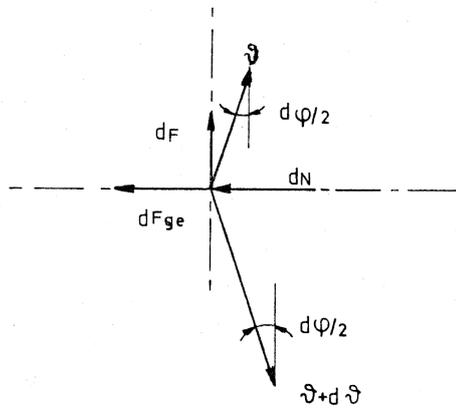


FIGURE 5.9 – Géométrie générale d'une courroie en charge

FIGURE 5.10 – Schéma des forces relatives à l'élément de courroie  $r d\phi$ 

Les composantes normale et tangentielle exercées par la gorge de la poulie sur la courroie sont liées et limitées par le frottement entre les deux matériaux.

$$dF \leq f dN \quad (5.15)$$

où  $f$  est le coefficient de friction entre la gorge de la jante et la courroie. Des valeurs typiques coefficients de friction pour différents matériaux de courroie

| Matériau de la courroie     | Coefficient de transmission $\mu$   |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| Cuir, côté poil             | $0,3 + \frac{v}{100 \text{ [m/s]}}$ |
| Cuir, côté chair            | $0,2 + \frac{v}{100 \text{ [m/s]}}$ |
| Coton                       | 0,3                                 |
| Soie artificielle imprégnée | 0,35                                |
| Matériaux Synthétique       | 0,5                                 |

TABLE 5.1 – Tableau des valeurs des coefficients de transmission  $\mu$ 

sont fournies à titre indicatif au Tableau 5.1. Néanmoins dans l'approche du concepteur, on souhaite souvent se mettre en sécurité par rapport au glissement d'ensemble de la courroie sur la poulie et il est courant de considérer un facteur de sécurité  $k$  vis-à-vis du coefficient de friction et de considérer un coefficient de frottement réduit  $\mu$  :

$$\mu k \leq f \quad (5.16)$$

$k$  est évidemment supérieur à 1 et il est imposé par le cahier des charges. Le coefficient  $\mu$  est appelé **coefficient de transmission**. Par hypothèse nous le supposons constant le long de l'arc d'enroulement autour de la poulie.

Dans la suite on va considérer que l'on utilise pleinement la friction disponible au coefficient de sécurité près. Dans ce cas, on a la relation entre forces normales et forces tangentielles

$$dF = \mu dN \quad (5.17)$$

Si on étudie le phénomène à la limite du glissement d'ensemble, on prend évidemment  $k = 1$  et  $\mu = f$ .

Projetons tout d'abord les forces sur la direction du rayon bissecteur. Il vient

$$dF_{ge} + dN = (2\theta + d\theta) \sin \frac{d\phi}{2} \quad (5.18)$$

Sachant que  $d\phi$  est infinitésimal

$$\sin \frac{d\phi}{2} \simeq \frac{d\phi}{2}$$

et que l'on va négliger les termes du second ordre,

$$d\theta d\phi \simeq 0$$

on peut écrire :

$$dF_{ge} + dN = \theta d\phi \quad (5.19)$$

Projetons à présent sur la tangente menée au point de percée du rayon bissecteur sur la circonférence. Il vient :

$$\theta \cos \frac{d\phi}{2} + dF = (2\theta + d\theta) \cos \frac{d\phi}{2}$$

Soit en négligeant les termes d'ordre supérieur

$$dF = d\theta \quad (5.20)$$

La force de frottement élémentaire est proportionnelle à l'action normale de la jante limitée au coefficient de transmission  $\mu$  disponible.

$$dF = \mu dN$$

où  $\mu$  est le coefficient de friction disponible entre la gorge de la jante et la courroie pour un coefficient de sécurité  $k > 1$  défini.

En insérant l'expression de  $d\theta$  en fonction de  $dN$  dans la première équation, il vient :

$$dF_{ge} + \frac{d\theta}{\mu} = \theta d\phi \quad (5.21)$$

Développons à présent l'expression des forces centrifuges

$$dF_{ge} = \rho dV \omega^2 R = \rho S R d\phi \frac{v^2}{R}$$

On en déduit l'expression de l'équation différentielle caractérisant l'évolution de force de tension  $\theta$  en fonction de la position angulaire  $\phi$ .

$$\frac{d\theta}{\theta - \rho S v^2} = \mu d\phi \quad (5.22)$$

En intégrant  $\theta(\phi) = \tau$  de 0 à  $\phi$  avec  $\phi$  inférieur à la limite  $\Omega$ , on trouve :

$$\ln \frac{\tau - \rho S v^2}{t - \rho S v^2} = \mu \phi$$

On en déduit la relation liant l'effort courant à l'effort  $t$  dans le brin mou :

$$\frac{\tau(\phi) - \rho S v^2}{t - \rho S v^2} = \exp(\mu \phi) \quad (5.23)$$

En définissant  $m' = \rho S$ , la masse par unité de longueur de courroie, il vient

$$\frac{\tau(\phi) - m' v^2}{t - m' v^2} = e^{\mu \phi} \quad (5.24)$$

On applique la formule à l'angle d'embrassement total  $\Omega$  et on obtient la formule classique d'EULER<sup>1</sup> :

$$\boxed{\frac{T - m'v^2}{t - m'v^2} = e^{\mu\Omega} = \frac{\bar{T}}{\bar{t}}} \quad (5.25)$$

On note que dans cette formule les efforts  $T$  et  $t$  sont ceux qui, pour un angle d'embrassement  $\Omega$ , permettent la stricte transmission de l'effort périphérique effectif  $Q$ .

L'effort  $\tau(\phi)$  varie donc continûment de  $t$  à  $T$ , d'un point de tangence à l'autre, séparé de  $\Omega R$  sur la jante de la poulie.

La Figure 5.11 représente l'allure de l'évolution de la tension dans la courroie en fonction de la position de la section considérée, repérée par son abscisse curviligne  $s$ .

### 5.3.3 Tensions centrifuge, tension productive

L'équation différentielle (5.22) peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{d\theta}{d\phi} - \mu\theta = \mu m'v^2 \quad (5.26)$$

dont la solution s'écrit sous la forme d'une solution homogène plus une solution particulière  $m'v^2$ .

$$\tau(\phi) = A \exp(\mu\phi) + m'v^2 \quad (5.27)$$

Soit après avoir introduit la condition limite  $\theta = t$  en  $\phi = 0$ ,

$$\tau(\phi) = (t - m'v^2) \exp(\mu\phi) + m'v^2 \quad (5.28)$$

En examinant la formule d'Euler (5.25), on distingue deux composantes.

$$T = T_c + \bar{T} \quad (5.29)$$

La première composante

$$T_c = m'v^2 \quad (5.30)$$

est liée aux forces centrifuges et à la vitesse de défilement  $v$ . Elle est appelée *tension centrifuge*. La formule indique que la tension centrifuge est

---

1. dite aussi de Rankine ou d'Eytelwein

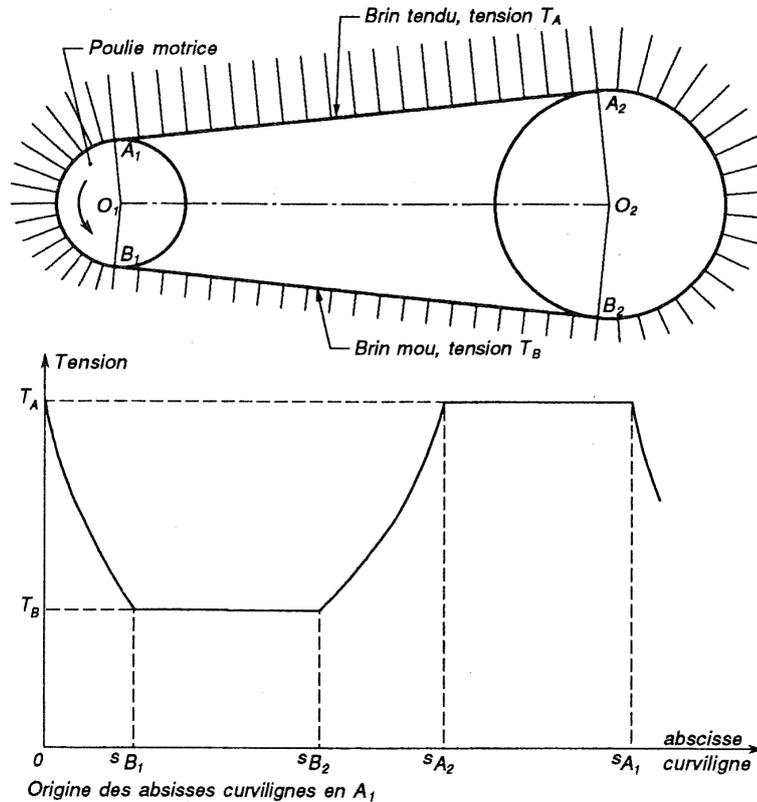


FIGURE 5.11 – Evolution de la tension dans la courroie en fonction de la position curviligne  $s$  d'après [3]

indépendante du rayon  $R$  de la poulie. On a donc la même valeur de  $N_c$  sur les deux poulies et par continuité des efforts, les brins subissent la même situation. En conclusion, on observe que il naît tout au long de celle-ci une tension  $m'v^2$  du fait de la vitesse de la courroie. Cette tension n'est nullement liée à la transmission d'un couple entre les deux poulies.

La second composante  $\bar{T}(\phi)$  reflète les tensions résultant de l'échange d'efforts entre la courroie et la poulie. Elle est appelée *tension productive*. On a vu que le couple transmis est proportionnel à la différence des tensions dans les brins tendus et mous. Comme la tension centrifuge est constante, l'effort  $Q$  n'est dû qu'aux tensions productives :

$$Q = \bar{T} - \bar{t} \quad (5.31)$$

On peut encore calculer la *tension productive moyenne*. Soit  $\bar{T}_0$ , la moyenne

entre la tension productive du brin tendu et du brin mou.

$$\bar{T}_0 = \frac{\bar{T} + \bar{t}}{2} \quad (5.32)$$

Il est intéressant de calculer le ratio entre l'effort périphérique lié à la différence des tensions productives à la valeur moyenne de ces tensions. Calculons le rapport  $Q/(2\bar{T}_0)$ . Il vient

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2\bar{T}_0} &= \frac{\bar{T} - \bar{t}}{\bar{T} + \bar{t}} \\ &= \frac{\bar{t} (\exp(\mu \Omega_1) - 1)}{\bar{t} (\exp(\mu \Omega_1) + 1)} \\ &= \frac{\exp \frac{\mu \Omega_1}{2} - \exp \frac{-\mu \Omega_1}{2}}{\exp \frac{\mu \Omega_1}{2} + \exp \frac{-\mu \Omega_1}{2}} \\ &= \tanh\left(\frac{\mu \Omega_1}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

On peut réécrire la formule sous la forme suivante :

$$Q = \bar{T}_0 \tanh\left(\frac{\mu \Omega_1}{2}\right) \quad (5.34)$$

Une conclusion très importante de cette formule est la suivante : **pour qu'il y ait un effort équivalent non nul, et donc un couple transmis non nul, il est impératif d'avoir une tension initiale non nulle.** Cette tension  $\bar{T}_0$  sera introduite via la tension de pose.

### 5.3.4 Valeurs des tensions dans les brins pour un effort effectif donné Q

L'équation d'EULER permet de calculer les efforts  $T$  et  $t$  pour un effort effectif  $Q$  donné et pour un coefficient d'interaction  $\mu$  donné. La formule est obtenue par application des propriétés particulières des fractions :

$$\frac{\bar{T}}{\bar{T} - \bar{t}} = \frac{e^{\mu \Omega}}{e^{\mu \Omega} - 1} = \frac{\bar{T}}{Q} \quad (5.35)$$

De sorte que :

$$\bar{T} = Q \frac{e^{\mu \Omega}}{e^{\mu \Omega} - 1} = T - m' v^2 \quad (5.36)$$

En définitive, les valeurs naturelles des tensions dans les brins développant un effort périphérique  $Q$  pour un angle d'embrasement apparent  $\Omega$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} \bar{T} - \bar{t} &= Q \\ \frac{\bar{T}}{\bar{t}} &= e^{\mu \Omega} \end{cases}$$

Soit en développant

$$\begin{cases} \bar{t}(e^{\mu \Omega} - 1) &= Q \\ \bar{T} &= \bar{t} e^{\mu \Omega} \end{cases}$$

et finalement

$$\begin{cases} \bar{t} &= Q \frac{1}{e^{\mu \Omega} - 1} \\ \bar{T} &= Q \frac{e^{\mu \Omega}}{e^{\mu \Omega} - 1} \end{cases} \quad (5.37)$$

### 5.3.5 Calcul des tensions dans la courroie pour le système de poulies

On peut également calculer les tensions dans la courroie en appliquant la formule d'Euler à chacune des deux poulies.

Pour la petite poulie 1, la formule d'Euler s'écrit :

$$\frac{T - m' v^2}{t - m' v^2} = e^{\mu \Omega_1} \quad (5.38)$$

tandis que pour la grande poulie notée 2 :

$$\frac{T - m' v^2}{t - m' v^2} = e^{\mu \Omega_2} = e^{\mu (2\pi - \Omega_1)} \quad (5.39)$$

Dans ces relations, les paramètres suivants sont donnés :

- La vitesse de défilement de la courroie  $v$  ;
- Les coefficients de friction de la matière de la courroie sur les poulies 1 et 2 :  $f_1$  et  $f_2$  ;
- Le coefficient de sécurité au glissement  $k$  ;
- Les angles d'embrasement  $\Omega_1$  et  $\Omega_2 = 2\pi - \Omega_1$ .

Par contre les efforts  $T$  et  $t$  dans les brins ne sont pas connus, de même que les coefficients de transmission  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Ils doivent satisfaire les inégalités :

$$k \mu_1 \leq f_1 \quad \text{et} \quad k \mu_2 \leq f_2 \quad (5.40)$$

Ces équations sont insuffisantes pour déterminer les quatre inconnues  $T$ ,  $t$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$

Remarquons encore que les formules (5.38) et (5.39) contiennent le même ratio de tensions dans les courroies pour les poulies 1 et 2 :

$$\frac{T - m' v^2}{t - m' v^2}$$

Il en ressort que l'on doit avoir l'égalité

$$\mu_1 \Omega_1 = \mu_2 \Omega_2$$

Comme l'angle embrassé sur la poulie 2 est supérieur, on constate que le plus grand coefficient de transmission naît sur la petite poulie 1. Dès lors à coefficient de frictions identiques  $f_1 = f_2$ , c'est sur la petite poulie 1 que le coefficient de transmission atteindra en premier la limite de friction du matériau et que c'est sur celle-ci que l'on observera le glissement d'ensemble en premier lieu.

### 5.3.6 Cas des courroies trapézoïdales

Le cas des courroies trapézoïdales peut se déduire assez facilement des formules développées pour les courroies plates. La situation est illustrée à la Figure 5.12

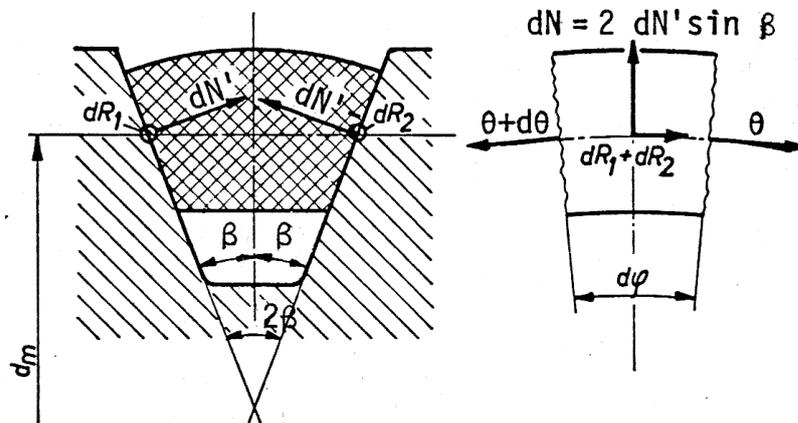


FIGURE 5.12 – Coefficient de frottement dans le cas d'une courroie trapézoïdale

Lorsqu'elles sont en service les courroies trapézoïdales sont engagées dans des gorges de même géométrie usinées dans la poulie, dont les faces font entre elles un angle  $2\beta$  (Figure 5.12).

Désignons par  $dN$  la réaction normale de la poulie sur l'élément  $rd\phi$ .  $dN$  est la résultante des réactions  $dN'$  normales aux deux parois de la gorge, qui conditionnent réellement la capacité de résistance au glissement tangentiel. Il apparaît immédiatement la relation suivante :

$$dN = 2 dN' \sin \beta \quad (5.41)$$

Quant à l'effort de frottement  $dF$ , il peut être évalué comme la somme des contributions partielles des efforts  $dF'$  normaux aux surfaces de contact. En introduisant le coefficient de frottement  $f$  entre les matières de la courroie et de la gorge de la poulie, on peut estimer la force tangentielle équivalente développée par la poulie sur la courroie :

$$dF = dR_1 + dR_2 = 2 f dN' = \frac{2 f dN}{2 \sin \beta} = \frac{f}{\sin \beta} dN \quad (5.42)$$

Introduisons un **coefficient de frottement apparent**  $f'$  :

$$dF = f' dN$$

On identifie immédiatement celui-ci à

$$f' = \frac{f}{\sin \beta} \quad (5.43)$$

Si on travaille maintenant avec un coefficient de sécurité  $k$ , on considère dans les calculs le coefficient de transmission apparent  $\mu'$  :

$$\mu' = \frac{f}{\sin \beta k} \quad (5.44)$$

La formule d'EULER est donc applicable au cas des courroies à profil trapézoïdal, à condition d'introduire le coefficient de frottement apparent en lieu et place du coefficient de frottement réel matière à matière.

Compte tenu des valeurs normalisées de l'angle de gorge  $2\beta$  au sommet du profil, on aboutit à des coefficients de frottement apparents  $f'$  compris entre 0,8 et 2.

Cette analyse montre tout l'intérêt des courroies trapézoïdales par rapport aux courroies plates. A encombrement et caractéristiques de fonctionnement identiques et en négligeant les effets dynamiques en première approximation, le rapport  $T/t$  est multiplié par  $\exp(1/\sin \beta)$  dans la formule d'Euler. Pour des valeurs courantes de  $\beta$  comprises entre  $16^\circ$  et  $20^\circ$ , ce terme conduit à des

facteurs de l'ordre de 20, ce qui mène à un accroissement considérable des performances.

Il faut noter que les valeurs de  $\beta$  sont néanmoins limitées vers le bas par le fait que l'on doit éviter le coincement de la courroie dans la gorge de la poulie. Ceci conduirait à des pertes trop importantes d'entraînement et d'insertion de la courroie dans la gorge de la roue.

## 5.4 GLISSEMENT - RENDEMENT DE GLISSEMENT

### 5.4.1 Glissement élastique

L'effort moyen  $\theta$  appliqué à un élément de courroie  $r d\phi$  de section  $S$  varie exponentiellement de  $t$  à  $T$ . L'allongement de cet élément varie en conséquence et dépend de la position angulaire  $\phi$  de l'élément considéré le long de l'angle d'embrassement  $\Omega$ . Cet allongement est maximum dans le brin tendu et par conséquent moindre dans le brin mou.

Il en résulte qu'en un temps donné une plus grande longueur de courroie défilera au niveau du brin tendu. On peut dès lors écrire la vitesse  $v_t$  au niveau brin mou soumis à une tension  $t$  :

$$v_t = \frac{\Delta\ell_0}{\Delta t} (1 + \varepsilon_t)$$

et la vitesse  $v_T$  dans le brin soumis à la tension  $T$

$$v_T = \frac{\Delta\ell_0}{\Delta t} (1 + \varepsilon_T)$$

avec

- $\Delta\ell_0$  la longueur de l'élément de courroie dans l'état libre de tension,
- $\Delta t$ , le pas de temps considéré,
- $\varepsilon_F = F/(SE)$  l'allongement proportionnel de la courroie sous l'effet de l'effort de tension  $F$ ,
- $E$  le module de Young en traction.

Il en découle le rapport des vitesses :

$$\frac{v_t}{v_T} = \frac{1 + \varepsilon_t}{1 + \varepsilon_T} \simeq \frac{1}{(1 - \varepsilon_t)(1 + \varepsilon_T)} \simeq \frac{1}{(1 + \varepsilon_T - \varepsilon_t - \varepsilon_T \varepsilon_t)}$$

et en négligeant le produit  $\varepsilon_T \varepsilon_t$  devant l'unité. On trouve finalement

$$\frac{v_t}{v_T} = \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{T-t}{SE}} = \frac{1}{1 + \frac{Q}{SE}} \quad (5.45)$$

Cette dernière expression est appelée **rendement de glissement**.

Cela étant, on sait que la formule d'Euler a été établie pour un contact à la limite du glissement d'ensemble, ce qui correspond, à une utilisation optimale de la courroie. On peut affirmer dans ces conditions que les poulies tournent avec une vitesse à la jante égale à la vitesse du premier élément de courroie pris à l'entrée.

Ainsi l'on peut écrire

$$\eta_g = \frac{v_t}{v_T} = \frac{v_{rec}}{v_{mot}} = \frac{1}{1 + \frac{Q}{SE}} \simeq 1 - \frac{Q}{SE} \quad (5.46)$$

pour des rapports  $Q/(SE)$  faibles (moins de 1 %).

Le rendement de glissement ne dépend pas de la vitesse de défilement de la courroie.

Un glissement élastique raisonnable est garanti lorsqu'on limite le rapport  $\alpha$  de l'effort périphérique  $Q$  à la somme en module des efforts dans les brins calculés en régime de fonctionnement normal. Le rapport  $\alpha$  est appelé *coefficient d'efficacité*. Un glissement d'ensemble intervient lorsqu'on le dépasse sensiblement.

On adopte en bonne pratique les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{Q}{\bar{T} + \bar{t}} = \frac{\exp(\mu\Omega) - 1}{\exp(\mu\Omega) + 1} = \begin{cases} 0.45 & \text{pour les courroies plates} \\ 0.80 & \text{pour les courroies trapézoïdales} \end{cases}$$

Dans ces conditions, on peut déterminer la part prise par le glissement élastique dans le rendement global de la transmission.

Soit  $\alpha$  fixé comme indiqué ci-dessus. Il vient en négligeant la contribution d'inertie (faible)

$$\begin{aligned} T + t &= \frac{Q}{\alpha} \\ T - t &= Q \end{aligned}$$

d'où

$$T = \frac{1 + \alpha}{2\alpha} Q$$

et

$$Q = T \frac{2\alpha}{1 + \alpha} = \gamma T$$

avec

$$\gamma = \begin{cases} 0.62 & \text{pour les courroies plates} \\ 0.89 & \text{pour les courroies trapézoïdales} \end{cases}$$

Reprenant l'expression du rendement de glissement :

$$\eta_g = 1 - \frac{Q}{S E}$$

Et remplaçant  $Q$  par son expression en fonction de  $T$ , sachant que

$$T = S R$$

où  $S$  est la section nette de la courroie et  $R$  est la tension admissible dans la courroie qui sera calculée ultérieurement comme :

$$R = \frac{R_0}{K} - E_f \frac{e}{d_1}$$

Il vient

$$\eta_g = 1 - \frac{\gamma S R}{S E} = 1 - \frac{\gamma R}{E}$$

En chiffrant le résultat, on a les ordres de grandeurs suivants :

— Cuir S :

$$\eta_g = 1 - \frac{0.62 \cdot 150 \text{ N/cm}^2}{25000 \text{ N/cm}^2} \simeq 0.99$$

— Cuir HGC

$$\eta_g = 1 - \frac{0.62 \cdot 350 \text{ N/cm}^2}{45000 \text{ N/cm}^2} \simeq 0.99$$

— Coton imprégné

$$\eta_g = 1 - \frac{0.62 \cdot 245 \text{ N/cm}^2}{90000 \text{ N/cm}^2} \simeq 0.99$$

— Balata - coton - caoutchouc :

$$\eta_g = 1 - \frac{0.62 \cdot 260 \text{ N/cm}^2}{77500 \text{ N/cm}^2} \simeq 0.99$$

Ce qui conduit très majoritairement à un rendement supérieur à 99 % dans tous les cas de figure.

### 5.4.2 Glissement d'ensemble

Lorsqu'on fonctionne dans des conditions telles que le rapport  $\alpha$  est sensiblement dépassé, la vitesse de défilement de la courroie est partout supérieure à celle que l'on peut mesurer à la jante de la poulie : *un glissement d'ensemble* apparaît.

On peut prouver que dans le cas du cuir par exemple, le coefficient de frottement obéit à une des deux lois linéaires décrites ci-dessous, suivant que la matière frotte du côté derme ou du côté épiderme :

- Côté derme :  $\mu = 0.22 + 0.012 w$
- Côté épiderme :  $\mu = 0.33 + 0.02 w$

avec  $w$  la vitesse de glissement d'ensemble en cm/s.

Dans le cas du côté "derme", et pour une vitesse de glissement nulle, le coefficient de frottement serait de  $\mu = 0.22$  tandis que pour une vitesse de glissement de 50 cm/s, ce coefficient passerait à  $\mu = 0.8$ .

Ainsi donc, si les conditions étaient telles que soudainement un coefficient de frottement de  $\mu = 0.35$  s'avérait nécessaire, de par l'apparition d'une surcharge passagère, un calcul élémentaire conduirait à tolérer une vitesse de glissement de l'ordre de 10.83 cm/s. Pour une vitesse tangentielle à l'arbre moteur de 15 m/s, il apparaîtrait un rendement de glissement de l'ordre de

$$\eta'_g = \frac{1500 - 10.83}{1500} = 0.993$$

d'où le rendement global de glissement

$$\eta = \eta_g \eta'_g = 0.995 \cdot 0.993 = 0.988$$

qui dans le cas de l'exemple reste encore très acceptable.

Le glissement d'ensemble peut jouer un rôle favorable dans la transmission : le blocage de la poulie réceptrice est évité mais ce résultat n'est obtenu qu'au prix d'une usure intolérable du brin flexible. Comme la puissance dissipée en frottement  $\simeq Q.v$  est intégralement transformée en chaleur, le phénomène de glissement, s'il perdure, peut conduire à l'échauffement puis à la destruction complète du lien flexible.

## 5.5 TENSION DE POSE

L'un des paramètres importants dans la transmission du mouvement est la tension initiale de pose de la courroie. Cette tension est celle qui règne dans toute la courroie en l'absence de couple sur les poulies motrice et réceptrice. Elle est généralement réglée au moment de la pose de la courroie par un système mécanique. Certains de ces dispositifs seront illustrés dans la suite de cet exposé (voir Section 5.5.5)

Les tensions  $T$  et  $t$  dans les brins tendus et mous de la courroie en fonctionnement sont directement liés à la tension de pose  $T_0$ . La relation nécessaire à la détermination des conditions de fonctionnement est déduite de l'étude de l'allongement de la courroie.

### 5.5.1 Calcul de la tension de pose

Soit  $T_0$  la tension de pose. On définit encore la raideur de la courroie  $K_s$ . Si on reste dans le domaine élastique, la raideur est proportionnelle à la section droite  $S$  et au module de Young  $E_t$  du matériau :

$$K_s = S E_t$$

L'allongement relatif  $\epsilon$  de la courroie est proportionnel à la tension  $T(\phi)$  dans la section étudiée correspondant à l'angle  $\phi$  sur la gorge et inversement proportionnelle au coefficient de raideur  $K_s$ .

$$\epsilon = K_s^{-1} T(\phi) = (S E_t)^{-1} T(\phi)$$

On fait l'hypothèse que l'on peut négliger les effets centrifuges devant la tension  $T_0$ .

La variation de la longueur totale de la courroie s'obtient en intégrant au niveau de sa fibre primitive la longueur des morceaux de brin allongés sous l'effet de la tension :

$$\Delta L = \int_L (S E_t)^{-1} T(\phi) dL \quad (5.47)$$

Comme la tension de pose est constante, on a

$$\Delta L = (S E_t)^{-1} L T_0 \quad (5.48)$$

On admet que la longueur totale de la courroie n'est pas modifiée au cours du fonctionnement. Les paliers, les poulies... sont indéformables, les brins restent tendus. Dès lors il suffit d'exprimer que l'allongement de la courroie sous l'effet des tensions en charge reste égal à celui calculé sous l'effet de la tension initiale de pose  $T_0$ .

L'allongement est la somme des allongements des deux brins plus la somme des allongements des brins autour des poulies.

L'allongement des deux brins rectilignes soumis à la tension  $T$  et  $t$  vaut respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta(A_1 A_2) &= (S E_t)^{-1} T a \cos \alpha \\ \Delta(B_1 B_2) &= (S E_t)^{-1} t a \cos \alpha \end{aligned}$$

L'allongement autour des poulies 1 et 2 requiert une intégration le long de l'arc d'embranchement :

$$\begin{aligned} \Delta(A_1 B_1) &= \int_0^{\Omega_1} (S E_t)^{-1} T(\phi) R_1 d\phi = \int_0^{\Omega_1} (S E_t)^{-1} t e^{\mu \phi} R_1 d\phi \\ &= \frac{(S E_t)^{-1}}{\mu_1} R_1 t (e^{\mu \Omega_1} - 1) = \frac{(S E_t)^{-1}}{\mu_1} R_1 (T - t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(A_2B_2) &= \int_0^{\Omega_2} (SE_t)^{-1} T(\phi) R_2 d\phi = \int_0^{\Omega_2} (SE_t)^{-1} t e^{\mu\phi} R_2 d\phi \\ &= \frac{(SE_t)^{-1}}{\mu_1} R_2 t (e^{\mu\Omega_2} - 1) = \frac{(SE_t)^{-1}}{\mu_2} R_2 (T - t)\end{aligned}$$

Soit l'allongement total de la courroie en fonctionnement :

$$\Delta L = a (SE_t)^{-1} \cos \alpha (T + t) + (T - t) (SE_t)^{-1} \left[ \frac{R_1}{\mu_1} + \frac{R_2}{\mu_2} \right] \quad (5.49)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}(T - t) R_1 &= C_1 \\ (T - t) R_2 &= -C_2\end{aligned}$$

et en identifiant l'expression obtenue avec l'allongement sous la tension de pause seule, on trouve :

$$\boxed{L T_0 = a \cos \alpha (T + t) + \left[ \frac{C_1}{\mu_1} - \frac{C_2}{\mu_2} \right]} \quad (5.50)$$

Cette équation (5.50) montre clairement le lien entre les tensions en fonctionnement dans les brins tendus  $T$  et mou  $t$  d'une part et la tension de pose d'autre part. Cette équation est toutefois assez délicate à utiliser en pratique. On peut déduire une expression approchée plus facile à manipuler en faisant l'hypothèse que la tension varie linéairement et pas exponentiellement le long de l'arc d'embrassement (voir Figure 5.13)

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1 &= T - \phi \frac{T - t}{\Omega_1} && \text{pour la poulie motrice 1} \\ \tilde{T}_2 &= T - \phi \frac{T - t}{\Omega_2} && \text{pour la poulie réceptrice 2}\end{aligned}$$

Cette hypothèse donne une expression approchée plus simple de l'allongement  $\Delta L$ , d'autant plus proche de la valeur réelle que l'entraxe  $a$  est grand devant les rayons primitifs  $R_1$  et  $R_2$  des poulies. Dans ce cas, les variations de la partie enroulée de la courroie devient faible par rapport à celle des parties rectilignes. Compte tenu de l'approximation linéaire de la variation de la tension productive, les allongements des deux parties enroulées  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$

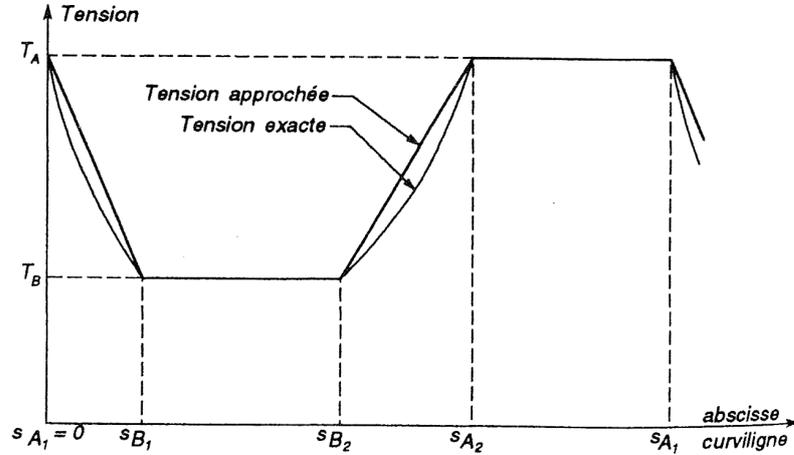


FIGURE 5.13 – Approximation de l'évolution de la tension dans la courroie en fonction de la position curviligne  $s$  d'après [3]

sont évalués en utilisant la règle des trapèzes au lieu de l'intégration exacte autour de l'angle d'embrassement. Il vient :

$$\begin{aligned}\Delta(A_1B_1) &= \int_0^{\Omega_1} (SE_t)^{-1} \tilde{T}(\phi) R_1 d\phi = \int_0^{\Omega_1} (SE_t)^{-1} \left( T - \phi \frac{T-t}{\Omega_1} \right) R_1 d\phi \\ &= (SE_t)^{-1} R_1 \Omega_1 \frac{T+t}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(A_2B_2) &= \int_0^{\Omega_2} (SE_t)^{-1} \tilde{T}(\phi) R_2 d\phi = \int_0^{\Omega_2} (SE_t)^{-1} \left( T - \phi \frac{T-t}{\Omega_2} \right) R_2 d\phi \\ &= (SE_t)^{-1} R_2 \Omega_2 \frac{T+t}{2}\end{aligned}$$

L'expression approchée de l'allongement de la courroie s'écrit alors :

$$\Delta L = (SE_t)^{-1} L \frac{T+t}{2} \quad (5.51)$$

En comparant avec la valeur de l'allongement sous la tension de pose, on a

$$\boxed{T+t = 2T_0} \quad (5.52)$$

On peut encore écrire

$$T_0 = \frac{T+t}{2} = \frac{(\bar{T} + m'v^2) + (\bar{t} + m'v^2)}{2} = \bar{T}_0 + m'v^2 \quad (5.53)$$

Cela signifie que pour une tension de pose  $T_0$  donnée, la tension productive moyenne diminue d'autant plus que la vitesse est grande et, en conséquence, que l'effort transmissible  $Q$  diminue.

$$Q = (T_0 - m'v^2) \tanh \frac{\mu \Omega_1}{2} \quad (5.54)$$

expression qui avait déjà été obtenue précédemment.

### 5.5.2 Procédure de choix d'une tension de pose

En résumé, pour déterminer le point de fonctionnement du système courroie-poulies, on cherche à déterminer toutes les inconnues du système de transmission par courroie et poulies. Le couple de la poulie moteur  $C_1$  étant supposé connu, il faut déterminer les 6 variables suivantes  $T$ , tension dans le brins tendu,  $t$ , tension dans le brin mou,  $T_0$  tension de pose,  $\mu_1$  le facteur d'interaction de la poulie 1,  $\mu_2$  le facteur d'interaction de la poulie 2, et le couple de sortie  $C_2$  à la poulie 2. Par cela on doit résoudre le système d'équation suivant :

$$C_1 + (T - t) R_1 = 0 \quad (5.55)$$

$$C_2 - (T - t) R_2 = 0 \quad (5.56)$$

$$\frac{T - m'v^2}{t - m'v^2} = \exp(\mu_1 \Omega_1) \quad (5.57)$$

$$\frac{T - m'v^2}{t - m'v^2} = \exp(\mu_2 \Omega_2) \quad (5.58)$$

$$k \mu_1 \leq f_1 \quad k \mu_2 \leq f_2 \quad (5.59)$$

$$T + t = 2 T_0 \quad (5.60)$$

La démarche de conception est la suivante. Comme c'est la petite poulie qui est sujette au glissement d'ensemble en premier lieu, on suppose d'abord que la première inégalité (5.59) doit être satisfaite en tant qu'égalité. On peut alors utiliser les cinq autres équations pour déterminer les autres inconnues  $T$ ,  $t$ ,  $T_0$ ,  $C_2$  et  $\mu_2$ . On vérifiera in fine que la seconde inégalité (5.59) est bien respectée. Dans le cas contraire, on reprend la procédure en transformant d'abord en égalité cette dernière inéquation.

Une telle démarche permet de définir une tension de pose  $T_0$  assurant un fonctionnement sans glissement avec un coefficient de sécurité  $k$  imposé. La suite de toute l'étude suppose que la limite de sécurité caractérisée par  $k$  est atteinte sur la plus petite des poulies, la poulie motrice.

Les équations (5.55), (5.56) et (5.60) donnent les expressions des tensions dans les brins tendus et mous en fonction du couple  $C_1$ , de la tension de pose  $T_0$ , du rayon de la poulie motrice  $R_1$  :

$$T = T_0 + \frac{C_1}{2 R_1} \quad (5.61)$$

$$t = T_0 - \frac{C_1}{2 R_1} \quad (5.62)$$

En combinant ces équations avec l'équation d'Euler appliquée à la poulie 1 (5.38), on trouve une équation liant  $C_1$  et  $T_0$ .

$$C_1 = 2 (T_0 - m'v^2) R_1 \frac{\exp(\mu_1 \Omega_1) - 1}{\exp(\mu_1 \Omega_1) + 1} \quad (5.63)$$

On met en évidence le fait que pour  $\Omega_1$ ,  $v$ , et  $\mu_1$  donnés, le couple  $C_1$  varie linéairement en fonction de la tension de pose  $T_0$ .

En notant

$$C(\Omega_1) = \frac{\exp(\mu_1 \Omega_1) - 1}{\exp(\mu_1 \Omega_1) + 1}$$

On peut écrire :

$$C_1 = 2 (T_0 - m'v^2) R_1 C(\Omega_1) \quad (5.64)$$

Certains fabricants définissent encore un coefficient appelé *facteur d'arc de transmission* :

$$A(\Omega) = \frac{C(\Omega)}{C(\pi)} \quad (5.65)$$

ce coefficient est utilisé par le fabricant pour corriger la puissance transmissible à partir d'une valeur de référence correspondant à un angle d'enroulement de  $180^\circ$ . L'allure de la courbe représentative de coefficient est esquissée à la Figure 5.14 pour des angles d'enroulement entre  $80^\circ$  et  $180^\circ$ . On écrit alors

$$C_1 = 2 (T_0 - m'v^2) R_1 C(\pi) A(\Omega_1) \quad (5.66)$$

### 5.5.3 Valeur minimale de la tension de pose

#### Condition de non glissement

Le respect du coefficient de sécurité de glissement  $k$  s'écrit :

$$k \mu_1 = f_1 \quad \text{et} \quad k \mu_2 \leq f_2$$

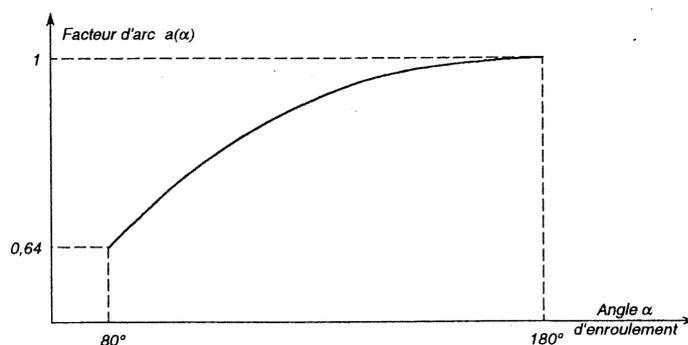


FIGURE 5.14 – Coefficient  $C(\alpha)$  pour des angles d'enroulement entre  $80^\circ$  et  $180^\circ$  d'après [3]

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les coefficients de frottement entre les poulies et la courroie.

Si on fait l'hypothèse que c'est la roue 1 qui fonctionne à la limite de la sécurité, la formule (5.66) donne le couple conduisant au glissement d'ensemble.

$$T_0 = \frac{C_1}{2 R_1} \frac{\exp(k f_1 \Omega_1) + 1}{\exp(k f_1 \Omega_1) - 1} + m'v^2 \quad (5.67)$$

Il convient ensuite de vérifier que la roue 2 est en dessous du glissement :

$$T_0 \geq \frac{C_1}{2 R_1} \frac{\exp(k f_2 \Omega_2) + 1}{\exp(k f_2 \Omega_2) - 1} + m'v^2 \quad (5.68)$$

Si cette condition n'était pas vérifiée, cela indiquerait que la limite vis-à-vis du glissement est atteinte sur la poulie 2. Il conviendrait alors de prendre pour valeur la tension de pose  $T_0$  obtenue pour la poulie 1. Si les conditions de frottement étaient identiques sur les deux roues, celle qui a le plus petit arc d'enroulement donne la valeur de  $T_0$ .

Dans la pratique le facteur de sécurité  $k$  est généralement choisi proche de 2. Toutefois la prise en compte des surcharges éventuelles lors de démarrages, ou d'arrêts fréquents, de couples fortement variables, de mauvaises conditions de fonctionnement, etc. on impose un coefficient de sécurité souvent majoré.

Pour des raisons de simplicité de calcul, les constructeurs proposent dans leurs méthodes de détermination pratique d'appliquer cette majoration à la puissance transmissible par la courroie et non comme facteur de sécurité de glissement.

| Allongement | Couple moteur |          |               |
|-------------|---------------|----------|---------------|
| Courroie    | Régulier      | Variable | Très variable |
| Étroite     | 0,6           | 0,8      | 1,0           |
| Classique   | 0,5           | 0,6      | 0,8           |

TABLE 5.2 – Allongement efficace moyen pour vérification de la tension de pose

### 5.5.4 Contrôle de la tension de pose

Le contrôle de la tension peut être réalisé par l'un des deux moyens suivants :

1. Par la mesure de l'allongement relatif de la courroie : 0,6% à 1% suivant le type de courroie et la régularité de la charge
2. Par la mesure de la flèche du brin rectiligne sous un effort donné  $F$ , normal à ce brin et appliqué en son milieu. La flèche  $f$  est liée à l'effort  $F$  et à la tension de pose  $T_0$  par la relation

$$f = \frac{F a \cos \alpha}{4 T_0} \quad (5.69)$$

L'expression de la flèche de contrôle s'obtient par l'étude de l'équilibre de l'éléments de courroie au voisinage du point d'application de la charge de test  $F$ . Cet équilibre s'exprime par la relation

$$F = 2 T_0 \sin \Phi$$

L'angle  $\Phi$  étant petit et la longueur du brin étant donné par  $a \cos \beta$ , on a

$$\sin \Phi \simeq \tan \Phi \simeq \frac{2 f}{a \cos \alpha}$$

Soit

$$F = \frac{4 T_0 f}{a \cos \alpha}$$

Généralement l'effort  $F$  est choisi de façon à provoquer une flèche  $f$  égale à 1% de la portée  $a \cos \alpha$ .

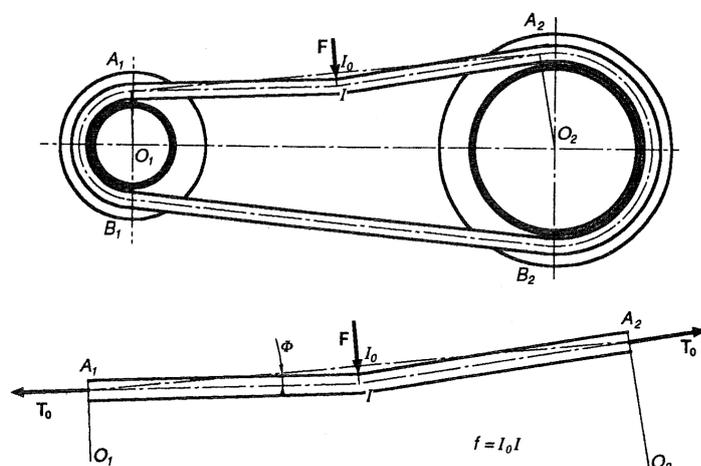


FIGURE 5.15 – Contrôle de la tension de pose d'après [3]

### 5.5.5 Technologies d'imposition d'une tension de pose

#### La précontrainte est appliquée par variation forcée d'entraxe

Dans le cas de cette méthode simple à mettre en oeuvre, le moteur électrique entraînant la poulie motrice ( $d_1$ ) est fixée sur un socle réglable en position qui permet un accroissement forcé d'entraxe de plusieurs centimètres (action de tirants filetés ou de vis de poussée).

Deux dispositifs de réglage sont illustrés aux Figures 5.19 a et b. Suivant la conception, le berceau glisse sur un plan ou oscille autour d'un axe, jusqu'à atteindre la position définitive voulue. Dans le cas d'une variation d'entraxe, on peut calculer la précontrainte  $T_0$  qui en résulte.

#### L'effort dans le brin mou est maintenu constant quel que soit l'allongement de la courroie en régime

La Figure 5.16 montre le système utilisé dans son principe. La Figure 5.17 présente la solution du *gilet tendeur classique*, constitué d'une poulie folle à jante lisse appuyée à la surface extérieure du brin mou (i.e. brin mené). Ce gilet tendeur est généralement placé du côté de la petite poulie, afin d'accroître  $\Omega$ , l'angle d'embrassement apparent minimum, caractéristique de la transmission.

L'utilisation d'un enrouleur présente un inconvénient majeur : il provoque une flexion supplémentaire de la courroie, inversée par rapport à celle qui résulte de l'enroulement sur les poulies principales. L'usure et la fatigue du matériau

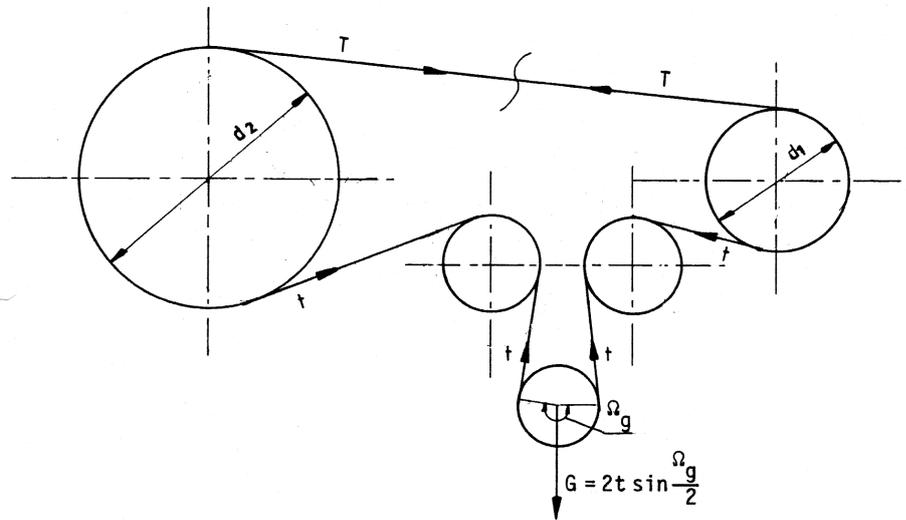


FIGURE 5.16 – Principe de maintien de la tension constante dans le brin mené

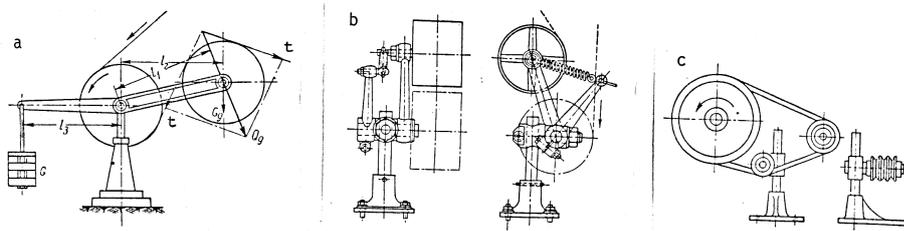


FIGURE 5.17 – Système à galet tendeur

s'accroissent nécessairement. D'une manière générale, on évite l'utilisation de galet dont le diamètre est inférieur à  $d_1$ , diamètre caractéristique de la petite poulie. En bonne pratique, la distance qui sépare l'axe du galet de la poulie la plus proche doit être de l'ordre de :

$$a_g \geq d_1 + d_g$$

Dans les transmissions avec des courroies trapézoïdales modernes, il n'est pas généralement nécessaire d'augmenter l'arc embrassé. Dans ce cas, les galets ne sont utilisés que pour ajuster la tension initiale des courroies (Voir Figure 5.17-c).

**Réglage de la tension par application d'un effort constant à l'axe**

de la poulie motrice, quel que soit l'allongement de la courroie en régime

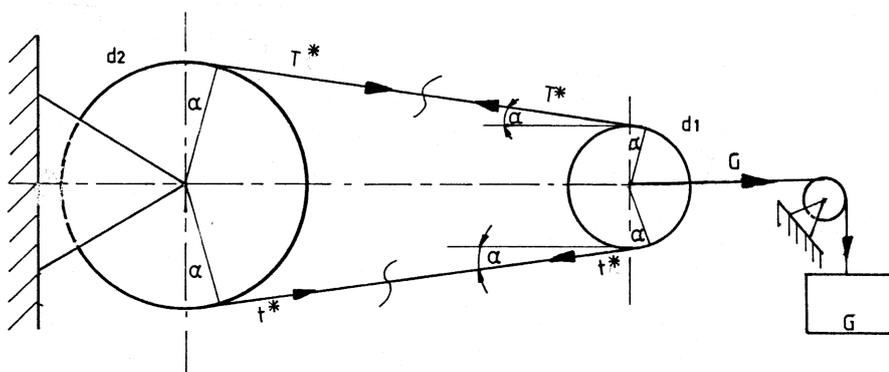


FIGURE 5.18 – Principe du réglage de la tension par action sur la poulie motrice

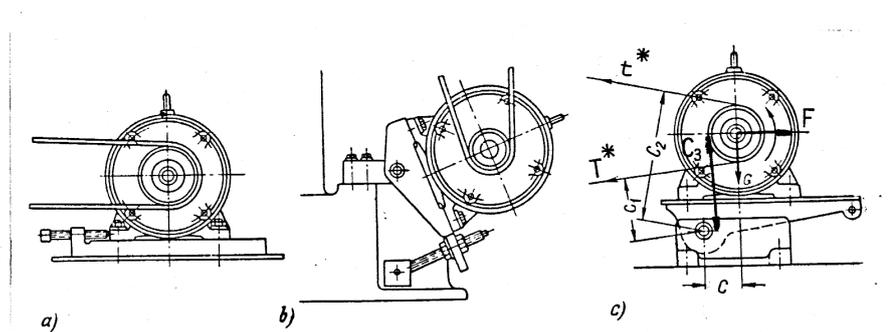


FIGURE 5.19 – Réalisation pratique du réglage par action sur la poulie motrice

Le principe du système est présenté à la Figure 5.18. Dans les dispositifs de contrainte les plus simples, le moteur électrique portant la poulie menante se déplace sur un chariot (Figure 5.19 a) ou oscille autour d'un axe (Figure 5.19 b). Le réglage est cette fois obtenu par application d'un poids  $G$  appliqué en permanence. La liberté de mouvement du support moteur est à présent requise : elle est obtenue par la suppression du système de réglage forcé de l'entraxe.

Au besoin, le chariot reçoit à son extrémité libre une charge supplémentaire (poids ou ressort).

Les limites de réglage d'entraxe sont les suivantes :

- Entraxe nominal :  $-1\%$  de  $L$  sous tension
- Entraxe nominal :  $+3\%$  de  $L$  sous tension

$L$  = longueur de courroie intérieure ou primitive.

### Dispositifs particuliers permettant un asservissement des tensions

Les dispositifs examinés précédemment (chariots, plateaux oscillants, galets tendeurs) ne permettent que le maintien à un niveau constant de la tension  $t$  dans le brin mou ou de la somme  $(t + T)$  des efforts d'entrée et de sortie.

La tendance actuelle est d'assurer un réglage automatique des tensions dans les brins en fonction de la charge périphérique réellement développée. Le principe de fonctionnement des dispositifs prévus à cet effet est schématisé à la Figure 5.20 a. Il consiste à utiliser le moment réactif du stator d'un moteur électrique ou d'une transmission par engrenage.

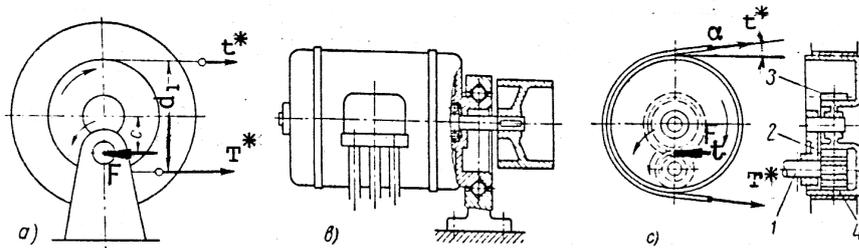


FIGURE 5.20 – Asservissement de  $t$  et  $T$  à la charge  $Q$

Dans la conception schématisée à la Figure 5.20-b, le couvercle avant, côté poulie, du moteur électrique est équipé d'une portée cylindrique excentrée montée sur un roulement, lui-même serti dans un montant fixé au sol. On rend ainsi possible l'action du moment réactif. Une conception un peut différente est présentée à la Figure 5.20-c où il est fait usage d'une réduction par engrenage.

L'arbre (1) du moteur électrique est équipé d'une roue dentée menante (4) et supporte une pièce (2) par l'intermédiaire d'un coussinet lisse (ou d'un roulement). Ce support oscillant (2) porte un axe calé dur sur lequel glisse la roue (3) solidaire de la poulie motrice.



Le second facteur limitif sur la longueur du brin est la résistance à la fatigue du matériau utilisé pour la courroie, compte tenu des changements de courbure du brin tendu (voir Figure 5.21).

Pour modérer la fatigue du matériau, on fixe une fréquence d'incurvation limite :

$$Fr = \frac{Zv}{\mathcal{L}} \leq F_l (Hz) \quad (5.72)$$

où

- $F_l$  la fréquence limite admissible caractéristique du matériau,
- $Z$  le nombre d'incurvations successives égale au nombre de poulies et de galets sur la longueur du brin tendu,
- $v$  la vitesse de défilement du brin tendu en m/s,
- $\mathcal{L}$  la longueur réelle du brin tendu compte tenu des poulies ou galets qu'il embrasse de la poulie motrice à la dernière poulie réceptrice,

La géométrie la plus habituelle ne comporte que deux poulies. Le brin tendu est alors rectiligne et tangent aux jantes des poulies numérotées 1 et 2 (Voir Figure 5.7). Dans ces conditions, on peut écrire en première approximation

$$0,9 a' \simeq \mathcal{L} \quad (5.73)$$

où  $a'$  est proche de la valeur réelle de l'entraxe et  $\mathcal{L}$  est la longueur du brin tendu bitangent.

En introduisant  $\mathcal{L} = 0,9 a'$  dans la relation aux fréquences, il vient :

$$a' \geq \frac{2v}{F_l 0,9} \quad (5.74)$$

En définitive, on adopte une valeur de  $a$  supérieure ou égale à  $a'$  tout en restant entre les limites fixées par la bonne pratique.  $a$  doit satisfaire simultanément aux inégalités suivantes :

$$a \geq a' \quad \text{calculé pour la fréquence limite } F_l \quad (5.75)$$

$$a_{min} \geq a \geq a_{max} \quad \text{compte tenu des encombrements limites} \quad (5.76)$$

Pour d'autres dispositions plus complexes, la Figure 5.22 peut éventuellement simplifier la détermination des longueurs.

Une variation d'entraxe doit être prévue, soit pour rattraper l'usure ou les allongements permanents, soit pour permettre l'introduction des courroies trapézoïdales dans leurs gorges respectives. On compte en général sur une variation d'entraxe de :

- 0 à 5 % de  $L_N$  pour les courroies en cuir,
- 0 à 3 % de  $L_N$  pour les courroies en matériau synthétique,
- -1,5 à 3 % de  $L_N$  pour les courroies trapézoïdales.

|  |   |   |   |  |
|--|---|---|---|--|
| <p>Schéma de la transmission</p>   |   |   |   |  |
| <p>Arc embrassé par la courroie sur la petite poulie</p>                                     | $\alpha \approx 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{A} 60^\circ$       | $\alpha \approx 180^\circ + \frac{D_2 + D_1}{A} 60^\circ$       | $\alpha \approx 180^\circ + \frac{D_1}{A} 60^\circ$               | $\alpha \approx 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{2A} 60^\circ + \frac{D_1 + D_g - 2E}{2A_g}$   |
| <p>Longueur géométrique de la courroie (sans tenir compte de la tension et de la flèche)</p> | $L = 2A + \frac{\pi}{2} (D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4A}$ | $L = 2A + \frac{\pi}{2} (D_1 + D_2) + \frac{(D_1 + D_2)^2}{4A}$ | $L = 2A + \frac{\pi}{2} (D_1 + D_2) + \frac{(D_1^2 + D_2^2)}{2A}$ | $L = (A + A_g + C) + \frac{\pi}{2} (D_1 + D_2) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{8A} + \frac{(D_2 + D_g)^2}{8A} + \frac{(D_1 + D_g)^2}{8C} - \frac{E}{A_g} \left( \frac{D_1 + D_g}{2} \right) - \frac{E}{C} \left( \frac{D_2 + D_g}{2} \right)$ |

FIGURE 5.22 – Calcul des longueurs de courroie plate dans le cas de géométries complexes

### 5.6.2 Longueur $L$ du lien flexible

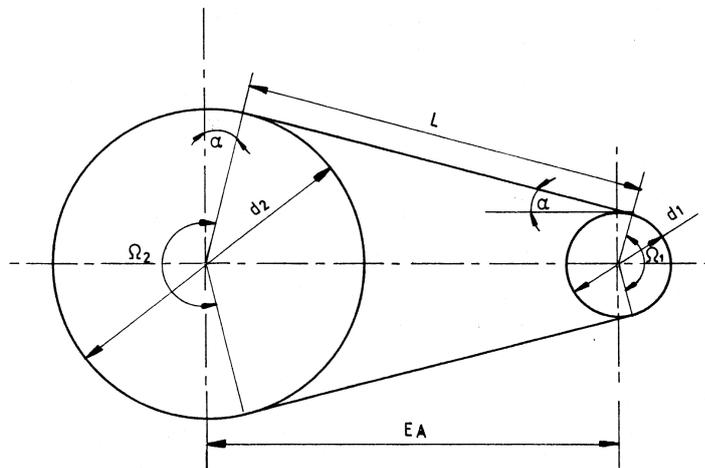


FIGURE 5.23 – Détermination de  $L$  ou de  $EA = a$

Calculons la relation qui lie l'entraxe à la longueur  $L$  de courroie, dans le cas le plus courant d'une transmission moderne sans enrouleur (ce qui arrive avec tout autre matériau que le cuir).

Dans le cas où  $d_1$ ,  $d_2$  et  $a$  sont connus, on détermine tout d'abord  $\Omega_1$ , le plus petit des angles d'embrasement :

$$\Omega_1 = 2 \cos^{-1} \frac{d_2 - d_1}{2a} \quad (5.77)$$

puis  $\Omega_2$

$$\Omega_2 = 2\pi - \Omega_1 \quad (5.78)$$

Des conditions géométriques simples conduisent ensuite à la détermination de la longueur  $L$  de la courroie

$$L = \Omega_1 \frac{d_1}{2} + (2\pi - \Omega_1) \frac{d_2}{2} + 2 \sqrt{a^2 - \left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)^2} \quad (5.79)$$

En réalité, le problème se pose d'une manière un peu différente. On connaît un  $a$  approximatif. On doit en déduire la longueur  $L$  correspondante. Cette longueur  $L$  doit être normalisée à la valeur standard la plus proche dans la série des nombres normaux. On doit ensuite calculer l'entraxe nouveau qui correspond à la valeur normalisée de la longueur  $L$ .

D'où la nécessité d'établir des formules approchées permettant le passage de la valeur de l'entraxe  $a$  à la longueur de la courroie  $L$  et vice versa.

A noter que la valeur adoptée est systématiquement la valeur normalisée supérieure : une valeur  $L_N$  supérieure entraîne en effet une valeur de la fréquence  $Fr$  plus faible que celle imposée dans le calcul initial.

Basons les développements sur le schéma de la Figure 5.23, on peut écrire :

$$L = \frac{\pi}{2} (d_1 + d_2) + 2a \cos \alpha + \alpha (d_2 - d_1) \quad (5.80)$$

avec  $\alpha$  généralement assez faible. Passons au sinus et développons en série de Mac Laurin, il vient :

$$L = \frac{\pi}{2} (d_1 + d_2) + \alpha (d_2 - d_1) + 2a - a \left(\frac{d_2 - d_1}{2a}\right)^2$$

Assimilons l'angle au sinus, il vient

$$\alpha \simeq \frac{d_2 - d_1}{2a} \quad (5.81)$$

et partant

$$L = \frac{\pi}{2} (d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{2a} + 2a - \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}$$

Soit

$$L = \frac{\pi}{2} (d_1 + d_2) + 2 a + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4 a} \quad (5.82)$$

La longueur  $L$  est ainsi connue approximativement. On la normalise supérieurement  $L_N$ .

La longueur ainsi calculée correspond, pour une courroie plate, à la longueur intérieure, alors que dans le cas d'une courroie trapézoïdale, elle correspond à la longueur primitive, c'est-à-dire celle correspondant aux rayons théoriques de non glissement en fonctionnement sans charge.

En règle générale, cette longueur théorique de courroie calculée par la relation (5.82) est différente de la longueur réelle puisque la courroie est prise parmi les valeurs standards proposées dans les catalogues. Celles-ci sont généralement choisies en fonction des séries de Renard.

Cette relation (5.82) permet aussi de calculer la valeur théorique de l'entraxe  $a$  correspondant à une courroie et deux poulies données. Dans la majorité des cas, la valeur de cet entraxe doit être réglable de façon à ajuster la tension de pose de la courroie.

Dans le cas du dimensionnement, on est souvent amené à procéder en sens inverse et à déterminer l'entraxe réel  $a_R$  à partir d'une longueur de courroie normalisée  $L_N$ . Notons que la longueur  $L_N$  est la longueur de la face interne pour les courroies plates tandis que pour les courroies trapézoïdales,  $L_N$  est la longueur mesurée au niveau de l'axe neutre de la section droite.

Introduisons la valeur normalisée  $L_N$  de la longueur  $L$  et calculons l'entraxe correspondant. Il vient :

$$L_N = \frac{\pi}{2} (d_1 + d_2) + 2 a_R + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4 a_R}$$

qui se transforme aisément en :

$$8 a_R^2 + 2 a_R [\pi (d_1 + d_2) - 2 L_N] + (d_2 - d_1)^2 = 0$$

On calcule les racine de l'équation du second degré :

$$a_R = \frac{-[\pi(d_1 + d_2) - 2L_N] \pm \sqrt{[\pi(d_1 + d_2) - 2L_N]^2 - 8(d_2 - d_1)^2}}{8} \quad (5.83)$$

La géométrie du système est ainsi déterminée.

## 5.7 DIMENSIONNEMENT - CHOIX DES COURROIES

### 5.7.1 Courroies plates

#### Normalisation

La normalisation des courroies est régie par les normes NBN 470-1957 et 583-1961 - ISO/R22 et R63.

Les *diamètres des poulies* sont étagés de 40 à 2000 mm en suivant la série des nombres normaux (série de Renard)  $R_{20}$ .

Les *largeurs* des courroies et des jantes des poulies sont étagées de 20 à 630 mm en suivant la série des nombres normaux :

- $R_{10}$  pour les largeurs de 20 à 63 mm
- $R_{20}$  pour les largeurs de 63 à 630 mm

On notera que la largeur de jante est en général la valeur  $R_{20}$  juste supérieure à celle retenue pour la courroie. Les longueurs de courroies plates sans fin sont mesurées sous tension initiale, au niveau de la face de contact. Les longueurs normalisées sont étagées à partir de 500 mm et correspondent aux termes successifs de la série  $R_{20}$ . Des valeurs de  $L$  non normalisées sont utilisées dans certains cas. Dans ce cas de figure, l'utilisation d'un dispositif de "jonctionnement" est rendue indispensable (voir Figure 5.24). Il faut noter que les courroies jonctionnées sont très nettement déformées par rapport aux courroies sans fin de même section.

#### Bases théoriques du dimensionnement

Transcrivons tout d'abord le système d'équations construit à partir de la formule d'Euler :

$$\begin{cases} \bar{t} &= t - m'v^2 &= \bar{Q} \frac{1}{e^{\mu \Omega} - 1} \\ \bar{T} &= T - m'v^2 &= \bar{Q} \frac{e^{\mu \Omega}}{e^{\mu \Omega} - 1} \end{cases} \quad (5.84)$$

Dans la dernière équation, rappelons que  $T$  est l'effort total appliqué à la courroie,  $m'$  est la masse par unité de longueur de la courroie,  $v$  est sa vitesse périphérique,  $\bar{T}$  est l'effort maximum récupérable à la jante,  $\bar{Q}$  est l'effort périphérique maximum prévisible ( $\bar{Q} = Q \times$  facteur de service),  $\mu$  le coefficient de frottement moyen service,  $\Omega$  l'angle d'embranchement apparent mesuré sur la petite poulie.

Calculons la section nette  $S$  de courroie qui permet la transmission de l'effort périphérique  $\bar{Q}$ , le lien flexible étant à la limite du glissement.

Si  $R$  est la tension admissible disponible en traction, caractéristique du matériau et de la géométrie de la transmission, on peut écrire :

$$T = S R \quad (5.85)$$

La masse  $m'$  calculée par unité de longueur peut également s'exprimer en fonction de la section nette  $S$ .

$$m' = S \rho \quad (5.86)$$

où  $\rho$  est la densité spécifique de la courroie en  $kg/m^3$ .

En introduisant les expressions de  $T$  et de  $m'$  dans la relation en  $\bar{T}$ , on obtient :

$$S (R - \rho v^2) = \bar{Q} \frac{e^{\mu \Omega}}{e^{\mu \Omega} - 1} \quad (5.87)$$

d'où l'expression de la section nette :

$$S = \frac{\bar{Q}}{R - \rho v^2} \frac{e^{\mu \Omega}}{e^{\mu \Omega} - 1} \quad (5.88)$$

Il est à noter que la section nette nécessaire  $S$  est d'autant plus faible que le produit  $\mu \Omega$  est élevé. Un coefficient de frottement plus élevé, un plus grand entraxe ou un plus petit rapport de réduction  $i$  conduisent à une meilleure utilisation du matériau constitutif de la courroie.

Une première remarque s'impose à propos de la tension admissible  $R$  : la courroie est à la fois soumise à un effort de traction  $T$  et aux contraintes qui résultent de son incurvation sur la longueur des arcs de contact au niveau des jantes. Les tensions de flexion qui en résultent sont évidemment les plus élevés au niveau de la poulie de petit diamètre ( $d_1$ ).

Appelons  $e$  l'épaisseur de la courroie,  $E_f$  son module d'élasticité à la flexion. Confondons l'axe neutre avec la fibre moyenne de la courroie enroulée sur le rayon  $d_1/2$  de la poulie. La courbure étant constante, il y correspond un moment de flexion pure et, par voie de conséquence, des tensions  $\sigma_f$  qui s'ajoutent aux tensions de traction (induites par l'effort  $T$ ).

Appliquons la loi de Hooke à la fibre la plus sollicitée. L'allongement proportionnel calculé à la fibre externe de la courroie est déterminé par l'expression suivante (cfr cours de Résistance de Matériaux)

$$\epsilon = \frac{e/2}{d_1/2 + e/2} \quad (5.89)$$

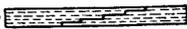
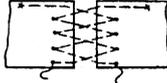
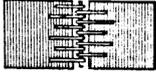
| Types de jonctionnement |                                       |  | Résistance de la jonction par rapport à celle d'une courroie intacte |
|-------------------------|---------------------------------------|--|--|
| Collage                 | Colle à cuir                          |    | 80 à 85%   |
|                         | Colle à caoutchouc                    |    | 80 à 85%   |
| Couture                 | Lanières tannées en suif              |    | 30%  |
|                         | Cordes en boyaux                      |    | 50%  |
| Agrafage                | Boulons et couvre-joints (aboutement) |  | 30%  |
|                         | Boulons et couvre-joints (peigne)     |  | 25%  |
|                         | Agrafes en acier ou spirales à tige   |  | 50 à 80%   |

FIGURE 5.24 – Jonction des courroies

et négligeant  $e/2$  vis-à-vis du rayon  $d_1/2$ , il vient

$$\epsilon = \frac{e}{d_1} \quad (5.90)$$

et partant en utilisant la loi de Hooke

$$\sigma_f = E_f \frac{e}{d_1} \quad (5.91)$$

d'où la relation permettant le calcul de la tension réelle admissible en traction  $R$  :

$$R = R^* - \sigma_f = \frac{R_0}{K} - E_f \frac{e}{d_1} \quad (5.92)$$

où  $K$  est un coefficient de sécurité. Quelques valeurs typiques des caractéristiques  $R_0$ ,  $K$ ,  $E_f$ ,  $E_t$ ,  $e/d_1$  sont fournies à la Figure 5.25 en même temps que les valeurs de  $\rho$ ,  $v_{max}$ ,  $\mu$ , et  $\theta_{max}$  (température maximale d'utilisation), en fonction du type de matériau de la courroie.

Une seconde remarque concerne la valeur de l'effort périphérique  $\bar{Q}$  à introduire dans la formule de la section nette. La force tangentielle dépend du couple transmis, grandeur qui peut être fortement variable au cours du cycle. On en tient compte en pratique en introduisant un facteur service  $f_s$ , supérieur à l'unité, qui dépend à la fois du type de machine motrice et réceptrice ainsi que des conditions de fonctionnement spécifiques à l'installation (poussière, eau, huile, température élevée, etc.) .

En première approximation, et en l'absence de directives précises émanant d'un fabricant, on peut adopter les valeurs proposées dans l'abaque de Richter-Ohlendorf reprise à la Figure 5.26. On y a tracé à titre exemplatif : turbines hydrauliques, démarrage moyens, pleine charge avec chocs raisonnables, courroies, 8 heures par jour donne  $f_s = 1.73$ .

### Calcul pratique d'une courroie plate

Les fabricants de courroie fournissent généralement des nomogrammes et des coefficients de correction pour le calcul rapide d'une transmission par courroie. Ces abaques tiennent compte de la vitesse circonférentielle, du type de courroie, du diamètre de la plus petite poulie et de l'angle d'enroulement de la courroie sur cette dernière.

L'abaque principal fournit la puissance  $P_1$  transmissible par cm de largeur pour une courroie de type (i.e. d'épaisseur) donné, en fonction de la vitesse périphérique.

Pour chaque type de courroie, le fabricant indique également le diamètre  $d_1$  minimum préconisé pour une bonne utilisation du lien flexible.

Dans ces conditions, on déterminera la largeur nécessaire en respectant l'organigramme suivant.

Supposons tout d'abord que  $P_{rec}$  et  $N_{rec}$ , respectivement la puissance et la vitesse de rotation imposées à la poulie réceptrice soient les données fondamentales du problème.

| Type de courroie<br>Matériau utilisé | Tension de rupture à la traction<br>$R_0$ en $[N/cm^2]$ | Module de Young en traction<br>$E_t$ en $[N/cm^2]$ | Coef. de sécurité<br>$K$ | Tension admissible totale<br>$R^*$ en $[N/cm^2]$ | Module de Young en flexion<br>$E_f$ en $[N/cm^2]$ | Rap. max. $\frac{e}{d_1}$ | Densité $(\rho = 10^3 D)$<br>en $[kg/m^3]$ | Fréq. limite d'endurance en $[s^{-1}]$ | Vitesse périph. max. en $[m/s]$ | Coefficient de frottement $(\pm) f$ | Temp. max. de fonct. $\theta_{max}$ $[^\circ C]$ |
|--------------------------------------|---|--|--------------------------|--|---|---------------------------|--|--|---------------------------------|-------------------------------------|--|
| Cuir type S                          | 2500  | 25000  | 6...7                    | 360...410  | 5000...9000                                       | 0,033                     | 1,0  | 5                                      | 30                              | derme                               | 35   |
| G                                    | 3000  | 35000  | 6...7                    | 430...500  | 4000...8000                                       | 0,04                      | 0,95                                       | 10                                     | 40                              | 0,22 + 0,012 w                      | 35   |
| HGL                                  | 3000...4000   | 45000  | 6...7                    | 430...650  | 3000...7000                                       | 0,05                      | 0,9  | 25                                     | 50                              | épiderme                            | 45   |
| HGC                                  | 3000...4500   | 45000  | 6...7                    | 430...750  | 3000...7000                                       | 0,05                      | 0,9  | 25                                     | 50                              | 0,33 + 0,02 w                       | 70   |
| Tissus -imprégnés                    |   |  |                          |  |   |                           |  |  |                                 |                                     |  |
| Co-Ba                                | 5000...6500   | 90000...150000                                     | 12...15                  | 330...540  | 5000  | 0,04                      | 1,25                                       | 30                                     | 40                              | 0,5                                 | 40   |
| Ca-Ba-Co                             | 5000...6000   | 35000...120000                                     | 11...15                  | 330...540  | 5000  | 0,035                     | 1,2  | 30                                     | 40                              | 0,5                                 | 45   |
| Ca-Co                                | 4500...6000   | 50000...130000                                     | 12...15                  | 300...500  | 5000  | 0,033                     | 1,25                                       | 30                                     | 40                              | 0,5                                 | 70   |
| -non impr.                           |   |  |                          |  |   |                           |  |  |                                 |                                     |  |
| Co                                   | 3500...5000   | 50000...140000                                     | 10...15                  | 230...500  | 4000  | 0,05                      | 1,3  | 40                                     | 50                              | 0,3                                 | -  |
| soie art.                            | 5000  | -  | 10...15                  | 330...500  | 4000  | 0,04                      | 1,0  | 40                                     | 50                              | 0,35                                | -  |
| nylon-perlon                         | 18000...22000   | -  | 10...12                  | 1650...2200                                      | -   | -                         | 1,1...1,15                                 | 80                                     | 65                              | -                                   | -  |
| C. composite contact                 |   |  |                          |  |   |                           |  |  |                                 |                                     |  |
| Cuir/Ca                              | 18000...22000   | 55000  | 10...12                  | 1650...2200                                      | 55000   | 0,01                      | 1,1...1,2                                  | 80                                     | 80                              | comme pour cuir                     | 40...70  |
| résistance mat. Plast.               |   |  |                          |  |   |                           |  |  | éventuel. jusqu'à 100           | 0,75                                | 70...80  |
| C. trap.                             |   |  |                          |  |   |                           |  |  |                                 |                                     |  |
| - normales                           | -   | 50000...140000                                     | -                        | 700...900  | 5000  | -                         | 1,25                                       | 40                                     | 25...30                         | 0,35 + 0,012 w                      | 70...80  |
| - de type étroit                     | -   |  | -                        |  |   |                           |  | 50...80                                | 60                              |                                     |  |

(\*) Dans l'expression du coefficient de frottement, w est la vitesse de glissement d'ensemble exprimée en cm/sec. Pour les courroies trapézoïdales, le tableau fournit la valeur du coefficient de frottement matière à matière

Légende : Co : coton ; Ba : balata ; Ca : caoutchouc

\* Structure en couches superposées de matériaux collés

FIGURE 5.25 – Caractéristiques générales des courroies

- On choisit les diamètres  $d_1$  et  $d_2$  nomalisés  $R_{20}$  en fonction du rapport de réduction  $i$  nécessaire et de l'encombrement limite toléré.

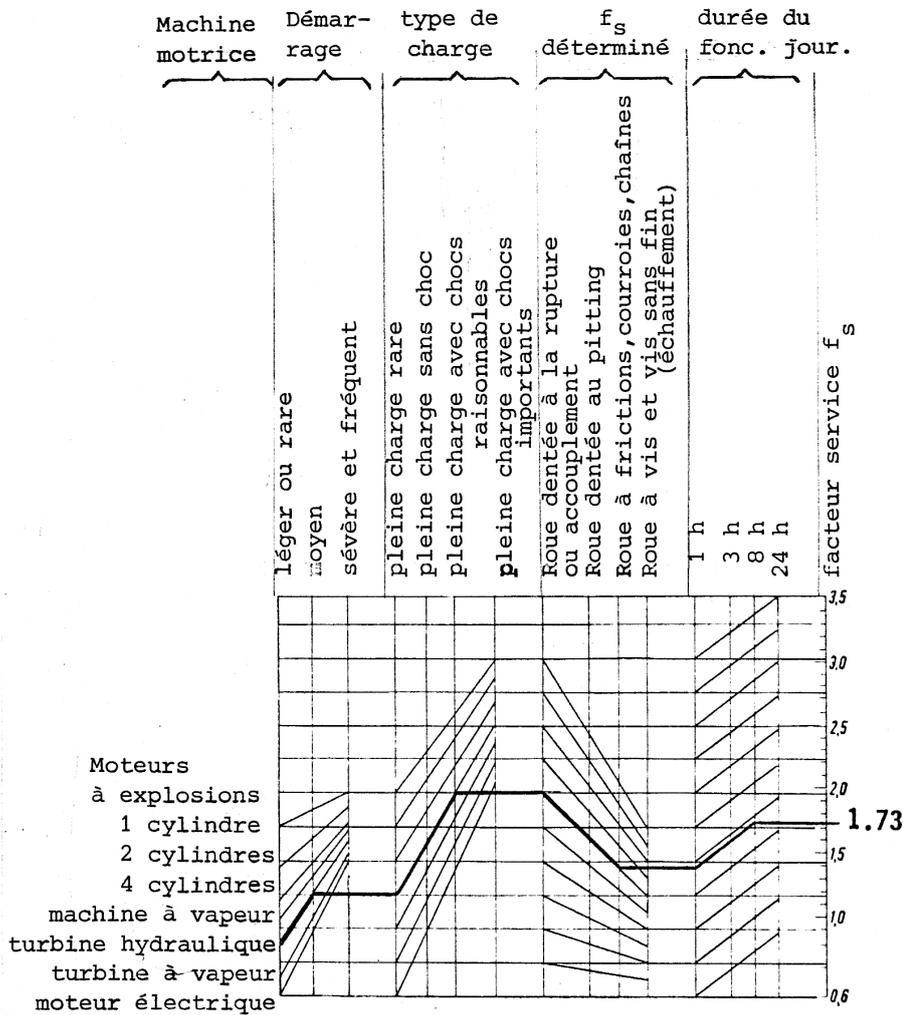


FIGURE 5.26 – Facteur de service approximatif d’après Richter-Ohlendorf

- Compte tenu d’un entraxe approximatif choisi en fonction du type de courroie, on détermine la longueur normalisée la plus proche et l’entraxe réel correspondant. La géométrie est ainsi parfaitement définie :  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $L_N$  et  $EA_{reel}$  sont à présent connus.
- L’épaisseur de la courroie caractérise le *type*. Cette épaisseur sera choisie en fonction du matériau utilisé et du diamètre  $d_1$ . Dans la mesure du possible, il est conseillé d’utiliser la formule de bonne pratique suivante :

$$e = d_1/100 + 3 \text{ mm} \quad (5.93)$$

avec  $d_1$  en mm. L'épaisseur approximative permet la détermination du type qui répond le mieux à l'application.

4. Le type étant déterminé, l'abaque ( $P_1, v, \text{type}$ ) est utilisable pour la vitesse  $v$  de défilement de la courroie correspondant de l'application. On détermine la puissance  $P_1$  (en kW/cm) caractéristique du type, dans le cadre des conditions particulières qui ont été fixées lors de la construction de l'abaque. Une largeur idéale s'en déduit :

$$l_{id} = \frac{f_s P_{mot}}{P_1} = \frac{f_s P_{rec}}{P_1 \eta} \quad (5.94)$$

avec  $\eta$  le rendement global qui vaut approximativement  $\eta = 0.97$ .

5. Cette largeur idéale doit être majorée pour tenir compte des conditions réelles de l'utilisation. La largeur  $l_{id}$  est dès lors divisée par un produit de facteurs  $k_i$  inférieurs à l'unité.

$$l_{reelle} = \frac{l_{id}}{k_1 k_2 \dots k_n} \quad (5.95)$$

avec, pour un fabricant particulier

—  $k_1$ , un coefficient dit de "condition atmosphérique",

$$0.7 \leq k_1 < 1$$

—  $k_2$  un facteur d'embrassement pour des  $\Omega$  inférieurs à  $\pi$

$$0.6 \leq k_2 < 1$$

—  $k_3$ , un coefficient dépendant de la disposition relative des poulies (inclinaison de la ligne des centres sur l'horizontale)

$$0.72 \leq k_3 < 1$$

Cette dernière valeur  $l_{reelle}$  doit encore être normalisée à un terme de la série  $R_{10}$  ou  $R_{20}$  suivant le diamètre.

A ce stade du calcul, il ne reste plus qu'à vérifier si la fréquence d'incurvation reste inférieure à la fréquence limite du matériau caractéristique du type et du matériau (voir Figure 5.25) .

## 5.7.2 Courroies trapézoïdales

### Normalisation

La normalisation des courroies trapézoïdales est régie par les normes suivantes : NBN 598-1963 et ISO/R 256 - R 434 pour type normal et NBN 640-1964 et ISO/R 578 pour type étroit.

La courroie à section trapézoïdale est le plus souvent réalisée en matériau caoutchouté. Elle comporte un ou plusieurs lits de fibres textiles, localisés dans la moitié, supérieure du profil, dont le rôle est de reprendre les efforts développés dans la transmission. La surface extérieure de la courroie est en outre recouverte d'un tissu imprégné de caoutchouc vulcanisé qui améliore la résistance à l'usure et préserve la matière à cœur.

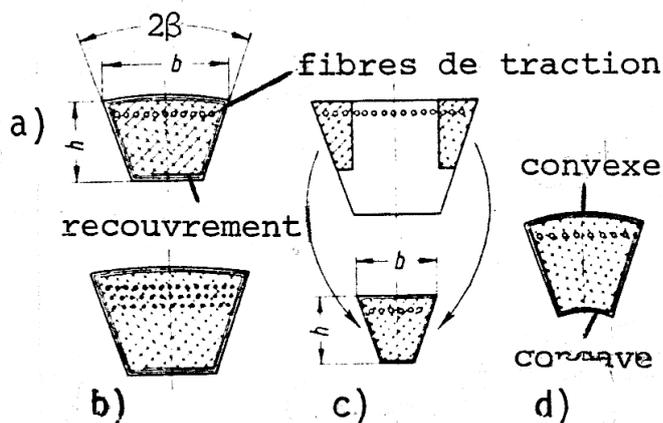


FIGURE 5.27 – La courroie trapézoïdale. a/ Type normal, b/ type étroit, c/ type étroit concave, d/ convexe Spesa Ver

### Type normal 5.27-a

Les courroies sans fin de type normal sont élaborées en introduisant un angle au sommet de section droite  $2\beta$  allant de 32 à 38 degrés d'arc. Le rapport  $b/h$  de la grande base à la hauteur du profil varie de 1.5 à 1.65 en 7 types normalisés ISO généralement désignés chacun par une lettre ou par deux nombres correspondant l'un à la longueur de la grande base, l'autre à la hauteur du profil. Les types Y(6 x 4), Z(10 x 6), A(13 x 8), B(72 x 11), C(22 x 14), D(32 x 19) et E(38 x 25) sont actuellement normalisés par l'ISO.

**Type étroit 5.27-b**

Les courroies sans fin de type étroit sont des courroies à faible raideur flexionnelle préconisées dans le cas des vitesses périphériques importantes ( $v = 60$  m/s). Ces courroies présentent un angle d'ouverture de profil compris entre 34 et 38 degrés d'arc. Le rapport  $b/h$  pratiqué est plus faible que précédemment. il peut varier dans l'intervalle [1.2 – 1.25].

Les courroies de type étroit permettent la transmission de fortes puissances avec des dimensions plus modestes que celles imposées par le type normal (encombrenement moindre). La conception concave-convexe, breveté par certaines firmes (Figure 5.27-c) présente les mêmes avantages, que les courroies étroites ISO mais dissipent moins de puissance en travail d'extraction à la sortie de la poulie à gorges (pénétration moindre dans la gorge).

Ces courroies particulières sont normalisées en 4 types différents : SPZ (9,7 x 8), SPA (12,7 x 10), SPB(16,3 x 13), SPC(22 x 18). Le type SPC n'est pas encore officiellement adopté par l'ISO.

Les courroies trapézoïdales sont disponibles sur le marché dans une gamme de longueurs exprimées en mm allant de 200 à 16800 pour le type normal et de 630 à 8000 pour le type étroit (longueur primitive, mesurée sous tension initiale au niveau de l'axe neutre du profil trapézoïdal).

A noter que les plus grandes longueurs sont relatives aux sections les plus fortes.

**Calcul pratique des courroies trapézoïdales**

Le calcul théorique d'une transmission par courroies trapézoïdales peut difficilement être développé étant donné la structure composite de la section droite. Le matériau n'est ni homogène ni isotrope et les lois classiques de l'élasticité ne peuvent lui être appliquées simplement. Le calcul se déroule plutôt en respectant scrupuleusement les directives du fabricant, elles-mêmes inspirées des recommandations ISO. Les catalogues des produits commercialisés fournissent en effet toutes les indications requises pour le calcul et les dimensions à adopter en fonction des conditions réelles de service.

1. On calcule une puissance fictive  $P^*$  qui tient compte à la fois du facteur de service et du rendement

$$P^* = f_s P_{mot} = \frac{f_s P_{rec}}{\eta} \quad (5.96)$$

avec  $\eta \simeq 0,97$

2. Des abaques fournissent le moyen de choisir le type de courroie à bon escient. On en déduit une estimation du diamètre  $d_1$  admissible (par interpolation). Les Figures 5.28 et 5.29 fournissent les courbes préconisées par la firme FENNER.
3. Le diamètre  $d_2$  et la longueur normalisée de la courroie sont ensuite déterminés compte tenu du rapport de réduction  $i$  et de l'encombrement disponible.
4. Des tables fournissent ensuite la puissance unitaire caractéristique d'une courroie de type donné, en fonction des diamètres  $d_1$  et de la vitesse périphérique  $v$  de la courroie.
5. Cette puissance unitaire doit encore être corrigée pour tenir compte des conditions réelles de fonctionnement. la firme FENNER propose par exemple :

$$P_1^* = (P_1 + \Delta P_1) k_1 k_2 \quad (5.97)$$

où on a

- $\Delta P_1$  est un accroissement de  $P_1$  dû à un rapport de réduction non unitaire  $i \neq 1$ .  $\Delta P_1$  est à mettre en relation avec la moindre incurvation de la courroie sur la poulie de diamètre  $d_2$  si le rapport de réduction est grand  $i > 1$
  - $k_1$ , un facteur d'endurance. C'est coefficient dépendant la longueur fourni en regard de la dimension  $L_N$ .  $k_1$  est un coefficient qui tient compte de la variation de la fréquence d'incurvation  $F$  avec la longueur  $L_N$ .
  - $k_2$  un facteur d'embrasement pour des  $\Omega$  inférieurs à  $\pi$ .  $k_2$  tient implicitement compte de la diminution de l'effort périphérique maximum transmissible lorsque l'angle d'embrasement  $\Omega$  devient inférieur à  $\pi$  lorsque  $i > 1$ .
6. Reste à déterminer le nombre de courroies à utiliser. Il suffit pour cela de diviser la puissance fictive  $P^*$  par la puissance unitaire corrigée :

$$x_{th} = \frac{P^*}{P_1^*} \quad (5.98)$$

Ce nombre doit être arrondi à l'unité supérieure. La poulie correspondante comportera évidemment le même nombre de gorges éventuellement un nombre supérieur.

Explication complémentaire. Pour le type B, par exemple, le diamètre  $d_1$  varie de 125 à 200 mm et le nombre de courroies de 2 au minimum à 8 au maximum.

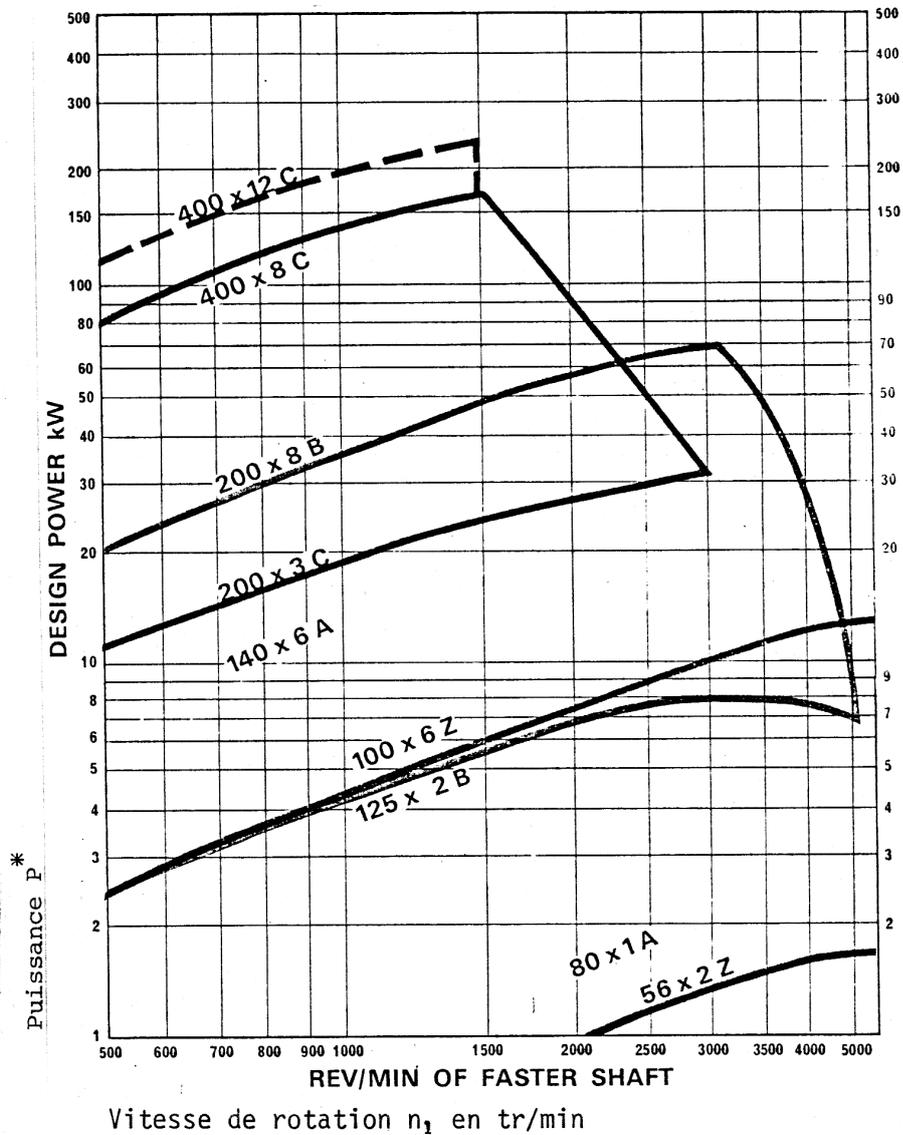


FIGURE 5.28 – Abaque FENNER pour le choix du type de courroie et limitation de  $d_1$ . Cas de courroies trapézoïdales ISO de type normal

### 5.7.3 Courroies crantées

La courroie dite crantée est actuellement très utilisée dans l'industrie car elle réunit les avantages des courroies plates en matériau synthétique et ceux qui caractérisent les chaînes (absence de glissement).

Ces courroies comportent une denture en matière plastique ou en caoutchouc

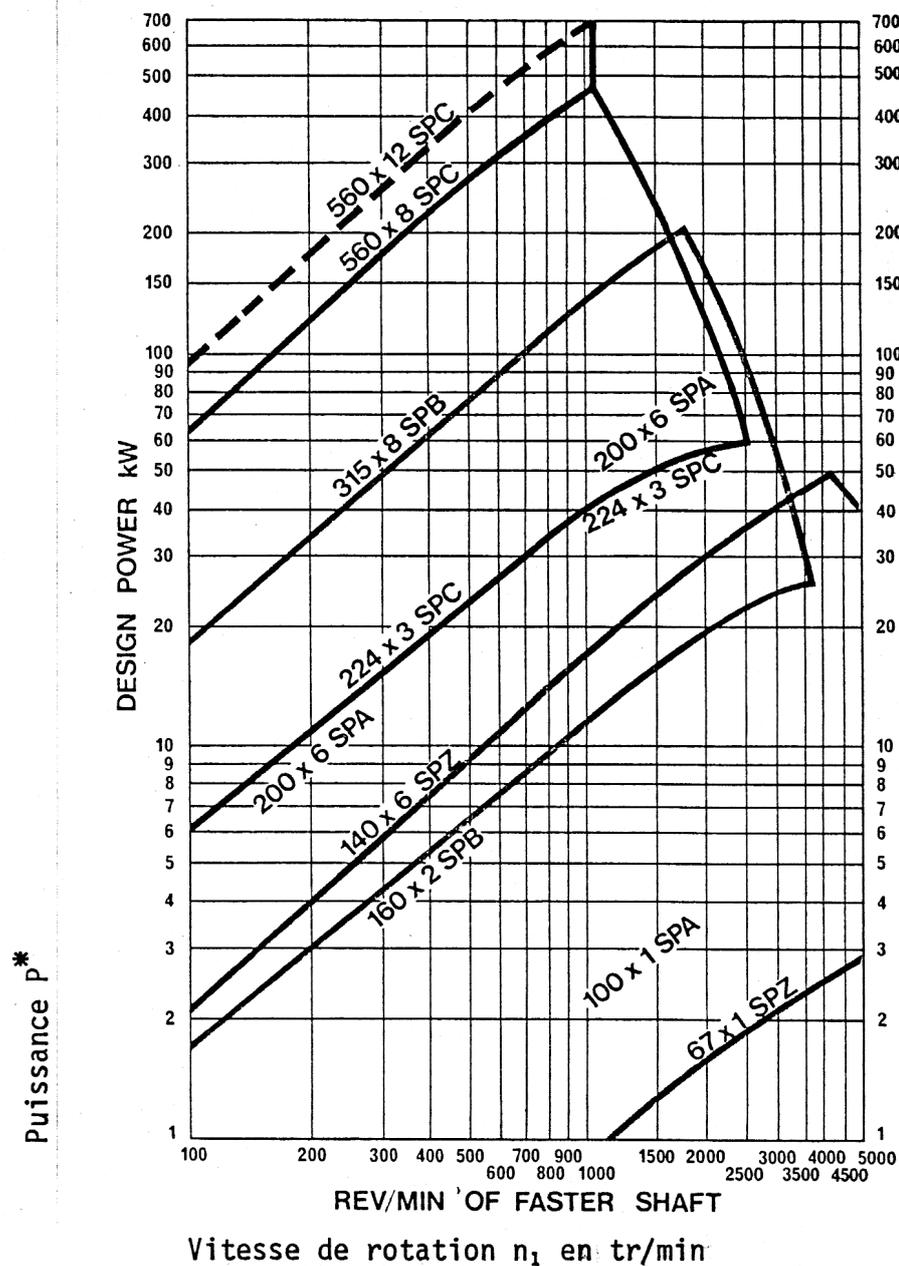


FIGURE 5.29 – Abaque FENNER pour le choix du type de courroie et limitation de  $d_1$ . Cas de courroies trapézoïdales ISO de type étroit

moulée, dessinée à la face interne. Un lit de câbles d'acier fins, torsadés, (angle d'hélice très faible) est introduit au niveau de l'axe neutre de la section droite

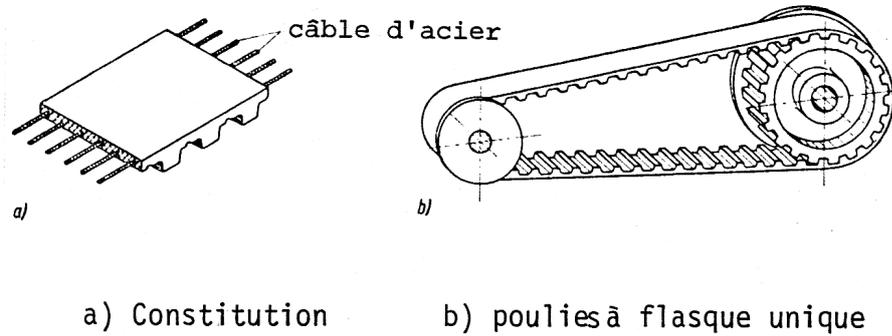


FIGURE 5.30 – La courroie crantée : a/ constitution - b/ poulies à flasque unique

et reprend l'effort de traction. Pour les courroies crantées, on a

$$Q \simeq T \quad (5.99)$$

L'utilisation de telles courroies permet un réel gain de place; elles transmettent en effet sans problèmes des efforts périphériques allant jusqu'à 5000 N sans qu'il soit nécessaire de procéder à des remises sous tension périodiques. Elles permettent enfin un fonctionnement silencieux sans lubrification aucune, jusqu'à des vitesses périphériques de l'ordre de 60 m/s.

La dimension fondamentale est ici le pas de la denture. La Figure 5.31 fournit un abaque qui permet le choix du pas (L, H, XH) en fonction de la puissance  $P$  et de la vitesse de rotation  $n_1$ .

Des tables permettent ensuite la détermination de la largeur de courroie nécessaire.

A noter que la petite poulie est équipée de flasques de guidage et qu'elle comporte rarement moins de 14 dents.

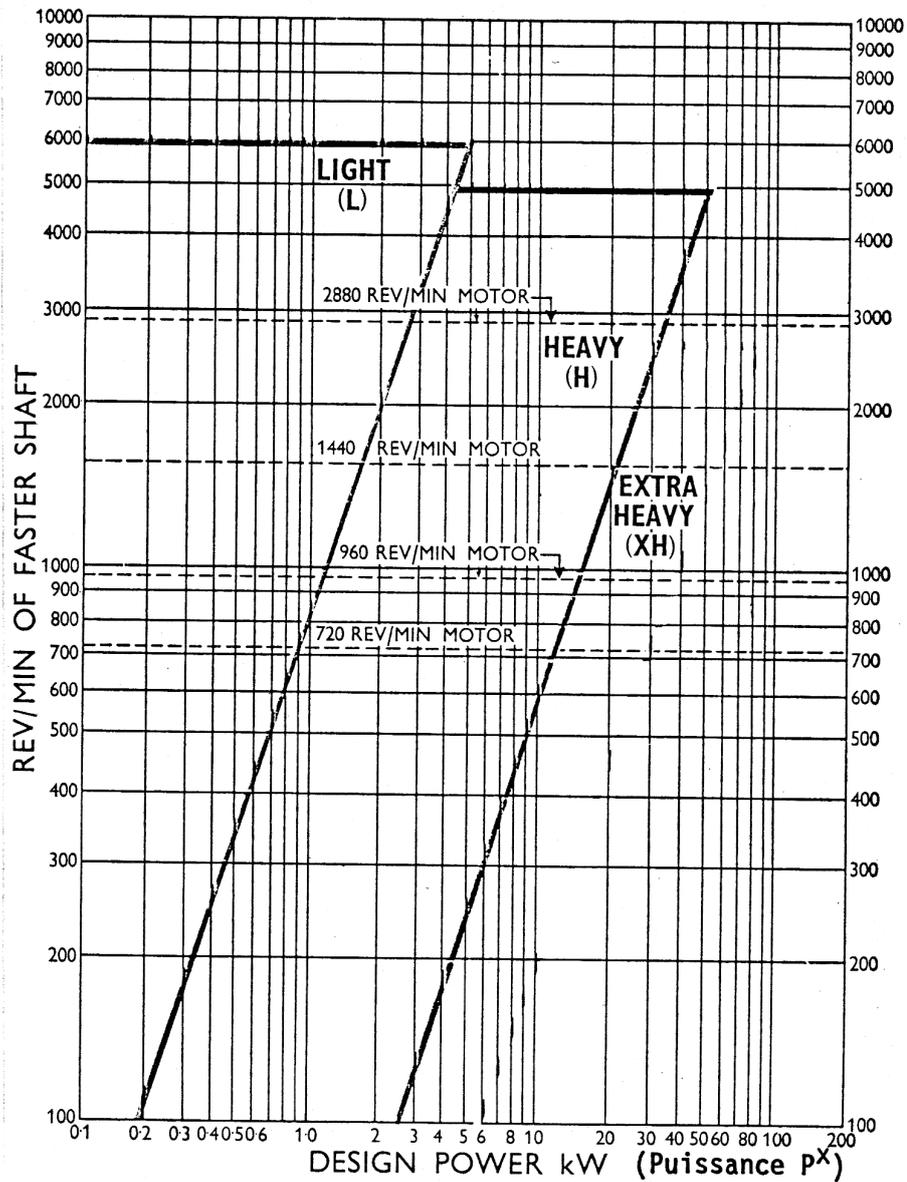


FIGURE 5.31 – Abaque FENNER pour le choix du pas de la denture. Cas des courroies crantées (pas  $p_L = 9.53$  mm, pas  $p_H = 12,5$  mm, pas  $p_{XH} = 22,23$  mm)



# Annexe A

## LEXIQUE

Cette annexe a pour objet de définir un certain nombre d'expressions très fréquemment rencontrées dans la désignation des pièces de machine d'usage courant. Elles sont abondamment illustrées dans les figures suivantes.

**Alésage** : Trou ou ouverture cylindrique ou conique, généralement réalisé à l'aide d'un outil appelé alésoir. Par extension, l'alésage désigne aussi le diamètre de cette ouverture. (Fig. A.1-A).

**Arbre** : Corps de révolution allongé suivant son axe et tournant autour de celui-ci. (Fig. A.1-A, A.2-A, A.3-A et A.3-B).

**Arrondi** : Raccord de deux surfaces formant un angle sortant, engendré par un quart de circonférence. Les arrondis ont le même rôle que les chanfreins. (Fig. A.4-A).

**Axe** : Pièce cylindrique fixe sur laquelle s'articule une autre pièce. (Fig. A.1-A, A.2-A, A.3-A, A.3-B).

**Bossage** : Surépaisseur d'une pièce, destinée à être dressée pour recevoir la face d'appui d'une tête de vis ou d'un écrou. (Fig. A.1-D, A.4-A et A.5-A.)

**Boutonnière** : Voir "Trou ovalisé"

**Bride** : Couronne terminant un cylindre, un tuyau, ou un arbre, ayant pour fonction d'en permettre l'assemblage avec une pièce analogue à l'aide par exemple de boulons. Cette appellation désigne également des pièces rapportées le même rôle ou des rôles analogues. (Fig. A.1-B).

**Buselure** : Pièce cylindrique creuse destinée à se loger dans un alésage. (Fig. A.1-C)

**Came** : Pièce profilée animée d'un mouvement de rotation communiquant à une tige un mouvement rectiligne alternatif suivant une loi déterminée. (Fig. A.2-A).

**Chambrage** : Evident pratiqué dans un alésage. (Fig. A.2-B et A.6-A).

**Chanfrein** : Petite surface formée en abattant l'arête d'une pièce en vue de la rendre moins fragile, d'en faciliter le montage, d'éviter les accidents que peuvent produire les arêtes vives, d'en améliorer l'aspect. (Fig. A.1-A, A.2-C et A.3-D).

**Chape** : Sorte de fourche permettant la liaison de deux pièces par l'intermédiaire d'un axe d'articulation. (Fig. A.2-A).

**Clavette** : Pièce destinée à l'assemblage se logeant dans les mortaises ou des rainures pratiquées dans les deux pièces à assembler. (Fig. A.2-A et A.2-D)

**Collet** : Voir définition à "Epaulement". (Fig. A.1-A et A.3-D).

**Congé** : Raccord de deux surfaces formant un angle rentrant généralement engendré par un quart de circonférence, utilisé en vue d'augmenter la résistance des pièces ou d'en faciliter le moulage. (Fig. A.1-A).

**Coussinet** : Buselure en une ou deux pièces, éventuellement munie d'oreilles ou de joues dans laquelle tourne le tourillon d'un arbre. (Fig. A.3-A).

**Dégagement** : Voir "sortie d'outil".

**Dépouille** : Inclinaison donnée aux surfaces en vue d'assurer la possibilité ou l'aisance du démoulage. (Fig. A.1-D et A.4-A).

**Douille** : Pièce cylindrique ou conique creuse posée sur une pièce pleine. (Fig. A.1-D, A.2-D et A.3-B).

**Embase** : Voir définition à "Epaulement". (Fig. A.1-A et A.3-D)

**Encoche** : Rainure très courte ne débouchant que d'un côté de la pièce. c'est également petite entaille servant de logement à un ergot. (Fig. A.3-C).

**Epaulement** : Dans les pièces de révolution, couronnes circulaires normales à l'axe résultant des variations brusques de diamètre. L'épaulement sert souvent de butée à un autre organe. Deux épaulements très proches d'égal diamètre extérieur, forment sur l'arbre un "collet" ou "embase". (Fig. A.3-D).

**Ergot** : Saillie ménagée notamment à la base de la tête d'un boulon (lorsque cette tête est de révolution) qui, en se logeant dans une encoche, empêche le boulon de tourner lors du serrage de l'écrou. (Fig. A.3-C).

**Evidement** : Partie de surface réalisée en retrait de la surface normalement prévue pour limiter l'étendue des surfaces portantes. (Fig. A.2-C et A.4-A)

**Fraisure** : Evasement conique creusé à l'orifice d'un trou en vue notamment de loger la tête conique d'un rivet, d'une vis ou d'un boulon. (Fig. A.2-A et A.7-B).

**Galet** : Petit rouleau tournant autour de son axe, à surface cylindrique ou torique. (Fig. A.2-A)

**Goupille** : Tige ou broche, cylindrique ou conique, destinée à l'assemblage, à l'immobilisation, au repérage de deux pièces (Fig. A.7-A et A.1-C).

**Gorge** : Rainure circulaire de forme arrondie pratiquée dans une pièce de révolution. (Fig. A.3-D et A.4-C).

**Lamage** : Creux cylindrique à fond plat de faible longueur, pratiqué à l'entrée d'un trou cylindrique, par fraisage ou lamage, jouant le même rôle qu'un bossage. (Fig. A.5-A).

**Languette** : Saillie d'une pièce se logeant dans une rainure, dans le cas d'assemblages glissants. (Fig. A.6-C).

**Manchon** : Pièce cylindrique creuse à placer sur des pièces cylindriques pleines, pour en assurer notamment l'assemblages glissants. (Fig. A.7-D et A.5-C).

**Maneton** : Partie cylindrique d'une manivelle ou d'un arbre coudé sur laquelle s'articule une tête de bielle. (Fig. A.5-D).

**Méplat** : Partie plate ménagée sur une pièce cylindrique. (Fig A.5-B).

**Mortaise** : Trou ou cavité à faces (champs) planes, recevant le tenon d'une autre pièce. (Fig A.2-D et A.5-E).

**Nervure** : Élément reliant deux parties d'une même pièce en vue de leur renforcement ou leur consolidation (Fig. A.4-A).

**Palier** : Organe servant de support pour les arbres, recevant le tourillon dans un coussinet ou un roulement. Fig. A.6-A).

**Pivot** : Partie cylindrique terminale d'un arbre disposé verticalement par lequel il est supporté. (Fig. A.6-B) .

**Rainure** : Ouverture de section constante et de grande longueur par rapport à sa section. (Fig. A.1-A, A.2-D et A.6-C).

**Saignée** : Entaille ou rainure cylindrique à arrêtes vives pratiquées dans une pièce cylindrique. (Fig. A.3-D)

**Sortie d'outil** : Dégagement pratiqué dans une pièce spécialement en vue d'en faciliter le parachèvement. (Fig. A.2-C et A.7-A).

**Surface moletée** : Surface légèrement rainurée par deux réseaux de rainures à 90°, donnant un aspect gaufré. Elles sont généralement destinées à assurer une meilleure prise de l'objet, en évitant le glissement de la main. (Fig. A.7-C).

**Tourillon** : Partie cylindrique d'un arbre par laquelle il est supporté dans son mouvement de rotation (voir coussinet et palier). (Fig. A.1-A).

**Tenon** : Partie d'une pièce s'engageant dans un trou ou cavité appelé "mortaise" ménagé dans une autre pièce. (Fig. A.5-E).

**Téton** : Tenon cylindrique de petites dimensions, notamment bout cylindrique lisse d'une vis. (Fig. A.7-D).

**Trou borgne** : Trou qui n'est pas foré de part en part de la pièce, c'est-à-dire ne débouchant pas. (Fig. A.6-D).

**Trou ovalisé** : Trou allongé, en forme de boutonnière, fréquemment substitué à un trou cylindrique, de manière à permettre le réglage des pièces au montage. (Fig. A.5- A).

**Vis entre cuir et chair** : vis placée "à cheval" sur deux pièces cylindriques emmanchées, pour empêcher un déplacement relatif angulaire. (Fig. A.7-B).

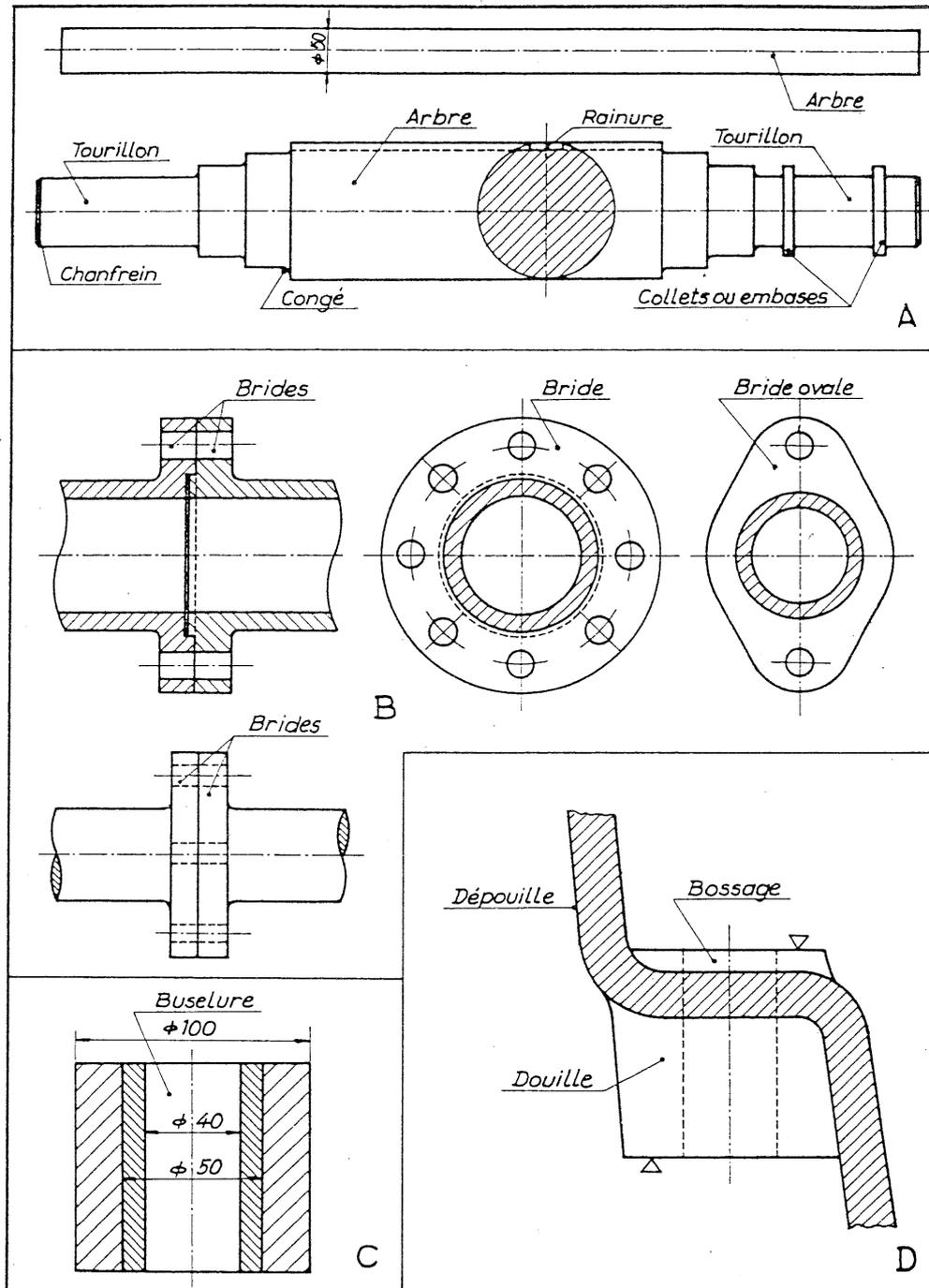


FIGURE A.1 – Arbres, Tourillon, Chanfrein, Congé, Rainure, Collets, Embases, Brides, Buselure, Dépouille, Bossage, Douille.

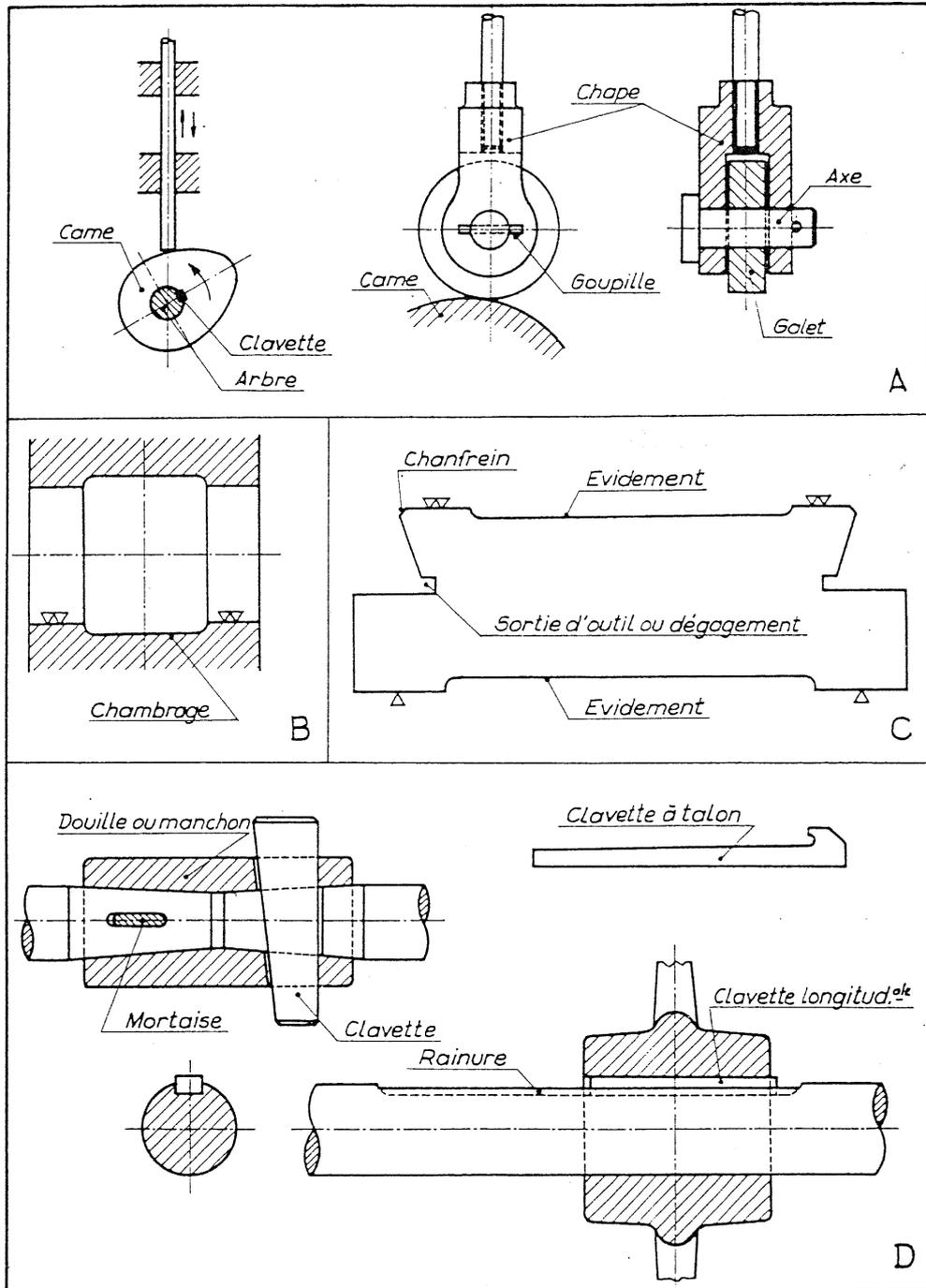


FIGURE A.2 – Came, Clavette, Goupille, Chape, Galet, Axe, Chambroge, Chanfrein, Evidement, Dégagement d'outil, Douille, Manchon, Mortaise, Clavette, Rainure.

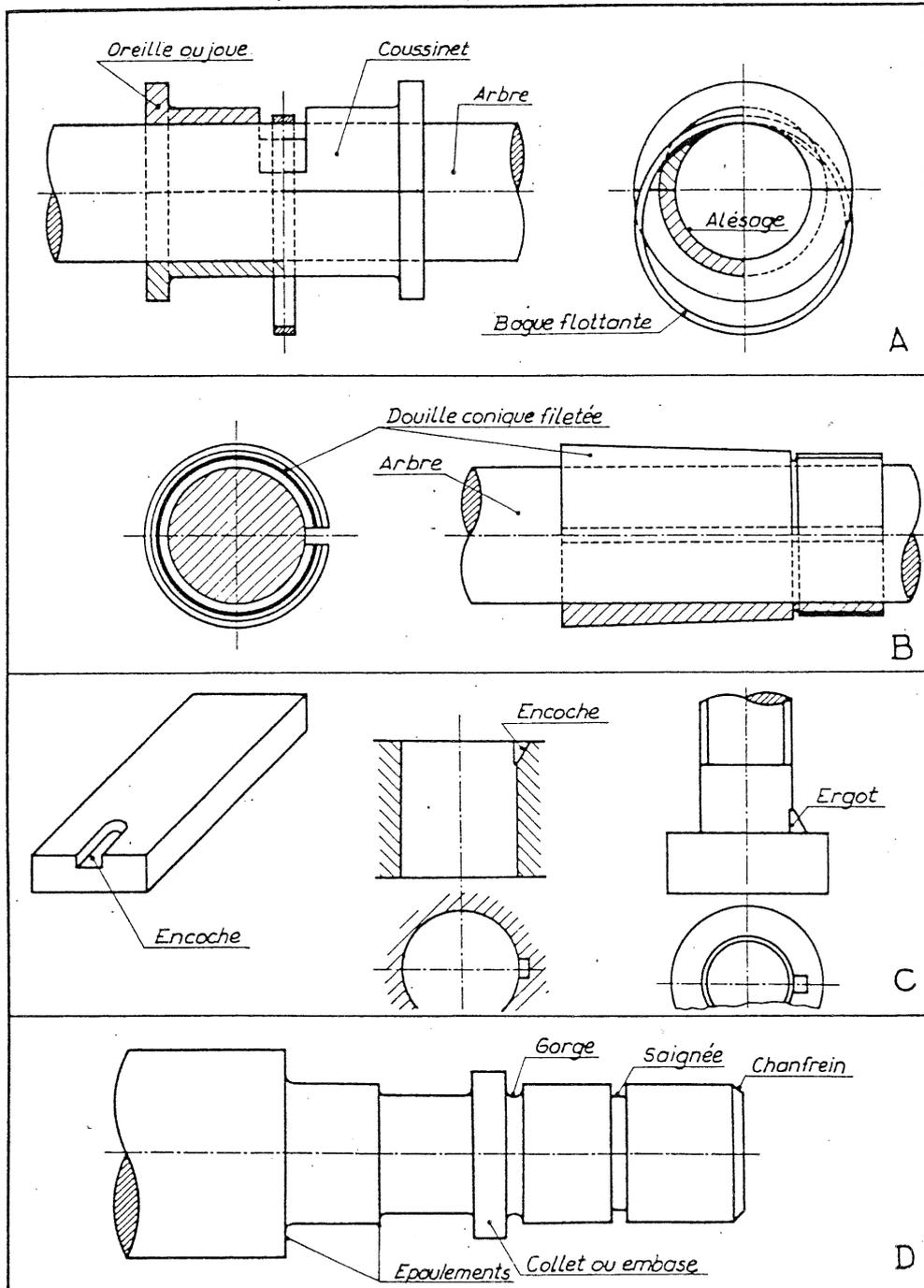


FIGURE A.3 – Orielle, Joue, Coussinet, Arbre, Alésage, Bague flottante, Douille, Encoche, Ergot, Gorge, Epaulement, Saignée, Collet, Embase, Chanfrein

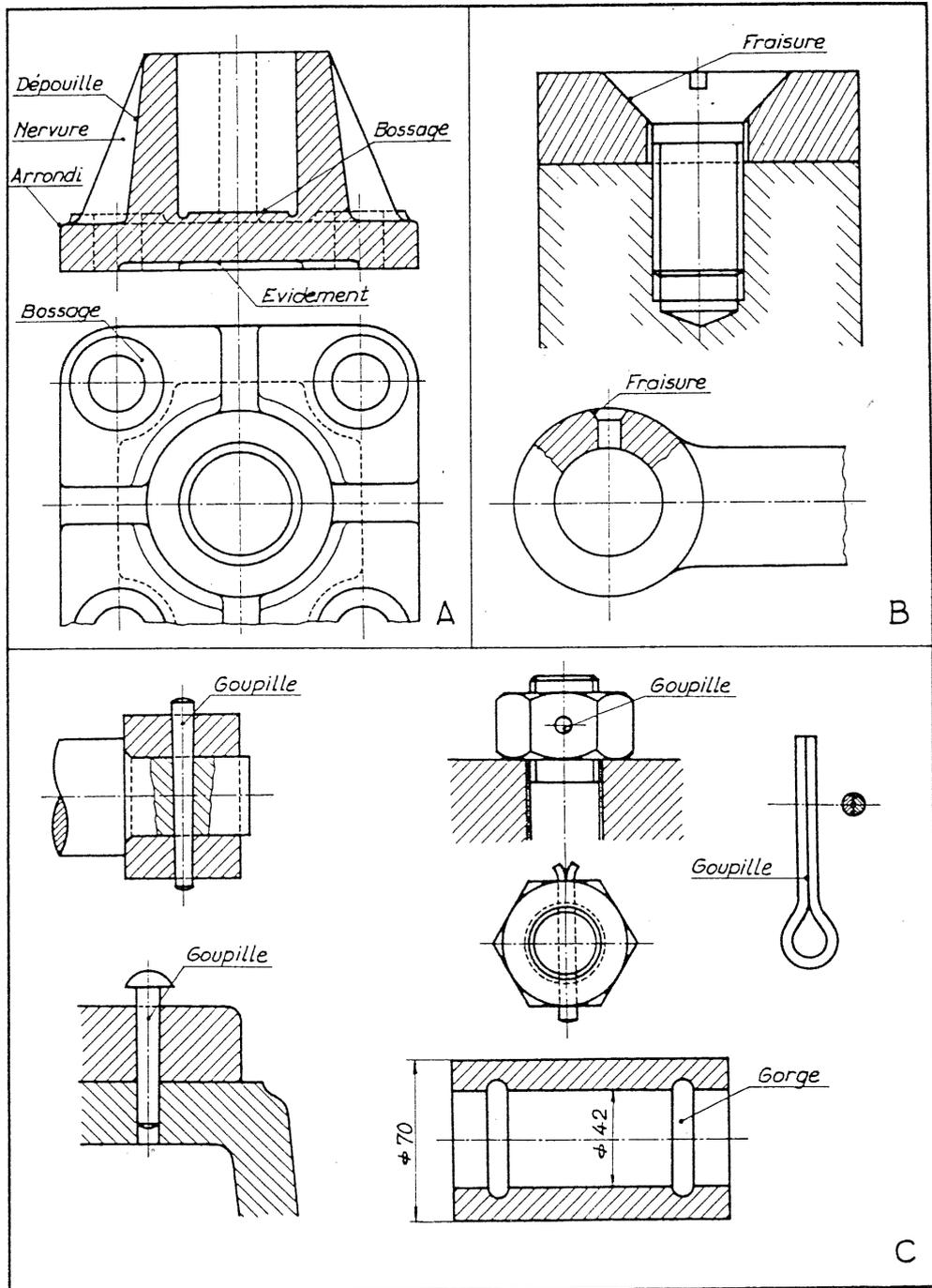


FIGURE A.4 – Dépouille, Nervure, Arrondi, Bossage, Evidement, Fraisure, Goupille, Gorge.

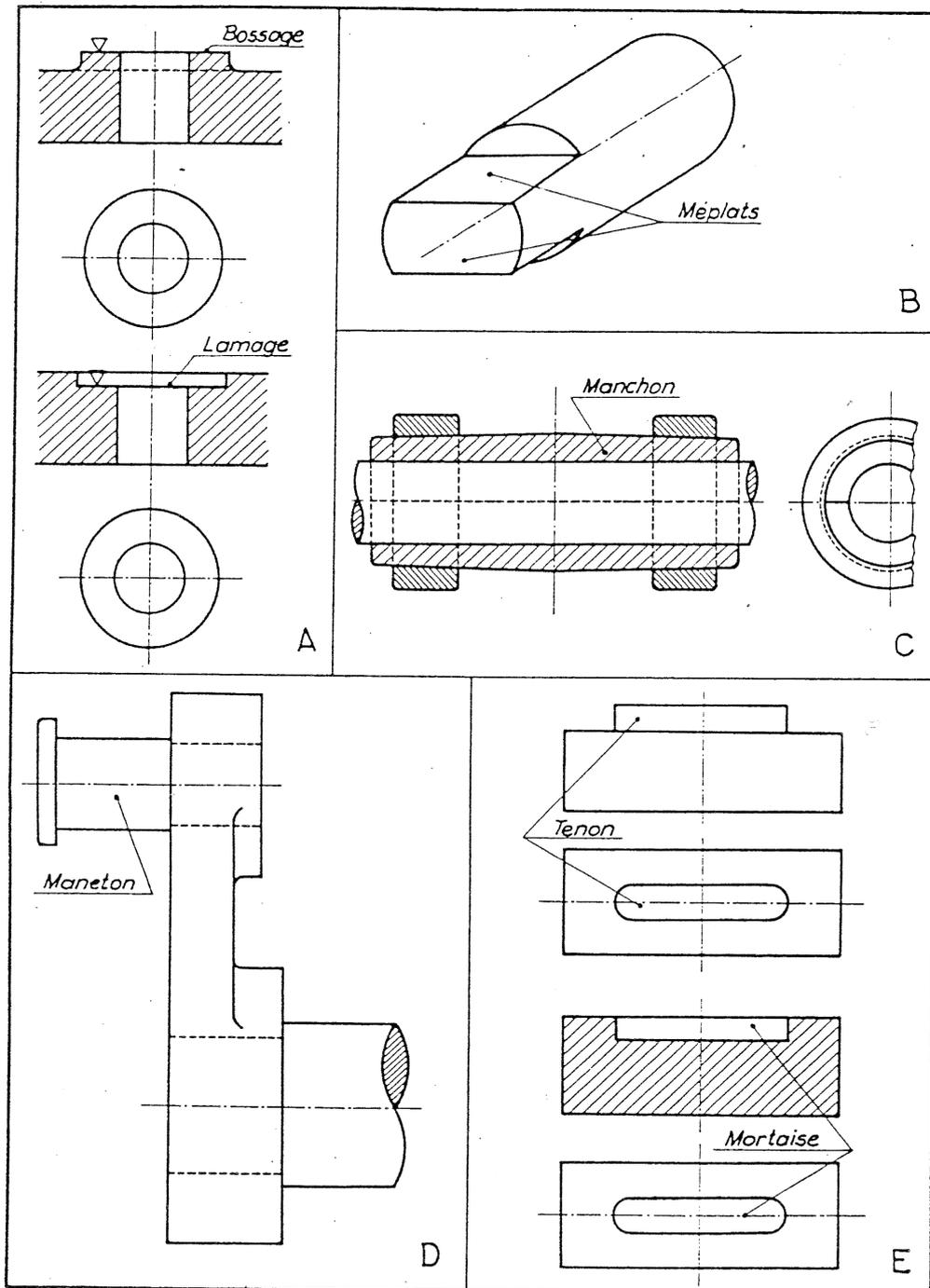


FIGURE A.5 – Bossage, Lamage, Méplats, Manchon, Maneton, Tenon, Mortaise.

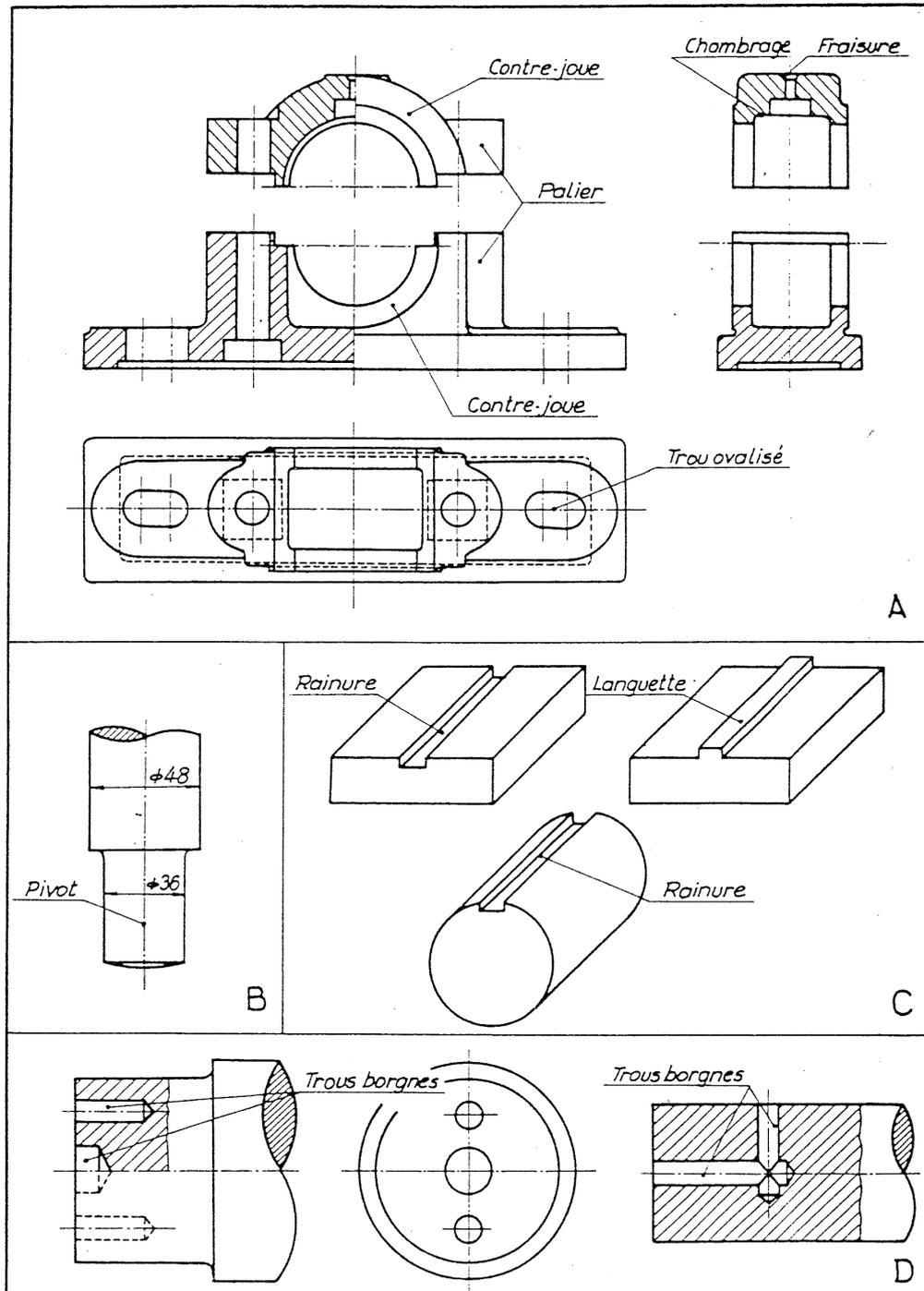


FIGURE A.6 – Pallier, Contre-joue, Trou ovalisé, Chambrage, Fraisure, Pivot, Rainure, Languette, Trous borgnes.

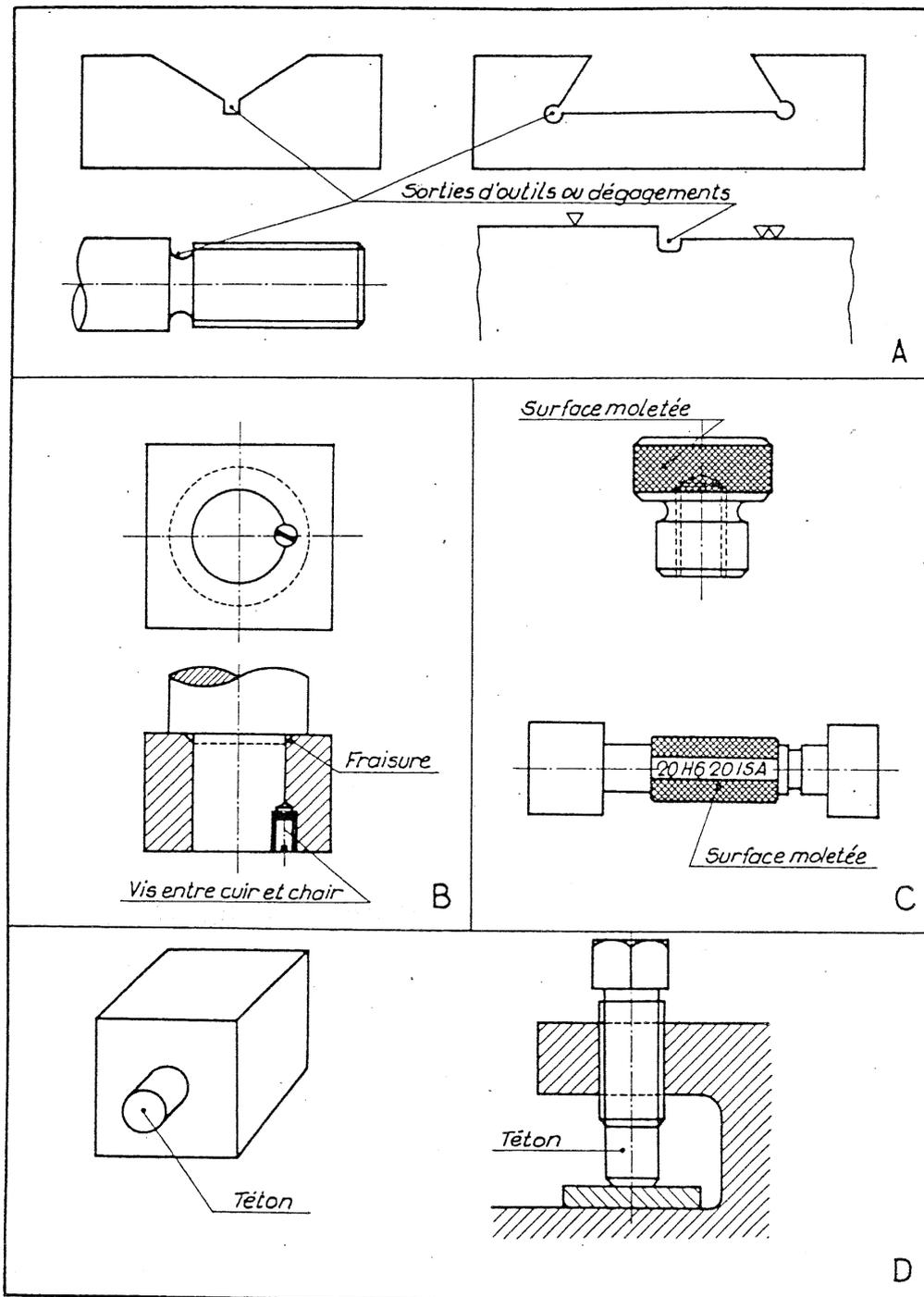


FIGURE A.7 – Sorties d'outils ou dégagements, Fraisure, Vis entre cuir et chair, Surface moletée, Téton.



# Bibliographie

- [1] AGMA. Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth, ansi/agma standard 2001-b88. Technical report, American Gear Manufacturers Association, 1500 King Station Suite 201, Alexandria, Va., 22314, 1988.
- [2] AGMA. Geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical, and herringbone gear teeth, ansi/agma standard 908-b49. Technical report, American Gear Manufacturers Association, 1500 King Station Suite 201, Alexandria, Va., 22314, 1989.
- [3] M. Aublin, R. Boncompain, M. Boulaton, D. Caron, E. Jeay, B. Laccage, and J. Rea. *Systèmes mécaniques - Théorie et dimensionnement*. Dunod, Paris, 2005.
- [4] C. Barlier and R. Bourgeois. *Ingénierie et mécanique : conception et dessin*. MEMOTECH Plus. Lavoisier, Paris, 2010.
- [5] J. Bozet. *Dimensionnement des Eléments de Machine*. Centrale des Cours de l'A.E.E.S, Université de Liège, 1996.
- [6] A. Brand, J. Flavenot, R. Grégoire, and C. Tournier. *Données technologiques sur la fatigue*. CETIM, Paris, 1992.
- [7] R. Cazaud, G. Pomey, P. Rabbe, and C. Janssen. *La fatigue des métaux*. Dunod, Paris, 1969.
- [8] J. A. Collins. *Failure of Materials in Mechanical Design : analysis, prediction, prevention*. Wiley-Interscience publication, New York, 1993.
- [9] H. Gough and H. Pollard. The strength of metals under combined alternating stress. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 131(3-18), 1935.
- [10] H. Gough, H. Pollard, and W. Clenshaw. Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stresses. Technical report, Aeronautical research council reports, London, 1951.
- [11] O. Horger. *Metals Engineering Design - ASME Handbook*. Mc Graw Hill, 1953.

- [12] W. Lewis. Investigation of the strength of gear teeth, an address to the engineer's club of philadelphia, october, 1892. *Gear Technology*, 9(6) :19, 1992.
- [13] T. Nishihara and M. Kawamoto. The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference. *Mem. College Eng. Kyoto Imper. University*, 11(5) :85–112, 1945.
- [14] R. Norton. *Machine Design. An integrated approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1998.
- [15] R. Peterson. *Stress concentration design factors*. John Wiley and Sons, New York, 1st edition, 1953.
- [16] W. D. Pilkey and D. F. Pilkey. *Peterson's Stress Concentration Factors*. John Wiley and Sons, New York, 3rd edition, 2008.
- [17] L. Van Miegroet and P. Duysinx. Stress concentration minimization of 2d filets using x-fem and level set description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4) :425–438, 2007.