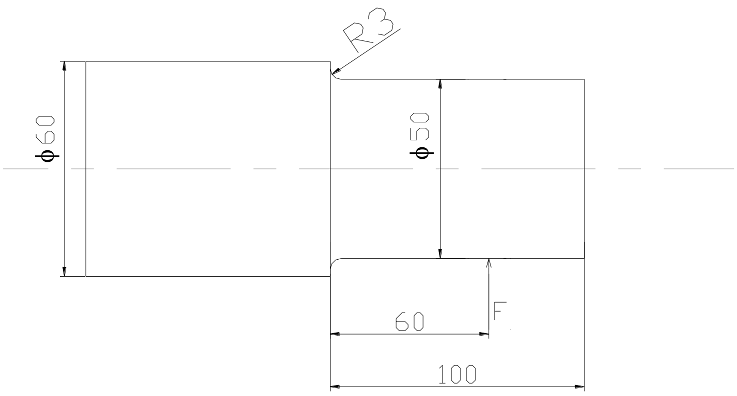
Exercice 1

Déterminer la sécurité à la fatigue de l'arbre suivant :



Données :
- une force F de 10 000 N crée un moment de flexion au niveau de l'épaulement ;
- l'arbre est en acier St 50 ;
- L'état de surface est N6 au niveau du congé .

Solution

Le coefficient de sécurité en fatigue est donné par :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2$$

Lorsque seules les contraintes de normales sont à prendre en compte, le deuxième terme est nul et le coefficient vaut :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a . k_{f\sigma}}{b_1 . b_2 . R_\pm} + \frac{\bar{\sigma}}{R_e}\right)^2 + (0)^2$$

Déterminons toutes les grandeurs intervenant dans cette somme.

- En flexion rotative, la sollicitation est alternée. D'où

$$\bar{\sigma} = 0$$
$$\sigma_a = \sigma_{\max}$$

or

$$\sigma_{\max} = \frac{32.M_f}{\pi.d_i^2} = \frac{32*600*1000}{\pi.50^3} = 49 \text{ N/mm}^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_a = \sigma_{\max} = 49 \text{ N/mm}^2$$

- Facteur d'échelle b_1 = ?
- Figure 1.32 du cours → d = 50 mm→ b_1 = 0.82

- Facteur d'état de surface b_2 :

  N6 ⇔ R_a = 0.8 µm

  ⇔ R_t = 5.2 µm

  St 50 ⇔ R_0 = 500 N/mm²

Figure 1.33 du cours → b_2 = 0.95

- Le facteur d'entaille se détermine par l'équation :

  $$k_{f\sigma} = 1 + q.(k-1)$$

  le coefficient de concentration de contrainte k est trouvé dans les abaques de Peterson en fonction de la géométrie de l'épaulement et du mode de sollicitation (flexion). Figures 1.40 du cours

  $$\frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$

  $$\frac{r}{d} = \frac{3}{50} = 0.06$$

  $$\Leftrightarrow k = 1.86$$

  Quant à l'indice de sensibilité à l'entaille, on le détermine par :

  $$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{\sqrt{r}}}$$ où a = f(R_0) et r, représente le rayon de raccordement à l'entaille.

  a = 0.443

  r = 3

On trouve le facteur d'entaille

  ⇔ $k_{f\sigma}$ = 1 + 0.796 * (1.86 – 1) = 1.685

- La limite d'endurance et la limite élastique en flexion alternée de l'acier considéré sont données par le diagramme de Goodman : Voir Figures 1.25 du cours

  $R_{\pm}$ = 260 N/mm²

  R_e = 420 N/mm²

$$\Leftrightarrow \frac{1}{K_\sigma} = \frac{49*1.685}{0.82*0.95*260}$$

$\Leftrightarrow K_\sigma = 2.45 > 2$ (section 1.5 du cours)

La charge maximale peut être appliquée 100% du temps de fonctionnement.

Si nous désirons modifier la sécurité à la fatigue, nous pouvons jouer sur les diverses grandeurs :

1. Admettons maintenant que le congé de raccordement ait un rayon de 1mm au lieu de 3. Il s'en suivra donc un changement de diamètre beaucoup plus brusque au niveau de l'épaulement ; donc une sécurité moins grande.
   $\Rightarrow k_{f\sigma} = 2.06$ et $K_\sigma = 2.01$

2. Logiquement, si le congé de raccordement augmente et devient 5mm, l'aptitude à rompre en fatigue diminue, la sécurité sera plus élevée $K_\sigma = 2.72$

3. Un autre moyen d'augmenter la sécurité est d'améliorer l'état de surface. Admettons que l'état de surface vaut N5 avec un congé de rayon 3 mm.

   En recalculant les différents coefficients, nous trouvons :
   $R_a = 0.4\,\mu\text{m}$
   $R_t = 6.5 * R_a = 2.6\ \mu\text{m}$
   $b_2 = 0.96$
   et enfin $K_\sigma = 2.48 > 2$ (logique car l'état de surface est amélioré)

Exercice 2

On ajoute de la torsion à la flexion existante. Etudier ce que devient la sécurité dans ce cas de sollicitation composée.

Solution

a) Supposons d'abord le moment de torsion constant et égal à 600 Nm.
La flexion alternée étant conservée, le coefficient de sécurité K□ est le même que lors de l'exercice précédent.
Quant à la sécurité par rapport aux contraintes tangentielles, elle vaut :

$$\frac{1}{K_\tau} = \left(\frac{\tau_a . k_{\tau\sigma}}{b_1 . b_2 . R_\pm^{"}} + \frac{\bar{\tau}}{\Psi Re} \right)$$

Lorsque la sollicitation est constante

$\tau_a = 0$

$\tau_{moy} = \tau_{max}$

avec : $\tau_{max} = \frac{16.M_t}{\pi . d^3} = 24.45 \text{ N/mm}^2$

D'après le diagramme de Goodman (St 50 en torsion) (Figure 1.25),

$R_e^{"} = 210 \text{ N/mm}^2$

$R_t^{"} = 180 \text{ N/mm}^2$

$$\frac{1}{K_\tau} = 0 + \frac{\tau_{moy}}{R_e^{"}} \Leftrightarrow K_\tau = 8.59$$

En utilisant la formule de Gaugh et Pollard pour trouver la sécurité équivalente :

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{K_\sigma^2} + \frac{1}{K_\tau^2}$$

$$\Leftrightarrow K = 2.35$$

b) Supposons maintenant que le moment de torsion est répété. Le moment de torsion maximale est de 600 Nm.
En répétée, nous avons :

$$\bar{\tau} = \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = 12.23 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{\tau_a . k_{f\tau}}{b_1 . b_2 . R''_{\pm}} + \frac{\bar{\tau}}{R''_e}$$

b$_1$ et b$_2$ restent inchangés par rapport à l'exercice n° 1 alors que le coefficient de sensibilité à l'entaille est évaluée par une expression analogue à celle de l'exercice n°1 :

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$
$$\frac{r}{d} = \frac{3}{50} = 0.06$$
$$\Leftrightarrow k = 1.5$$

q est inchangé
q = 0.796
$k_{f\tau}$ = 1.4

$$\Leftrightarrow \frac{1}{K_\tau} = \frac{12.23 * 1.4}{0.82 * 0.95 * 180} + \frac{12.23}{210}$$
$$\Leftrightarrow K_\tau = 5.54$$

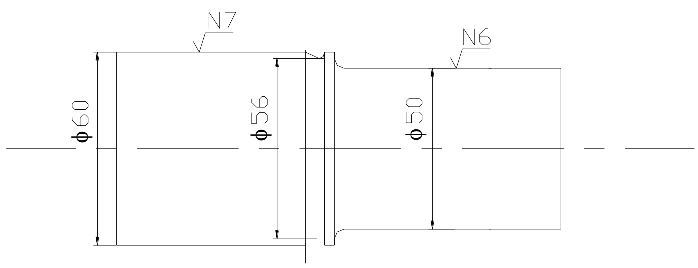
$$\Leftrightarrow \frac{1}{K^2} = \frac{1}{2.45^2} + \frac{1}{5.54^2}$$
$$\Leftrightarrow K = 2.24$$

Exercice 3

Modification de l'épaulement de l'exercice 1 en ajoutant <u>une gorge de décharge</u> en vue d'améliorer la sécurité.

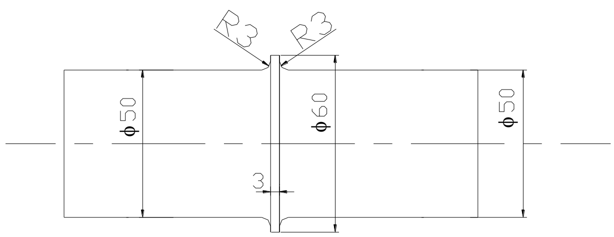
Solution

a) Envisageons la possibilité d'une gorge de décharge à gauche de l'épaulement. Nous réaliserons nos calculs pour un mode de sollicitation en flexion alternée et torsion répétée.



Afin de calculer le coefficient de sécurité, nous devons considérer que nous avons un collet lorsque nous regardons aussi bien de droite que de gauche.

1. Calculer la sécurité à droite du collet.



les données concernant les moments de flexion et torsion ainsi que de l'état de surface N6 ne varient pas :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2$$

En effet, le coefficient de concentration de contrainte lors d'une sollicitation en torsion est le même qu'il s'agisse d'un collet de largeur infinie (exercice précédent) ou d'un collet de largeur finie de même dimension. Dès lors le facteur d'entaille $k_{f\tau}$

ne change pas. Puisque toutes les autres grandeurs intervenant dans le calcul de K_τ sont les mêmes que celles de l'exercice précédent, le coefficient de sécurité en torsion reste le même (5.54).

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a . k_{f\sigma}}{b_1 . b_2 . R_\pm} + \frac{\bar{\sigma}}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{1}{5.54}\right)^2$$

Par contre, lors d'une sollicitation en flexion, le facteur d'entaille $k_{f□}$ n'est plus le même qu'il s'agisse d'un épaulement ou d'un collet.

$k_{f\sigma} = 1 + q.(k-1)$ = (avec q = 0.79 ; le même qu'à l'exercice 2)

Quant à la détermination du coefficient de concentration de contrainte dans le cas d'un collet de largeur finie, nous devons considérer que l'effet de la discontinuité de la barre plate est le même que celle de la barre ronde.

$$\Rightarrow \quad \frac{k_l - 1}{k_\infty - 1} = \frac{k_l^b - 1}{k_\infty^b - 1}$$

k_l^b : coefficient de concentration de contrainte de la barre plate de largeur b finie

k_∞^b : coefficient de concentration de contrainte de la barre plate de largeur infinie(épaulement)

k_l : coefficient de concentration de contrainte de la barre ronde de largeur finie.

k_∞: coefficient de concentration de contrainte de la barre ronde de largeur infinie (épaulement)

k_l^b est déterminé grâce aux abaques de Peterson (barre plate sollicitée en flexion). avec

$$\frac{r}{d} = \frac{3}{50}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{3}{60} 0.05$$

nous trouvons :

$k_l^b = 1.5$

$k_\propto^b = 2$ (asymptote de la courbe r/d=0.06)

Pour la barre ronde de longueur infinie (épaulement), nous avons déjà calculé le coefficient de concentration de contrainte ; Il vaut :

$k_\infty = 1.86$ (épaulement D/d=1.2, r/d=0.06)

D'où le coefficient de concentration de contrainte recherchée :

$$k_l = 1 + (1.86 - 1) * \frac{1.5 - 1}{2 - 1} = 1.43$$

$$k_{f\sigma} = 1 + q.(k - 1) = 1.34$$

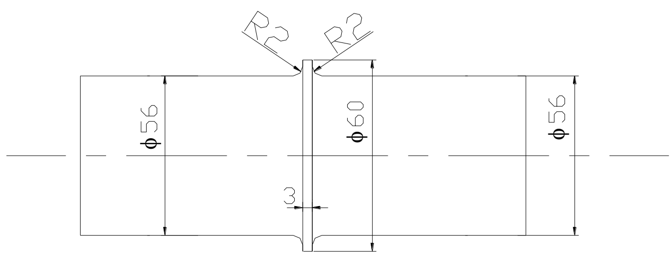
Donc $\frac{1}{K_\sigma} = \frac{49 * 1.34}{0.82 * 0.95 * 260} = 0.324$

$\Leftrightarrow K_\sigma = 3.08$. sachant que $K_\tau = 5.54$, nous trouvons le coefficient de concentration de contrainte globale :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{3.08}\right)^2 + \left(\frac{1}{5.54}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow K = 2.69$$

2. Vérification de la sécurité à gauche du collet.



Ici, d = 56 mm, D = 60 mm, b = 3 mm et R = 2 mm

En adoptant la schématisation suivante et en supposant que le moment de flexion est passé de 600 Nm à 650 Nm, on peut déterminer le coefficient de sécurité global.

- M_f = 650 Nm. D'où $\sigma_a = \sigma_{\max} = \frac{32 * 650 * 10^3}{\pi * (56)^3} = 37.7$ N/mm² ; $\bar{\sigma} = 0$;

- M_t = 600 Nm. D'où $\tau_a = \bar{\tau} = \frac{1}{2}\tau_{\max} = \frac{1}{2} * \frac{16 * 600 * 10^3}{\pi * (56)^3} = 8.7$ N/mm² ;

- Le facteur d'échelle devient b_1 = 0.8 (pour d = 56 mm ;

- Le facteur d'état de surface b2 vaut 0.92 (pour N7, soit R_a = 1.6µm et R_t = 6.5*1.6 = 10.4µm et un St 50) ;

- L'indice de sensibilité à l'entaille : $q = \dfrac{1}{1 + \dfrac{0.443}{\sqrt{2}}} = 0.761$

- Le coefficient de concentration de contrainte se calcule comme précédemment (barre ronde présentant un collet de largeur finie.

$$\frac{k_l - 1}{k_\infty - 1} = \frac{k_l^b - 1}{k_\infty^b - 1}$$

Avec les caractéristiques géométriques suivantes

$$\frac{r}{d} = \frac{2}{56} = 0.0357$$
$$\frac{D}{d} = \frac{60}{56} = 1.07$$
$$\frac{L}{D} = \frac{3}{60} = 0.05$$

nous en déduisons, à l'aide des abaques de Peterson :
$k_l^b = 1.65$; $k_\infty^b = 2.38$; $k_\infty = 1.98$.

D'où : $k_l = 1.46$.
Quant au coefficient de concentration de contrainte en torsion, il est le même que celui d'un épaulement de même dimensions : k = 1.3.

- Facteurs d'entaille : en flexion : $k_{f\square}$ = 1 + 0.761*(1.46-1) =1.35
  en torsion : $k_{f\square}$ = 1 + 0.761*(1.3-1) =1.23

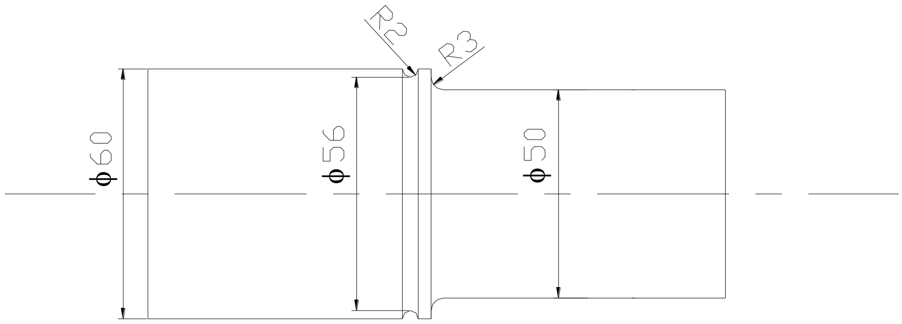
- Coefficients de sécurité :

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{37.7 * 1.35}{0.8 * 0.92 * 260} = 0.266$$
$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{8.7 * 1.23}{0.8 * 0.92 * 180} + \frac{8.7}{210} = 0.122$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = (0.266)^2 + (0.122)^2$$
$$\Leftrightarrow\ K = 3.42$$

b) Envisageons une configuration un peu différente pour la gorge. Soit une gorge demi-cylindrique en coupe.



Dans ce cas, nous avons :

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{56} = 1.07$$

$$\frac{r}{d} = \frac{2}{56} = 0.0357$$

$\Leftrightarrow k = 2.42$ pour la flexion

et $k = 1.72$ pour la torsion

D'où

$$k_{f\sigma} = 2.08$$

$$k_{f\tau} = 1.55$$

Et les coefficient de sécurité en flexion et en torsion valent :

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{37.7*2.08}{0.8*0.92*260} = 0.42$$

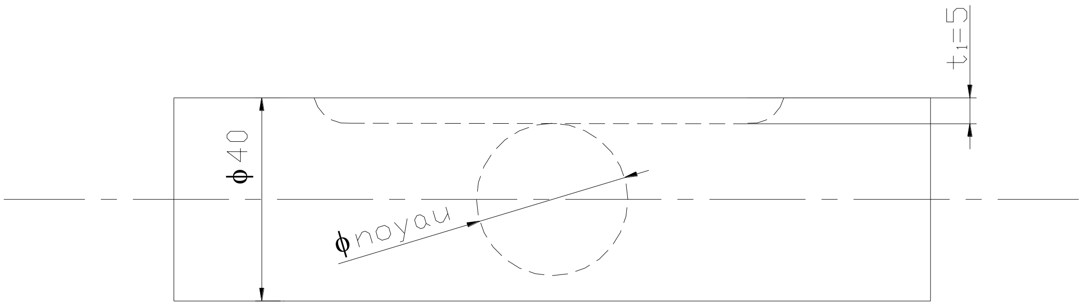
$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{8.7*1.55}{0.8*0.92*180} + \frac{8.7}{210} = 0.14$$

Dès lors, le coefficient global vaut :

K = 2.25

Exercice 4

Soit un arbre en acier St 70, de diamètre 40 avec une rainure de cale ordinaire. L'état de surface à fond de la rainure est de N7. Les moments de flexion et de torsion constante valent respectivement 150 et 100 N.m.



<u>Solution</u>

- N7 $\Rightarrow$ $R_a = 1.6$ µm $\Rightarrow$ $R_t = 6.5*1.6 = 10.4$ µm ;
- St 70 $\Rightarrow$ $R_e = 520$ N/mm² ; R• = 340 N/mm² ; R_e" = 520 N/mm² ; R• " = 240 N/mm² ;
- d = 30 mm $\Rightarrow$ $b_1 = 0.88$;
- St70 et N7 $\Rightarrow$ $b_2 = 0.88$;
- $M_f = 150$ Nm. D'où $\sigma_a = \sigma_{\max} = \dfrac{32*150*10^3}{\pi*(30)^3} = 56.6$ N/mm² ; $\bar{\sigma} = 0$;
- $M_t = 100$ Nm. D'où $\bar{\tau} = \tau_{\max} = \dfrac{16*100*10^3}{\pi*(30)^3} = 18.9$ N/mm² ; $\tau_a = 0$
- facteurs d'entaille : par le tableau pge VII.27 du cours de M. J. Bozet, on a $k_{f□}$ = 1.6 et $k_{f□}$ = 1.5 ;
- coefficient de sécurité :

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{56.6*1.6}{0.88*0.88*340} = 0.344$$

$$\frac{1}{K_\tau} = \frac{18.9}{260} = 0.0727$$

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2 = (0.344)^2 + (0.0727)^2$$

Dès lors, le coefficient global vaut :
K = 2.83

Rem : En général, pas de problème pour les rainures de cale normalisées choisies à partir de d_{SER} et de R = 50 N/mm².

Ici $M_i = \sqrt{(150)^2 + 0.75(100)^2} = 173.2$ Nm

$$\Rightarrow d_{SER} = \sqrt[3]{\frac{32M_i}{\pi * 50}} = \sqrt[3]{\frac{32 * 173.2 * 10^3}{\pi * 50}} = 32.8 \quad \text{mm}$$

d_{noyau} = 30 mm < d_{SER} $\Rightarrow$ Ok fatigue.