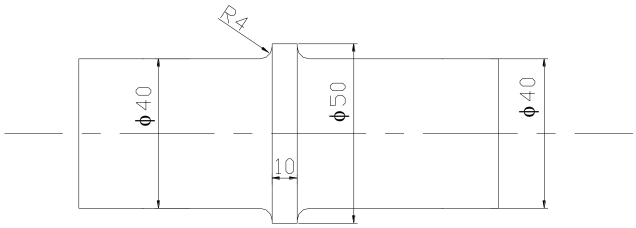
## Exercice 1

Soit un arbre en acier allié 50 CrMo4 ($R_0$ = 1300 N/mm², $R_e$ = 1250 N/mm² et $R_\pm$ = 540 N/mm²) de diamètre 40 et un état de surface N6. Il présente un collet de largeur 10, de diamètre 50 et de rayon 4.
Calculez le moment de flexion conduisant cet arbre à la rupture après $10^4$ cycles.




## Solution

Lorsque la durée de vie est limitée (< $10^6$ cycles), l'expression donnant le coefficient de sécurité est calculée de la même manière :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\tau}\right)^2 \quad (1)$$

avec

$$\frac{1}{K_\sigma} = \frac{\sigma_a}{R_\phi^N} + \frac{\bar{\sigma}}{\psi Re} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{K_\tau} = \frac{\tau_a}{R_\phi^{N''}} + \frac{\bar{\tau}}{\psi Re''}$$

L'expression de la limite d'endurance à durée de vie illimitée $R_\phi^\infty$ est donc ici remplacée par celle relative à la durée de vie limitée $R_\phi^N$. Elle varie linéairement entre les valeurs extrêmes Re et $R_\phi^\infty$.

Elle vaut : $R_\phi^N = \psi Re - \frac{1}{6}\left(\psi Re - R_\phi^\infty\right)\log_{10} n$

Dans l'expression de (1), toutes les grandeurs peuvent être calculées et nous pourrions en dégager

- Facteur d'échelle : d= 40 mm $\Rightarrow$ $b_1$= 0.84 ;
- Facteur d'état de surface : N6 $\Rightarrow$ Ra = 0.8 μm $\Rightarrow$Rt = 5.2 μm. Ce qui donne avec une charge de rupture de 1300 N/mm², $b_2$ = 0.86 ;

- Coefficient de concentration de contrainte :

$$\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1.25$$

$$\frac{L}{D} = \frac{10}{50} = 0.2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{4}{40} = 0.1$$

$\Leftrightarrow k_l^b = 1.55$

$k_\infty^b = 1.72$

$k_\infty = 1.65$

avec $\dfrac{k_l - 1}{k_\infty - 1} = \dfrac{k_l^b - 1}{k_\infty^b - 1}$ nous trouvons $k_l = 1.5$

$\Leftrightarrow \quad q = \dfrac{1}{1 + \dfrac{a}{\sqrt{r}}} = 0.95$ car a = 0.1 et r = 4

$\Leftrightarrow k_{f\sigma} = 1 + 0.95 * (1.5 - 1) = 1.475$

- Limite d'endurance à durée de vie illimitée :

$$R_\phi^\infty = \frac{b_1.b_2.R_\pm}{k_{f\sigma}} = \frac{0.84*0.86*540}{1.475} = 264.5 \text{ N/mm}^2 \ ;$$

- Durée de vie : L = $\log_{10}$ n = $\log_{10}$ 10000 = 4 ;
- Le calcul de la contrainte alternée $\sigma_a$ en partant de l'expression de (1)

$$\log_{10} N = \frac{6.(\Psi.R_e - K_\sigma.\sigma_a)}{(\Psi.R_e - K_\sigma.\bar{\sigma})\left(1 - \dfrac{R_\phi^\infty}{\Psi.R_e}\right)}$$ avec $\bar{\sigma} = 0$ car la flexion est alternée.

$$4 = \log_{10} N = 6.\frac{(1250 - \sigma_a)}{(1250 - 0)\left(1 - \dfrac{264.5}{1250}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_a = 593 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{max}$$

- En flexion alternée :

$$593 = \sigma_{max} = \frac{32 * M_f}{\pi.d^3} \quad \Leftrightarrow M_f = 3726 \text{ Nm}$$

## Exercice 2

Si on fait subir 1000 cycles à l'arbre du problème précédent avec un moment de flexion au collet 3726 Nm, combien de cycles pourra-t-il encore effectuer avec un moment de flexion au collet multiplié par 1.5.

### Solution

On utilise le critère de Miner-Palmgren : la rupture est atteinte si :

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = 1$$

$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$ or $\frac{n_1}{N_1} = \frac{1000}{10000} = 0.1$. La question est que vaut $n_2$.

Le nombre de cycle conduisant à la rupture sous le niveau de contrainte 2, $N_2$ est déterminé comme à l'exercice 1.

$M_f = 1.5 * 3726 \Leftrightarrow \sigma_a = 1.5 * 593 = 889$ N/mm²

$K_\sigma = 1$ (la rupture est atteinte)

$$\log_{10} N_2 = 6.\frac{(1250-889)}{1250.\left(1-\frac{0.84*0.86*540}{1250*1.475}\right)}$$

$\Leftrightarrow N_2 = 155$ cycles

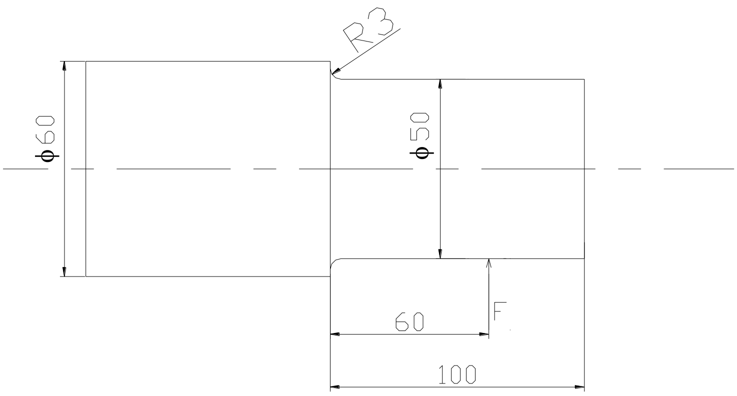
$n_2 = (1- 0.1) * 155 = 140$ cycles.

## Exercice 3

Nous demandons de calculer le nombre de cycles conduisant à une sécurité de 2.5 pour la géométrie de l'exercice 1 de la séance passée dans deux cas de sollicitation : a) flexion alternée et torsion constante ;
b) flexion alternée et torsion répétée.

Solution

♦ Rappel de la géométrie :




♦ Rappel des résultats trouvés :
- $b_1 = 0.82$
- $b_2 = 0.95$
- $k_{f\sigma} = 1.685$
- $k_{f\tau} = 1.4$
- $R_e = 420$ N/mm²
- $R_{\pm} = 260$ N/mm²
- $R_e^{''} = 210$ N/mm²
- $R_e^{\pm} = 180$ N/mm²

a) flexion alternée et torsion constante ($M_t = 600$ Nm) :
nous avons trouvé les valeurs suivantes
$\sigma_a = 49$ N/mm² et $\bar{\sigma} = 0$
$\bar{\tau} = \tau_{\max} = 24.45$ N/mm²
Le coefficient de sécurité totale est donné par :

$$\left(\frac{1}{2.5}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{\left[R_e - \frac{1}{6}.\left(R_e - R_\phi^\infty\right)\right].\log_{10} N}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}}{R_e^{''}}\right)^2$$

Dans cette dernière expression, nous pouvons sans peine tirer la valeur de la durée de vie N.
$\log_{10}N = 5.843$. D'où N = 696 600 Cycles.

b) flexion alternée et torsion répétée :

$\sigma_a = 49$ N/mm² et $\bar{\sigma} = 0$
$\tau_a = \bar{\tau} = 12.23$ N/mm²

En tenant compte de la composante alternée en torsion, le coefficient de sécurité totale est :

$$\left(\frac{1}{2.5}\right)^2 = 0.16 = \left(\frac{\sigma_a}{\left[R_e - \frac{1}{6}.\left(R_e - R_\phi^\infty\right)\right].\log_{10} N}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\left[R_e'' - \frac{1}{6}.\left(R_e'' - R_\phi''^\infty\right)\right].\log_{10} N} + \frac{\bar{\tau}}{R_e''}\right)^2$$

L'expression analytique de $\log_{10}N$ est très lourde mathématiquement parlant. Une itération nous sortira d'affaire :

si $\log_{10}N = 5.5$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.143$ ;

si $\log_{10}N = 5.4$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.135$ ;

si $\log_{10}N = 5.6$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.152$ ;

si $\log_{10}N = 5.67$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.1589$ ;

si $\log_{10}N = 5.68$ alors $\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 0.1599$ ;

Dès lors pour $\log_{10}N = 5.5$ nous avons un nombre de cycle N = 478630 cycles.

## Exercice 4

Gardons le cas de l'épaulement de l'exercice précédent auquel on applique des moments de flexion et de torsion multiplié par 2. Soit $M_f = M_t = 1200$ Nm. (Flexion alternée et torsion répétée).
Si l'épaulement ne réalise que 300 000 cycles sous ce niveau de contraintes, combien pourra-t-il encore effectuer de cycles avec
Mf = Mt= 1500 Nm ?

Solution

- 1er niveau de contraintes :$M_f$=$M_t$ =1200 Nm $\Rightarrow \sigma_a = 49$ N/mm² et $\bar{\sigma} = 0$
  $\tau_a = \bar{\tau} = 12.23$ N/mm²

A la rupture, on a

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 = 1 = \left(\frac{\sigma_a}{\left[R_e - \frac{1}{6}.\left(R_e - R_\phi^\infty\right)\right].\log_{10} N}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\left[R_e^{''} - \frac{1}{6}.\left(R_e^{''} - R_\phi^{''\infty}\right)\right].\log_{10} N} + \frac{\bar{\tau}}{R_e^{''}}\right)^2$$

Dans cette dernière expression, seule le nombre de cycle N est inconnu. Nous le déduisons comme à l'exercice précédent,
$N_1$ = 1 950 000 cycles. puisque $R_\phi^\infty = \dfrac{b_1 b_2 R_\pm}{k_{f\sigma}} = 120.2$ N/mm² et $R_e$ = 420 N/mm².
$R_\phi^{''\infty} = \dfrac{b_1 b_2 R_\pm^{''}}{k_{f\tau}} = 100.2$ N/mm² et $R_e$ = 210 N/mm².

- Au 2ème niveau de contrainte, $M_f$=$M_t$ =1200 Nm $\Rightarrow \sigma_a = 49$ N/mm² et $\bar{\sigma} = 0$
  $\tau_a = \bar{\tau} = 12.23$ N/mm²

De la même manière, on détermine le nombre de cycles conduisant à la rupture dans ce nouvel état de sollicitation :
$N_2$ = 35 500 cycles.

L'application du critère de Miner nous permet de déduire le nombre de cycle qui sera atteint dans ce nouvel état de contrainte :
$\dfrac{n_1}{N} + \dfrac{n_2}{N_2} = 1 = \dfrac{300000}{1950000} + \dfrac{n_2}{35500} \Rightarrow$ $n_2$ = 35 500 cycles.

Le premier terme de cette équation est presque nul. En effet son dénominateur est supérieur à $10^6$ cycles. Nous pouvons donc considérer que le premier état de contrainte n'est pas grand assez car il conduit à une duré de vie illimité.