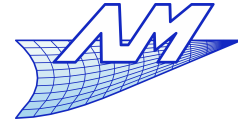




LTAS - INGÉNIERIE DES
VÉHICULES TERRESTRES
UNIVERSITÉ DE LIÈGE



PERFORMANCE ET DYNAMIQUE DES VÉHICULES

Pierre DUYSINX

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | GÉNÉRALITÉS | 1 |
| 1 | INTRODUCTION | 3 |
| 1.1 | Introduction à la dynamique du véhicule | 3 |
| 1.2 | Approches pour l'analyse de la dynamique du véhicule | 5 |
| 1.3 | Modèles du véhicule | 7 |
| 1.4 | Systèmes d'axes | 10 |
| 1.4.1 | Systèmes d'axes fixes et mobiles | 10 |
| 1.4.2 | Conventions SAE et ISO | 12 |
| 1.4.3 | Convention pour les repères des masses suspendues et non suspendues | 13 |
| 1.5 | Étude du mouvement du véhicule | 14 |
| 1.5.1 | Étude du mouvement dans le repère mobile | 14 |
| 1.5.2 | Étude du mouvement dans le repère fixe | 15 |
| 2 | DYNAMIQUE DU VÉHICULE RIGIDE | 19 |
| 2.1 | Degrés de liberté du corps rigide | 19 |
| 2.2 | Repère du véhicule | 19 |
| 2.3 | Changement de repère et opérateur de rotation | 21 |
| 2.3.1 | Expression de l'opérateur de rotation | 21 |
| 2.3.2 | Propriétés de l'opérateur de rotation | 22 |
| 2.3.3 | Les opérateurs de rotation plane | 23 |
| 2.3.4 | Composition des rotations | 24 |
| 2.3.5 | Caractère non-commutatif des rotations | 26 |
| 2.3.6 | Représentation de l'opérateur de rotation | 26 |
| 2.4 | Vitesses angulaires et linéaires dans le repère dynamique | 30 |
| 2.4.1 | Vitesse de translation dans le repère dynamique | 30 |
| 2.4.2 | Vitesse de rotation en termes des dérivées d'angles d'Euler | 31 |
| 2.4.3 | Vitesse globale dans le repère dynamique | 31 |
| 2.5 | Equations du mouvement | 33 |
| 2.5.1 | Equations du mouvement d'un système fermé | 33 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.5.2 | Application au véhicule rigide | 37 |
| 2.6 | Expression des forces | 40 |
| 2.7 | Equations du mouvement dans le repère du véhicule | 40 |
| 2.8 | Applications à la dynamique du véhicule | 41 |
| 2.8.1 | Mouvements stationnaires | 41 |
| 2.8.2 | La dynamique longitudinale | 43 |
| 2.8.3 | La dynamique latérale | 44 |
| 3 | MÉCANIQUE DES PNEUMATIQUES | 45 |
| 3.1 | Introduction | 45 |
| 3.2 | Construction du pneumatique | 47 |
| 3.2.1 | Structure mécanique | 47 |
| 3.2.2 | Composition du pneu | 49 |
| 3.3 | Codes de dimensions et de charge | 50 |
| 3.3.1 | Les pneumatiques | 50 |
| 3.3.2 | Les roues | 53 |
| 3.4 | Système d'axes du pneumatique | 56 |
| 3.5 | Mécanismes de génération des forces d'adhérence | 58 |
| 3.5.1 | Mécanisme d'hystérésis | 59 |
| 3.5.2 | Adhésion de surface | 61 |
| 3.5.3 | Phénomènes de glissement | 62 |
| 3.6 | Rayon effectif de roulement | 62 |
| 3.7 | Forces latérales | 64 |
| 3.7.1 | Origine de l'effet de dérive | 66 |
| 3.7.2 | Caractérisation de l'effet de dérive | 68 |
| 3.7.3 | Raideur d'envirage | 77 |
| 3.7.4 | Moment de retournement du pneumatique | 84 |
| 3.7.5 | Effet de carrossage | 84 |
| 3.8 | Forces longitudinales | 94 |
| 3.8.1 | Origine des forces longitudinales | 95 |
| 3.8.2 | Définition du taux de glissement longitudinal | 100 |
| 3.8.3 | Courbes d'efforts longitudinaux | 101 |
| 3.9 | Résistance au roulement | 106 |
| 3.9.1 | Origine de la résistance au roulement | 108 |
| 3.9.2 | Facteurs d'influence de la résistance au roulement | 110 |
| 3.10 | Opérations combinées | 127 |
| 3.10.1 | Généralisation de la définition du taux de glissement en présence de forces latérales | 127 |
| 3.10.2 | Expérience de Sakaï | 129 |
| 3.10.3 | Mise en évidence du phénomène de couplage | 129 |
| 3.10.4 | Ellipse d'adhérence | 133 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.11 | Modélisation mathématique des courbes caractéristiques des pneumatiques | 139 |
| 3.11.1 | Formule magique de Pacejka | 139 |
| 3.11.2 | Nombres sans dimensions | 141 |
| 3.11.3 | Exemple | 142 |
| II | PERFORMANCES | 145 |
| 4 | EQUILIBRE LONGITUDINAL | 147 |
| 4.1 | Introduction | 147 |
| 4.2 | Véhicules à deux essieux | 148 |
| 4.2.1 | Equations du mouvement | 148 |
| 4.2.2 | Équilibre longitudinal | 150 |
| 4.2.3 | Équilibre vertical et en rotation | 151 |
| 4.2.4 | Cas particuliers | 152 |
| 4.2.5 | Applications | 153 |
| 4.3 | Véhicules avec remorque | 155 |
| 5 | PERFORMANCES | 159 |
| 5.1 | Introduction | 159 |
| 5.2 | Caractéristiques des moteurs thermiques | 160 |
| 5.2.1 | Puissance et couple des moteurs à combustion interne | 160 |
| 5.2.2 | Normes de mesures des puissances et couples | 163 |
| 5.2.3 | Ajustement des courbes de puissance | 166 |
| 5.3 | Puissance et effort de traction à la roue | 173 |
| 5.3.1 | Puissance aux roues | 173 |
| 5.3.2 | Forces de propulsion aux roues | 180 |
| 5.3.3 | Diagramme des forces aux roues | 182 |
| 5.4 | Forces de résistance à l'avancement | 189 |
| 5.4.1 | Forces aérodynamiques | 190 |
| 5.4.2 | Forces de résistance au roulement | 202 |
| 5.5 | Étude des performances en régime stationnaire | 208 |
| 5.5.1 | Diagramme des forces aux roues | 208 |
| 5.5.2 | Questions liées à la vitesse maximale | 211 |
| 5.6 | Problème de la pente maximale franchissable | 219 |
| 5.6.1 | Pente maximale franchissable | 219 |
| 5.6.2 | Traction intégrale | 220 |
| 5.6.3 | Traction avant | 220 |
| 5.6.4 | Propulsion | 221 |
| 5.6.5 | Choix du premier rapport | 221 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.7 | Étagement des rapports de boîte | 222 |
| 5.8 | Notion de masse équivalente | 226 |
| 5.9 | Vitesses et déplacements en fonction du temps | 230 |
| 5.9.1 | Critères d'accélération et de reprise | 230 |
| 5.9.2 | Diagramme accélérations | 231 |
| 5.9.3 | Vitesse en fonction du temps | 231 |
| 5.9.4 | Déplacement parcouru | 234 |
| 5.9.5 | Prise en compte des changements de rapport de boîte | 235 |
| 5.9.6 | Démarrage depuis l'arrêt | 236 |
| 6 | CONSOMMATION ET EMISSIONS | 237 |
| 6.1 | Introduction | 237 |
| 6.2 | Définition de la consommation | 238 |
| 6.2.1 | Consommation et émissions des moteurs thermiques | 238 |
| 6.2.2 | Consommation des moteurs électriques | 242 |
| 6.3 | Consommation des véhicules | 243 |
| 6.3.1 | Définition de la consommation des véhicules | 243 |
| 6.4 | Calcul de la consommation | 245 |
| 6.4.1 | Consommation à vitesse constante | 245 |
| 6.5 | Consommation sur un cycle à vitesse variable | 248 |
| 6.6 | Mesures normalisées de la consommation | 249 |
| 6.6.1 | Mesure normalisée de la consommation à vitesse constante | 249 |
| 6.7 | Cycles normalisés de consommation | 250 |
| 6.7.1 | Les cycles EPA américains | 251 |
| 6.7.2 | Le cycle européen de conduite et les autres cycles en Europe | 254 |
| 6.7.3 | Cycles japonais | 261 |
| 6.7.4 | Procédure d'essai mondiale harmonisée (WLTP) | 262 |
| 6.8 | Banc à rouleaux | 265 |
| 7 | LE FREINAGE | 269 |
| 7.1 | Introduction | 269 |
| 7.2 | Equations du mouvement | 269 |
| 7.2.1 | Equations de Newton-Euler | 269 |
| 7.2.2 | Forces du freinage | 270 |
| 7.2.3 | Forces de freinage | 272 |
| 7.3 | Mouvement à décélération constante | 273 |
| 7.4 | Les Freins | 276 |
| 7.4.1 | Les types de freins | 276 |
| 7.4.2 | Les freins à tambour | 276 |
| 7.4.3 | Les freins à disque | 277 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 7.4.4 | Evolution de la force de freinage au cours du temps . . . | 278 |
| 7.4.5 | Comparaison des freins à disque et des freins à tambour | 279 |
| 7.5 | Répartition des forces de freinage | 280 |
| 7.5.1 | Freinage idéal | 280 |
| 7.5.2 | La caractéristique du véhicule | 282 |
| 7.5.3 | Freinage dans des conditions non-idéales | 285 |
| 7.5.4 | Efficacité du freinage et distance d'arrêt | 292 |
| 7.6 | Distance d'arrêt | 293 |
| 7.7 | Prescriptions légales et réglementations des systèmes de freinage | 294 |

III COMPORTEMENT DYNAMIQUE ET STABILITÉ LATÉRALE DU VÉHICULE 297

| | | |
|----------|--|------------|
| 8 | COMPORTEMENT STATIONNAIRE EN VIRAGE | 299 |
| 8.1 | Introduction | 299 |
| 8.2 | Modèle bicyclette | 300 |
| 8.3 | Virage à faible vitesse | 302 |
| 8.3.1 | Théorie d'Ackerman | 302 |
| 8.3.2 | Théorie de Jeantaud | 304 |
| 8.4 | Virage à vitesse élevée | 309 |
| 8.4.1 | Equation constitutive | 310 |
| 8.4.2 | Equations d'équilibre | 311 |
| 8.4.3 | Equations de compatibilité | 312 |
| 8.4.4 | Angle de braquage en fonction de la vitesse et du rayon de courbure | 313 |
| 8.4.5 | Véhicule neutre, sous-vireur, sur-vireur | 314 |
| 8.4.6 | Point neutre de manoeuvre et marge statique | 319 |
| 9 | STABILITÉ LATÉRALE | 323 |
| 9.1 | Equations de la dynamique du véhicule | 323 |
| 9.1.1 | Le modèle bicyclette | 323 |
| 9.1.2 | Équilibre du véhicule dans ses propres axes | 324 |
| 9.1.3 | Forces agissant sur le modèle | 326 |
| 9.1.4 | Equations de compatibilité | 328 |
| 9.1.5 | Equations constitutives | 330 |
| 9.1.6 | Equations du mouvement transitoire en virage | 331 |
| 9.1.7 | Expression des équations du mouvement sous forme canonique | 333 |
| 9.2 | Étude de la stabilité dans le plan complexe | 334 |
| 9.2.1 | Stabilité | 334 |

| | | |
|---|--|------------|
| 9.2.2 | Caractérisation du mouvement | 337 |
| 9.3 | Réponse à un braquage donné | 338 |
| 9.3.1 | Régime établi | 338 |
| 9.4 | Le système ESP | 341 |
| 9.4.1 | Fonctionnement d'un système de contrôle de stabilité . | 341 |
| 9.4.2 | Equations de la dynamique avec des couples de freinage | 341 |
| 9.5 | Description de la trajectoire | 345 |
| IV CONFORT ET TENUE DE ROUTE | | 347 |
| 10 TENUE DE ROUTE ET CONFORT | | 349 |
| 10.1 | Introduction | 349 |
| 10.2 | Sources des vibrations | 350 |
| 10.2.1 | Rugosités de la route | 351 |
| 10.3 | Réponse humaine aux vibrations | 351 |
| 10.3.1 | Critère de Janeway | 354 |
| 10.3.2 | Critère ISO 2631 | 354 |
| 10.3.3 | Limitation de la puissance absorbée | 356 |
| 10.4 | Modèles de tenue de route | 357 |
| 10.4.1 | Quart de modèle à 2 ddl | 359 |
| 10.4.2 | Étude du tangage et du pompage | 370 |
| 10.4.3 | Règles de bonne pratique dans la conception des véhicules | 374 |
| V DYNAMIQUE DES COLLISIONS ET SECURITE PASSIVE | | 377 |
| 11 INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES COLLISIONS | | 379 |
| 11.1 | Introduction | 379 |
| 11.2 | Théorie élémentaire du choc | 381 |
| 11.2.1 | Impulsion | 381 |
| 11.2.2 | Énergie cinétique | 382 |
| 11.2.3 | Solution des équations | 383 |
| 11.3 | Modélisation du choc frontal d'un véhicule contre un mur . . . | 384 |
| 11.3.1 | Modélisation | 384 |
| 11.3.2 | Bilan énergétique | 385 |
| 11.3.3 | Equation du mouvement du véhicule | 386 |
| 11.3.4 | Identification des paramètres | 388 |
| 11.3.5 | Discussion | 392 |
| 11.4 | Choc frontal entre deux véhicules | 393 |

| | | |
|--------|----------------------------|-----|
| 11.4.1 | Loi du mouvement | 393 |
| 11.4.2 | Exemple | 396 |

Première partie
GÉNÉRALITÉS

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Introduction à la dynamique du véhicule

Par véhicules terrestres, on entend tous les véhicules dont le mouvement est supporté par le sol, par opposition aux avions et bateaux dont le mouvement est supporté par l'air ou l'eau respectivement.

Les véhicules terrestres peuvent être classés en deux grandes catégories : les véhicules guidés et les véhicules non-guidés. Les véhicules guidés sont astreints à se déplacer le long de chemins fixés. Il en est ainsi des véhicules ferroviaires sur les rails, ou des véhicules en lévitation sur des pistes magnétiques. A contrario les véhicules non-guidés sont libres de se mouvoir sans contrainte sur le sol. C'est le cas des automobiles (voitures, camions, motocyclettes), des véhicules spéciaux (engins de génie civil ou agricoles) ou même des véhicules sur coussin d'air (aéroglosses). On distingue encore les véhicules routiers et les véhicules tout terrain selon la nature du sol sur laquelle il est prévu qu'ils peuvent se déplacer.

L'objectif de ce cours est d'étudier les mécanismes par lesquels les véhicules terrestres se déplacent et de quelle manière leur mouvement peut être contrôlé. La dynamique du véhicule est de première importance pour comprendre l'architecture des véhicules dans diverses conditions opératoires et ultérieurement énoncer les principes permettant de les concevoir de manière rationnelle.

Lorsque l'on veut étudier la dynamique d'un système mécanique comme les automobiles, il faut connaître les forces qui régissent le mouvement. La particularité des véhicules automobiles réside dans le fait que les forces qui permettent leur contrôle sont les forces de contact qui se développent aux interfaces sol-roue. C'est par ces quatre aires de contact sol-roue, chacune pas

plus grande qu'une paume de main, que passent toutes les forces de guidage d'une automobile. Il va donc sans dire que la mécanique des pneumatiques, c'est-à-dire l'étude des forces générées par les pneumatiques est un passage obligé de l'étude de la dynamique des véhicules. L'autre catégorie de forces extérieures en interaction avec le véhicule est les forces aérodynamiques provenant du mouvement du véhicule dans l'air ambiant. L'étude des performances aérodynamiques du véhicule devra être également abordée.

Les forces extérieures étant caractérisées, on aborde généralement l'étude de la dynamique du véhicule terrestre en la décomposant en trois types de mouvement particuliers : l'étude des *performances*, l'étude de la *tenue de route* et l'étude du *confort*.

L'étude des *performances* porte sur la dynamique longitudinale du véhicule et se réfère à la capacité du véhicule à accélérer, freiner, développer des efforts de traction et à franchir des obstacles tels que des pentes. Le mouvement du véhicule est supposé être rectiligne ou rectifié. Aujourd'hui, un chapitre de plus en plus important des performances concerne l'évaluation de la consommation et des émissions de polluants que le véhicule émet pour se déplacer.

La *tenue de route* recouvre l'étude des caractéristiques du véhicule en virage ou lors d'un changement de direction mais aussi l'analyse de la stabilité du mouvement du véhicule face à des perturbations extérieures ou encore sa capacité à répondre aux commandes de son conducteur. De manière plus précise, la qualité de la tenue de route se réfère aux propriétés objectives du véhicule à effectuer des changements de direction ou à soutenir les forces latérales. L'étude du virage quantifie la capacité du véhicule à soutenir des accélérations latérales en conditions stationnaires. L'étude de la réponse directionnelle du véhicule évalue quant à elle la réponse transitoire du véhicule. Elle peut être caractérisée, entre autre, par le temps requis aux forces latérales pour se développer et suivre une commande au volant. Cependant le concept de tenue de route recouvre bien plus que les seules qualités intrinsèques du véhicule. Elle s'attache à mesurer à la facilité de conduite ou l'influence des caractéristiques de la voiture sur la capacité du chauffeur à garder le contrôle du véhicule. Les sensations du conducteur sont dès lors essentielles et c'est le système à retour incluant le conducteur + véhicule + l'environnement (voir Figure 1.1) qui doit être pris en compte. Toutefois à cause du caractère souvent difficilement quantifiable du conducteur, il est de tradition d'étudier et de concevoir le sous-système véhicule isolément.

La notion de *confort* est quant à elle reliée à la capacité du véhicule à filtrer les vibrations. Celles-ci sont principalement issues des irrégularités de la route et à en préserver les passagers et les marchandises. Ici encore,

1.2. APPROCHES POUR L'ANALYSE DE LA DYNAMIQUE DU VÉHICULE 5

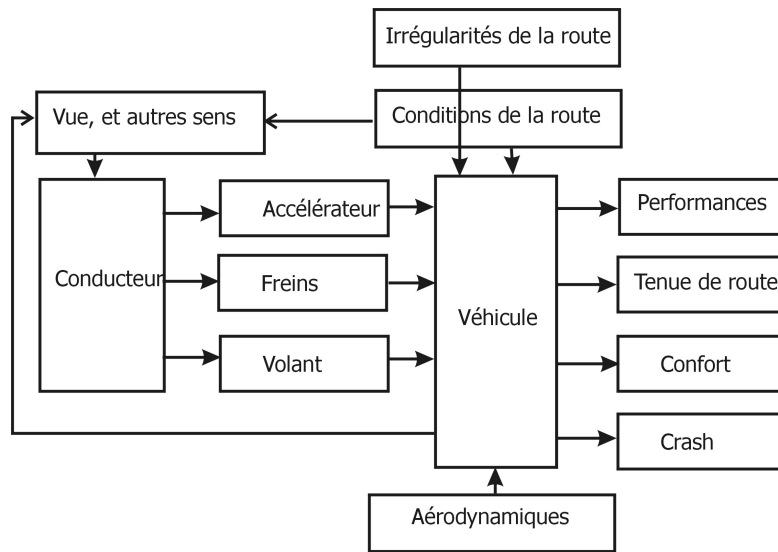


FIGURE 1.1 – Système véhicule-conducteur-environnement à considérer pour l'étude du comportement

l'évaluation de la performance du véhicule à amortir les vibrations ne peut être réalisée sans tenir compte du conducteur. On doit définir des critères régissant la capacité du pilote à atténuer les vibrations et les chocs. C'est eux qui permettent en définitive d'établir objectivement le niveau de confort du véhicule. Dans ce contexte, il faudrait encore considérer le système véhicule-conducteur plutôt que le véhicule pris isolément.

Enfin, une introduction aux aspects de sécurité requiert une introduction à la mécanique des collisions. En effet à côté des aspects de respect de l'environnement, la sécurité est une des préoccupations majeures de notre société. Il importe de voir de quelle manière la modélisation et la reconstitution des crashes peuvent être mises à profit pour appréhender les stratégies en vue de concevoir des véhicules plus surs et capables de protéger efficacement les occupants en cas d'accident.

1.2 Approches pour l'analyse de la dynamique du véhicule

Différentes approches peuvent être utilisées pour la compréhension de la dynamique des véhicules. On peut l'aborder de manière empirique, analytique ou numérique.

Les *méthodes empiriques* procèdent par essais et erreurs afin d'apprendre

quels facteurs influencent les performances et le comportement du véhicule, de quelle manière et dans quelles conditions ils agissent. Toutefois, les méthodes empiriques conduisent tôt ou tard (et souvent rapidement) à l'échec. En effet sans une compréhension du "comment" et du "pourquoi" les changements de la conception du véhicule affectent les performances, la simple extrapolation des résultats du passé conduit souvent à faire intervenir de nouveaux phénomènes ou des facteurs inconnus qui produisent des effets inattendus et mettent en échec les règles du passé. C'est pour cette raison que la démarche de l'ingénieur ne peut s'appuyer sur l'empirisme et doit être basée sur une modélisation des phénomènes physique et à prédire l'évolution du mouvement au moyen de *méthodes analytiques ou numériques*.

L'application des lois de la mécanique à la compréhension des phénomènes qui sous tendent la dynamique des véhicules permet de mettre en évidence les équations capables de prédire l'évolution du véhicule ainsi que d'identifier les facteurs et les paramètres influençant le phénomène étudié. Dans les cas les plus simples, ces études conduisent à des modèles analytiques simples formés d'équations algébriques ou différentielles reliant les forces et les mouvements étudiés aux variables de contrôle et aux propriétés du véhicule, des pneumatiques, etc. On peut ainsi identifier les facteurs influençant la réponse, les conditions et la mesure dans lesquelles ils interviennent. On est alors à même de prédire des comportements nouveaux et de quantifier des modifications des paramètres du système afin d'atteindre des objectifs prédéterminés.

Il convient toutefois de noter que les méthodes analytiques restent toujours partiellement fidèles à la réalité puisqu'elles sont toujours intimement liées à des hypothèses, à une idéalisation des problèmes, en d'autres mots au *modèle* que l'on utilise. Comme on le découvre tous les jours, les modèles peuvent eux-mêmes conduire à de mauvaises prédictions dans certaines applications particulières où les hypothèses formulées sont mises en défaut. Il convient donc toujours à l'ingénieur de connaître les hypothèses de travail liées à chaque modélisation afin d'apprécier leur domaine de fiabilité et la qualité de ses résultats et ainsi d'éviter des erreurs.

Par le passé, de nombreux modèles analytiques étaient confrontés aux limitations liées la résolution des équations auxquelles on aboutissait. Jadis le modèle devait conduire à des solutions sous forme explicite ou analytique pour être utilisable. Ceci restreignait fortement l'application des méthodes exactes dans le domaine de la dynamique des véhicules, car cela conduit fréquemment à des problèmes très complexes. Les seuls modèles qui pouvaient alors être résolus étaient parfois à ce point simplifiés que la généralité et la qualité de leurs résultats en souffraient.

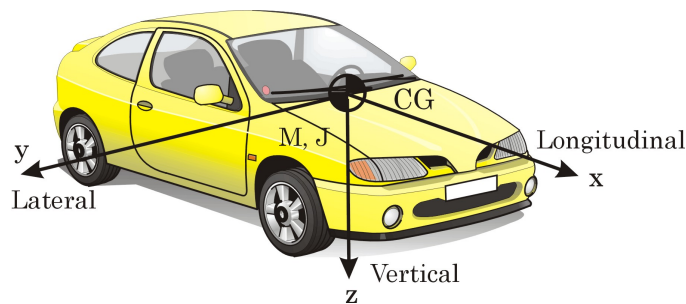


FIGURE 1.2 – Modèle corps rigide du véhicule

Aujourd'hui avec l'ère des ordinateurs et des méthodes numériques, cette limitation est largement repoussée. On peut résoudre les équations de la dynamique de systèmes multicorps comportant un grand nombre de composants et de multiples non-linéarités au moyen de méthodes numériques avancées comme la méthode des éléments finis ou la simulation de systèmes multicorps. Dès lors des modèles extrêmement complets et élaborés peuvent être construits pour appréhender de manière détaillée le comportement du véhicule. Ces outils logiciels modernes permettent aux ingénieurs de prédire l'influence de nombreux paramètres et de prédire la réalité avant de la création du prototype. L'évolution ultime des méthodes numériques appliquées à la conception consiste à adjoindre des techniques d'optimisation aux outils d'analyse afin de choisir au mieux les composants et les paramètres du véhicule et de produire un comportement optimal du véhicule.

1.3 Modèles du véhicule

Le véhicule est composé de plusieurs sous-systèmes distribués dans l'enveloppe intérieure. Dans le cadre de cet exposé, on réalise une analyse élémentaire et on étudie le mouvement d'ensemble du véhicule avec tous ses composants.

Pour les mouvements d'accélération, de freinage et de virage, il est souvent suffisant de considérer le véhicule comme un *corps rigide*. Il est alors caractérisé par son *centre de masse* (ou de gravité), sa *masse* et son *tenseur d'inertie giratoire* (voir Figure 1.2).

Toutefois pour tenir compte du roulis ou pour étudier le confort, il est nécessaire de dissocier les roues et la suspension (appelées masses non-suspendues) et la caisse et les passagers constituant la masse suspendue. La caisse (la masse suspendue) et le train roulant (les masses non suspendues) peuvent également être considérés comme des corps rigides. On admet cependant que les roues directrices attachées à la masse non suspendue possèdent un degré

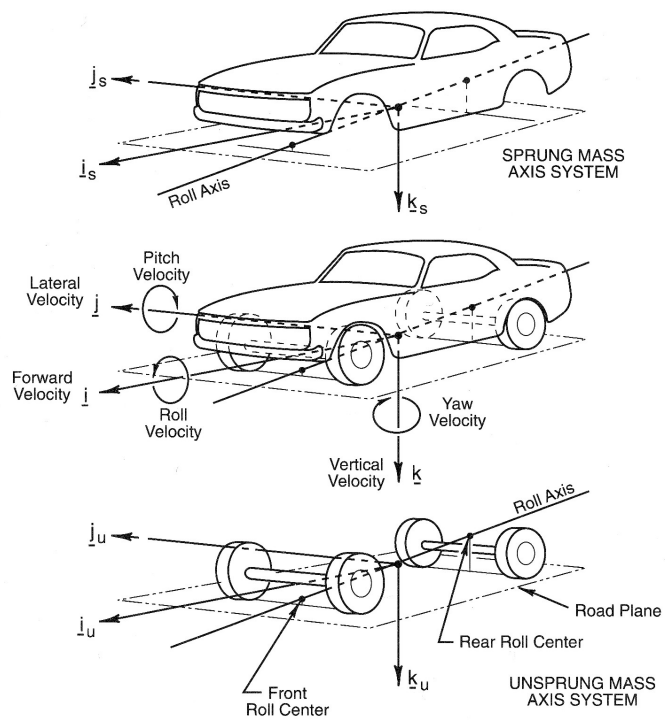


FIGURE 1.3 – Définition des masses suspendues et non suspendues et de leur repère [13]

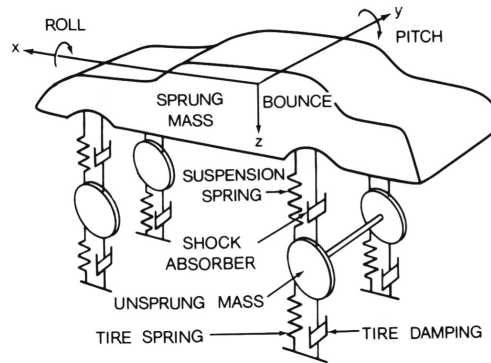


FIGURE 1.4 – Modèle à 7 ddl pour l'étude de la tenue de route et du confort [26]

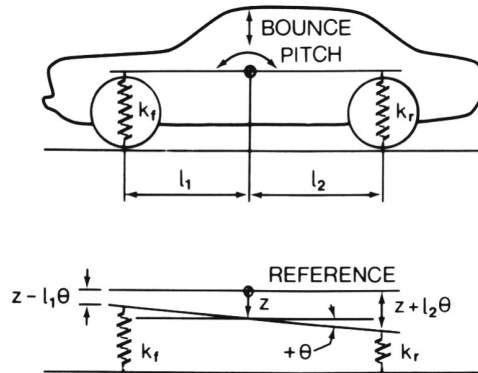


FIGURE 1.5 – Modèle à 2 ddl pour l'étude de pompage et du tangage [26]

de liberté lorsque nécessaire. Un modèle courant pour ce type d'étude est représenté à la Figure ?? . Par la présence des mécanismes de suspension, le mouvement relatif entre la masse suspendue et la masse non suspendue correspond à une rotation autour d'un axe appelé *axe de roulis* passant par les *centres de roulis* des deux suspensions. La position relative des deux masses sera caractérisée par l'*angle de roulis* qui donne leur position angulaire relative.

Pour étudier le confort et la tenue de route d'autres modèles sont également possibles. Les mouvements relatifs de la masse suspendue et de la masse non suspendue les unes par rapport aux autres et par rapport au sol pourront être alors étudiés en modélisant les masses suspendues et non suspendues comme des corps rigides reliés par des éléments élastiques (ressorts) ou des éléments dissipatifs (amortisseurs) idéalisés et concentrés. Les Figures 1.4 et

1.5 donnent plusieurs modèles permettant l'étude de propriétés de filtration des vibrations et du mouvement de tangage / pompage de la voiture.

L'étude détaillée du comportement dynamique du véhicule requiert des méthodes de calcul par ordinateur telles que les méthodes des éléments finis ou l'analyse des systèmes multicorps. On trouve à l'heure actuelle sur le marché plusieurs logiciels commerciaux performants capables de réaliser cette tâche. Citons à titre d'exemple les logiciels ADAMS¹, DADS² ou SAMCEF-MECANO³. La modélisation des corps peut être effectuées à l'aide de corps rigides ou flexibles reliés par des joints cinématiques. Des exemples de modélisations de véhicules par éléments finis ou en systèmes multicorps flexibles [7] dans SAMCEF-MECANO [23] sont fournies à la Figure 1.6.

1.4 Systèmes d'axes

1.4.1 Systèmes d'axes fixes et mobiles

Afin d'étudier le mouvement du véhicule, il convient, primo, d'attacher des systèmes d'axes aux corps et, secundo, de préciser les systèmes d'axes dans lesquels la description aura lieu. Pour décrire le mouvement du véhicule, il est de coutume d'utiliser deux repères : l'un est un système inertiel (noté $OXYZ$ en majuscules) attaché au sol, l'autre est un système mobile attaché au véhicule (noté xyz en minuscules).

Le repère d'inertie $OXYZ$ est fixe par rapport au sol. Le repère inertiel est nécessaire pour décrire certains aspects du mouvement par rapport à un point fixe ou une direction fixe. Le repère mobile xyz attaché au véhicule est utilisé dans toutes les autres situations. La localisation et l'orientation du repère fixe est indépendante du véhicule et est laissée au libre choix de l'utilisateur. Toutefois, par facilité, les repères fixes et mobiles coïncident généralement à l'instant initial. Les calculs ou les mesures expérimentales indiqueront alors le mouvement relatif des deux systèmes.

L'utilisation des axes liés aux véhicules pour décrire le mouvement tire son origine de l'aéronautique et la théorie du navire. La première utilisation des axes liés à l'automobile pour décrire son mouvement revient à Segel [24]. La raison principale de l'utilisation des axes liés au véhicule réside dans le fait que les propriétés matérielles (tenseur d'inertie) restent constantes dans des axes propres, alors qu'elles deviennent des propriétés variables au

1. <http://www.adams.com>

2. <http://www.cadesi.com>

3. <http://www.samcef.com>



FIGURE 1.6 – Modèles éléments finis et multicorps flexible de véhicules dans SAMCEF-MECANO [23]

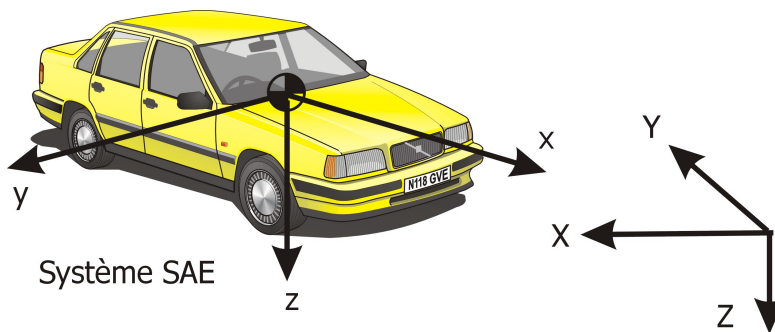


FIGURE 1.7 – Définition des repères selon les normes SAE

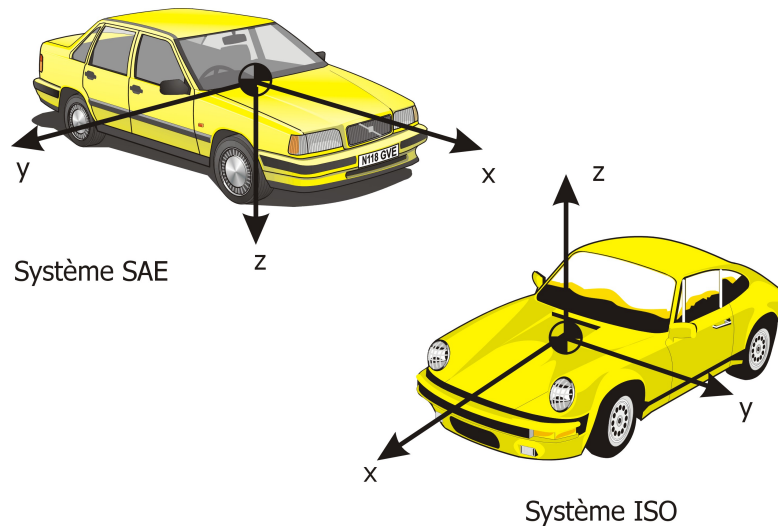


FIGURE 1.8 – Comparaison des repères du véhicule selon les normes SAE et ISO

cours du temps dans le repère inertiel. Ceci est un avantage pour l'étude du mouvement. Le repère mobile correspond également aux axes naturels pour le pilote et permet d'exprimer les impression qu'il ressent. De plus les inerties dans les axes liés au véhicule ont une signification physique pour l'ingénieur, signification qui serait perdue dans le repère fixe. Le système d'axes lié au véhicule est parfois encore appelé système mobile ou système corps.

1.4.2 Conventions SAE et ISO

Pour les véhicules automobiles, la définition des repères obéit à une série de prescriptions de la SAE (Society of Automotive Engineers) ou de l'ISO (International Standard Organization). Dans la suite de l'exposé nous suivrons la convention SAE.

La convention SAEJ670e « Vehicle Dynamics Terminology » [22] préconise les conventions suivantes pour le système d'inertie et le système attaché au véhicule (voir figure 1.7). Les deux systèmes $OXYZ$ et $oxyz$ sont directs (droits), orthogonaux et normés.

La convention ISO diffère légèrement de la convention SAE (voir Figure 1.8). Dans les deux conventions, l'axe x du véhicule est orientée vers l'avant. Par contre dans la convention ISO l'axe vertical z est orienté vers le ciel et l'axe y pointe alors vers la gauche du conducteur tandis que dans la convention SAE, l'axe vertical z est orienté vers le centre de la terre et l'axe

y vers la droite.

Système d'axes terrestre d'inertie (fixe) : $OXYZ$

- X direction de déplacement de référence ou la direction de cap initial,
- Y direction à droite de la direction du voyage,
- Z dirigée selon la verticale (vers le bas).

Système d'axes du véhicule : $oxyz$

- o , l'origine au centre de masse,
- x selon la direction d'avance et dans le plan de symétrie du véhicule,
- y selon la direction latérale et à droite du conducteur,
- z selon la verticale (vers le bas).

1.4.3 Convention pour les repères des masses suspendues et non suspendues

Dans le cas où l'on veut distinguer la masse suspendue et la masse non-suspendue, on attache un repère relatif à chacune des masses comme représenté à la Figure 1.3. La *masse suspendue* reprend toutes les masses situées au-dessus des ressorts de suspension, c'est-à-dire la caisse, le moteur, les passagers et les marchandises. A contrario les *masses non-suspendues* regroupent toutes les masses interposées entre la route et la masse suspendue, soient les roues, la suspension et les systèmes fixés à la roue (souvent les freins)...

Rappelons que le mouvement relatif de la masse suspendue par rapport à la masse non suspendue est une rotation *d'angle de roulis* ϕ autour d'un axe appelé *axe de roulis*. Pour un angle de roulis nul, les axes des systèmes des masses suspendues et non suspendues coïncident avec les axes du véhicule complet. Les origines des deux repères sont identiques et sont situées à l'intersection de la verticale passant par le centre de masse du véhicule et de l'axe de roulis pour un angle de roulis nul.

Parfois il est également agréable de travailler avec des hypothèses supplémentaires permettant de dériver des modèles simplifiés.

- La masse suspendue roule autour de l'axe x horizontal plutôt que autour de l'axe de roulis réel. Toutefois, pour certaines études comme l'analyse du retournement du véhicule, on préfère faire une simplification en mettant l'origine du système d'axes ailleurs que sur l'axe x .

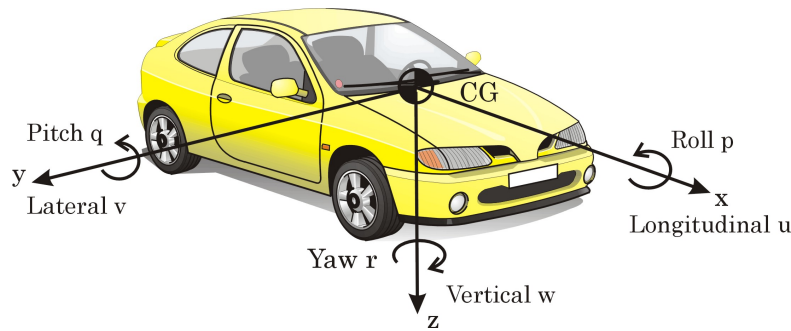


FIGURE 1.9 – Définition des vitesses dans les axes du véhicule

- Il est généralement raisonnable de supposer que les axes principaux d'inertie de la masse roulante (suspendue) sont parallèles aux axes matériels.
- Pour certains modèles on peut également admettre l'hypothèse simplificatrice que le centre de gravité de la masse roulante est sur l'axe x .
- Les déflexions des pneus restent négligeables et le plan des centres des roues (de diamètres identiques) reste parallèle au sol.

1.5 Étude du mouvement du véhicule

L'étude du mouvement du véhicule est classiquement étudiée de deux manières :

- Si on veut étudier la stabilité et les problèmes de contrôle du véhicule, on étudie les perturbations du mouvement du véhicule sous l'effet de l'action de commandes ou de perturbations extérieures.
- Si on recherche la trajectoire réelle par rapport au sol, le mouvement du système local du véhicule est décrit par rapport au repère inertiel fixé au sol.

1.5.1 Étude du mouvement dans le repère mobile

Le plus souvent, le mouvement est examiné dans le système d'axes $oxyz$ attaché au véhicule parce qu'il correspond au repère naturel pour le conducteur ou le passager. En outre dans ce repère les propriétés d'inertie restent constantes au cours du temps. L'usage [22] est de définir les vitesses linéaires et de rotation par rapport à ce repère mobile ainsi que cela est illustré à la Figure 1.9 :

- u , *vitesse d'avance* (positive selon la direction d'avance et le plan de symétrie du véhicule) ;
- v , *vitesse latérale* (positive à droite) ;
- w , *vitesse verticale* (positive vers le bas) ;
- p , *vitesse de roulis*, vitesse de rotation autour de l'axe x ;
- q , *vitesse de tangage*, vitesse de rotation autour de l'axe y ;
- r , *vitesse de lacet*, vitesse de rotation autour de l'axe vertical z .

Pour l'étude du mouvement, il est habituel de fixer un certain nombre de variables opérationnelles et de regarder l'évolution d'autres variables sous l'effet d'actions des commandes ou de perturbations extérieures. On fixe par exemple :

- la vitesse d'avancement (u),
- l'accélération ou la décélération longitudinale,
- la force de freinage ou de traction.

Le mouvement de la masse suspendue peut alors être étudié comme une perturbation par rapport aux conditions de vitesse initiale. Les perturbations sont engendrées soit par des actions sur des variables de contrôle (braquage de roue, force de freinage, etc.), soit par des perturbations extérieures (rafale de vent par exemple).

1.5.2 Étude du mouvement dans le repère fixe

L'étude du mouvement du véhicule (et de son système de référence) par rapport au système inertiel lié au sol est recherché si on désire obtenir la trajectoire du véhicule. C'est le cas lorsque l'on veut étudier le suivi d'une trajectoire prédéterminée ou bien lors de l'évitement d'obstacles.

On est alors amené à définir différents angles décrivant la trajectoire ou l'orientation du système mobile du véhicule par rapport au référentiel d'inertie. En se référant à la figure 1.10, on définit [22] :

- ψ , *angle de cap* comme l'angle entre la direction x et X dans le plan du sol ;
- ν , *l'angle de course* l'angle entre le vecteur vitesse instantanée \vec{V} du véhicule et l'axe X ;
- β , *l'angle de dérive*, l'angle entre l'axe x du véhicule et le vecteur vitesse instantanée \vec{V} du véhicule.

Bien évidemment on voit que ces trois angles sont reliés par la relation :

$$\nu = \psi + \beta \quad (1.1)$$

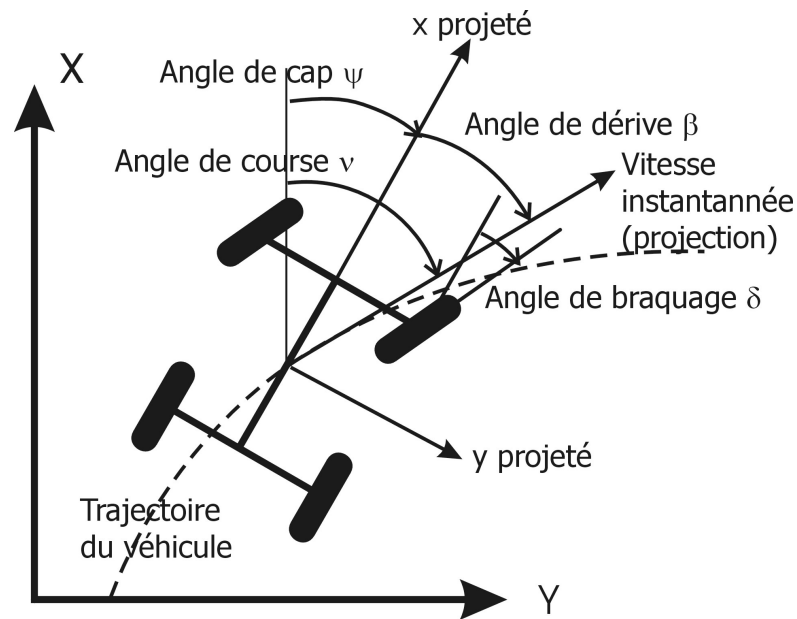


FIGURE 1.10 – Définition des angles de cap, de course et de dérive du véhicule

La connaissance complète de l'orientation du repère de la voiture nécessite encore la connaissance de :

- ϕ l'angle de roulis du véhicule, c'est-à-dire l'angle entre l'axe y du véhicule et le plan du sol ;
- θ l'angle de tangage de la voiture, soit l'angle entre l'axe x du véhicule et le plan du sol.

Dans certaines applications, on est également amené à définir les différentes composantes d'accélération associées à l'étude de la trajectoire :

- *Accélération longitudinale* : composante du vecteur accélération en un point du véhicule dans la direction x
- *Accélération de côté* : composante de l'accélération dans la direction y
- *Accélération normale* : composante de l'accélération dans la direction z

On définit encore :

- *Accélération latérale* : composante de l'accélération perpendiculaire à x et parallèle au plan de la route
- *Accélération centripète* : composante de l'accélération perpendiculaire à la tangente à la trajectoire et parallèle au plan de la route

Dans des conditions stationnaires, l'accélération latérale est égale au produit de l'accélération centripète par le cosinus de l'angle de dérive du véhicule.

Comme dans la plupart des conditions de test, l'angle de dérive est petit, l'accélération latérale peut être généralement confondue avec l'accélération centripète.

Les forces et les moments sont normalement définis positifs comme agissant *sur* le véhicule (convention égocentrique). On définit les forces et les moments conventionnels agissant sur la voiture :

- *Force longitudinale* F_x est la composante de la force agissant sur la voiture selon l'axe d'avance x ;
- *Force latérale* F_y : la composante du vecteur force selon y ;
- *Force normale* F_z : la composante du vecteur force selon z ;
- *Moment de roulis* M_x : la composante du moment tendant à faire tourner le véhicule positivement (selon la règle du tire-bouchon) autour de l'axe x ;
- *Moment de tangage* M_y : la composante du vecteur moment tendant à faire tourner le véhicule positivement autour de l'axe y ;
- *Moment de lacet* M_z : la composante du vecteur moment tendant à faire tourner le véhicule positivement autour de son axe z.

A cause de la convention égocentrique, on peut éprouver certaines difficultés. S'il est naturel de considérer une force positive selon x est dirigée vers l'avant, il est moins naturel de considérer que la force de poids agissant sur les roues est dirigée physiquement vers le haut (selon axes z négatif), puisqu'il s'agit de la réaction du sol sur la roue et a donc une valeur numérique négative. Dès lors la convention SAEJ670e " Vehicle Dynamics Terminology " [22] propose de parler de *Force Normale* pour une force agissant vers le bas tandis qu'on désigne par la Force Verticale, une force qui est dirigée dans la direction opposée à la force normale.

Chapitre 2

DYNAMIQUE DU VÉHICULE RIGIDE

2.1 Degrés de liberté du corps rigide

La localisation (i.e. la position et l'orientation) d'un corps rigide dans l'espace peut être déterminée par la connaissance de la position de trois points non alignés. Comme la distance entre les 3 points reste constante (puisque le corps est rigide), on a 3 équations de contraintes entre ces coordonnées. Au total, la localisation du corps possède 6 degrés de liberté.

Comme la position d'un point exige 3 coordonnées, on en déduit que l'orientation du corps autour de ce point de référence est réalisée grâce à 3 paramètres.

2.2 Repère du véhicule

La SAE [22] précise la manière dont on définit le repère attaché au véhicule. L'origine du repère local est centré sur le centre de gravité du véhicule. La direction locale x du véhicule est orientée vers l'avant et dans son plan de symétrie. La direction z est quant à elle dirigée selon la verticale et orientée vers le centre de la terre. En conséquence la direction y du véhicule est dirigée vers la droite du véhicule dans le sens de la conduite pour avoir un repère dextrorsum.

Quant à la norme ISO, elle diffère quelque peu de la convention SAE en ce sens que la direction z du véhicule est orienté vers le ciel de sorte que la direction y pointe vers la gauche du conducteur.

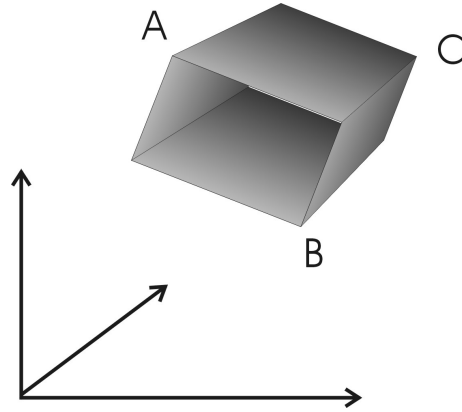


FIGURE 2.1 – Localisation d'un corps rigide

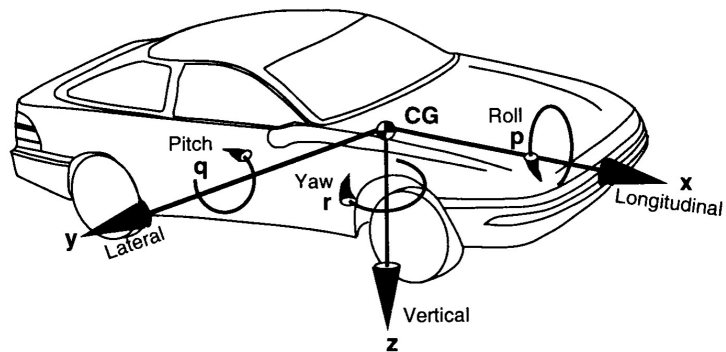


FIGURE 2.2 – Définition du repère du véhicule selon la norme SAE [5]

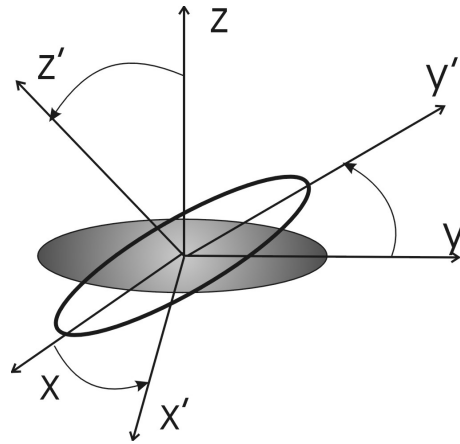


FIGURE 2.3 – Rotation de corps rigide

2.3 Changement de repère et opérateur de rotation

2.3.1 Expression de l'opérateur de rotation

La relation entre les coordonnées \mathbf{r} et \mathbf{r}' d'un même point respectivement dans les repères d'inertie $oxyz$ et dans le repère matériel $ox'y'z'$ fait appel à une relation affine entre les coordonnées exprimées dans les deux systèmes. L'opérateur de rotation est caractérisé par une matrice de rotation \mathbf{R} telle que :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

En effet il est assez aisé d'établir une expression de cet opérateur de rotation en termes des cosinus directeurs. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ les vecteurs unitaires qui sous-tendent les repères cartésiens $Oxyz$ et $Ox'y'z'$.

Un vecteur position arbitraire \vec{r} peut être exprimé indifféremment dans le repère $Oxyz$ et dans le repère $Ox'y'z'$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \\ &= r'_x \vec{i}' + r'_y \vec{j}' + r'_z \vec{k}' \end{aligned}$$

Comme les deux bases sont orthonormales, une composante telle que r'_x peut être calculée de manière équivalente de deux façons :

$$\begin{aligned} r'_x &= \vec{i}' \cdot \vec{r} \\ &= \vec{i}' \cdot \vec{i} r_x + \vec{i}' \cdot \vec{j} r_y + \vec{i}' \cdot \vec{k} r_z \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} r'_y &= \vec{j}' \cdot \vec{r} \\ &= \vec{j}' \cdot \vec{i} r_x + \vec{j}' \cdot \vec{j} r_y + \vec{j}' \cdot \vec{k} r_z \\ r'_z &= \vec{k}' \cdot \vec{r} \\ &= \vec{k}' \cdot \vec{i} r_x + \vec{k}' \cdot \vec{j} r_y + \vec{k}' \cdot \vec{k} r_z \end{aligned}$$

En réarrangeant ces trois expressions sous forme matricielle, on obtient la relation affine :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

En outre, on peut donner l'expression de l'opérateur matrice de rotation en termes des cosinus directeurs des vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans le repère de base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{i}', \vec{i}) & \cos(\vec{i}', \vec{j}) & \cos(\vec{i}', \vec{k}) \\ \cos(\vec{j}', \vec{i}) & \cos(\vec{j}', \vec{j}) & \cos(\vec{j}', \vec{k}) \\ \cos(\vec{k}', \vec{i}) & \cos(\vec{k}', \vec{j}) & \cos(\vec{k}', \vec{k}) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.3.2 Propriétés de l'opérateur de rotation

En continuant le même travail, on peut obtenir une propriété très importante de l'opérateur de rotation : la propriété d'orthonormalité. En effet la transformation inverse

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}' \quad (2.4)$$

peut s'obtenir de manière identique au raisonnement précédent et donne :

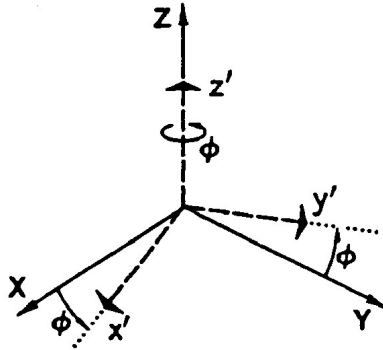
$$\begin{aligned} r_x &= (\vec{i} \cdot \vec{i}') r'_x + (\vec{i} \cdot \vec{j}') r'_y + (\vec{i} \cdot \vec{k}') r'_z \\ r_y &= (\vec{j} \cdot \vec{i}') r'_x + (\vec{j} \cdot \vec{j}') r'_y + (\vec{j} \cdot \vec{k}') r'_z \\ r_z &= (\vec{k} \cdot \vec{i}') r'_x + (\vec{k} \cdot \vec{j}') r'_y + (\vec{k} \cdot \vec{k}') r'_z \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{i}, \vec{i}') & \cos(\vec{i}, \vec{j}') & \cos(\vec{i}, \vec{k}') \\ \cos(\vec{j}, \vec{i}') & \cos(\vec{j}, \vec{j}') & \cos(\vec{j}, \vec{k}') \\ \cos(\vec{k}, \vec{i}') & \cos(\vec{k}, \vec{j}') & \cos(\vec{k}, \vec{k}') \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Le produit scalaire étant commutatif, on obtient la propriété suivante

$$\boxed{\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T} \quad (2.6)$$

FIGURE 2.4 – Rotation dans le plan Oxy

que l'on écrit souvent sous la forme :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.7)$$

On montre également [7] que le déterminant de la matrice de rotation est unitaire

$$\det(\mathbf{R}) = +1 \quad (2.8)$$

En effet l'expression du déterminant peut s'écrire en fonction de ses vecteurs colonnes \vec{c}_i . Ici en l'occurrence, il vient :

$$\det(\mathbf{R}) = (\vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2) \cdot \vec{c}_3 = (\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k} = 1$$

puisque la base est directe.

A l'aide de la définition de l'opérateur de rotation et de sa propriété d'orthonormalité, il est encore assez facile de montrer les propriétés géométriques suivantes :

- L'opérateur de rotation préserve les longueurs
- L'opérateur de rotation préserve les angles

2.3.3 Les opérateurs de rotation plane

Considérons les opérations de rotation les plus simples correspondant à des rotations autour d'un axe de coordonnées. Par exemple la Figure 2.4 représente le cas d'une rotation d'angle ϕ autour de l'axe z .

Pour un vecteur \mathbf{r} de composantes $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$, on obtient le changement

de coordonnées suivant

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \phi + y \sin \phi \\y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.9}$$

ou sous forme matricielle

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \theta) \mathbf{r}\tag{2.10}$$

avec l'opérateur de rotation

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{2.11}$$

De manière identique pour une rotation d'angle θ autour de l'axe y et une rotation d'angle ψ autour de l'axe x , on a les opérateurs de rotation suivants

$$\mathbf{R}(\mathbf{y}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}\tag{2.12}$$

and

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}\tag{2.13}$$

2.3.4 Composition des rotations

Considérons deux rotations successives :

- La rotation 1 amène le repère $Ox_0y_0z_0$ sur le repère $Ox_1y_1z_1$,
- La rotation 2 quant à elle amène le repère $Ox_1y_1z_1$ sur le repère $Ox_2y_2z_2$.

Les coordonnées dans les différents repères sont liées par les relations suivantes :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0\tag{2.14}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{x}_1\tag{2.15}$$

La rotation globale entre les repères $Oxyz$ et $Ox_2y_2z_2$ est donnée par :

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{x}_1 = \mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0) = (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1) \mathbf{x}_0$$

En effet produit matriciel est associatif. Finalement, il vient

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} \mathbf{x}_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1\tag{2.16}$$

2.3. CHANGEMENT DE REPÈRE ET OPÉRATEUR DE ROTATION 25

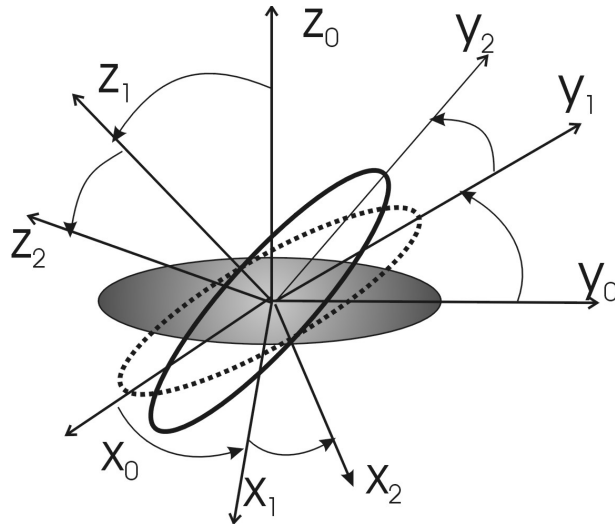


FIGURE 2.5 – Composition de rotations

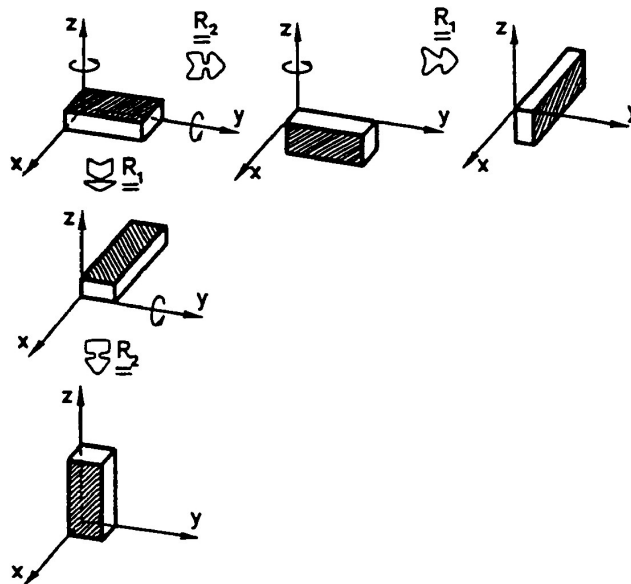


FIGURE 2.6 – Caractère non commutatif des rotations finies

2.3.5 Caractère non-commutatif des rotations

Le caractère non-commutatif des rotations découle du caractère non commutatif du produit matriciel.

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$$

Géométriquement la non commutativité des rotations exprime que changer l'ordre des rotations conduit à des positions finales différentes. Ce fait est bien illustré par l'exemple représenté à la Figure 2.6. on considère un objet subissant deux rotations successives \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 de respectivement 90° autour des axes (du système absolu) \mathbf{z} et \mathbf{y} respectivement

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}(\mathbf{z}, 90^\circ) \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}(\mathbf{y}, 90^\circ)\end{aligned}$$

2.3.6 Représentation de l'opérateur de rotation

Sachant que l'orientation du corps peut être décrite à l'aide de 3 paramètres, on recherche des techniques permettant de décrire l'opérateur \mathbf{R} à l'aide de 3 quantités indépendantes. On vient de voir son expression en termes des cosinus directeurs. On dispose également des angles d'Euler, des angles de Bryant, des paramètres d'Euler, etc. On se référera utilement à Cardona et Géraudin [7] pour plus de détails). Pour les véhicules, la description de la rotation en termes des angles nautiques ou angles de Bryant est généralement retenue.

Nombre de paramètres de l'opérateur de rotation

Il est d'abord utile de montrer que toute matrice de rotation peut s'écrire en fonction de seulement *trois paramètres indépendants*. En effet \mathbf{R} étant une matrice de dimension 3×3 , elle contient 9 termes. Décomposons la matrice en ses vecteurs colonnes \mathbf{c}_j :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3] \quad (2.17)$$

La propriété d'orthonormalité a pour conséquence d'introduire 9 contraintes entre les colonnes \mathbf{c}_j . Seules 6 d'entre elles sont indépendantes :

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

2.3. CHANGEMENT DE REPÈRE ET OPÉRATEUR DE ROTATION 27

En conséquence on peut écrire de manière formelle

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (2.18)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont trois quantités indépendantes retenues pour décrire la rotation. Le choix de la représentation en termes des cosinus directeurs ne met pas un tel choix de paramètres en évidence. Dans le domaine des véhicules il est habituel de recourir aux systèmes des angles nautiques ou angles de Bryant qui constituent un ensemble de 3 paramètres indépendants.

Angles de Bryant ou angles nautiques

Pour représenter le changement de repère permettant de passer du système d'axes galiléen au système d'axes lié au véhicule (avion ou voiture), on décompose le changement de repère en 3 changements élémentaires correspondant à des rotations autour des 3 axes distincts du système non inertiel du véhicule. Ces trois rotations élémentaires portent le nom de roulis (roll) autour de l'axe x' du véhicule, de tangage (pitch) autour de son axe y' et de lacet (yaw) autour de son axe z' . On parle en anglais des axes RPY.

On décompose donc la rotation totale \mathbf{R} en une succession de 3 rotations élémentaires

- une rotation d'angle ψ autour de Oz : $\mathbf{R}(z, \psi)$
- une rotation d'angle θ autour de Oy_1 : $\mathbf{R}(y_1, \theta)$
- une rotation d'angle ϕ autour de Ox_2 : $\mathbf{R}(x_2, \phi)$

Première transformation : rotation $\mathbf{R}(z, \psi)$

La relation entre les coordonnées du système $Ox_0y_0z_0$ et $Ox_1y_1z_1$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Bien évidemment, la matrice de transformation est orthonormale

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (2.21)$$

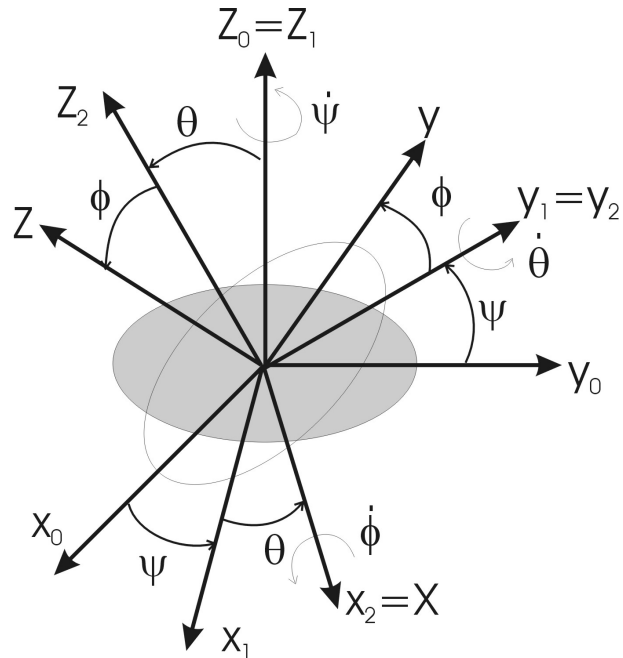


FIGURE 2.7 – Définition des angles de Bryant d'une transformation entre deux repères

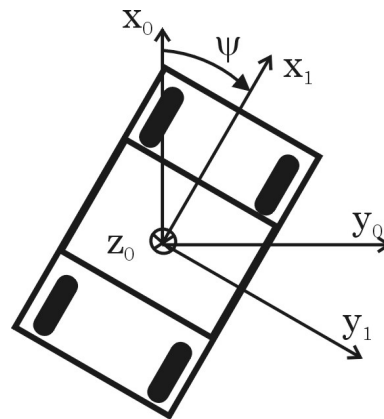


FIGURE 2.8 – Angles de Bryant : rotation de lacet ψ

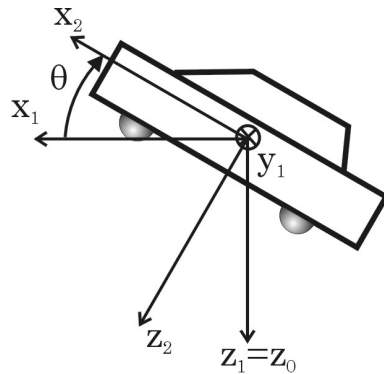


FIGURE 2.9 – Angles de Bryant : angle de tangage θ

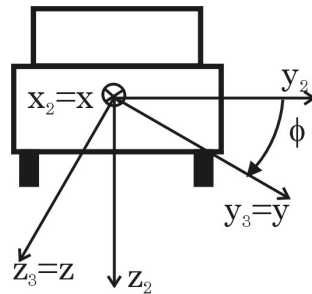


FIGURE 2.10 – Angles de Bryant : angle de roulis ϕ

Deuxième transformation

De même la transformation entre le repère $Ox_1y_1z_1$ et $Ox_2y_2z_2$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-T} \quad (2.23)$$

Troisième transformation

La rotation entre les $Ox_2y_2z_2$ et $Ox_3y_3z_3$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

et

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-T} \quad (2.25)$$

Transformation globale

La transformation entre le repère $Ox_0y_0z_0$ et $Ox_2y_2z_2$ s'écrit finalement

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{A} \quad (2.26)$$

avec

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\theta s_\phi c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\theta s_\theta s_\psi - c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

où on a utilisé la convention $c_\alpha = \cos \alpha$ et $s_\alpha = \sin \alpha$.

Rotations infinitésimales

Soient des rotations infinitésimales d'angles $(d\psi, d\theta, d\phi)$. Au premier ordre, on a :

$$\begin{aligned} \sin d\theta &\simeq d\theta & \cos d\theta &\simeq 1 \\ d\theta^2 &\ll 1 & d\theta d\psi &\ll 1 \end{aligned}$$

En conséquence, la rotation (2.27) s'écrit au premier ordre :

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & d\psi & -d\theta \\ -d\psi & 1 & d\phi \\ d\theta & -d\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Attention cette fois, on ne peut plus vérifier la relation d'orthonormalité

$$d\mathbf{R} d\mathbf{R}^T \neq \mathbf{I} \quad (2.29)$$

Par contre les rotations infinitésimales sont commutatives.

2.4 Vitesses angulaires et linéaires dans le repère dynamique

2.4.1 Vitesse de translation dans le repère dynamique

Soient \mathbf{r}_0 et $\dot{\mathbf{r}}_0$ respectivement la position et la vitesse absolue d'un point mesurées dans le repère d'inertie.

Soient \mathbf{r} et \mathbf{v} respectivement la position et la vitesse de ce même point exprimées dans le repère mobile lié au corps.

Les positions et les vitesses sont liées par la matrice \mathbf{R} de changement de repère.

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}_0 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (2.31)$$

2.4.2 Vitesse de rotation en termes des dérivées d'angles d'Euler

On recherche maintenant l'expression du vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}$. Ce vecteur est la composition (i.e. addition) de trois vecteurs correspondant aux rotations élémentaires d'angles ϕ , θ et ψ , soit :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{\mathbf{I}}_{z_0} + \dot{\theta} \vec{\mathbf{I}}_{y_1} + \dot{\phi} \vec{\mathbf{I}}_{x_2} \quad (2.32)$$

Dans le repère non inertiel lié au corps, ce vecteur vaut

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{CB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où on a utilisé la formulation matricielle par facilité. Ce qui donne explicitement :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Inversement, on peut exprimer les vitesses de roulis, tangage et lacet dans le repère local en fonction des vitesses angulaires de la transformation :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

2.4.3 Vitesse globale dans le repère dynamique

Dérivons par rapport au temps la relation donnant \mathbf{r} , la position dans le repère dynamique et \mathbf{r}_0 , la position dans le repère inertiel :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}_0$$

Il vient :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \dot{\mathbf{r}}_0$$

En utilisant cette formule, on obtient l'expression de la vitesse \mathbf{v} dans le repère matériel du véhicule :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{r}_0 \\ &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Cette expression est à rapprocher de la formule de Poisson donnant la dérivée d'un vecteur dans un repère dynamique :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (2.37)$$

où tous les vecteurs sont exprimés dans le repère mobile.

Pour démontrer l'équivalence des deux expressions, il suffit de montrer l'identité des deux derniers termes. On part de la relation d'orthogonalité de la matrice de rotation $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ que l'on dérive par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0}$$

soit

$$-\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T)^T$$

Ceci signifie que la matrice $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ est une matrice qui change de signe lorsqu'on la transpose. \mathbf{M} est donc ce qu'on appelle une matrice *antisymétrique*. Une matrice antisymétrique est toujours de la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & 0 & -m_{23} \\ -m_{13} & m_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Comme une matrice antisymétrique ne possède que 3 éléments distincts, on peut montrer qu'à toute matrice \mathbf{M} antisymétrique, on peut associer un vecteur unique $\mathbf{m} = [m_x m_y m_z]^T$ appelé sa partie vectorielle :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -m_z & m_y \\ m_z & 0 & -m_x \\ -m_y & m_x & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{m}] \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = \text{vect}(\mathbf{M})$$

On montre également que quel que soit le vecteur \vec{a} , le produit vectoriel $\vec{m} \wedge \vec{a}$ peut s'écrire sous la forme matricelle suivante :

$$\vec{m} \wedge \vec{a} = [\mathbf{m}] \mathbf{a}$$

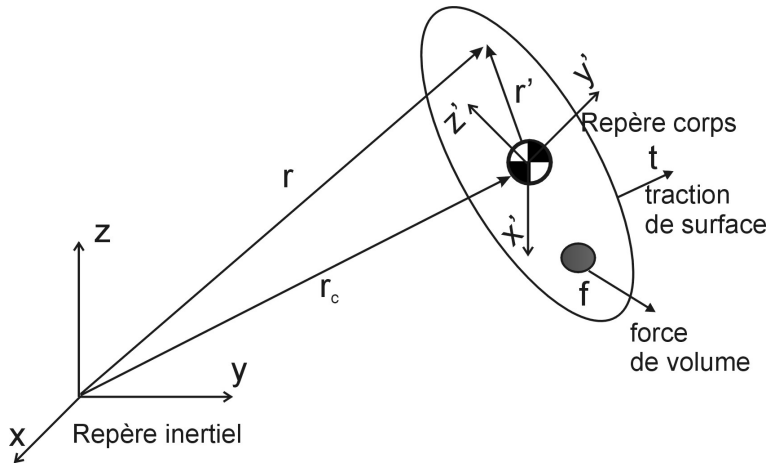


FIGURE 2.11 – Equations du mouvement

En conséquence, $-\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ étant antisymétrique, il existe un vecteur unique ω tel que :

$$[\omega] = -\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

et le second terme de l'expression (2.36) s'écrit

$$-\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \mathbf{r} = [\omega] \mathbf{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (2.39)$$

Ce qui démontre l'équivalence entre les notations.

2.5 Equations du mouvement

Soit un système matériel fermé représenté à la Figure 2.11. Soit $OXYZ$ le référentiel absolu et $o'x'y'z'$ le référentiel local lié au corps. Le corps est soumis à l'action de forces de volume \mathbf{f} et de traction de surface \mathbf{t} . La position d'un point du système est repéré par \mathbf{r} dans le référentiel d'inertie et par \mathbf{r}' dans le référentiel lié au corps. La position du centre de masse du système est noté \mathbf{r}_c .

2.5.1 Equations du mouvement d'un système fermé

Pour des systèmes matériels fermés, les équations d'équilibre issues du second principe de Newton s'écrivent :

— *Équilibre en translation*

$$\int_V \vec{f} dV + \int_S \vec{t} dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{d\vec{r}}{dt} dV \quad (2.40)$$

— *Équilibre en rotation*

$$\int_V \vec{r} \wedge \vec{f} dV + \int_S \vec{r} \wedge \vec{t} dS = \frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \wedge \rho \frac{d\vec{r}}{dt} dV \quad (2.41)$$

Centre de masse du système

La masse totale m du système est donnée par :

$$\int_V \rho dV = m \quad (2.42)$$

Soit "c" est le centre de masse du système. Sa position \vec{r}_c est donnée par :

$$\int_V \rho \vec{r} dV = m \vec{r}_c \quad (2.43)$$

Pour la facilité d'écriture des équations du mouvement, il y a avantage à décomposer les vecteurs positions et vitesses en passant par le centre de masse. Soient

- \vec{r}_c la position du centre de masse,
- \vec{r}^j la position d'un point par rapport au centre de masse.

Il vient

$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}^j \quad (2.44)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_c + \frac{d\vec{r}^j}{dt} \quad (2.45)$$

Le point "c" étant le centre de masse, on a la propriété :

$$\int_V \rho \vec{r}^j dV = 0 \quad (2.46)$$

Par la suite, nous aurons besoin également de la propriété suivante qui se déduit aisément de la propriété (2.46) par dérivation sous le signe intégral.

$$\int_V \rho \frac{d\vec{r}^j}{dt} dV = 0 \quad (2.47)$$

Équilibre en translation

Définissons encore :

— la *quantité de mouvement* du système

$$\boxed{\vec{p} = \int_V \rho \frac{d\vec{r}}{dt} dV = m\vec{v}_c} \quad (2.48)$$

— la *résultante des forces extérieures*

$$\boxed{\vec{F} = \int_V \vec{f} dV + \int_S \vec{t} dS} \quad (2.49)$$

L'équilibre en translation s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c)} \quad (2.50)$$

En conclusion, *le mouvement de translation du corps est parfaitement décrit par le mouvement de son centre de masse où toute la masse y est concentrée.*

Équilibre en rotation

Définissons *le moment des forces extérieures autour du centre de masse* :

$$\boxed{\vec{T}_c = \int_V \vec{r}' \wedge \vec{f} dV + \int_S \vec{r}' \wedge \vec{t} dS} \quad (2.51)$$

Considérons l'équilibre en rotation (2.41) autour de O, centre du repère inertiel. Le membre de gauche devient :

$$\int_V (\vec{r}_c + \vec{r}') \wedge \vec{f} dV + \int_S (\vec{r}_c + \vec{r}') \wedge \vec{t} dS = \vec{r}_c \wedge \vec{F} + \vec{T}_c \quad (2.52)$$

On peut également montrer que le membre de droite de (2.41) prend la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_V (\vec{r}_c + \vec{r}') \wedge \rho \left(\frac{d\vec{r}_c}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) dV = \vec{r}_c \wedge \frac{d}{dt} (m \frac{d\vec{r}_c}{dt}) + \frac{d}{dt} \int_V \vec{r}' \wedge \rho \frac{d\vec{r}'}{dt} dV \quad (2.53)$$

En effet, le membre de droite peut être divisé en quatre termes que l'on peut évaluer comme suit :

1.
$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r}_c \wedge \rho \frac{d\vec{r}_c}{dt} dV = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_c \wedge \frac{d\vec{r}_c}{dt}) = \vec{r}_c \wedge \frac{d}{dt} (m \frac{d\vec{r}_c}{dt})$$
2.
$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r}^j \wedge \rho \frac{d\vec{r}_c}{dt} dV = \frac{d}{dt} ((\int_V \rho \vec{r}^j dV) \wedge \frac{d\vec{r}_c}{dt}) = 0$$
3.
$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r}_c \wedge \rho \frac{d\vec{r}^j}{dt} dV = \frac{d}{dt} (\vec{r}_c \wedge \int_V \rho \frac{d\vec{r}^j}{dt} dV) = 0$$
4.
$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r}^j \wedge \rho \frac{d\vec{r}^j}{dt} dV$$

Étant donné que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_c)$$

le premier terme du membre de droite peut encore s'écrire

$$\vec{r}_c \wedge \vec{F} = \vec{r}_c \wedge \frac{d}{dt} (m \vec{v}_c)$$

L'équation d'équilibre en rotation s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{T}_c = \frac{d\vec{h}_c}{dt}} \quad (2.54)$$

avec le vecteur \vec{h}_c *quantité de mouvement angulaire autour du centre de masse* :

$$\boxed{\vec{h}_c = \int_V \vec{r}^j \wedge \rho \frac{d\vec{r}^j}{dt} dV} \quad (2.55)$$

Remarques

1. Jusqu'à présent, l'hypothèse d'indéformabilité pas encore utilisée.
2. En toute généralité, dans la la démarche entreprise jusqu'ici, tout reste valable dans le cas où le système serait de masse variable. Cependant dans le cas des véhicules, il est légitime de supposer que l'on travaille à masse constante :

$$\frac{dm}{dt} \simeq 0 \quad (2.56)$$

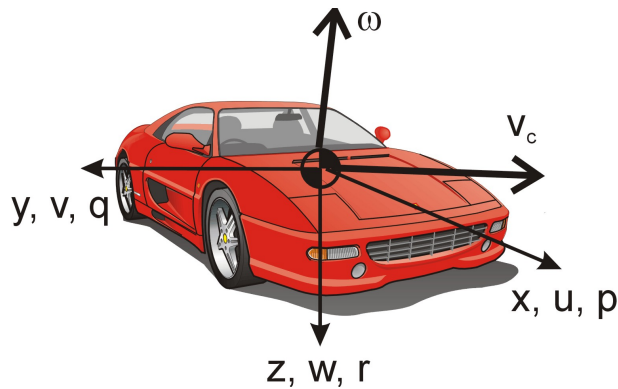


FIGURE 2.12 – Dynamique du véhicule rigide

En effet pour une voiture la perte de masse dû à la combustion est négligeable. Pour une auto de 1000 kg qui consomme 10 l au 100 km et qui roule 120 km/h, on a :

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt}/m &= 10(l/100km) * 0.8kg/l * 120km/h/1000kg \\ &= 2.610^{-6}/s\end{aligned}$$

Par comparaison pour situer l'ordre de grandeur, on a également pour un avion de chasse

$$\frac{dm}{dt}/m \simeq 3.10^{-5}/s$$

et pour la fusée Saturn V

$$\frac{dm}{dt}/m \simeq 4.610^{-3}/s$$

2.5.2 Application au véhicule rigide

Pour décrire le mouvement d'un véhicule, il est de coutume de décrire les équations de la dynamique dans le repère mobile lié au corps.

Soient

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_c &= \frac{\delta \mathbf{v}_c}{\delta t} \\ \dot{\mathbf{h}}_c &= \frac{\delta \mathbf{h}_c}{\delta t}\end{aligned}$$

les dérivées $\delta/\delta t$ de la vitesse du centre masse et de la quantité de mouvement angulaire sont mesurées dans le repère non inertiel du corps $o'x'y'z'$.

Les dérivées de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement valent respectivement :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{v}}_c + [\omega] \mathbf{v}_c = \dot{\vec{v}}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_c \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{h} = \dot{\mathbf{h}}_c + [\omega] \mathbf{h}_c = \dot{\vec{h}}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{h}_c \quad (2.58)$$

On utilise à présent l'hypothèse d'indéformabilité. La distance entre tout point du corps et le centre de gravité est constante dans le repère local du corps.

$$\dot{\mathbf{r}}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}' = [\omega] \mathbf{r}' \quad (2.59)$$

Par substitution dans les équations du mouvement, il vient

$$\mathbf{F} = m(\dot{\mathbf{v}}_c + [\omega] \mathbf{v}_c) \quad (2.60)$$

$$\mathbf{T}_c = \dot{\mathbf{h}}_c + [\omega] \mathbf{h}_c \quad (2.61)$$

Explicitement, en écrivant les relations composante par composante, on a en translation :

$$\begin{cases} F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \end{cases} \quad (2.62)$$

et en rotation :

$$\begin{cases} L = \dot{h}_x + qh_z - rh_y \\ M = \dot{h}_y + rh_x - ph_z \\ N = \dot{h}_z + ph_y - qh_x \end{cases} \quad (2.63)$$

où selon la convention habituelle en aéronautique, on a les composantes L, M, N du vecteur des moments autour du centre de masse :

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Tenseur d'inertie

Si le centre de masse est pris comme origine, examinons l'expression du moment cinétique.

$$\begin{aligned} \vec{h}_c &= \int_V \rho \vec{r}' \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') dV \\ &= \int_V \rho [\vec{\omega} r'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \vec{r}'] dV \end{aligned} \quad (2.65)$$

Soit sous forme matricielle, la relation peut encore s'écrire :

$$\mathbf{h}_c = \left(\int_V [r'^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}' \mathbf{r}'^T] \rho dV \right) \omega \quad (2.66)$$

En posant :

$$\begin{aligned} J'_{xx} &= \int_V \rho (y'^2 + z'^2) dV \\ J'_{yy} &= \int_V \rho (x'^2 + z'^2) dV \\ J'_{zz} &= \int_V \rho (x'^2 + y'^2) dV \end{aligned} \quad (2.67)$$

et

$$\begin{aligned} J'_{xy} &= \int_V \rho x' y' dV \\ J'_{yz} &= \int_V \rho y' z' dV \\ J'_{xz} &= \int_V \rho x' z' dV \end{aligned} \quad (2.68)$$

Il vient :

$$\boxed{\mathbf{h}_c = \mathbf{J}'_c \omega} \quad (2.69)$$

avec \mathbf{J}' le tenseur d'inertie du solide

$$\mathbf{J}'_c = \begin{bmatrix} J'_{xx} & -J'_{xy} & -J'_{xz} \\ -J'_{xy} & J'_{yy} & -J'_{yz} \\ -J'_{xz} & -J'_{yz} & J'_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Le véhicule est généralement symétrique autour du plan $y' = 0$ (plan xz), de sorte que l'on a $J'_{xy} = 0$ et $J'_{yz} = 0$.

$$\mathbf{J}'_c = \begin{bmatrix} J'_{xx} & 0 & -J'_{xz} \\ 0 & J'_{yy} & 0 \\ -J'_{xz} & 0 & J'_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Par ailleurs J'_{xz} est généralement assez faible par rapport aux moments d'inertie principaux J'_{xx} , J'_{yy} , J'_{zz} . Il est donc souvent possible de négliger aussi.

$$\mathbf{J}'_c \simeq \begin{bmatrix} J'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Cependant ici par souci de généralité on évite souvent cette approximation.

2.6 Expression des forces

Il est habituel de scinder les forces extérieures en deux parties :

- les forces de gravité $(F_{xg}, F_{yg}, F_{zg})^T$;
- la résultante des autres forces $(X, Y, Z)^T$, à savoir les forces de propulsion, les forces aérodynamiques et les forces de résistance au roulement.

Cherchons à écrire les forces de gravité *dans le repère local du véhicule*. Dans le repère d'inertie, elles sont données par :

$$\mathbf{F}_{0g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

avec g l'accélération de la gravité $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Les forces de gravité dans le repère dynamique s'obtiennent en appliquant le changement de repère donné en (2.27) :

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{F}_{0g} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

2.7 Equations du mouvement dans le repère du véhicule

En utilisant les résultats (2.62),(2.63),(2.69), (2.71) et (2.74), il est possible d'écrire les équations du mouvement du véhicule dans ses axes propres.

Les équations de Newton pour la translation :

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta & = m(\dot{u} + q w - r v) \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi & = m(\dot{v} + r u - p w) \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi & = m(\dot{w} + p v - q u) \end{cases} \quad (2.75)$$

Les équations d'Euler pour la rotation sont données par :

$$\begin{cases} L & = J'_{xx} \dot{p} - J'_{xz} \dot{r} + (J'_{zz} - J'_{yy}) q r - J'_{xz} p q \\ M & = J'_{yy} \dot{q} + (J'_{xx} - J'_{zz}) r p - J'_{xz} (p^2 - r^2) \\ N & = J'_{zz} \dot{r} - J'_{xz} \dot{p} + (J'_{yy} - J'_{xx}) p q + J'_{xz} q r \end{cases} \quad (2.76)$$

Ces 6 équations différentielles sont caractérisées par un vecteur d'état à 8 inconnues :

$$\mathbf{x} = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \theta \ \phi]^T \quad (2.77)$$

Pour déterminer les 8 inconnues, il est nécessaire d'adjoindre aux 6 équations de la dynamique, 2 relations cinématiques additionnelles :

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= p + q \tan \theta \sin \phi + r \tan \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \end{cases} \quad (2.78)$$

2.8 Applications à la dynamique du véhicule

Étudions à présent différents mouvements particuliers rencontrés en dynamique et en performance des véhicules.

2.8.1 Mouvements stationnaires

Le mouvement est en régime établi (mouvement stationnaire) lorsque :

$$\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = \dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0 \quad (2.79)$$

Les équations de la dynamique se simplifient alors :

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta &= m(q w - r v) \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi &= m(r u - p w) \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi &= m(p v - q u) \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\begin{cases} L &= (J'_{zz} - J'_{yy}) q r - J'_{xz} p q \\ M &= (J'_{xx} - J'_{zz}) r p - J'_{xz} (p^2 - r^2) \\ N &= (J'_{yy} - J'_{xx}) p q + J'_{xz} q r \end{cases} \quad (2.81)$$

Mouvement rectiligne

Le cas du mouvement rectiligne est particulièrement important pour l'étude des performances. Le mouvement rectiligne est caractérisé par l'absence de vitesse latérale et verticale dans le repère dynamique ainsi que la nullité des vitesses de roulis, tangage, lacet.

$$\begin{aligned} u &= V \\ v &= w = 0 \\ p &= q = r = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Les équations du mouvement rectiligne deviennent :

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta &= 0 \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi &= 0 \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Si en outre, on suppose que le mouvement s'effectue sans roulis $\phi = 0$, les équations du mouvement se simplifient fortement. L'angle d'assiette θ par rapport à l'horizontale est éventuellement non nul $\theta \neq 0$ pour tenir compte de la pente de la route. Seules trois équations ne sont pas triviales :

$$\begin{cases} X = \sum F_x = mg \sin \theta \\ Z = \sum F_z = -mg \cos \theta \\ M = \sum M_y = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Mouvement circulaire

Le mouvement circulaire de rayon R à une vitesse tangentielle V est caractérisé par un vecteur de rotation :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{1}_{z_0} = \frac{V}{R} \vec{1}_{z_0} \quad (2.84)$$

dans les axes d'inertie. De l'équation (2.34), on déduit l'expression du vecteur vitesse de rotation dans le repère local :

$$\begin{cases} p = -\dot{\psi} \sin \theta \\ q = \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ r = \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \end{cases} \quad (2.85)$$

Les équations du mouvement sont données par (2.80) et (2.81) dans lesquelles on introduit les valeurs de p , q et r .

Il est courant de supposer que le mouvement n'implique pas de pompage $w = 0$. Par contre le véhicule peut déraiper (phénomène dit de *dérive* sur sa trajectoire de sorte qu'on observe un *angle de dérive* β entre l'axe x du véhicule et le vecteur vitesse au centre de masse. Soit V le module du vecteur vitesse, on a :

$$\begin{aligned} u &= V \cos \beta & \text{et} & & v &= V \sin \beta \\ V &= \sqrt{u^2 + v^2} & & & v/u &= \tan \beta \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Si on suppose que le mouvement s'effectue à angle de roulis et d'assiette nuls soit $\phi = \theta = 0$, il vient encore :

$$\begin{aligned} p &= q = 0 \\ r &= \dot{\psi} = V/R \end{aligned} \quad (2.86)$$

Le mouvement circulaire est alors décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} X & = -m r v = -m V^2/R \sin \beta \\ Y & = m r u = m V^2/R \cos \beta \\ Z + mg & = 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

$$\begin{cases} L & = 0 \\ M & = J'_{xz} r^2 = J'_{xz} (V/R)^2 \\ N & = 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

Seules les trois équations d'équilibre en translation selon les directions y et z du véhicule ne sont pas triviales. Les autres équations sont des "réactions" pour permettre au mouvement circulaire de persister.

En particulier si l'angle de dérive est nul $\beta = 0$, on retrouve les équations bien connues du mouvement circulaire :

$$\begin{cases} Y = \sum F_y & = m V^2/R \\ Z = \sum F_z & = -mg \\ L = \sum M_x & = 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

2.8.2 La dynamique longitudinale

Le problème de la dynamique longitudinale est très similaire à l'étude du mouvement stationnaire en ligne droite, sauf que l'on doit ici relaxer la contrainte $\dot{u} = 0$ évidemment.

Un raisonnement identique à celui qui a été suivi précédemment permet d'écrire :

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta & = m \dot{u} \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi & = 0 \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi & = 0 \\ L & = 0 \\ M & = 0 \\ N & = 0 \end{cases}$$

Si en outre, on suppose que le mouvement s'effectue sans roulis i.e. $\phi = 0$ tandis que l'angle d'assiette θ par rapport à l'horizontale, éventuellement non nul, représente la pente de la route. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} X = \sum F_x - mg \sin \theta & = m \dot{u} \\ Z = \sum F_z & = -mg \cos \theta \\ M = \sum M_y & = 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

2.8.3 La dynamique latérale

Le problème de la dynamique latérale est étudié soit pour analyser la stabilité du véhicule face à des perturbations, soit pour caractériser la réponse de la voiture face à des commandes de braquage.

Les hypothèses suivantes sont généralement formulées pour cette étude :

- le véhicule n'a pas de pompage ($w = 0$) et pas de tangage ($q = 0$) ;
- le véhicule n'a pas de roulis ($p = 0$) ;
- le mouvement est plan.

Le vecteur vitesse se réduit à

$$\vec{V} = [u \ v \ 0]^T$$

tandis que le vecteur vitesse angulaire est

$$\vec{\omega} = [0 \ 0 \ r]^T$$

Les équations du mouvement se réduisent à :

$$Y = \sum F_y = m(\dot{v} + ru) \quad (2.91)$$

$$N = \sum M_z = J_{zz}\dot{r} \quad (2.92)$$

Les autres équations du mouvement donnent les "réactions" contre les degrés de liberté bloqués.

$$F_x = -m r v \quad (2.93)$$

$$F_z = 0 \quad (2.94)$$

$$L = -J'_{xz}\dot{r} \quad (2.95)$$

$$M = J'_{xz}r^2 \quad (2.96)$$

Par exemple, F_x est donc la force nécessaire pour maintenir une vitesse constante dans la direction longitudinale malgré la composante de résistance additionnelle due à la dérive du véhicule. On voit en effet que

$$\begin{aligned} F_x &= -m \frac{V^2}{R} \sin \beta \\ &= -m \frac{V}{R} V \sin \beta = -m r v \end{aligned}$$

Chapitre 3

MÉCANIQUE DES PNEUMATIQUES

3.1 Introduction

Il convient de souligner l'importance des pneumatiques dans l'étude de la dynamique du véhicule. En effet, excepté les forces aérodynamiques dont l'effet s'exerce sur la surface de la carrosserie, toutes les forces de contrôle du véhicule passent par les contacts roue - sol. Les roues sont également le premier filtre à travers laquelle les perturbations dues aux irrégularités de la route sont transmises avant d'atteindre la masse suspendue et les passagers. Le plus étonnant est que les contacts roue-sol ne sont pas plus larges que la paume de la main. La connaissance des phénomènes en jeu dans le contact roue-sol est donc fondamentale pour comprendre la dynamique du véhicule, étudier sa tenue de route et établir des mécanismes de contrôle.

Le pneumatique assure essentiellement 3 fonctions :

1. Supporter la charge verticale tout en assurant un premier amortissement des sollicitations venant de la route.
2. Développer des forces longitudinales permettant d'accélérer et de freiner le véhicule.
3. Développer des forces latérales permettant de prendre des virages et contrer des perturbations extérieures.

En outre le pneumatique doit satisfaire à des exigences opérationnelles

1. Offrir la moins grande résistance possible au roulement.
2. Être opérationnel durant un grand nombre de kilomètres et avec une grande fiabilité.

L'étude de la mécanique des pneumatiques est rendue difficile à cause de la complexité intrinsèque du pneumatique :

- Le matériau principal du pneu est le caoutchouc dont le comportement est fortement non linéaire et visco-élastique ;
- Le pneumatique est une structure composite par excellence faite d'empilement de plis et de couches ;
- L'agencement du pneumatique au niveau de sa micro structure est complexe et largement optimisée.

En outre le comportement du pneu dépend fortement :

- des conditions opérationnelles : température, humidité, pression de gonflage, vitesse, etc.
- des caractéristiques constructives.

Toutes ces raisons font du pneumatique un système complexe difficile à modéliser. Ses propriétés sont difficiles à prédire et à quantifier de manière simple. Plusieurs approches sont alors possibles pour en étudier le comportement :

- Une *modélisation* du comportement du pneu afin d'en déduire ses propriétés. Cette approche en apparence la plus séduisante pour l'ingénieur est en réalité dans ce cas extrêmement difficile à cause de la complexité du pneumatique. Des modèles simples, analytiques ou numériques ne sont malheureusement capables que de prédire *qualitativement* le comportement du pneumatique. Aujourd'hui les manufacturiers de pneumatiques développent des modèles numériques très complexes qui sont capables de rendre compte quantitativement du comportement du pneu. Ce sujet reste encore aujourd'hui largement du domaine de la recherche et de développements avancés.
- Une approche phénoménologique basée sur une *analyse des données expérimentales*. Le comportement du pneu est basé sur l'interprétation de résultats expérimentaux. Une compréhension des phénomènes physiques peut être avancée pour expliquer les tendances observées. Les lois de comportement du pneumatique peuvent être ainsi déduites et utilisées pour étudier le comportement dynamique du véhicule. Certaines expressions souvent heuristiques des lois de comportement telles que la formule magique de Pacejka peuvent être proposées.

Dans cet exposé, la seconde approche sera principalement adoptée, même si quelques modèles simples seront introduits à quelques endroits afin de justifier l'analyse des résultats expérimentaux et de comprendre les mécanismes physiques qui sous tendent les explications des résultats observés.

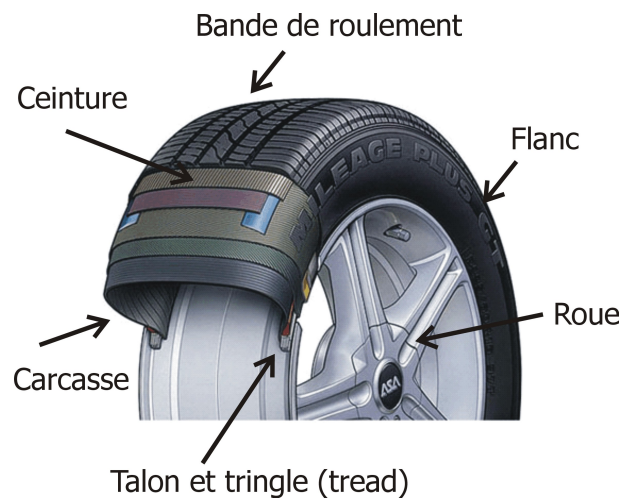


FIGURE 3.1 – Structure d'un pneumatique

3.2 Construction du pneumatique

3.2.1 Structure mécanique

Le pneumatique est un tore élastique composé de (voir Fig. 3.1) :

- Une carcasse flexible principalement composée de caoutchouc,
- Des renforts constitués de couches (plis) avec fibres à haut module présentant également une forte résistance en traction,
- Des talons et des tringles en câble d'acier accrochés à la jante de la roue,
- Une bande de roulement qui est une couche d'usure en contact avec la route dont le dessin comporte des rainures ou des lamelles permettant l'écoulement de l'eau et le refroidissement.

La pression interne due au gonflage met la structure en pré-contrainte de sorte que toute déformation de la structure permet de toujours travailler en état de tension et de produire des forces de réaction.

Les pneus sont des structures composites constituées d'un assemblage de plis parallèles de tissus de caoutchouc renforcés par des fils de nylon, de rayonne, de polyester ou de fibres de verre. On distingue deux grands types de construction de base (voir Figure 3.2) :

- Le pneu diagonal (bias-ply tire),
- Le pneu radial (radial tire).

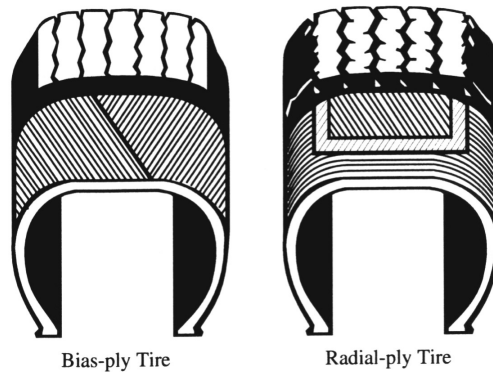


FIGURE 3.2 – Pneus radiaux et diagonaux

Pneu radial

Le pneu radial est caractérisé par une carcasse formée de plis parallèles courant d'un talon à l'autre avec un angle nominal proche de 90° par rapport à la direction circonférentielle. A cause des plis à 90° , le flanc est extrêmement souple et donne lieu à une souplesse de suspension, mais il ne peut procurer que peu ou pas de contrôle directionnel. Pour ce faire, on est dès lors obligé d'introduire une ceinture rigide de tissus ou de fils d'acier courant autour de la circonférence du pneu entre la carcasse et la bande de roulement. L'angle usuel des fils dans les ceintures est d'environ de 20° par rapport à la direction circonférentielle. Ces ceintures assurent le contrôle directionnel. La ceinture stabilise le bande de roulement en la gardant aussi plane que possible par rapport à la route malgré la deflection latérale du pneu. Dans la plupart des pneus de véhicules de tourisme, les flancs comportent 2 plis sur les flancs tandis que la ceinture est faite de 1 ou 2 plis avec des fils d'acier ou bien de 2 à 6 plis en tissu renforcés de fibre de rayonne ou fibre de verre.

Pneu diagonal

Dans le pneu diagonal, la carcasse est constituée par un nombre pair (2 ou plus) de plis alternés, drapés d'un talon (bead) à l'autre avec des fibres faisant un angle de 35° à 40° par rapport à la direction circonférentielle. Des angles de plis élevés donnent de la souplesse et un confort de conduite, tandis que des angles plus faibles sont meilleurs pour le contrôle directionnel. Le choix usuel tournant autour des 40° répond donc à un compromis entre les deux objectifs. Même si les carcasses diagonales sont plus raides que les carcasses radiales, on voit apparaître au cours d'un virage une déversement de la bande de roulement. Cette torsion laisse généralement apparaître un transfert de

charge sur le flanc situé sur le côté extérieur au virage. La carcasse diagonale cause plus de distorsion de l'aire de contact que le pneu radial et conduit donc à une moins bonne tenue de route. En effet la capacité du pneumatique à développer des forces de contact importantes est fortement liée à l'uniformité des contraintes de pression dans l'aire de contact.

3.2.2 Composition du pneu

Un pneu est constitué de caoutchouc naturel ou synthétique mélangé à d'autres composants comme de l'huile ou du noir de carbone et des matériaux de renfort comportant des fibres (fibre de verre, rayonne, ou acier). A titre indicatif, à la Ref. [3], on mentionne l'exemple suivant : un pneu de camion moderne de 12 kg est typiquement constitué d'environ 4 kg caoutchouc, 2 kg noir de carbone, 2 kg d'huile, 3 kg d'acier et 1 kg de rayonne ou d'autres fibres.

La densité des caoutchoucs disponibles dans le commerce va de $1100\text{kg}/\text{m}^3$ à $1200\text{kg}/\text{m}^3$. Étant donné la présence des autres constituants, la densité du pneumatique est de l'ordre de $1200\text{kg}/\text{m}^3$.

Le pneu est formé d'un mélange de caoutchoucs dont les proportions sont optimisées en fonction de leur coût et des propriétés d'usage définies pour des applications spécifiques. Les nuances de caoutchouc varient selon la bande de roulement, flanc, etc. Un paramètre important est la dureté : il est largement gouverné par la quantité de noir de carbone et le degré de vulcanisation. La dureté est généralement mesurée avec un appareil appelé Shore A Durometer qui donne une mesure de dureté sur une échelle de 0 à 100. La dureté typique de la bande de roulement est de 60.

La capacité thermique c_p du caoutchouc naturel est de l'ordre $1900\text{J}/\text{kgK}$ et celle des caoutchoucs synthétiques d'environ $1700\text{J}/\text{kgK}$. Compte tenu de la présence de carbone graphite dont le c_p vaut $710\text{J}/\text{kgK}$, le pneumatique qui contient du noir de carbone et de l'huile possède une capacité thermique plus faible :

$$c_p = 1200\text{ J/kg K}$$

La conductivité thermique du caoutchouc est faible ce qui est un problème, d'où la nécessité d'introduire du noir de carbone afin de l'augmenter, et cela d'autant plus que l'on travaille à basse température. A 20° , la valeur de la conductivité vaut

$$k_{20^\circ} \approx 0.23\text{W}/\text{m K}$$

Typical Passenger Tire

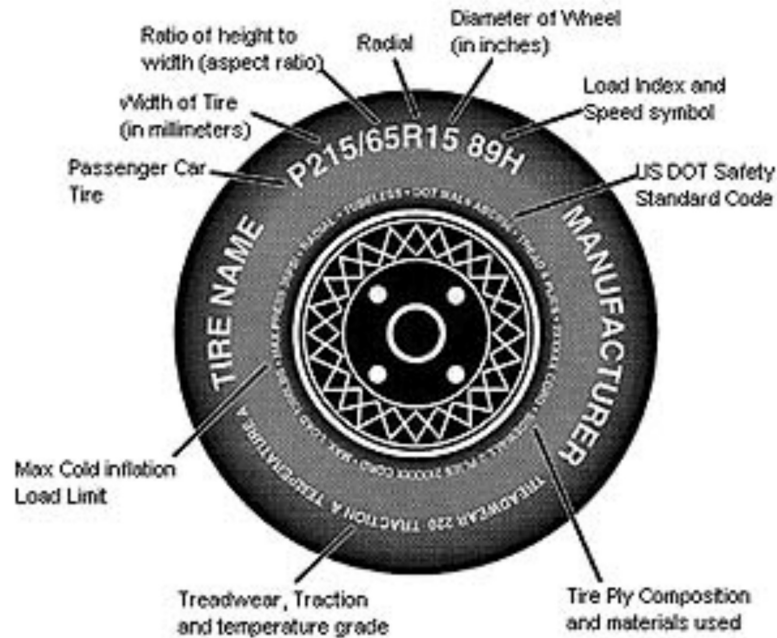


FIGURE 3.3 – Indications typiques sur un pneumatique

Pour des variations de température entre 0°C et 150°C, la variation de conductivité peut être approchée par la relation :

$$k = k_{20^\circ} \left(\frac{293}{T} \right)^n$$

où la température T est exprimée en Kelvin et n l'exposant est proche de 1. La conductivité thermique du pneu est dès lors quasi inversement proportionnelle à la température.

3.3 Codes de dimensions et de charge

3.3.1 Les pneumatiques

Les dimensions de pneumatiques sont normalisées. Comme représenté à la Figure 3.3, le pneu est décrit par un code dont l'expression générique est :

$$LLL / HH R rr xx VV$$

Ce code peut être déchiffré de la manière suivante :

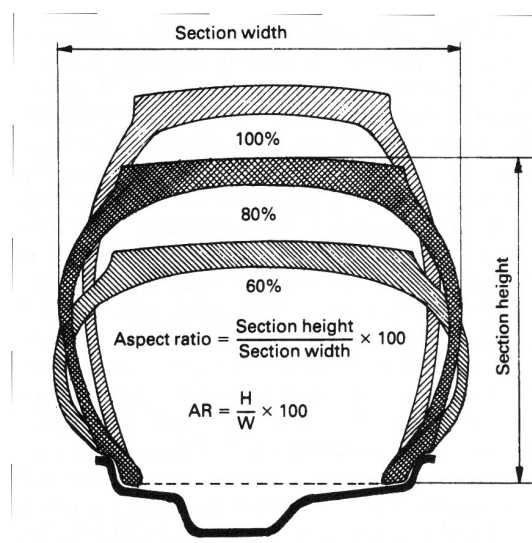


FIGURE 3.4 – Géométrie des pneumatiques [8]

LLL La largeur des boudins (en mm souvent) ;

HH La hauteur du flanc du boudin : donnée par le rapport (en pourcentage) de la hauteur / largeur (aspect ratio) ;

R Le pneu est à carcasse radiale ;

rr Le diamètre sous le talon (=jante) est généralement exprimé en pouces ;

xx Le chiffre d'indice de charge indique la capacité de charge maximale du pneu à la vitesse maximale.

VV Le symbole de vitesse est une lettre indiquant la vitesse maximale du pneu.

De manière plus complète, les inscriptions sur le flanc du pneumatique comportent également

- Le nom commercial du pneu ;
- Sa pression de gonflage maximale ;
- Son application préférentielle (par exemple pneu neige ou hiver) ;
- Les prescriptions légales auxquelles il satisfait, par exemple la prescription DOT du ministère des transports américain ;
- La date de production ;
- Son numéro d'homologation conformément à la règle ECE-R30 de la Communauté Économique Européenne (ECE).

| Symbole de vitesse | Vitesse maximale | |
|--|------------------|----------------|
| | km/h | mph |
| N | 140 | 87 |
| P | 150 | 93 |
| Q | 160 | 99 |
| R | 170 | 106 |
| S | 180 | 112 |
| T | 190 | 118 |
| H | 210 | 130 |
| V | 240 | 149 |
| W | 270 | 168 |
| Y | 300 | 186 |
| Catégorie de vitesse Code de construction | Vitesse maximale | |
| | km/h | mph |
| ZR | 240 | 149 et plus |

TABLE 3.1 – Indices de vitesse

Symbole de vitesse et charge

Les indices de charges et de vitesse peuvent être retrouvés par exemple à la référence [21] ou sur nombre de sites Internet de manufacturiers de pneumatiques (par exemple le site de Vredestein¹).

Le symbole de vitesse est une lettre indiquant la vitesse maximale d'utilisation du pneumatique. Le Tableau 3.1 indique à quelle vitesse correspond chaque lettre.

Le chiffre d'indice de charge (Li, Load Index) indique la capacité de charge maximale du pneu à la vitesse maximale. Les indices de charge les plus courants sont donnés au tableau 3.2.

Exemple

Voici un exemple extrait du site Internet du manufacturiers Vredestein.

- Quatrac 2 : nom commercial du pneu ;
- PMax. load 615 kg (1356 lbs) at 300 kPa (44psi) max. press : la capacité de charge maximale et la pression (ne s'applique pas en Europe) ;
- M&S : Pneu boue et neige

1. <http://www.vredestein.nl/>

| Li | kg | Li | kg | Li | kg | Li | kg |
|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| 65 | 290 | 79 | 437 | 93 | 650 | 107 | 975 |
| 66 | 300 | 80 | 450 | 94 | 670 | 108 | 1000 |
| 67 | 307 | 81 | 462 | 95 | 690 | 109 | 1030 |
| 68 | 315 | 82 | 475 | 96 | 710 | 110 | 1060 |
| 69 | 325 | 83 | 487 | 97 | 730 | 111 | 1090 |
| 70 | 335 | 84 | 500 | 98 | 750 | 112 | 1120 |
| 71 | 345 | 85 | 515 | 99 | 775 | 113 | 1150 |
| 72 | 355 | 86 | 530 | 100 | 800 | 114 | 1180 |
| 73 | 365 | 87 | 545 | 101 | 825 | 115 | 1215 |
| 74 | 375 | 88 | 560 | 102 | 850 | 116 | 1250 |
| 75 | 387 | 89 | 580 | 103 | 875 | 117 | 1285 |
| 76 | 400 | 90 | 600 | 104 | 900 | 118 | 1320 |
| 77 | 412 | 91 | 615 | 105 | 925 | 119 | 1360 |
| 78 | 425 | 92 | 630 | 106 | 950 | | |

TABLE 3.2 – Indices de charge

- DOT DVDE MTA 129 : Le pneu satisfait aux prescriptions du Ministère des Transports Américain (DOT);
- 129 12 9 : Date de production : Semaine : 12 Année : 1999;
- 175/70 R13 : Dimensions du pneu
 - 175 Largeur de la section en mm, ici 175 mm,
 - 70 Proportion en %, ici 70 % de la largeur soit 175 mmm, soit 122,5 mm,
 - R Construction radiale
 - 13 Code diamètre jante 13 pouces ou encore $13 \cdot 25,4mm = 330,2mm$
 - 82 Indice de charge, 475 kg,
 - T Symbole de vitesse, en l'occurrence 190 km/h
- E4 027550 : Numéro d'homologation conformément à ECE-R30 de la CEE.

3.3.2 Les roues

Les dimensions et la géométrie des roues sont également normalisées. Situé à l'intérieur de la roue, le marquage de la roue est une série de chiffres et de lettres qui fournissent des informations codées sur la roue comme son diamètre, sa largeur ou son déport. Elles sont caractérisées par :

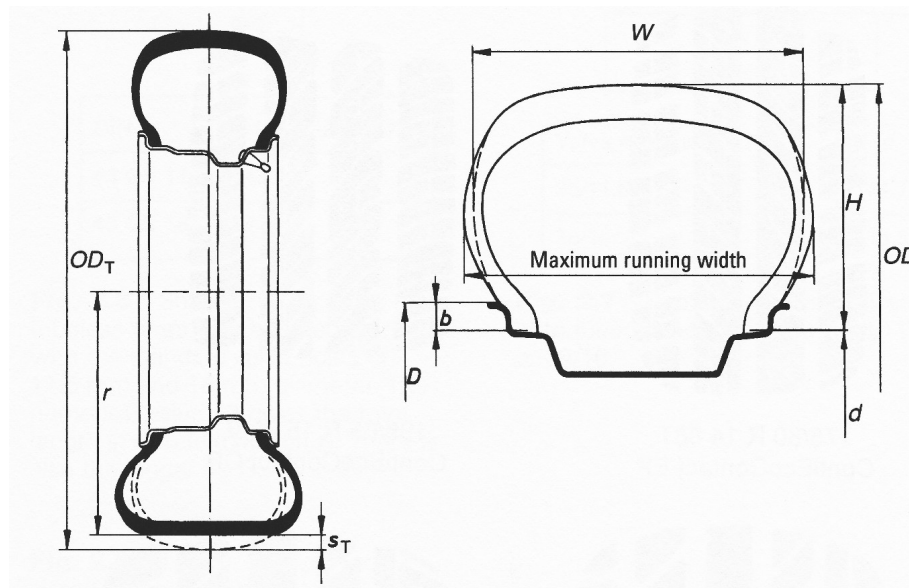


FIGURE 3.5 – Dimensions des roues d'après [21]

- Le diamètre de la jante (en pouces) ;
- Leur largeur ;
- Les détails de la ferrure (normalisés).

Pour mieux illustrer la signification des marquages, prenons l'exemple suivant : 7.5Jx16H2 ET35. Dans ce cas-ci :

- 7,5 est la taille de la roue, ce qui signifie qu'elle mesure 7,5 pouces de large (1 pouce = 25,4 mm) ;
- 16 est le diamètre de la roue, également exprimé en pouces ;
- ET35 est le décalage - la distance entre la surface de montage du moyeu et l'axe de symétrie de la roue exprimée en millimètres.
- Ferrures de type J. Il s'agit d'une ferrure typique pour les véhicules de tourisme.

H2 est un symbole de profil de section de jante de roue. Il se trouve généralement à la fin des symboles alphanumériques estampillés sur la roue. Afin d'obtenir la rigidité requise, les fabricants renforcent la structure de la roue avec des bossages (voir Fig. 3.7). Les détails des ferrures peuvent être trouvés à la référence [21].

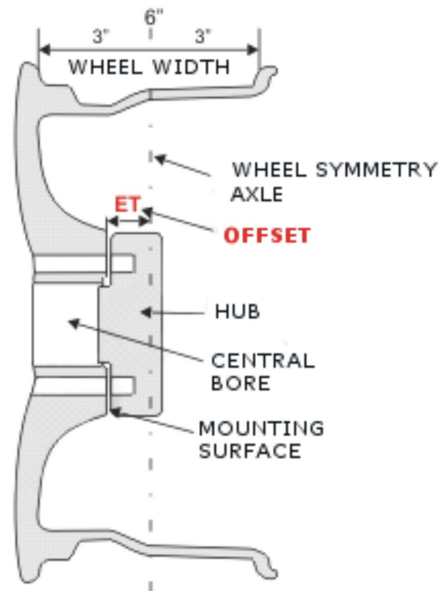


FIGURE 3.6 – Le marquage de la roue fournit des informations codées sur la roue comme son diamètre, sa largeur ou son déport

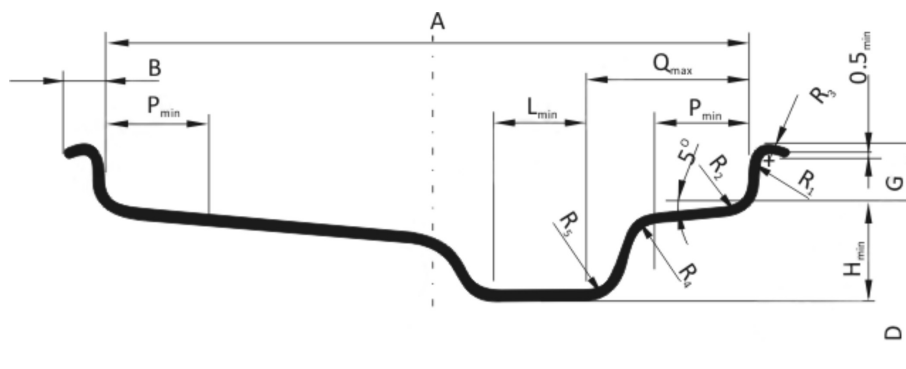


FIGURE 3.7 – Le contour de la roue de la voiture avec le profil en H, le collier en J et l'inclinaison murale de 5°

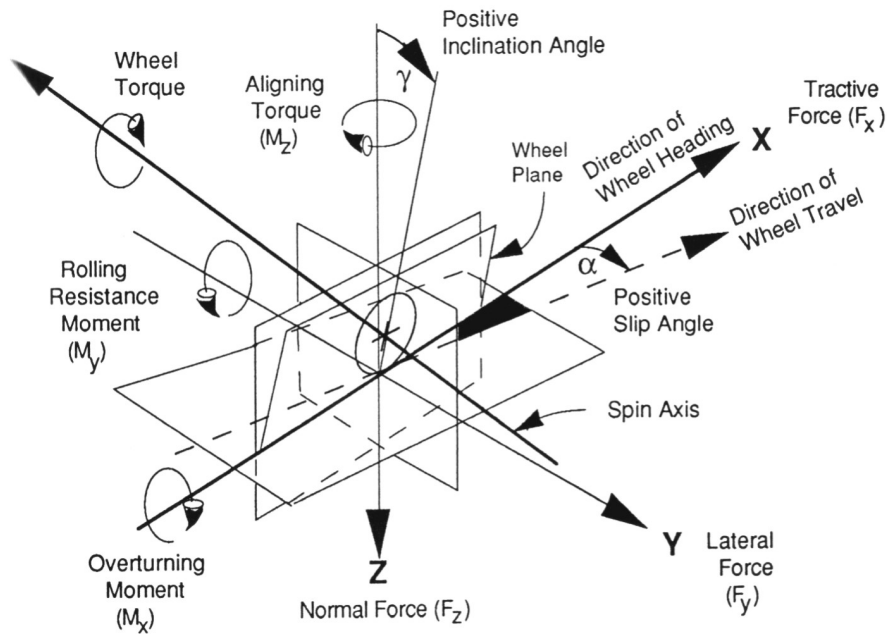


FIGURE 3.8 – Systèmes d’axes de référence des pneumatiques [5]

3.4 Système d’axes du pneumatique

Tout comme pour le véhicule, on décrit le comportement du pneumatique dans un système local attaché à la roue. On est ainsi amené à définir les grandeurs géométriques suivantes :

- *Le plan de la roue* : plan central de la roue, normal à l’axe de rotation,
- *Le centre de la roue* : l’intersection du plan de la roue et de l’axe de rotation,
- *Le centre de contact du pneu* : intersection du plan de la roue avec la projection de l’axe de rotation sur le plan de la route,
- *Le rayon sous charge R_l* : la distance entre le centre de la roue et le centre de contact du pneu,

On définit alors le repère propre du pneumatique. Le *centre du repère du pneumatique* est positionné au centre de l’aire de contact.

- *L’axe x'* est le vecteur unitaire porté par l’intersection du plan moyen de la roue et le plan de roue. Il pointe dans la direction d’avance.
- *L’axe verticale z'* est porté par la direction verticale, perpendiculaire au plan de la route. Il est dirigé vers le centre de la terre.

- L'axe y' est bi-orthogonal aux axes x' et z' . Il est situé dans le plan de la route et est orthogonal à l'intersection du plan moyen du pneumatique et à celui de la route. L'axe y' est situé à droite de la direction d'avance.

On peut alors définir les forces et moments agissant sur le pneumatique par référence à ce repère :

- La force longitudinale F_x : la composante de la force exercée par la route sur le pneu, dans le plan de la route et parallèlement à l'intersection du plan du pneu et du plan de la route,
- La force latérale F_y : la composante de la force exercée par la route sur le pneu, dans le plan de la route et normale à l'intersection du plan du pneu et du plan de la route,
- La force normale F_z : la composante de la force exercée par la route sur le pneu, normale au plan de la route,
- Le moment de retournement M_x : le moment exercé sur le pneu autour de l'axe x' , intersection du plan du pneu et du plan de la route,
- Le moment de résistance au roulement M_y : le moment développé par les forces dans l'aire de contact autour de l'axe y' , normal à l'intersection du plan de la roue et du plan de la route,
- Le moment d'alignement M_z : le moment autour de la direction normale au plan de la route.

On définit également les variables cinématiques suivantes :

- L'angle de dérive α est défini comme l'angle entre la direction de cap de la roue et la direction d'avance de la roue (c'est-à-dire la direction du vecteur vitesse). Un angle de dérive positif correspond à un pneu avançant vers la droite lorsqu'il roule vers l'avant.
- L'angle d'inclinaison γ est défini comme l'angle entre le plan vertical $x'z'$ du repère roue et le plan moyen de la roue. Il est positif pour une rotation positive autour de l'axe x' .
- L'angle de carrossage γ' s'exprime également comme l'angle entre le plan de la roue et le plan vertical, mais son signe est défini par rapport à la carrosserie du véhicule. Il est négatif (< 0) si le pneu se couche vers l'intérieur de la voiture et il est positif (> 0) pour un pneu qui se couche vers l'extérieur du véhicule.

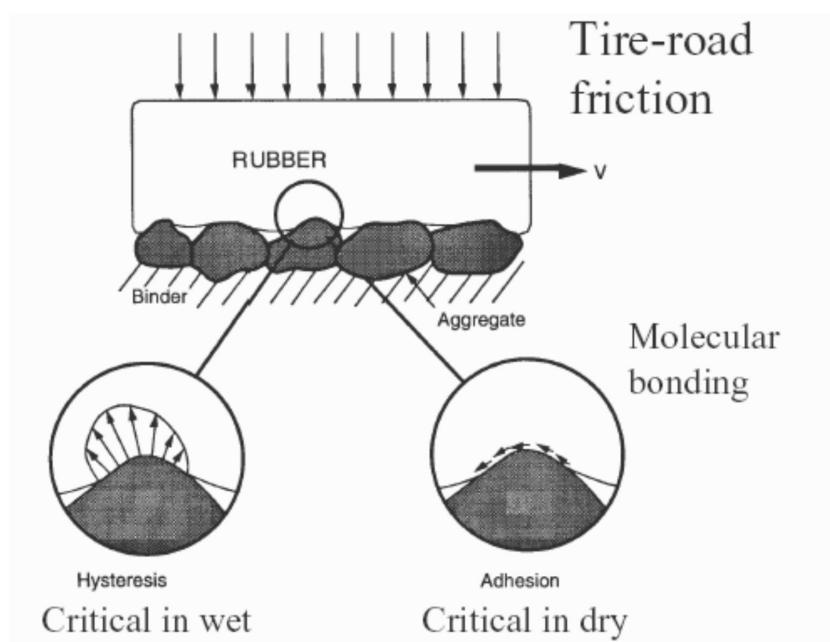


FIGURE 3.9 – Mécanismes de génération des efforts par le pneumatiques [5]

3.5 Mécanismes de génération des forces d'adhérence

Dans le cas des pneumatiques, on parle de *forces d'adhérence* pour désigner les forces d'interaction entre le sol et le pneumatique. On utilise le terme de forces d'adhérence ou de friction pour les distinguer des forces de frottement inhérentes aux forces générées lors du glissement de deux corps en mouvement relatif. En effet en fonctionnement normal, le pneu roule sans glisser et l'aire de contact contient le centre instantané de rotation (CIR) du mouvement du pneu où la vitesse est nulle. Le CIR étant caractérisé par l'absence de vitesse relative, il n'y a pas de glissement relatif et les forces de frottement ne dissipent pas d'énergie. Toutefois nous verrons que cette première conclusion doit être légèrement reconsidérée, car dans une partie limitée de l'aire de contact, on se trouve en présence de glissements locaux entre le sol et le caoutchouc.

On identifie plusieurs mécanismes physiques qui permettent au pneumatique de générer des forces d'adhérence :

1. Le mécanisme d'hystérésis qui est inhérent au comportement visco-élastique du caoutchouc,
2. Le mécanisme d'adhésion moléculaire qui est lié à la création de forces intermoléculaires (forces de van der Waals) entre le pneu et le sol.

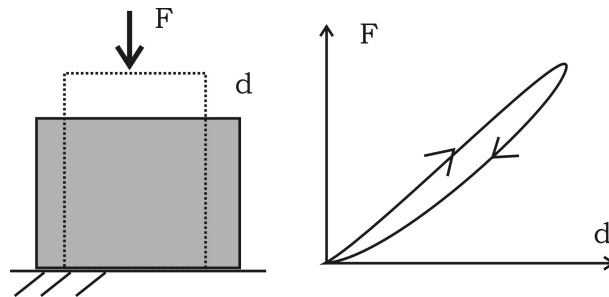


FIGURE 3.10 – Hystérésis d'un caoutchouc viscoélastique

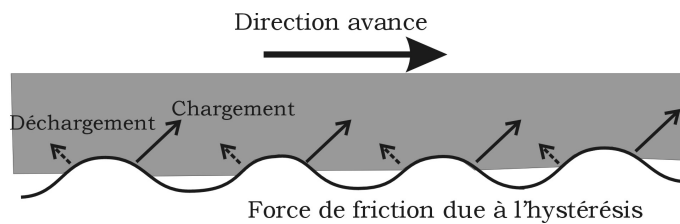


FIGURE 3.11 – Mécanisme de friction par hystérésis du caoutchouc

3. Les frottements entre le caoutchouc et le sol qui contribuent également aux forces d'adhérence dans une zone très limitée de l'aire de contact soumise à un glissement relatif.

3.5.1 Mécanisme d'hystérésis

Le mécanisme d'hystérésis est lié au comportement viscoélastique du matériau caoutchouté de la bande de roulement. Peu affecté par la présence d'eau, le mécanisme d'hystérésis procure une bonne traction même sur sol mouillé en utilisant pour la bande de roulement des caoutchoucs présentant un hystérésis important aux fréquences caractéristiques des contacts entre les aspérités de la route et la bande de roulement.

On peut expliquer la création de forces d'adhérence liées au caractère viscoélastique du caoutchouc de la manière suivante. Le comportement viscoélastique du caoutchouc est caractérisé par un comportement différent lors d'un cycle de compression extension. Considérons par exemple un bloc de caoutchouc. La courbe force déplacement lors d'un cycle de chargement / déchargement est représentée à la Figure 3.10. La Figure 3.11 schématise le mouvement de roulement. Lors de l'établissement du contact avec les faces de l'aspérité, le caoutchouc est d'abord chargé (comprimé) puis déchargé. A un instant t , la face arrière est déjà en phase de déchargement alors que la face avant est toujours au stade de la compression. Compte tenu du comportement visco-

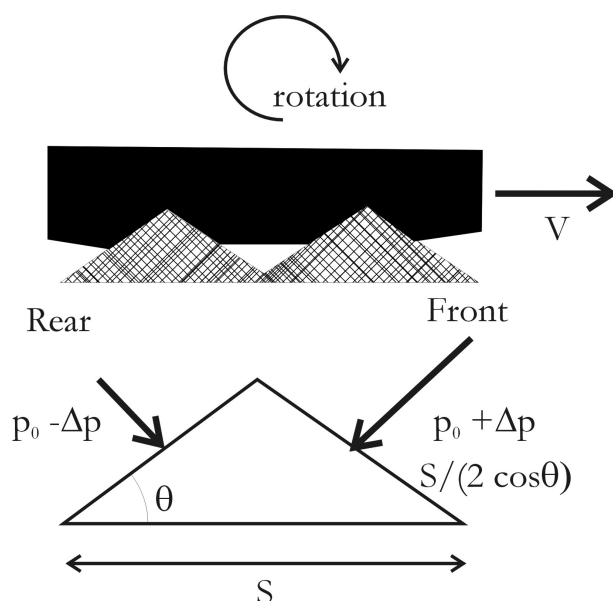


FIGURE 3.12 – Paramètres d'influence du mécanisme hystéresis dans les pneumatiques

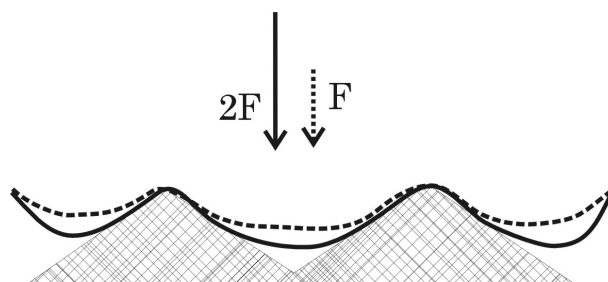


FIGURE 3.13 – Modification de la surface de contact avec la force normale

élastique, la pression exercée sur le caoutchouc est supérieure sur la face avant alors qu'elle diminue sur la face arrière. Il en résulte une force nette vers l'avant.

Contrairement à de très nombreuses paires de matériaux, le coefficient de friction du caoutchouc *dépend de la surface de contact* à cause de son caractère viscoélastique. En effet accroître la force verticale augmente l'aire de contact entre le caoutchouc et la route, mais cette croissance n'est pas proportionnelle à l'accroissement de la force verticale comme le suggère la Figure 3.13. Le coefficient de friction, rapport entre la force d'adhérence et la force verticale, diminue typiquement comme la puissance $-0,15$ de la pression moyenne.

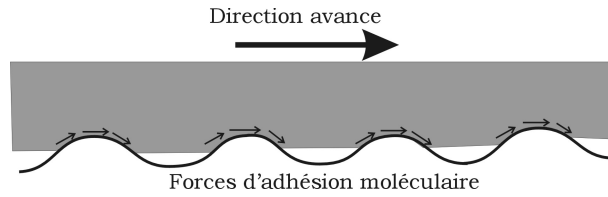


FIGURE 3.14 – Mécanisme de création par adhésion moléculaire

On observe expérimentalement que le coefficient de friction ne dépend pas de l'échelle des aspérités, mais bien de leur inclinaison de sorte que le coefficient de friction va augmenter avec la rugosité et l'angle moyen des aspérités. La situation se comprend en aisément en observant la Figure 3.12. Soient S la surface au sol occupée par l'aspérité et θ l'angle de la face de l'aspérité avec l'horizontale. Soient $p_0 + \Delta p$ et $p_0 - \Delta p$ les forces de pression exercées respectivement sur les faces avant et arrière de l'aspérité. La pression sur la face avant est augmentée de Δp car la pression augmente tandis qu'elle diminue sur la face arrière à cause du caractère viscoélastique du caoutchouc. La surface latérale de l'aspérité s'écrit :

$$S' = \frac{S}{2} \cos \theta$$

La force verticale vaut bien la pression fois la surface au sol :

$$\begin{aligned} \sum F_z &= -(p_0 - \Delta p)S' \cos \theta + (p_0 + \Delta p)S' \cos \theta \\ &= 2 p_0 \frac{S}{\cos \theta} \cos \theta = p_0 S \end{aligned}$$

Par contre la projection des forces de pression exercées sur les faces donne lieu à une force nette dirigée vers l'avant.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -(p_0 - \Delta p)S' \sin \theta + (p_0 + \Delta p)S' \sin \theta \\ &= 2 \Delta p S' \sin \theta = 2 \Delta p \frac{S}{2 \cos \theta} \sin \theta \\ &= \Delta p S \tan \theta \end{aligned}$$

Elle est d'autant plus grande que l'aspérité est élevée ou qu'elle est inclinée.

3.5.2 Adhésion de surface

Les forces d'adhésion trouvent leur origine dans les liens intermoléculaires (forces de Van der Waals) qui naissent entre les molécules à la surface du

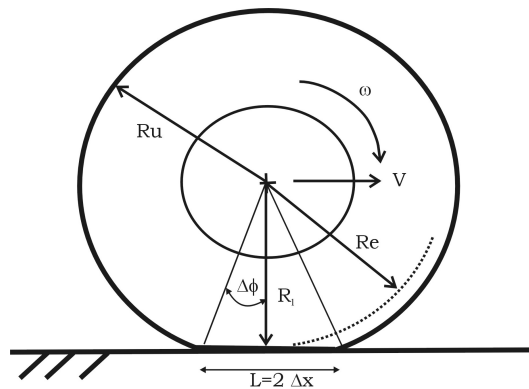


FIGURE 3.15 – Définition des différents rayons

caoutchouc et la route. Ce phénomène est important sur route sèche, mais il se réduit substantiellement sur route mouillée à cause des propriétés dipolaires des molécules d'eau. Ceci se traduit par une perte de coefficient d'adhérence sur route mouillée.

L'énergie libérée lors de la formation des liaisons n'est pas importante, mais la rupture des liaisons intramoléculaires lors du roulement absorbe de une certaine quantité d'énergie et contribue à la résistance au roulement (dissipation d'énergie).

3.5.3 Phénomènes de glissement

Lorsque le coefficient de glissement local est saturé, le caoutchouc de la bande de roulement glisse *localement* sur la route. Excepté lors dans les conditions extrêmes où le pneu dépasse largement ses capacités d'adhérence, il n'y a pas en général de glissement d'ensemble de l'aire de contact. Les phénomènes d'adhésion et d'hystérésis mettent en jeu un taux modéré de glissement à l'interface entre la route et le pneu. Lorsque les efforts dans le pneumatique saturent une large partie de la zone de contact, on observe alors un glissement d'ensemble et une diminution des forces d'interaction entre le caoutchouc et la route. On constate alors une réduction des forces totales d'adhérence.

3.6 Rayon effectif de roulement

La définition du rayon du pneu est importante pour la formulation du taux de glissement longitudinal. Comme illustré à la Figure 3.15, on distingue :

- *Le rayon non chargé du pneu* R_u : le rayon du pneu rigide, sans déformation, gonflé à la pression normale,
- *Le rayon du pneu chargé* R_l : mesuré par la distance entre le centre de l'aire de contact du pneu au centre de la roue dans le plan de la roue,
- *Le rayon effectif de roulement* R_e : le rayon obtenu comme le rapport de la vitesse d'avance linéaire dans la direction x à la vitesse de rotation angulaire.

Les trois rayons sont en réalité liés les uns aux autres. Examinons la Figure 3.15. Soit $\Delta\phi$ le demi angle au centre défini par la corde représentant l'aire de contact. L'aire de contact est de longueur L . La demi corde a donc une longueur Δx .

Dans le triangle rectangle construit sur la demi corde, on écrit :

$$L/2 = \Delta x = R_0 \sin \Delta\phi$$

La définition du rayon effectif R_e permet d'écrire :

$$v = \omega R_e$$

soit

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} R_e$$

et donc

$$\Delta x = R_e \Delta\phi$$

En comparant les deux relations, on a :

$$\Delta x = R_e \Delta\phi = R_0 \sin \Delta\phi$$

soit

$$R_e = R_0 \frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi}$$

Si on développe en série le sinus, il vient

$$R_e = R_0 \frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} \simeq R_0 \frac{\Delta\phi - \frac{1}{6}\Delta\phi^3}{\Delta\phi} = R_0 \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{6} \right)$$

On veut maintenant déterminer la valeur de $\Delta\phi$. Pour cela on va utiliser la valeur du rayon sous charge R_l :

$$\cos \Delta\phi = \frac{R_l}{R_0}$$

Procédons à nouveau par développement en série de Taylor, il vient :

$$\cos \Delta\phi = 1 - \frac{1}{2}\Delta\phi^2$$

On obtient

$$\Delta\phi^2 = 2(1 - \cos \Delta\phi) = 2\left(1 - \frac{R_l}{R_0}\right)$$

Injectons cette valeur dans la relation liant R_e et R_0 , on obtient l'équation liant les trois rayons :

$$\begin{aligned} R_e &= R_0 \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{6}\right) \\ &= R_0 \left(1 - \frac{2}{6}\left(1 - \frac{R_l}{R_0}\right)\right) \\ &= R_0 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{R_l}{R_0}\right) \end{aligned}$$

3.7 Forces latérales

On constate que lorsqu'on applique une force latérale à un pneu, il se développe, dans l'aire de contact, une force de réaction qui s'oppose au mouvement latéral du pneu. La force de résistance créée par le pneu est appelée *force d'envirage*. Sa grandeur est égale à celle de la force latérale appliquée au moyeu. Cette force augmente avec la force latérale qui lui donne naissance jusqu'à un point où un glissement d'ensemble de la roue survient parce que le frottement avec le sol dépasse sa capacité maximale.

Sous l'effet de la force latérale et de la réaction à l'interface roue-sol, la carcasse du pneu se déforme latéralement et l'aire de contact se trouve décalée latéralement par rapport au plan moyen du pneu (voir Fig. 3.17). Lorsque le pneu chargé commence à rouler, un point qui se trouve dans le plan médian du pneu pénètre dans l'aire de contact en suivant une trajectoire latérale par rapport au plan de la roue. En contact avec le sol, le point est astreint par les forces de friction à adopter une trajectoire linéaire colinéaire avec le vecteur vitesse. Une fois sorti de l'aire de contact le point peut reprendre une trajectoire dans le plan de la roue. La flexibilité de sa carcasse permet au pneumatique de conserver un angle de cap défini par la partie rigide de la roue tandis que l'aire de contact peut suivre une déviation latérale imposée par le mouvement relatif par rapport du sol. La déformation du pneumatique

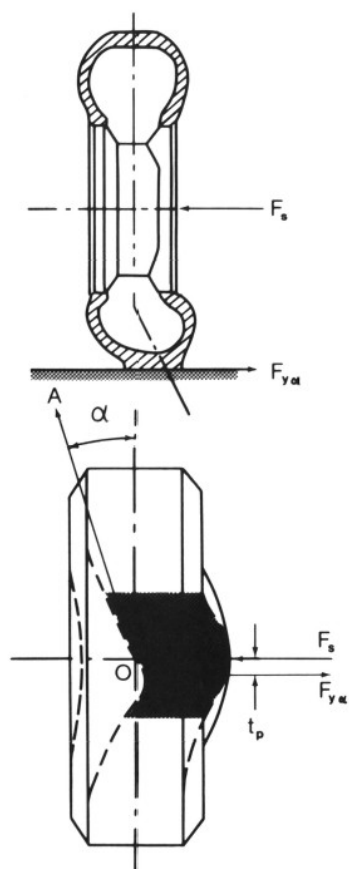


FIGURE 3.16 – Origine de l'effet de dérive d'après [26]

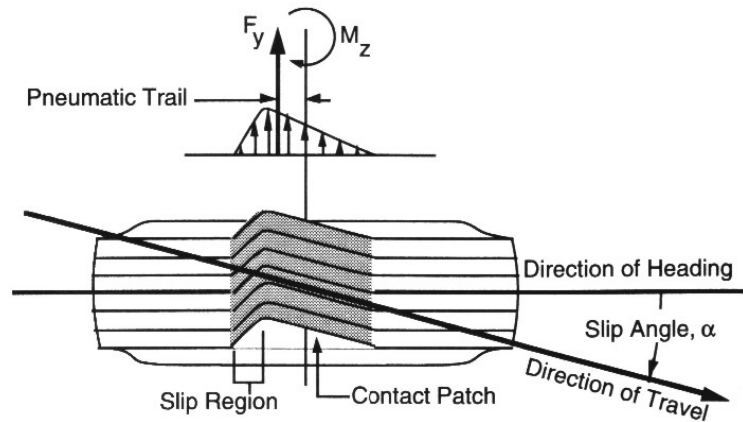


FIGURE 3.17 – Origine de l'effet de dérive du pneumatique d'après [5]

entraîne la roue dans un mouvement latéral faisant un certain angle α avec la direction de cap. L'angle α entre la direction de cap de la roue et la direction de la trajectoire (et donc du vecteur vitesse instantané \vec{V}) est appelé *angle de dérive* (ou *slip angle* en anglais). La dénomination provient du rapprochement qui peut être fait avec le phénomène d'un bateau dont le cap n'est pas aligné avec son vecteur vitesse.

L'existence d'une force latérale peut s'expliquer par la résultante des forces de rappel élastiques inhérentes au cisaillement de toutes les tranches de caoutchouc subissant un déplacement latéral. Comme on a un profil de déplacement latéral linéaire en avançant dans l'aire de contact, les forces de cisaillement prennent également un profil triangulaire, hormis dans la fin de l'aire de contact où la pression de contact étant plus faible, les forces de rappel excèdent les forces de friction disponibles entre le sol et la roue et le matériau glisse localement.

La relation entre la force latérale et l'angle de dérive est fondamentale. Son étude détaillée est capitale pour l'étude de la dynamique du véhicule et de la stabilité du mouvement.

3.7.1 Origine de l'effet de dérive

L'origine du phénomène de dérive réside dans la déformation élastique du pneu sous l'effet de la charge latérale.

Remarquons que l'angle de dérive α (ou slip angle en anglais) porte assez mal son nom, car en réalité pour des petits angles, il n'y a pas de glissement d'ensemble du pneu dans la surface de contact sauf dans une partie arrière

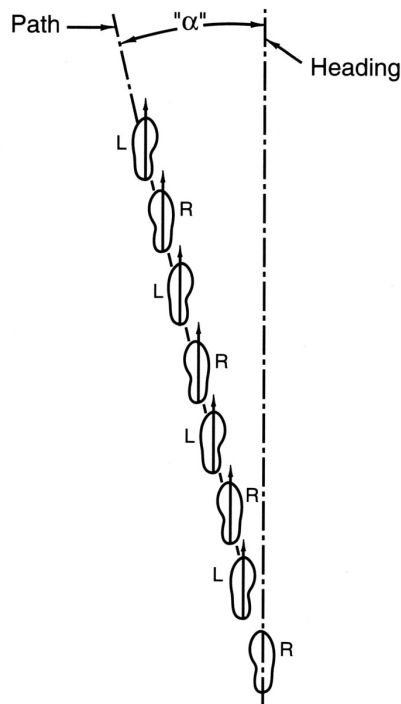


FIGURE 3.18 – Analogie avec les traces d'un homme marchant sur une pente glissante d'après [13]

de l'empreinte. Comme suggéré à la Figure 3.18, on peut imaginer l'analogie avec les pas d'un homme sur une pente enneigée. Au fur et à mesure de sa marche, les pas restent alignés. Cependant à cause de la pente, l'homme glisse et ses empreintes dérivent dans le sens de la pente.

Une expérience amusante proposée par Chevrolet (voir Fig. 3.19) permet de comprendre le phénomène en fabriquant un anneau de caoutchouc assez souple sur une roue rigide. On recouvre le périmètre de caoutchouc de dépôts d'encre. On exerce une force latérale sur la roue et on la fait avancer en gardant le cap constant. On remarque que les taches d'encre suivent une trajectoire faisant un angle avec la direction de cap de la roue.

Il est à remarquer que la force latérale peut être vue comme une cause ou une conséquence de l'angle de dérive. Par exemple, un braquage de roues directrices crée un angle de dérive qui crée à son tour une force latérale et conduit à faire tourner le véhicule. De même sur les machines de test, on cale l'angle de dérive et on mesure une force latérale. À l'inverse sous l'effet d'une rafale latérale, la force du vent donne naissance à une force latérale qui

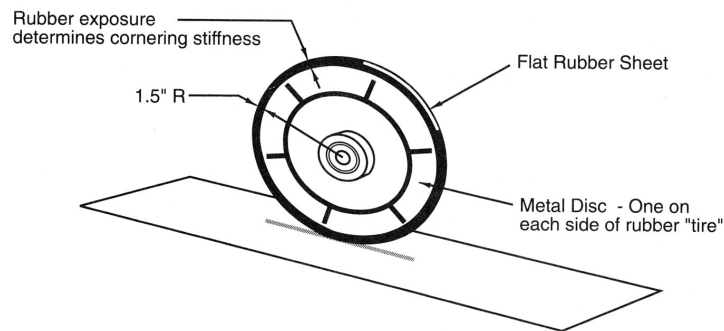


FIGURE 3.19 – Expérience Chevrolet : explication du phénomène de dérive d'après [13]

fléchit le pneu latéralement et puis crée une réaction issue du changement dans l'angle de dérive. De même, lors des virages ou sur une route en dévers, la force latérale est reprise en augmentant l'angle de dérive pour créer des forces latérales.

3.7.2 Caractérisation de l'effet de dérive

Le phénomène a été caractérisé pour la première fois par Gough en 1950 au Dunlop Research Center. La machine employée pour l'expérience est illustrée à la Figure 3.21. Par un dispositif mécanique, la machine enregistre les paramètres suivants :

- le déplacement latéral (a,b),
- la force latérale d'un tranche (c),
- la réaction dans l'axe de rotation de la roue.

Si on reproduit l'expérience réalisée par Gough on obtient des courbes telles que celles qui sont présentées à la Figure 3.22. On y trouve la contrainte normale au plan de la route σ_z , la contrainte de cisaillement τ_{zy} et la vitesse latérale dans chacune des tranches de l'aire de contact. L'angle de dérive du pneumatique α est donné.

On constate d'abord que la distribution des forces de cisaillement latéral est de forme quasi triangulaire. Dès lors le centre de la force latérale se situe dans la partie arrière de l'empreinte. Soit t la distance par rapport au centre de contact de la roue. Cette distance est appelée la *chasse du pneumatique* (ou *pneumatic trail* en anglais). La chasse multipliée par la force latérale donne lieu à un couple de lacet autour de l'axe vertical appelé *couple d'auto alignement*. En effet la distribution triangulaire des forces de cisaillement dans l'aire de contact conduit à un moment net par rapport à l'axe verticale

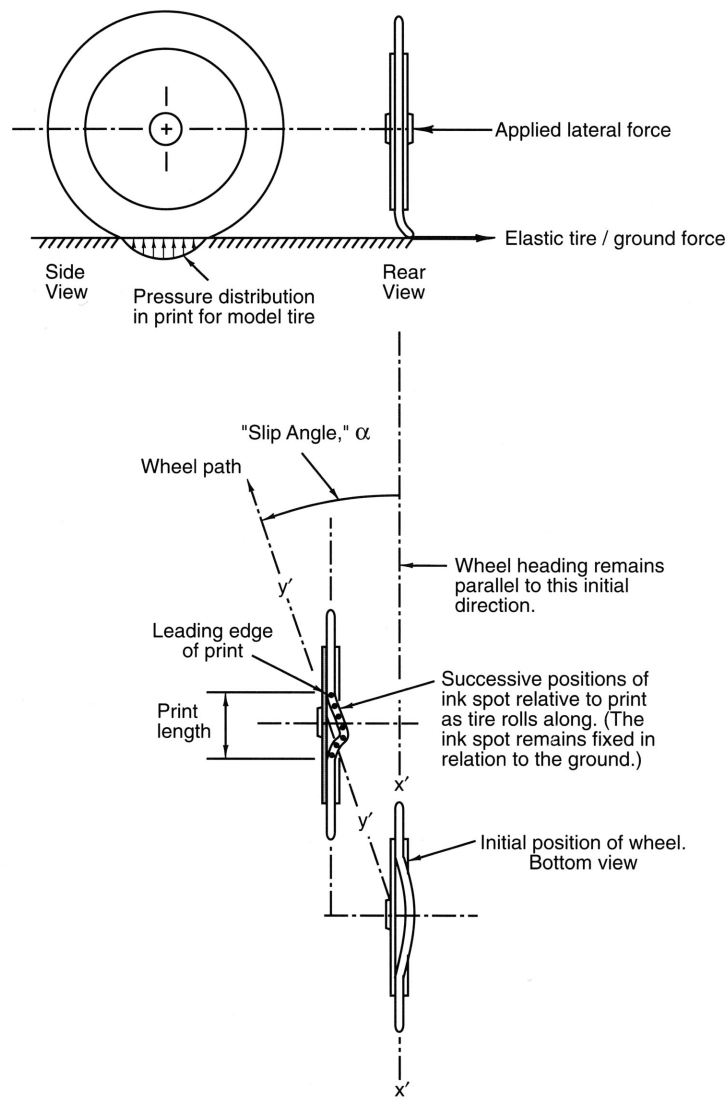


FIGURE 3.20 – Expérience Chevrolet : explication du phénomène de dérive d'après [13]

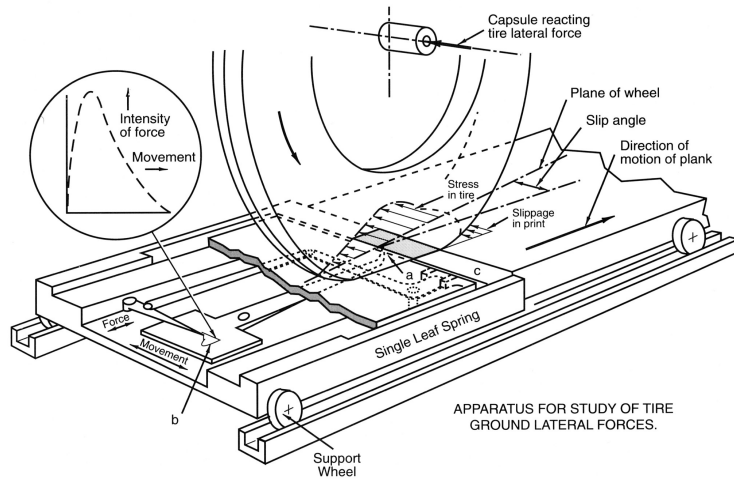


FIGURE 3.21 – Machine de test de Gough (1950) (Dunlop Research Center) pour la mesure des forces de dérive d'après [13]

passant par le centre de contact.

$$M_z = F_y t \quad (3.1)$$

Le glissement latéral du caoutchouc sur la route n'intervient que dans la partie arrière de l'empreinte. A cet endroit, la distribution des forces de cisaillement dévie de la forme triangulaire. L'importance de la zone de glissement local dépend de la vitesse de glissement et de l'angle de dérive ainsi qu'on peut le voir à la Figure 3.23.

Enfin une analyse approfondie des résultats montrerait que les caractéristiques des forces latérales dans la gamme élastique (petits angles de dérive) sont fonctions des déplacements latéraux associés au processus de roulement et qu'elles sont largement indépendantes de la vitesse.

On peut mesurer expérimentalement la force latérale créée par le pneu en fonction de différents angles de dérive appliqués au pneumatique. La Figure 3.24 reproduit un résultat expérimental obtenu pour un pneu Goodyear Eagle GT-S P215/60 R15 (shaved for racing). Les courbes angle de dérive - force d'envirage obtenues comportent 3 parties :

- Une partie linéaire pour de faibles angles de dérive (dérives inférieures à 3 - 5°);
- Une zone de transition qui se termine par un pic de force d'adhérence entre 3° et 7°;

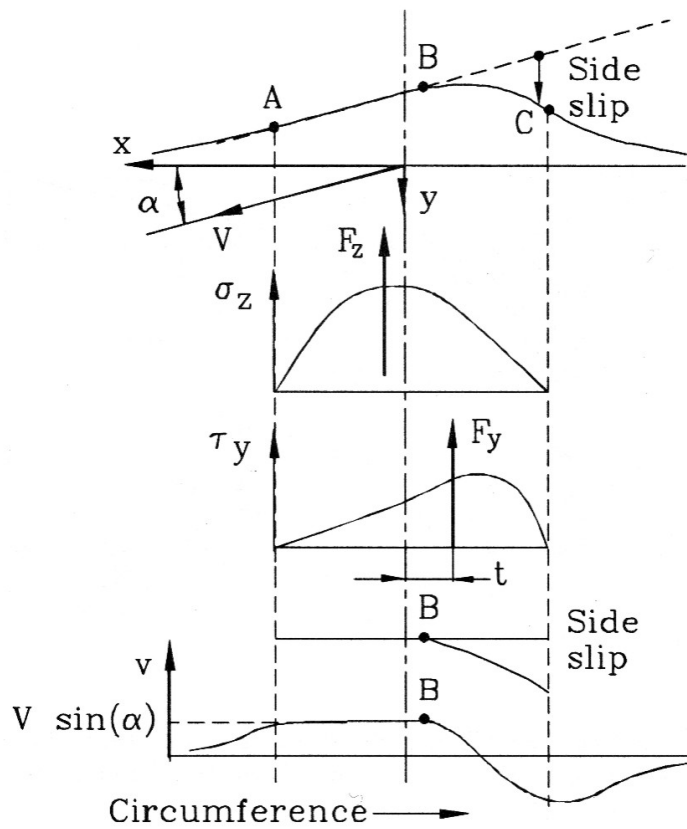


FIGURE 3.22 – Déplacement latéral, distribution de σ_z et τ_{zy} , glissement latéral et vitesse latérale pour un pneu avec une dérive α [4]

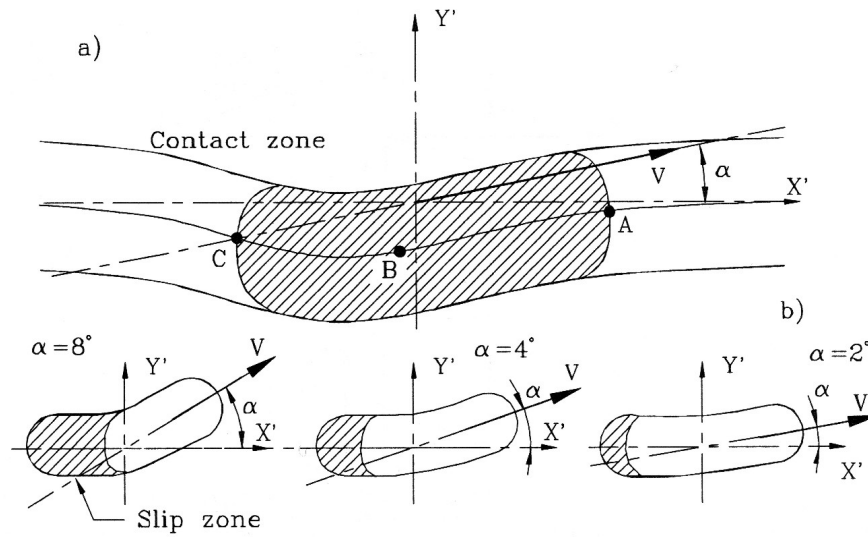


FIGURE 3.23 – Contact roue-sol en présence de dérive a/ zone de contact et trajectoire d'un point dans la bande de roulement b/ zones de contact et de glissement en fonction de l'angle de dérive α [4]

- Au delà du pic des forces d'adhérence, on observe une zone de saturation. La courbe des forces d'adhérence peut soit rester constante temporairement, ou finir par chuter. Au delà du point d'adhérence maximal, les forces sont dominées par les forces de frottement dans l'aire de contact.

Sur sol mouillé, on observe une réduction de la valeur du maximum de la force d'adhérence et une chute plus rapide.

Influence de la force verticale

La Figure 3.25 montre les courbes de forces latérales pour différentes forces verticales appliquées sur le pneumatique. La force latérale augmente avec la force verticale appliquée, mais moins vite que l'accroissement de poids F_z . En particulier, on constate que le pic de force latérale diminue avec la charge verticale. C'est effet est appelé *sensibilité du pneu à la charge*. Le phénomène est mieux mis en évidence avec le concept de coefficient d'adhérence.

Par analogie avec le phénomène de frottement, on introduit le concept de coefficient de friction ou coefficient d'adhérence, rapport entre la force

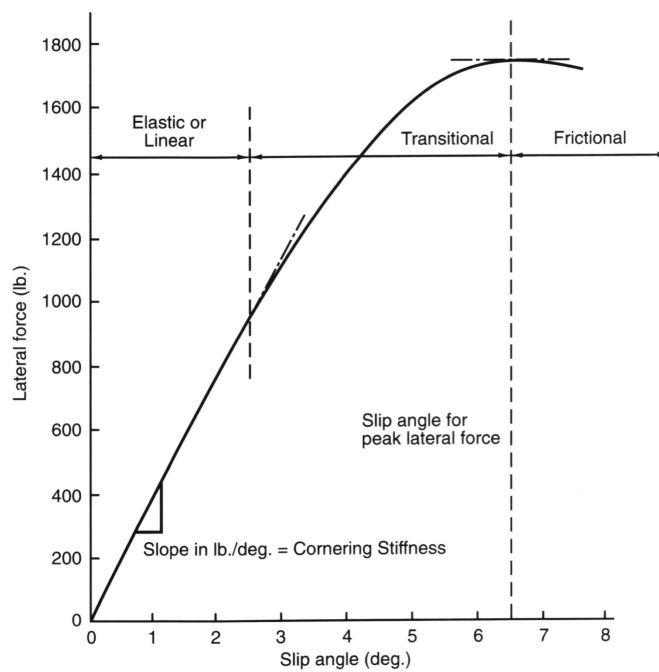


FIGURE 3.24 – Force d’envirage en fonction de l’angle de dérive. Pneu P215/60 R15 GoodYear Eagle GT-S (shaved for racing) gonflé à 31 psi pour une charge de 1800 lb. D’après [13]

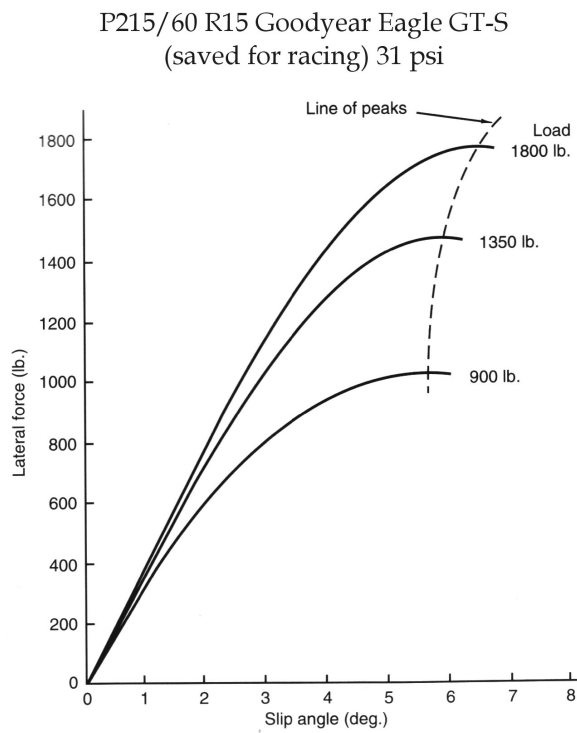


FIGURE 3.25 – Force d’envirage en fonction de l’angle de dérive pour différentes charges verticales. Pneu P215/60 R15 Goodyear Eagle GT-S (shaved for racing) gonflé à 31 psi pour une charge de 1800 lb. D’après [13]

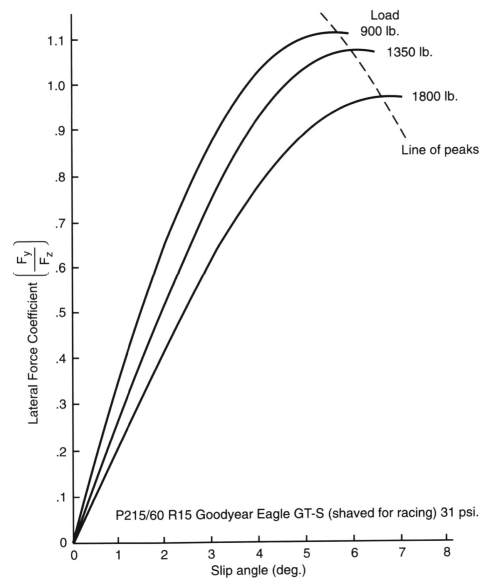


FIGURE 3.26 – Coefficient de friction latéral $\mu = F_y/F_z$ en fonction de l'angle de dérive pour différentes charges verticales. Pneu P215/60 R15 Goodyear Eagle GT-S (shaved for racing) gonflé à 31 psi. D'après [13]

latérale et la force verticale :

$$\mu_y = F_y/F_z \quad (3.2)$$

La Figure 3.26 montre clairement l'importance de la variation des forces latérales avec la charge. Le phénomène est spécialement caractéristique des pneus diagonaux. Ce point demande la plus grande attention face au transfert de charge latérale en virage.

La Figure 3.28 illustre le phénomène de perte de coefficient d'adhérence globale pour un essieu soumis à un transfert de charge. En ligne droite, la charge sur chaque roue est de 3 kN. Pour cette charge verticale, chaque pneu est capable de fournir 2 kN de force latérale. Lors d'un virage, le transfert de charge de 1,5 kN élève la force verticale sur le pneu extérieur à 4,5 kN et la diminue sur le pneu intérieur à 1,5 kN. Compte tenu de la forme non linéaire concave de la courbe de force d'adhérence en fonction de la charge verticale, la moyenne des forces latérales produites sur les roues intérieures et extérieures, située graphiquement sur le segment joignant les deux nouveaux points de fonctionnement est inférieure à la force latérale en ligne droite. Il y a donc une perte nette de capacité de l'essieu à développer une force latérale à la suite du transfert de charge.

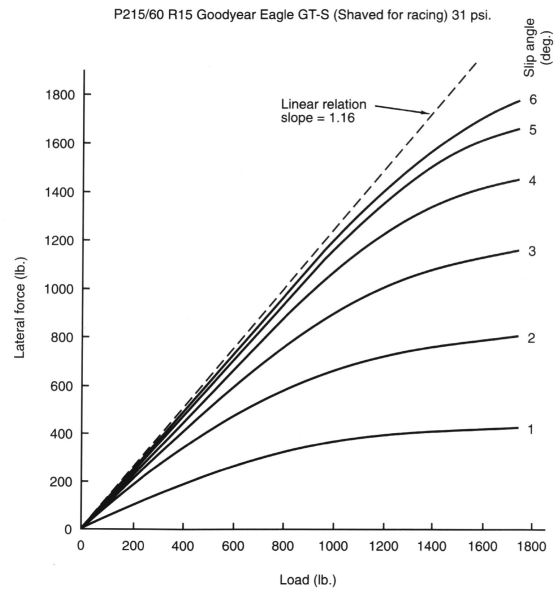


FIGURE 3.27 – Coefficient de friction latéral $\mu = F_y/F_z$ en fonction de la charge verticale pour différents angles de dérive. Pneu P215/60 R15 Goodyear Eagle GT-S (shaved for racing) gonflé à 31 psi. D'après [13]

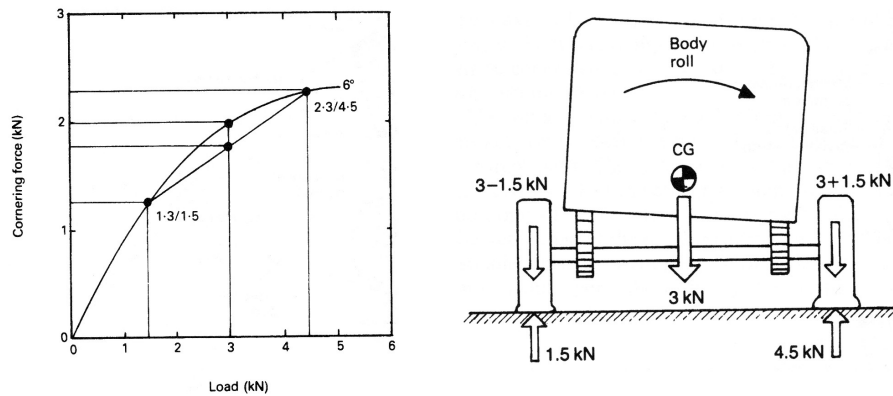


FIGURE 3.28 – Sensibilité à la charge lors d'un transfert de charge latéral. D'après [8]

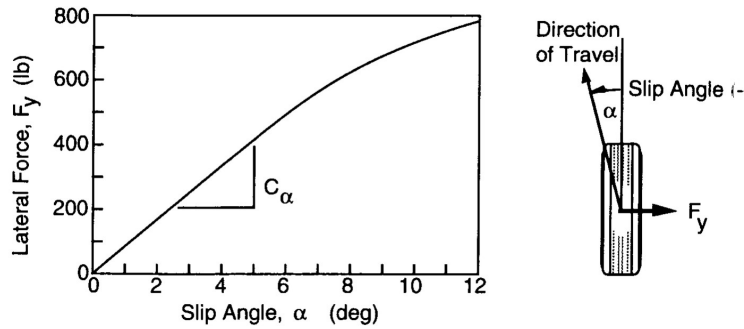


FIGURE 3.29 – Définition de la raideur d’envirage. D’après [5]

Le coefficient de friction latéral μ_y est sensible à la charge. Par contre il est quasi indépendant de la vitesse. Le coefficient de friction latéral peut être amélioré en utilisant des gommes plus collantes et en assurant des températures adéquates (en Grand Prix, on va jusque $\mu = 1.8$ pour des faibles charges !).

L’importance de la zone de transition varie avec les paramètres de conception du pneu. Une large zone de transition sert d’avertissement au conducteur avant le décrochage. Les pneus avec un haut coefficient de friction maximum ont en général un décrochage très rapide, car pour ceux-ci une large partie de la zone de contact est utilisée par des déformations élastiques. Les pneus radiaux ont la réputation de montrer une plus haute valeur de la force d’adhérence maximale, mais de présenter une zone transition plus courte. A contrario, on obtient un décrochage plus graduel avec des empreintes longues et étroites. En pratique, on note également l’influence de la profondeur et du dessin de la bande de roulement.

3.7.3 Raideur d’envirage

Lorsque l’on fait l’hypothèse que l’on travaille avec des petits angles de dérive, on se trouve dans la partie linéaire de la courbe de la force latérale en fonction de l’angle de dérive. Il est alors possible de linéariser la courbe en procédant à un développement en série de Taylor autour de l’origine $\alpha = 0$. On peut écrire :

$$F_y = -|C_\alpha|\alpha \quad (3.3)$$

C_α est appelé *raideur d’envirage* (cornering stiffness) :

$$|C_\alpha| = \left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} < 0 \quad (3.4)$$

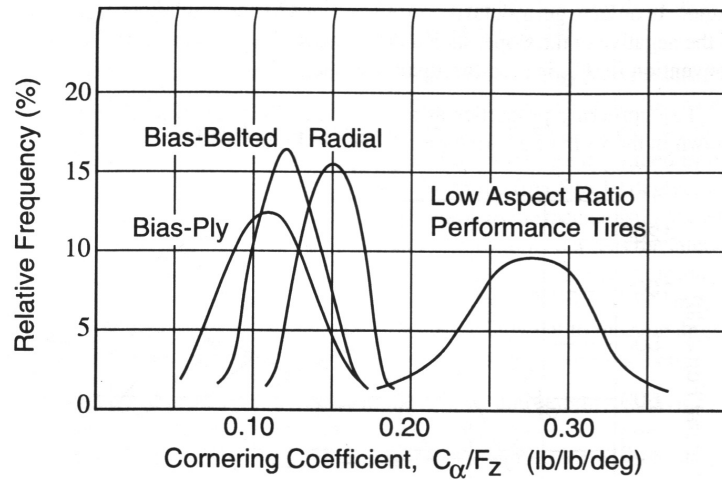


FIGURE 3.30 – Coefficient de raideur d’envirage pour différentes population de types de pneus. D’après [5]

Remarquons que la physique nous confirme bien le signe négatif du coefficient d’envirage puisqu’il faut avoir un angle de dérive négatif pour donner lieu à une force latérale vers la droite du plan du pneumatique, soit orientée positivement selon le système d’axes conventionnel qui est adopté.

Comme la force latérale, la raideur d’envirage dépend elle aussi de nombreux facteurs :

- Le type de pneu,
- La dimension du pneu et sa largeur,
- La pression de gonflage,
- La charge verticale.

On retiendra que l’ordre de grandeur de la raideur d’envirage est de 50000 N/rad, soit environ 750 N/degré.

Comme la force latérale dépend fortement de la charge verticale, le coefficient d’envirage dépend de la charge verticale. Pour diminuer cette sensibilité, on définit le *coefficient d’envirage* comme la raideur d’envirage divisé par la charge verticale :

$$CC_{\alpha} = C_{\alpha}/F_z \quad (3.5)$$

L’ordre de grandeur du CC_{α} est de 0.1 à 0.2 N/N degré-1. Le coefficient CC_{α} reste dépendant de la charge verticale comme le montre la Figure 3.31.

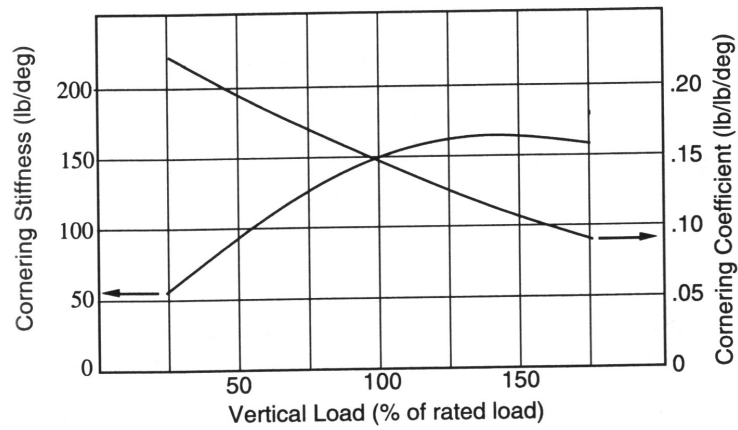


FIGURE 3.31 – Sensibilité de la raideur d’envirage en fonction de la charge. D’après [5]

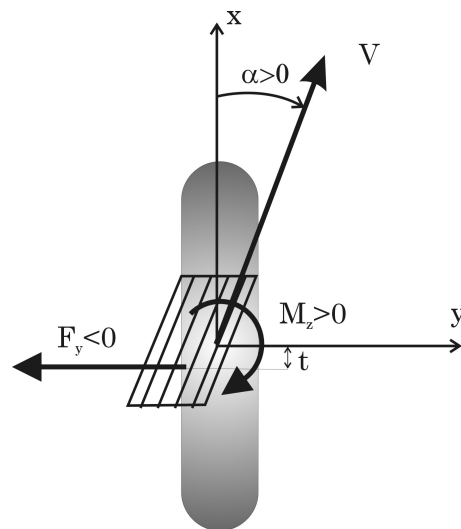


FIGURE 3.32 – Schéma des forces d’envirage et du moment d’autoalignement

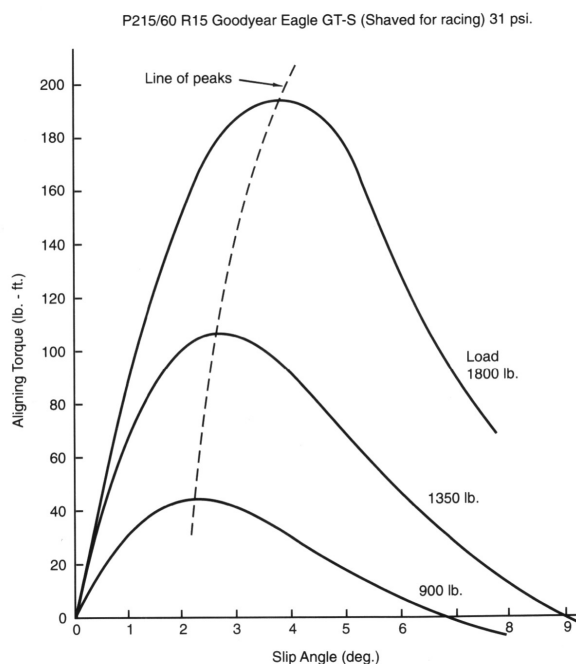


FIGURE 3.33 – Couple d’auto-alignement en fonction de l’angle de dérive pour différentes valeurs de la charge normale. D’après [13]

Couple d’auto-alignement et chasse du pneumatique

Le couple d’auto-alignement traduit la tendance du pneu à tourner autour de l’axe vertical passant par le centre de la zone de contact. Pour des petits et moyens angles de dérive, le pneu tend à aligner son cap avec la direction de son vecteur vitesse, celui-ci étant tangent à la trajectoire. Il s’agit d’un effet *stabilisateur* similaire à l’alignement d’une girouette qui se met face au vent. L’origine du couple d’auto-alignement se situe dans la distribution triangulaire des contraintes de cisaillement dans la zone de contact.

Une autre facette du phénomène est la *chasse* du pneu, définie comme le ratio entre couple d’auto-alignement et la force latérale. Il s’agit d’une longueur donnant la position de la résultante des forces latérales par rapport au centre de l’aire de contact.

Dans les courbes de la Figure 3.33, on distingue encore deux parties :

- Une partie linéaire pour des petits angles de dérive. Les plus grandes contraintes de cisaillement situées à l’arrière de l’empreinte travaillent à réduire l’angle de dérive. Le couple d’auto-alignement y est négatif et il est stabilisateur.

- Une partie non-linéaire pour de plus grands angles de dérive. L'arrière de la zone de contact glisse et réduit le moment net tendant à diminuer la dérive. Le moment d'autoalignement atteint sa valeur maximale pour des angles d'environ de 3 à 4°. Le couple d'alignement diminue alors jusqu'au point limite où le moment est quasi réduit à zéro. Cet effet survient généralement pour des angles de l'ordre de 10°. Au delà, le moment d'autoalignement devient positif et la roue a tendance à se tourner perpendiculairement à la direction d'avance. Il est déstabilisateur.

Des efforts latéraux importants résultent dans des couples d'auto alignement faibles et des chasses réduites. Pour des angles de dérives faibles, seul le profil du pneu est déformé, ce qui donne lieu à une résultante positionnée nettement en arrière du centre de contact. Pour des angles importants, la carcasse travaille plus ce qui rapproche la résultante vers l'avant de l'aire de contact

La chasse pneumatique est le bras de levier de la force d'envirage par rapport au centre de contact du pneumatique. On le détermine en utilisant la formule

$$t = \frac{M_z}{F_y}$$

En fonction de la charge verticale (Fig. 3.34) et de l'angle de dérive (voir Fig. 3.35), il prend des valeur entre 10 et 50 mm. Sa valeur diminue jusqu'au point de s'annuler lorsque la dérive augmente comme le montre la Figure 3.36.

Pour des petits angles de dérive, on peut encore observer une partie linéaire et utiliser une approximation linéarisée du moment d'autoalignement

$$M_z(\alpha) \simeq \left. \frac{\partial M_{z,\alpha}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha = M_{z,\alpha} \alpha \quad (3.6)$$

Le moment d'auto-alignement peut également provenir de la géométrie de la suspension et d'une chasse de l'axe de la direction, encore appelé *chasse mécanique* comme illustré à la Figure 3.37). La chasse mécanique s'obtient en plaçant le point de percée de l'axe de pivot de la route directrice dans le sol en avant du centre de l'aire de contact. Lorsque le point de percée est en avant du centre de l'aire de contact, on obtient un moment négatif autour de l'axe vertical, donc un moment stabilisateur. En pratique, on utilise une combinaison des chasses mécaniques et pneumatiques. La chasse mécanique est particulièrement importante pour garder un effet stabilisateur même lorsque la chasse pneumatique s'annule. Toutefois une combinaison optimisée des deux est nécessaire. Avec trop peu de chasse mécanique, le véhicule peut

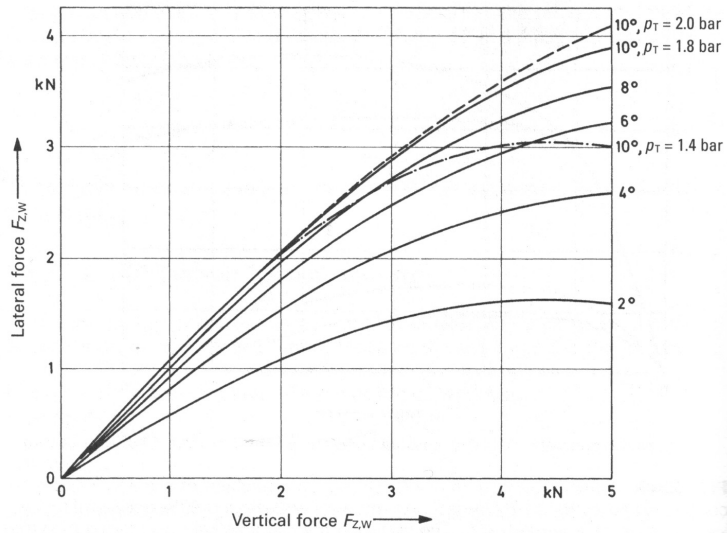


FIGURE 3.34 – Force d’envirage pour un pneu 175/70 R 13 82S. D’après [21]

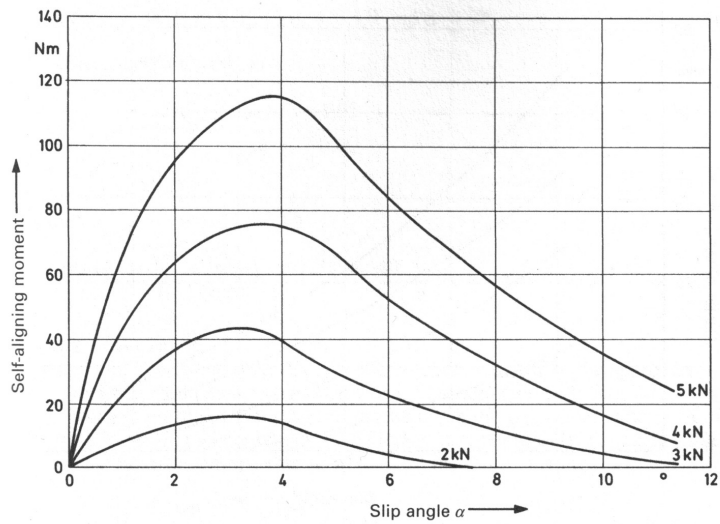


FIGURE 3.35 – Couple d’auto alignement pour un pneu 175/70 R 13 82S. D’après [21]

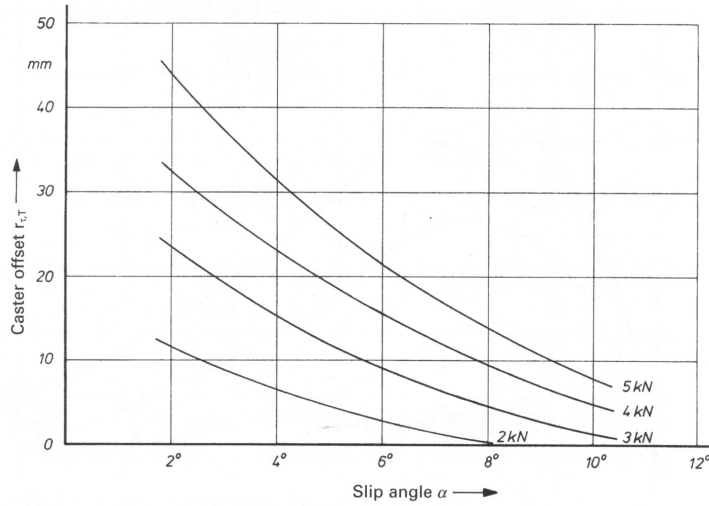


FIGURE 3.36 – Chasse pneumatique pour un pneu 175/70 R 13 82S. D'après [21]

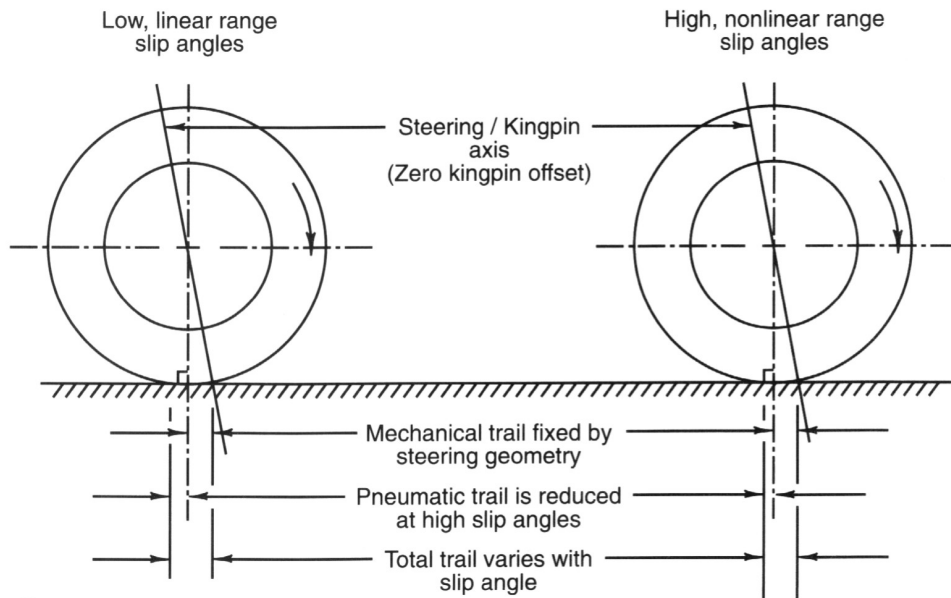


FIGURE 3.37 – Définition de la chasse mécanique et de la chasse pneumatique. D'après [13]

avoir tendance à réduire le rayon de braquage lorsqu'il décroche. Le conducteur a la sensation que la roue devient légère et donne un signal de danger au conducteur. Avec trop de chasse mécanique, le conducteur perdrait toute sensation du décrochage.

3.7.4 Moment de retournement du pneumatique

L'aire de contact étant déformée, elle subit un déplacement latéral (voir Fig. 3.39). La résultante des forces de pression se trouve décalée latéralement par rapport au plan médian de la roue et elle produit un moment de retournement autour de l'axe x du pneu comme représenté à la Figure 3.39.

Le phénomène est dépendent de :

- Taille du pneu,
- La force latérale,
- L'angle de carrossage,
- Le type de pneu et sa construction.

Etrangement les pneus tailles basses avec une raideur de flanc importante sont sujets à des déplacements du point d'application de la résultante verticale assez importants [21].

3.7.5 Effet de carrossage

Le phénomène de dérive du pneumatique n'est pas le seul qui permette de créer des forces latérales. L'expérience est quotidienne pour les motocyclistes. Lors d'un virage important, le conducteur penche sa machine pour incliner les pneumatiques par rapport à la verticale. Ceci lui permet de produire des forces latérales et de prendre le virage. Ce phénomène est expliqué et décrit dans cette section.

Origine de la poussée

Rappelons d'abord la définition de l'*angle de carrossage* : c'est l'angle formé entre le plan médian de la roue et la verticale. L'angle de carrossage est positif si le haut de la roue est penché vers l'extérieur du véhicule et négatif si la roue penche vers l'intérieur. De manière absolue on parle d'*angle d'inclinaison* γ défini comme l'angle du plan de la roue avec la verticale, compté positivement si la roue est penchée vers la droite lorsqu'on la regarde de derrière.

Un pneu qui possède un carrossage produit une force latérale, appelée *poussée de carrossage*, même pour un angle de dérive nul. La poussée dépend

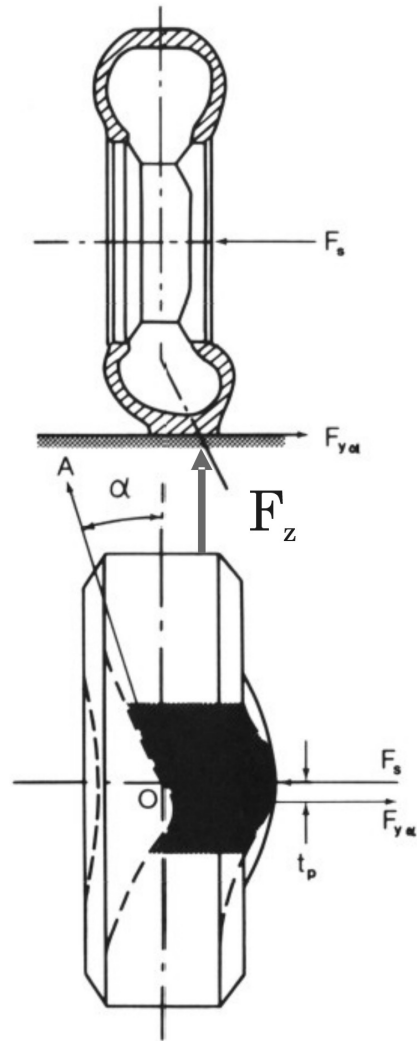


FIGURE 3.38 – Origine du couple de retournement

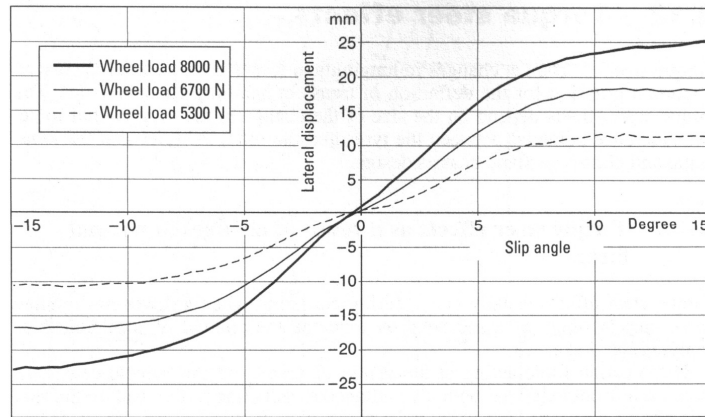


FIGURE 3.39 – Déplacement latéral du point d'application de la résultante normale en fonction de l'angle de dérive et de la charge verticale. Pneu 205/65 R15 94 V ContiEcoContact CP. D'après [21]

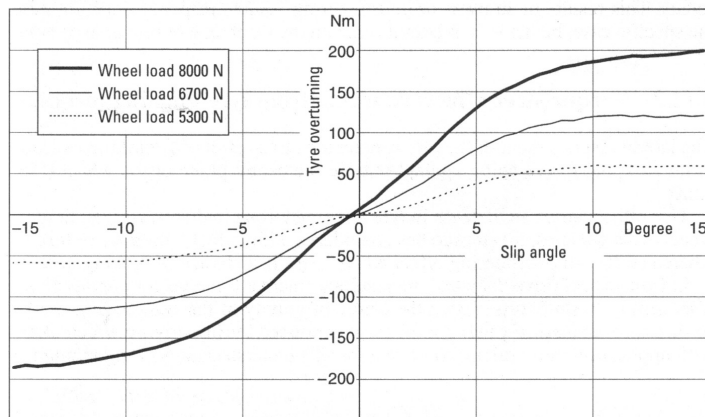


FIGURE 3.40 – Moment de retournement en fonction de l'angle de dérive et de la charge verticale. Pneu 205/65 R15 94 V ContiEcoContact CP. D'après [21]



FIGURE 3.41 – Prise de carrossage pour le virage en moto

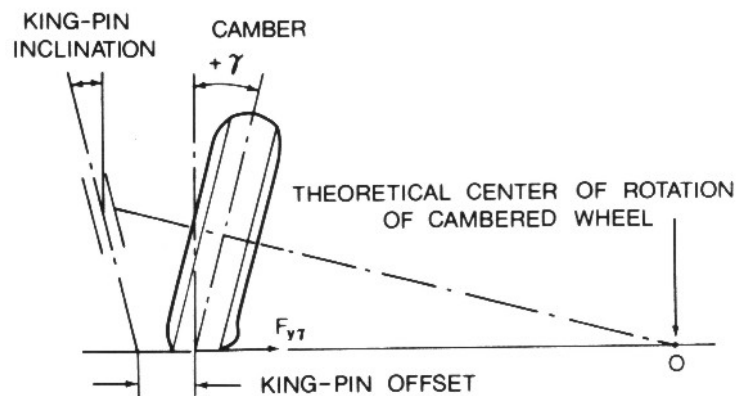


FIGURE 3.42 – Origine du carrossage d'après [26] : le pneu a tendance à emprunter une trajectoire circulaire autour du point de percée de l'axe de rotation de la roue dans le plan du sol

du type de pneu, de sa construction, de sa forme, de sa bande de roulement, de la pression de la charge verticale, de la présence de forces de traction ou de freinage, des angles de carrossage et de dérive.

L'origine de la force de poussée peut se comprendre intuitivement de la manière suivante reproduite à la Figure 3.42. Le pneu penché suivrait naturellement une trajectoire circulaire autour du point de percée de son axe de rotation dans le plan de la route. Si le mouvement circulaire est empêché, il faut produire une force latérale à chaque instant pour maintenir sa trajectoire en ligne droite.

On peut comprendre également la poussée de carrossage en examinant l'empreinte d'un pneu incliné par rapport à la verticale (voir Figure 3.43). L'empreinte est déformée et prend une forme de banane. Un point du pneu

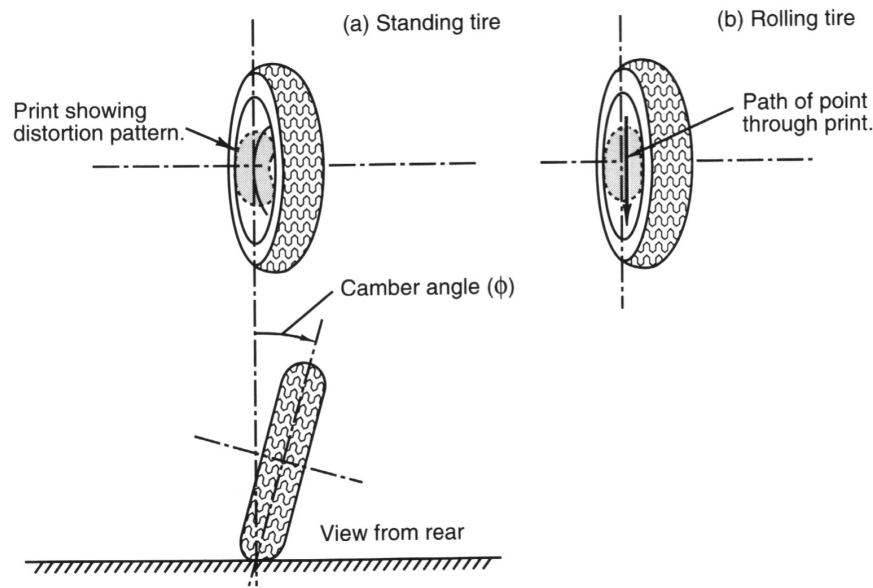


FIGURE 3.43 – Origine du carrossage : distorsion de l’empreinte du pneu en présence d’un angle de carrossage d’après [13]

qui entre dans l’empreinte voudrait naturellement suivre une trajectoire circulaire. Le contact avec la route et le mouvement en ligne droite du pneu contraignent le point à suivre une trajectoire rectiligne. La déformation de l’empreinte requiert l’application de forces de cisaillement dont la résultante crée une force nette sur le pneu. Celle-ci est la *poussée de carrossage*. On retiendra également que la poussée de carrossage agit toujours dans la direction vers laquelle le pneu est couché.

Courbes de poussée carrossage

Tout comme on l’a fait pour l’angle de dérive, il est possible de mesurer les forces latérales pour différents angles de carrossage du pneumatique (à angle de dérive nul). L’allure de telles courbes est donnée à la Figure 3.44.

Comme pour le phénomène de dérive, la courbe possède d’abord une partie linéaire. Dès lors, pour de faibles angles de carrossage, la courbe peut être approchée par son approximation linéarisée.

Pour des angles de carrossage plus élevés, la courbe poussée de carrossage s’adoucit et devient non linéaire jusqu’à arriver à un maximum avant de diminuer, à cause d’un glissement d’ensemble au sein de l’aire de contact.

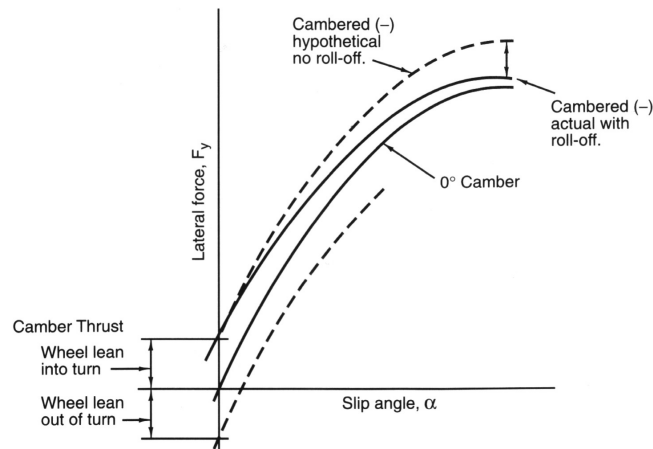


FIGURE 3.44 – Poussé de carrossage et angle de dérive d’après [13]

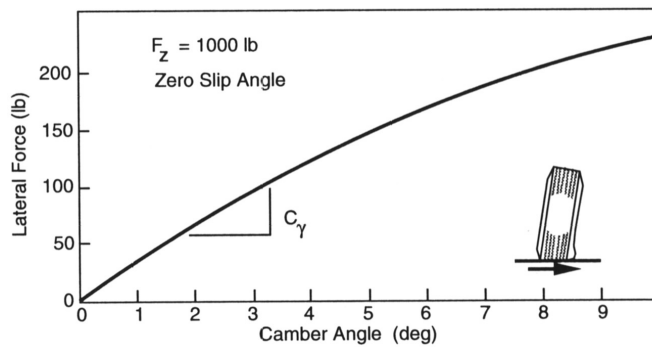


FIGURE 3.45 – Poussé de carrossage et raideur de carrossage d’après [5]

Raideur de carrossage

Dans la partie linéaire (petits angles de carrossage) de la courbe donnant la force latérale en fonction de l’angle de carrossage (voir Fig. 3.45), on peut écrire :

$$F_y(\gamma) \simeq C_\gamma \gamma \tag{3.7}$$

avec γ en radians et

$$C_\gamma = \left. \frac{\partial F_y}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} > 0 \tag{3.8}$$

Le coefficient C_γ est appelé *raideur d’environnement due au carrossage* (*camber stiffness*). Dans le cas du carrossage, la physique nous indique que $C_\gamma > 0$. En effet un angle de carrossage positif $\gamma > 0$ donne lieu une poussée de

carrossage vers la droite.

Comme la raideur de dérive, la raideur de carrossage C_γ dépend également de la force normale appliquée au pneumatique. Dès lors, on définit souvent le *coefficient de raideur de carrossage* CC_γ défini comme :

$$CC_\gamma = C_\gamma / F_z \quad (3.9)$$

La valeur de CC_γ dépend fortement de la nature constructive du pneumatique.

Comparaison possible entre l'effet de l'angle de dérive et l'angle de carrossage

La distorsion de l'aire de contact du pneu provoquée par un degré d'angle de dérive est bien plus grande que celle provoquée par un degré de carrossage. Il en résulte que l'effet de la dérive est plus important que l'effet produit par l'angle de carrossage. Ainsi l'ordre de grandeur de la raideur d'environnement est de l'ordre de 5 à 10 fois supérieur à celui de la raideur de carrossage. Spécialement pour les pneus radiaux, la raideur de carrossage est assez faible à cause de la souplesse de la carcasse et de la grande raideur de la ceinture. Pour les pneus diagonaux, l'effet de carrossage est encore moins marqué.

Remarquons également pour des angles de carrossage supérieurs à 5 degrés, le phénomène de carrossage tend à s'estomper pour des pneus radiaux. Par contre, pour des pneus à profil rond et à carcasse diagonale, comme les pneus de motos, le carrossage produit des effets importants jusqu'à 50°.

La Figure 3.46 présente les coefficients de raideur de carrossage pour des pneus radiaux, diagonaux et diagonaux renforcés par des ceintures. On voit typiquement que le coefficient de raideur de carrossage des pneus diagonaux est de l'ordre de 0,02 N/N/deg tandis que le coefficient de raideur de carrossage des pneus radiaux est de l'ordre de 0,01 N/N/deg, soit 2 fois moins grand. Ceci est en accord avec la discussion développée plus haut. Rappelons que le coefficient de raideur d'environnement CC_α pour de la dérive est de l'ordre de 0,15 N/N/deg.

Effet de la force normale sur le carrossage

Les Figures 3.47 et 3.48 illustrent l'influence de la force normale sur l'angle de carrossage. Ces figures montrent aussi qu'il existe un angle de carrossage optimum pour chaque charge verticale permettant de maximaliser la poussée de carrossage. Cependant cet angle optimal varie en fonction de la charge appliquée. Il n'est dès lors pas possible de dégager une loi claire liant cette valeur maximisante de l'angle de carrossage à la force verticale.

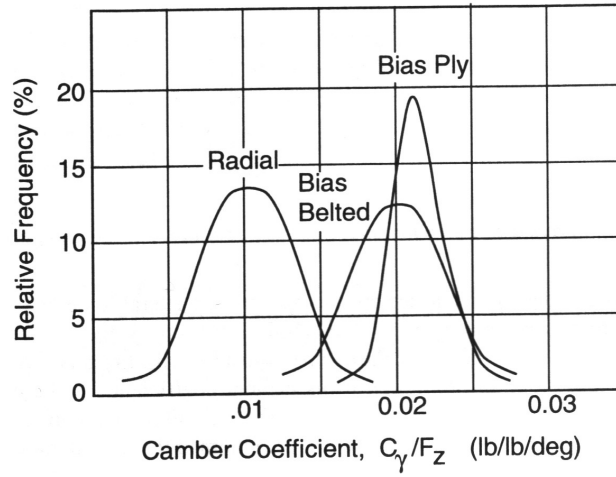


FIGURE 3.46 – Valeur du coefficient de raideur de carrossage pour des populations de différents types de pneus d’après [5]

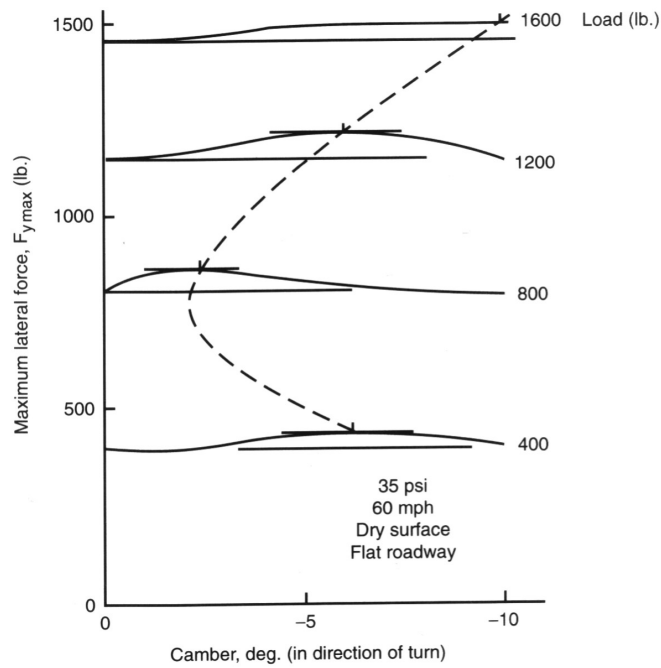


FIGURE 3.47 – Effet de la force de normale sur l’angle de carrossage optimal d’après [13]

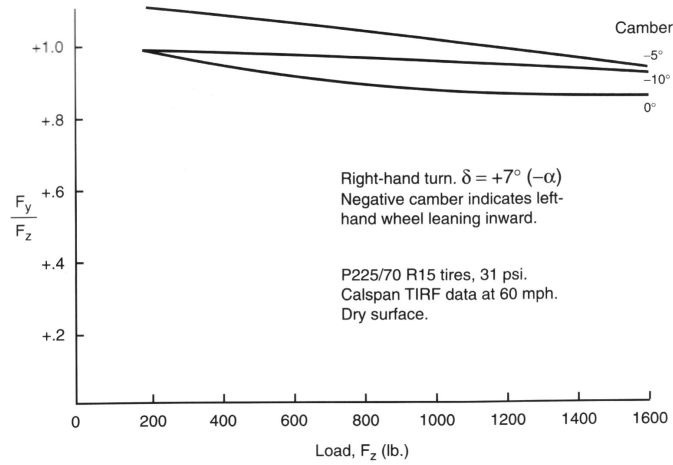


FIGURE 3.48 – Effet de la force de normale pour différents angles de carrossage d’après [13]

Effet de l’angle de dérive et de l’angle de carrossage

Les forces d’envirage et de poussée de carrossage peuvent agir ensemble et se superposer ou s’annuler comme le montre la Figure 3.44. Dans la phase linéaire (petits angles), il s’agit d’une addition / soustraction. Pour des angles importants, les effets combinés s’atténuent et l’effet total est moindre que la somme des deux effets pris individuellement. On peut comprendre que pour des angles importants soit de dérive ou de carrossage, on observe des glissements dans l’aire de contact. Une partie soumise à des glissements, ne peut plus travailler normalement pour l’autre effet. On assiste donc à un phénomène de saturation.

Dans la partie linéaire, l’expression de la force latérale en présence d’angles de dérive et de carrossage s’écrit en utilisant le développement en série de Taylor :

$$F_y(\alpha, \gamma) \simeq \left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + \left. \frac{\partial F_y}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} \gamma$$

En introduisant les coefficients de raideur d’envirage en dérive et de carrossage, on écrit

$$F_y(\alpha, \gamma) \simeq -|C_\alpha| \alpha + C_\gamma \gamma \quad (3.10)$$

Les signes positifs et négatifs des contributions de dérive et de carrossage résultent de la discussion menée sur la physique des phénomènes.

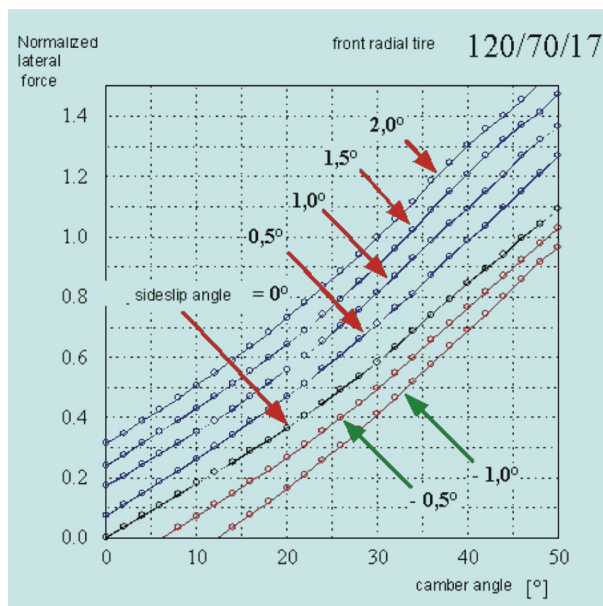
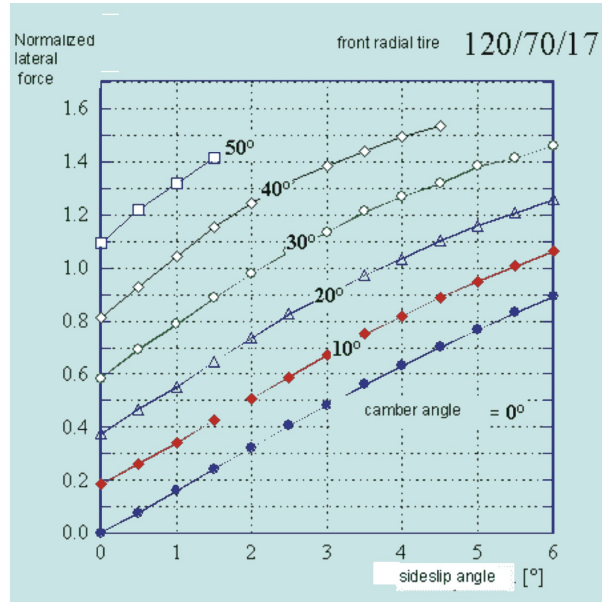


FIGURE 3.49 – Poussée de carrossage mesurée pour un pneu de moto pour des angles de dérive et de carrossage



FIGURE 3.50 – Développement des forces de traction

Moment d'alignement dû au carrossage

Généralement le carrossage est la source d'un moment faible mais déstabilisant qui tend à augmenter l'angle de dérive. Il nécessite donc une chasse mécanique. L'origine de ce moment de lacet autour de l'axe vertical peut se comprendre aisément si on se rappelle la Figure 3.43 expliquant l'origine de la poussée de carrossage. Sous l'effet du carrossage le pneumatique a tendance à suivre une trajectoire circulaire centrée au point de percée de l'axe de rotation dans le plan du sol. Si on se rappelle que le mouvement circulaire se compose d'un mouvement latérale (origine de la force poussée) mais aussi d'une rotation de l'objet autour de l'axe vertical, on comprend l'origine du moment d'auto-alignement. Cette explication prédit également le caractère du couple d'auto-alignement qui tend à augmenter l'angle de lacet du pneu par rapport à sa trajectoire rectiligne initiale.

3.8 Forces longitudinales

Pour accélérer ou freiner, il faut développer une force longitudinale dans la zone de contact pneu - sol. Le mécanisme de génération des forces longitudinale présente des similitudes avec celui à l'origine des forces latérales puisque il y a un région de distorsion élastique (ici une élongation longitudinale) et une région de glissement ou de friction.

Lorsque le pneu roule à vitesse constante, on constate également qu'il faut développer un couple pour maintenir la vitesse constante, c'est le phénomène de *résistance au roulement*.

3.8.1 Origine des forces longitudinales

Taux de glissement longitudinal

Lorsque le pneu roule à vitesse constante, on constate que la roue tourne à une vitesse de rotation Ω_0 proportionnelle à la vitesse d'avance V . Bien que le pneu subisse une déformation dans l'aire de contact, on définit le *rayon effective* de roulement R_e comme la constante de proportionnalité entre la vitesse linéaire au moyeu et la vitesse de rotation de la roue autour de son axe :

$$V = \Omega_0 R_e \quad (3.11)$$

Lorsque l'on applique un couple de freinage, on ralentit la vitesse de rotation de la roue Ω alors que le véhicule poursuit sa course à la vitesse initiale V . On constate alors une différence de vitesse de rotation entre la vitesse de roue libre $\Omega_0 = V/R_e$ caractéristique de la vitesse linéaire du véhicule et la vitesse, plus faible, imposée à la jante Ω .

A contrario lorsque l'on accélère, le couple moteur impose une vitesse de rotation Ω qui devient supérieure à la vitesse de rotation en roue libre Ω_0 liée à la vitesse du véhicule se déplaçant à la vitesse $V = \Omega_0 R_e$.

La différence entre la vitesse de rotation qui est imposée à la jante et celle qui est liée au contact avec la route se traduit par une différence de chemin parcouru entre la jante et la bande de roulement. Par exemple en cas de freinage, la jante tourne plus lentement et donc la jante parcourt une moins grande distance que la partie en contact avec la route. Toute lamelle radiale de caoutchouc se trouve donc progressivement soumise à un état de cisaillement longitudinal croissant. Le cisaillement grandit linéairement entre l'entrée dans l'aire de contact sa sortie. Inversement, pour un effort de traction, la vitesse étant plus importante à la jante, les fibres radiales se trouvent en état de cisaillement vers l'avant de l'aire de contact.

Pour décrire le phénomène de traction ou de freinage, on vient à la conclusion que la variable cinématique qui caractérise le mieux le phénomène de traction et de freinage est la différence de vitesse de rotation imposée et celle qui serait obtenue si on travaillait en roue libre. On définit donc le *taux de glissement longitudinal* en anglais *Slip Ratio* :

$$SR = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\Omega}{\Omega_0} - 1 \quad (3.12)$$

Si on introduit le rayon de roulement effectif, on peut également calculer le taux de glissement par l'expression alternative :

$$SR = \frac{\Omega R_e}{V} - 1 \quad (3.13)$$

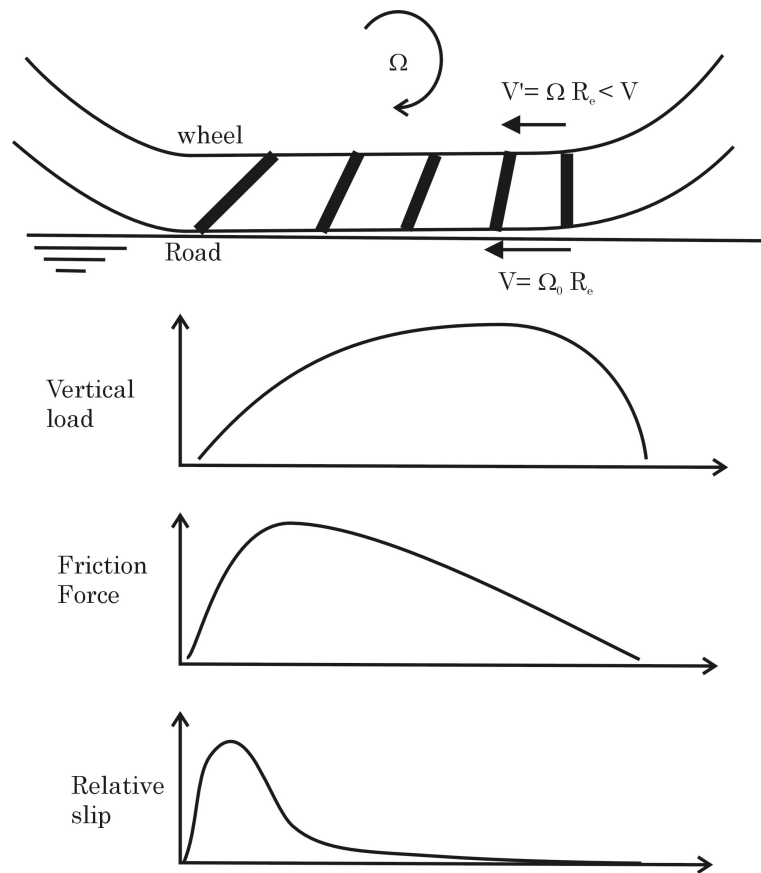
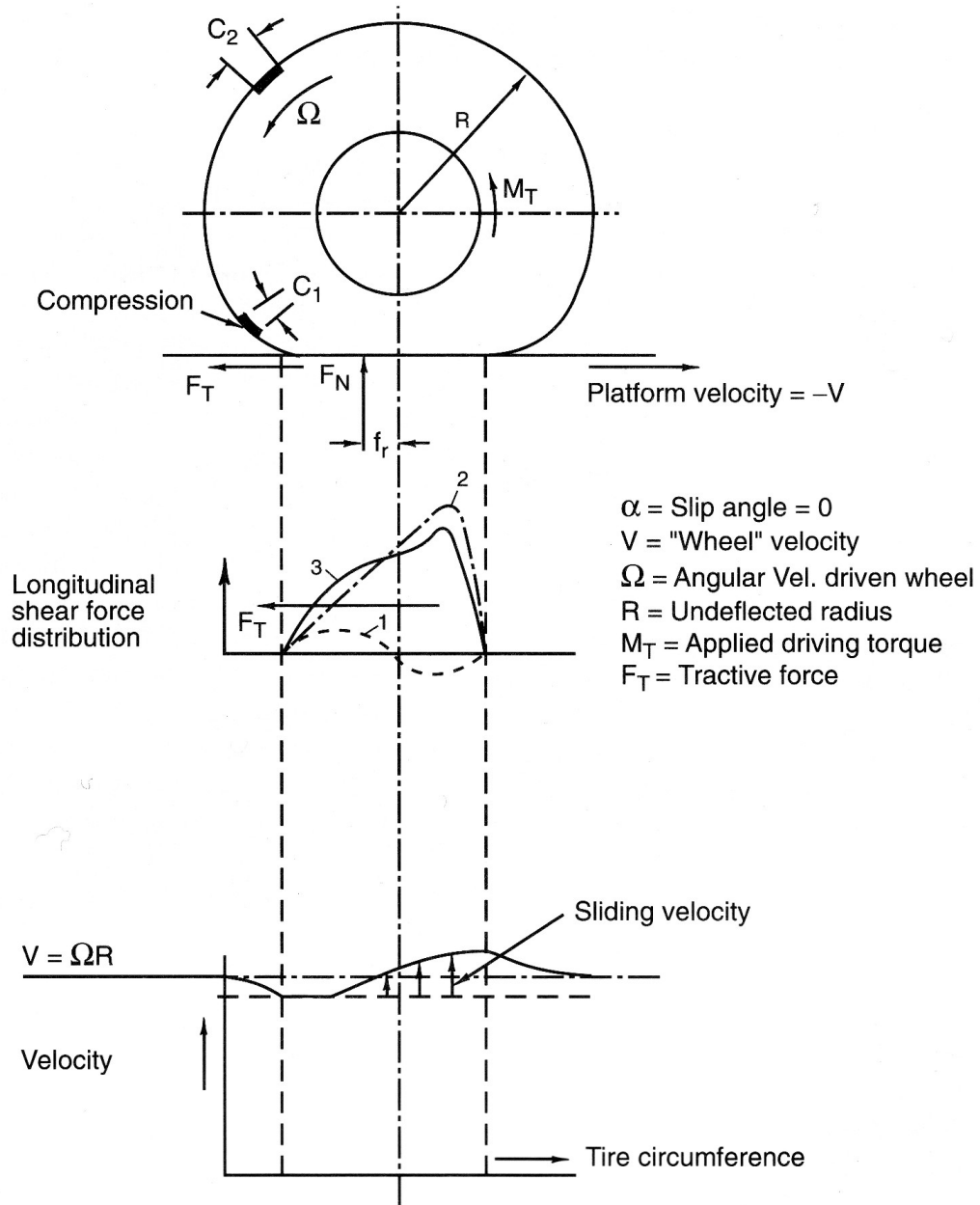


FIGURE 3.51 – Modèle de la brosse afin d’appréhender les déformations dues au freinage dans l’aire de contact

Modèle de la brosse

Afin d’appréhender le mécanisme de création des efforts longitudinaux (traction et freinage), on peut se reposer sur le modèle dit ”de la brosse” représenté à la Figure 3.51. On y voit les fibres radiales du pneumatique se déformer sous l’effet du cisaillement induit par un différentiel de vitesse au niveau de la jante de la roue et celle au niveau de l’aire de contact. La déformation des fibres radiales conduit au développement d’une moment global de freinage (ici). A la fin de l’aire de contact, la pression de contact diminue et la déformation des fibres devient si grande qu’on observe un glissement localisé entre le caoutchouc et le sol. Le moment de retour élastique dépasse la capacité du frottement sol-caoutchouc.



Distribution of forces and sliding velocity, over the contact length of a tire under the action of a driving torque M_T .

FIGURE 3.52 – Mécanisme de création d'un effort de traction d'après [13]

Couple moteur

A la Figure 3.52, on observe les courbes décrivant le phénomène de génération des forces longitudinales dans le cas du développement d'un couple de traction. Dans ce cas d'espèce, le pneumatique semble prendre une vitesse de rotation trop importante par rapport à la vitesse linéaire de déplacement. La compatibilité n'est assurée que par la déformation en cisaillement du pneumatique.

Si le pneu roulait librement, on observerait une contrainte de cisaillement due à réduction forcée du rayon du pneu lorsque les éléments entrent et sortent dans l'empreinte. Pour une vitesse angulaire constante Ω_0 , la vitesse linéaire chute d'abord puis augmente à nouveau (courbe 1). Ce qui donne lieu à la distribution de contraintes τ_{zx} de cisaillement (1).

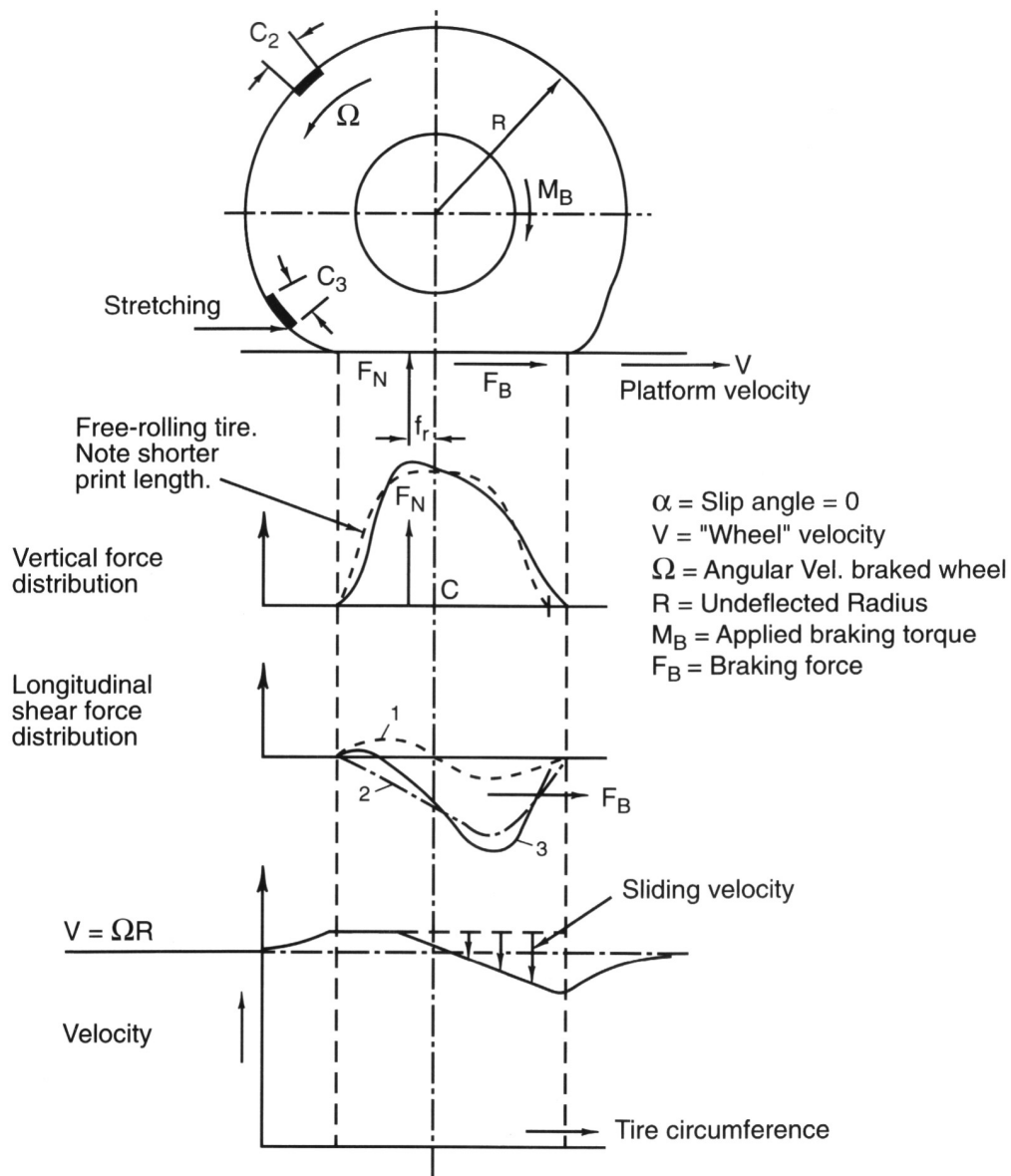
Sous l'action du couple moteur responsable de la force de traction, on assiste à un déplacement de la zone de contact vers l'avant mettant en compression les éléments de pneu au devant de l'empreinte et déformant le pneu dans la direction de la circonférence. En quelques sortes, on peut comprendre que dans le devant de l'aire de contact, on force les éléments à entrer dans la zone de contact et derrière, on les force à en sortir plus vite. La contrainte de cisaillement (de la route sur le pneu) est dans le sens de la progression et les éléments sont pliés vers l'avant (courbe 2). Comme de plus en plus d'éléments entrent dans l'empreinte et défilent vers l'arrière, l'effort local croît linéairement. La force de cisaillement longitudinale chute à l'arrière où la pression de contact décroît et on sature le frottement entre le sol et la roue. Un glissement survient à l'arrière de la bande de roulement.

La courbe résultante (courbe 3) est la superposition des deux phénomènes précédemment décrits.

Le dernier diagramme montre la variation de la vitesse en fonction de position dans l'aire de contact. La vitesse diminue consécutivement à la réduction du rayon. Dans la partie arrière de l'empreinte le rayon augmente et on observe du glissement local, ce qui explique l'augmentation de vitesse.

Effort de freinage

La Figure 3.53 illustre le même phénomène que précédemment mais dans le cas d'un couple de freinage. Celui-ci produit une force dirigée vers l'arrière et l'empreinte est poussée vers l'arrière également, comprimant les éléments à l'arrière de la zone de contact tandis que les éléments de pneus situés dans la partie avant sont en extension. Pour un freinage modéré, les éléments adhèrent à la route et sont étendus. La contrainte de cisaillement dans les



Distribution of forces and sliding velocity over the contact length of a tire under the action of a braking torque M_B .

FIGURE 3.53 – Mécanisme de création d'un effort de traction d'après [13]

flancs croît linéairement le long de l'aire de contact. Lorsque l'empreinte se détend vers l'arrière, le glissement survient entre les éléments et la route.

3.8.2 Définition du taux de glissement longitudinal

On a vu que le mécanisme de création d'un effort de traction ou de freinage était provoqué par une variation de la vitesse de rotation entre la jante la vitesse de rotation équivalente à la vitesse linéaire. La variable cinématique associée aux efforts longitudinaux est appelé *taux de glissement longitudinal* (*Slip Ratio*). Il est défini comme suit :

$$SR = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\Omega}{\Omega_0} - 1 \quad (3.14)$$

où Ω_0 est la vitesse de rotation de la roue libre du véhicule qui avancerait à la même vitesse linéaire que le pneumatique. Si R_e est le rayon effectif de roulement du pneu on a évidemment la relation :

$$V = \Omega_0 R_e \quad (3.15)$$

et on peut obtenir la définition alternative du taux de glissement longitudinal :

$$SR = \frac{\Omega R_e}{V} - 1 \quad (3.16)$$

De la définition (3.16), on déduit plusieurs cas particuliers qu'il convient de mettre en évidence :

- $SR = 0$, roue libre.
- $SR = -1$, roue bloquée en freinage.
- $SR = +1$, roue développant un effort de traction et évoluant à une vitesse $\Omega = 2\Omega_0$.
- $SR = +\infty$, roue bloquée en traction.

La difficulté de la définition du taux de glissement selon la SAE réside dans le fait qu'elle introduit un traitement différent selon que l'on soit en freinage ou en traction. En freinage, le taux de glissement longitudinal varie entre 0 et -1 tandis qu'en traction, il varie entre 0 et $+\infty$. Dès lors de nombreux auteurs tels que Wong [26] préfèrent utiliser une définition différente du taux de glissement en traction :

$$\lambda_t = \left(1 - \frac{V}{\Omega R_e}\right) \quad (3.17)$$

et en freinage :

$$\lambda_b = \left(1 - \frac{\Omega R_e}{V}\right) \quad (3.18)$$

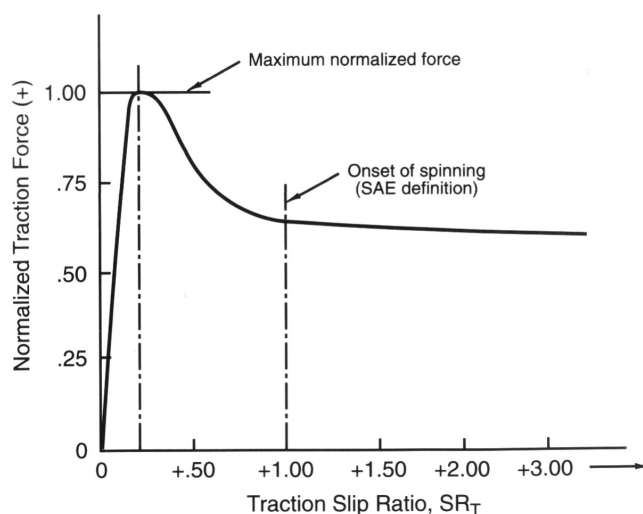


FIGURE 3.54 – Force de traction en fonction du taux de glissement longitudinal pour un pneu diagonal d’après [13]

ce qui permet de tracer des graphiques dont l’abscisse est un taux de glissement qui varie entre 0 et 100%.

3.8.3 Courbes d’efforts longitudinaux

Forces de traction et de freinage en fonction de SR

On peut mesurer expérimentalement la force de traction ou de freinage en fonction du taux de glissement que l’on impose en conditions stationnaires. On peut alors dessiner la courbe donnant la force longitudinale de traction ou de freinage en fonction du taux de glissement. Aux Figures 3.54 et 3.55, on a respectivement les forces de traction et de freinage en fonction de SR , taux de glissement conventionel SAE. La force longitudinale augmente d’abord de manière proportionnelle à l’augmentation du taux de glissement. La courbe devient ensuite fortement non linéaire. La courbe atteint un pic pour un taux de glissement entre 10 et 20% avant de diminuer et de tendre vers une asymptote oblique ou horizontale. Pour un taux de glissement de 100%, on tend vers une valeur de la force longitudinale significativement inférieure à la valeur de pic.

Les Figures 3.54 et 3.55 montrent l’effet de la dilatation de l’échelle des abscisses. Pour avoir une meilleure comparaison du phénomène de génération des forces longitudinales en traction et en freinage, on adopte la définition du

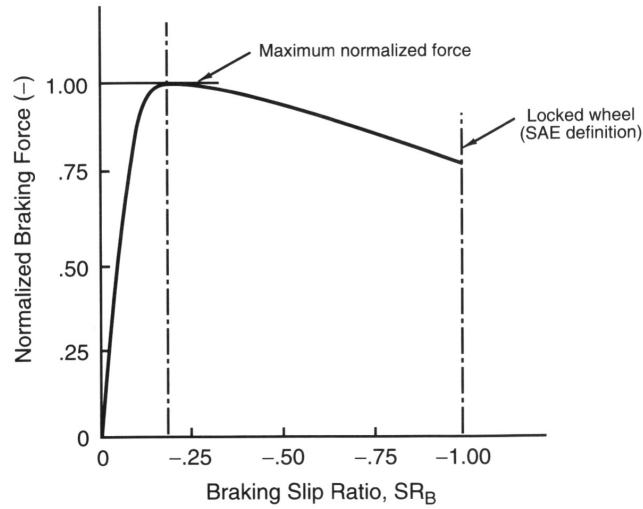


FIGURE 3.55 – Force de freinage en fonction du taux de glissement longitudinal pour un pneu diagonal d’après [13]

taux de glissement proposée par Wong [26] et rappelée aux équations (3.17) et (3.18). On obtient des courbes telles que celles de la Figure 3.56.

Par analogie avec le frottement de Coulomb, on a l’habitude définir le coefficient d’adhésion longitudinal μ_x comme le ratio entre la force longitudinale par unité de force verticale sur le pneumatique :

$$\mu_x = \frac{F_x}{F_z} \quad (3.19)$$

La force longitudinale augmente linéairement entre l’origine O et le point A. Dans cette portion correspondant à des taux de glissement faibles, on peut approcher la courbe par son approximation linéaire

$$F_x \simeq \frac{\partial F_x}{\partial \lambda} \lambda = C_\lambda \lambda \quad (3.20)$$

A partir de ce point, la courbe s’adoucit et on atteint un pic en B. Le maximum de la courbe de force de friction est atteint pour des valeurs de l’ordre de 15 à 20% de taux de glissement. A ce point, correspond le coefficient de friction de pic où le coefficient d’adhésion est maximum μ_P

$$\max_{\lambda} F_x = \mu_P F_z \quad (3.21)$$

Au delà du pic, la force d’adhésion diminue. Le frottement envahit l’aire de contact. Le freinage devient instable puisqu’une augmentation de taux

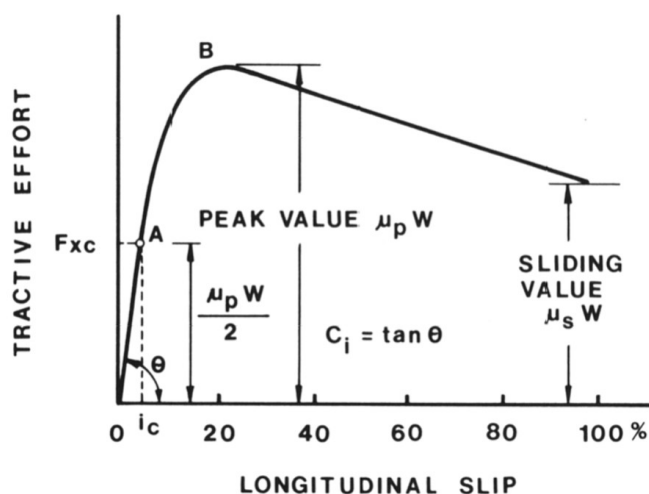


FIGURE 3.56 – Courbe type de force longitudinale en fonction du taux de glissement longitudinal d'après [26]

de glissement diminue encore la force opposée par le freinage. On atteint rapidement le blocage de la roue. Le phénomène est connu et est la raison d'être des systèmes ABS qui relâchent le couple de freinage pour diminuer le taux de glissement. Lorsque la roue est bloquée, la force de friction atteint la valeur de glissement, caractérisée par un glissement relatif d'ensemble dans l'aire de contact. Ce point est également défini par un coefficient d'adhérence en glissement μ_s :

$$F_x(\lambda = 100\%) = \mu_s F_z \quad (3.22)$$

Un modèle simple des forces de traction et de freinage en fonction du taux de glissement

Il n'y a pas de théories et de modèles simples qui permettent de prédire de manière quantitative les relations entre les valeurs de pic et de glissement. Toutefois des modèles simples permettent de prédire les tendances et les facteurs d'influence principaux et donc de comprendre la nature physique des processus à l'oeuvre. Une de ces théories a été énoncée par Julien pour comprendre la relation entre le taux de glissement longitudinal et les efforts de traction.

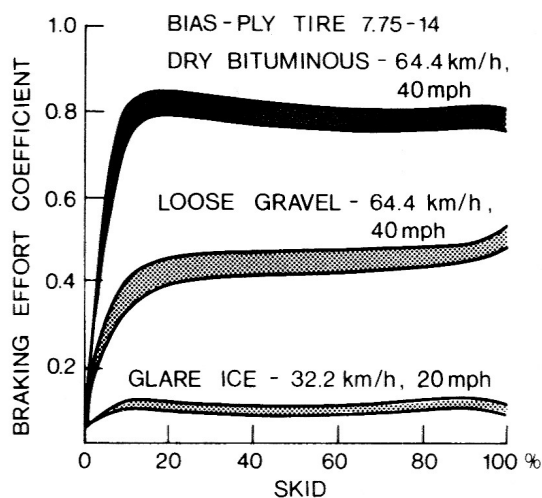


FIGURE 3.57 – Coefficient d’adhérence pour différentes conditions de fonctionnement et de revêtement d’après[26]

Influences des conditions opératoires sur les forces longitudinales

Les performances en freinage ou en traction des pneumatiques varient en fonction de nombreux facteurs d’influence. Les plus importants sont :

- La construction du pneumatique : carcasse diagonale, radiale ou diagonal renforcée par des ceintures ;
- La nature de la chaussée, la présence d’eau, de neige ou de glace ;
- La force normale sur le pneumatique ;
- La pression de gonflage ;
- La vitesse linéaire du véhicule.

La Figure 3.57 illustre les variations des coefficients de friction longitudinaux avec les conditions de route. A la Figure 3.58, on peut analyser la variation des coefficients d’adhésion pour différentes pression de gonflage. Ces Figures montrent que le coefficient d’adhésion ne varie que faiblement avec la construction du pneu et avec la pression de gonflage. Quelques valeurs représentatives des coefficients d’adhésion de pic μ_P et de glissement μ_S sont fournies à la Table 3.3.

D’autres paramètres opérationnels ont également une influence notable : la vitesse et la force normale sur le pneumatique. La Figure 3.59 montre l’influence de la vitesse sur la force de freinage pour un pneu de camion sur sol sec. L’influence de la vitesse impacte principalement la valeur du coefficient pour un glissement pu (SR=100 %). La valeur de μ_s diminue fortement avec

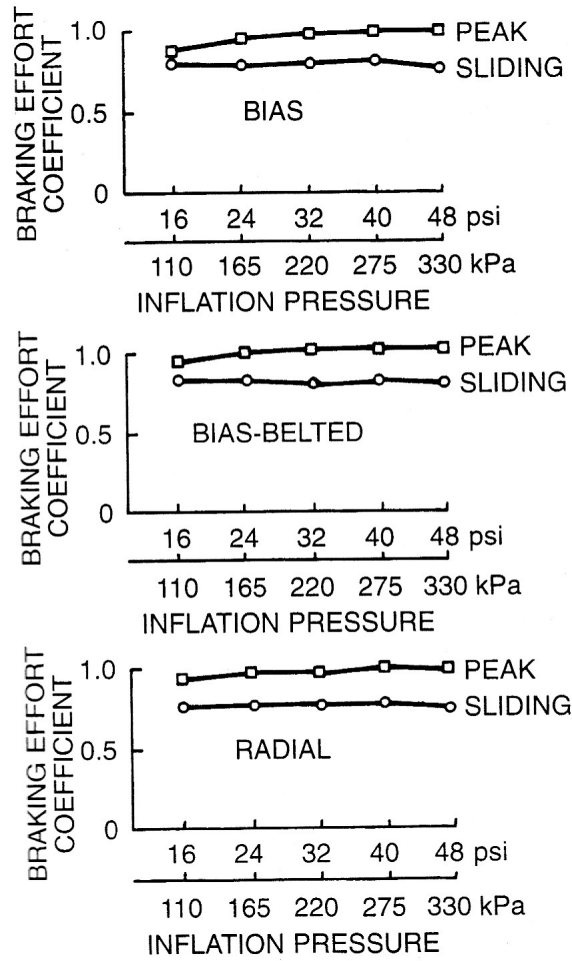


FIGURE 3.58 – Variation du coefficient d'adhérence de pic et de glissement d'ensemble pour différentes pressions de gonflage pour des pneus radiaux, diagonaux, diagonaux avec ceinture d'après[26]

| Surface | Peak Value μ_P | Sliding Value μ_S |
|----------------------------|--------------------|-----------------------|
| Asphalt and concrete (dry) | 0.8-0.9 | 0.75 |
| Asphalt (wet) | 0.5-0.7 | 0.45-0.6 |
| Concrete (wet) | 0.8 | 0.7 |
| Gravel | 0.6 | 0.55 |
| Earth road (dry) | 0.68 | 0.65 |
| Earth road (wet) | 0.55 | 0.4-0.5 |
| Snow (hard-packed) | 0.2 | 0.15 |
| Ice | 0.1 | 0.07 |

TABLE 3.3 – Valeurs moyennes des coefficients d’adhésion pour différentes surfaces. Source [26]

la vitesse. La Figure 3.60 montre à l’évidence l’effet de la charge verticale sur la force longitudinale pour un pneu de camion sur un asphalte sec. Le valeur de pic μ_P , la valeur de glissement μ_S , ainsi que la raideur de la courbe à l’origine augmentent avec la force verticale F_z .

3.9 Résistance au roulement

Lorsque le pneu roule à vitesse constante, on a constaté également qu’il faut développer un couple pour maintenir la vitesse constante, c’est le phénomène de *résistance au roulement*.

Les forces de résistance au roulement recouvrent des plusieurs effets provenant de sources assez différentes : le travail de déformation des pneumatiques, le frottement des roulements, le travail de la suspension, les défauts d’alignements, etc.

Pour un pneu qui roule librement, il est nécessaire d’appliquer un couple moteur pour contrebalancer le moment résistant. On a remarqué assez rapidement que l’expérience montre une relation de proportionnalité entre la résistance au roulement et la force verticale (ici le poids) qui est appliqué sur la roue. On peut donc écrire

$$\boxed{F_{RR} = f_{RR} F_z} \quad (3.23)$$

Le coefficient de résistance au roulement f_{RR} , rapport entre la force de résistance au roulement et la force normale, englobe toutes les propriétés et les phénomènes physiques compliqués et couplés qui existent entre le pneu et le sol.

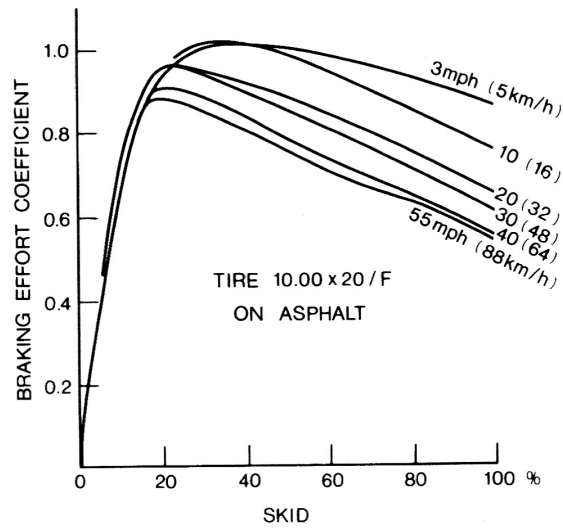


FIGURE 3.59 – Effet de la vitesse sur le coefficient d’adhérence longitudinal pour un pneu de camion sur asphalte d’après[26]

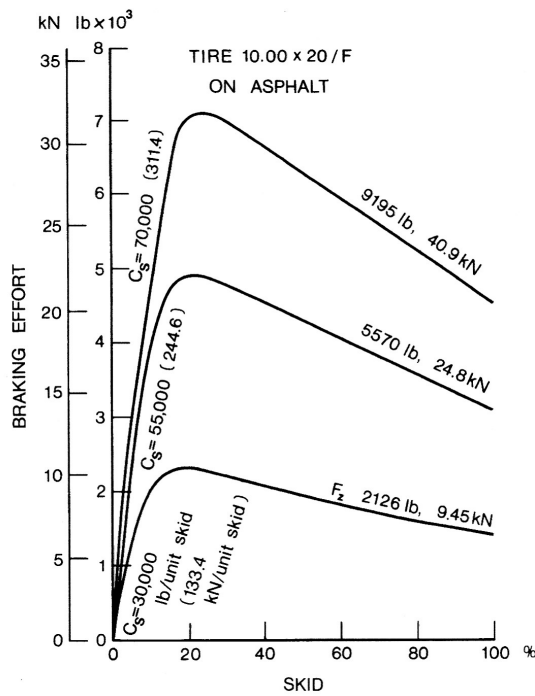


FIGURE 3.60 – Effet de la charge verticale F_z sur le coefficient d’adhérence longitudinal pour un pneu de camion sur asphalte d’après[26]

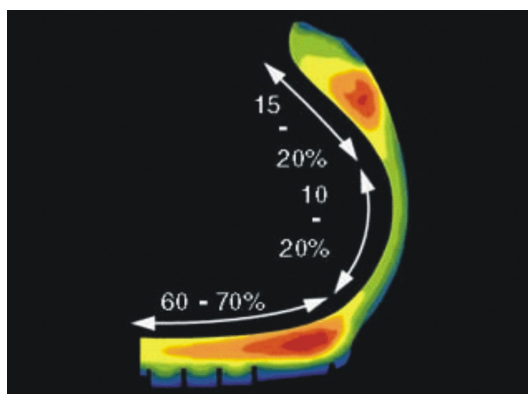


FIGURE 3.61 – Dissipation d'énergie dans un pneu en rotation

3.9.1 Origine de la résistance au roulement

Compte tenu de l'importance du phénomène de résistance au roulement, de nombreuses études expérimentales, analytiques ou numériques ont été entreprises en vue de comprendre le phénomène et son origine.

Expérimentalement, on détermine que la première cause de la résistance au roulement est l'hystérésis des matériaux viscoélastiques qui constituent le pneumatique lors de la déformation de la carcasse au cours du roulement. Les autres causes identifiées, mais qui ont une influence d'un ordre de grandeur inférieur, sont :

- Frictions lors des glissements dans certaines parties de l'aire de contact ;
- Circulation de l'air autour du pneumatique et dans la cavité autour de la roue ;
- Effet de ventilateur du pneu qui roule et qui dissipe de l'énergie à cause de la trainée de l'air sur la bande de roulement.

A titre d'exemple, Wong[26] cite une campagne de tests réalisée sur des pneus de camion. L'étude chiffre les contributions des chacune des causes de la dissipation d'énergie. L'hystérésis est responsable selon les cas de figure de 90 à 95 % des pertes d'énergie, le glissement et le frottement sur le sol contribuent pour 2 à 10 % alors que la résistance de l'air n'entre en compte que pour 1.5 à 3.5 % de la dissipation.

L'hystérésis du caoutchouc étant mis en cause dans le phénomène de résistance au roulement, on peut regarder la distribution de pression dans l'aire de contact du pneumatique. Suite au phénomène de roulement, la partie avant de l'aire de contact est en phase de compression tandis que dans la partie arrière, le caoutchouc est déchargé. Le matériau y oppose une réaction supérieure à la partie arrière. On observe donc une distribution de pression

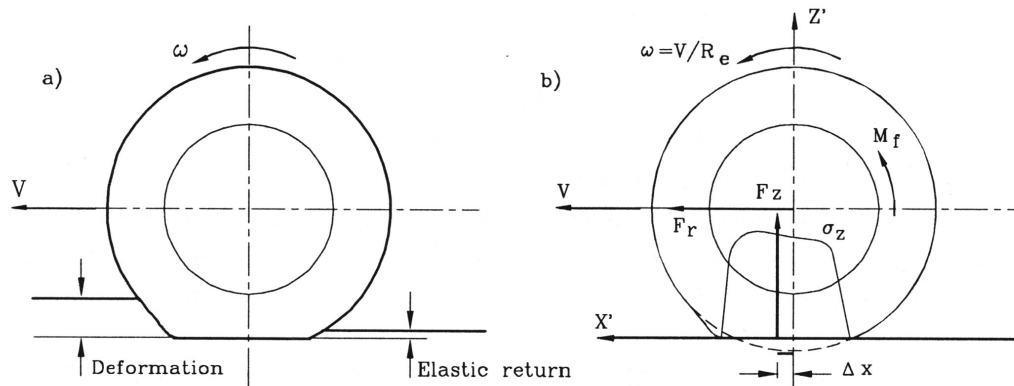


FIGURE 3.62 – Origine mécanique de la force de résistance au roulement

entre le sol et le pneu représentée à la Figure 3.62. La distribution est dissymétrique par rapport au centre de contact et la résultante des forces de pression est décalée d'une petite distance δx . Cette résultante, égale au poids agissant sur pneumatique, produit un moment autour de l'axe de rotation qui s'oppose à la rotation de la roue.

La réaction à la force de poids F_z produit un moment qui doit être compensé par un couple moteur si la voiture veut maintenir une vitesse constante. L'équilibre en rotation de la roue s'écrit :

$$M_T = F_z \delta x \quad (3.24)$$

Dans le cadre de l'étude du mouvement longitudinal, il est plus facile d'utiliser des forces horizontales et on essaie de remplacer le moment de traction autour de l'axe de la roue par une force longitudinale équivalente agissant sur le véhicule au niveau de l'aire de contact. On écrit :

$$M_T = F_{RR} R_e \quad (3.25)$$

L'équilibre en rotation permet d'écrire :

$$F_{RR} R_e = F_z \delta x$$

soit

$$F_{RR} = F_z \frac{\delta x}{R_e} = F_z f_{RR} \quad (3.26)$$

avec

$$f_{RR} = \frac{\delta x}{R_e} \quad (3.27)$$

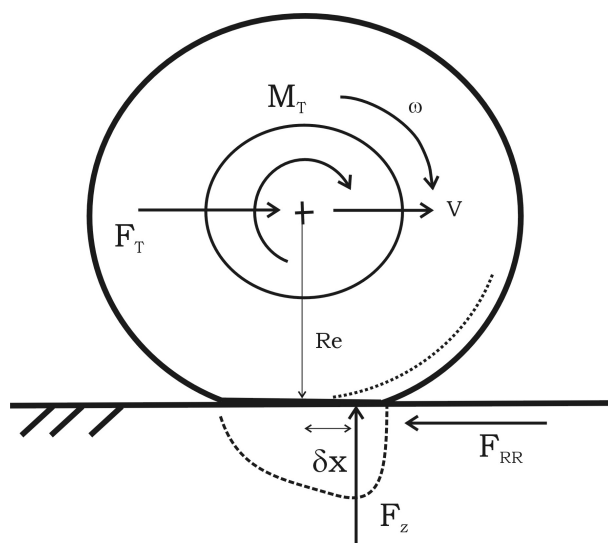


FIGURE 3.63 – Origine mécanique de la force de résistance au roulement

3.9.2 Facteurs d'influence de la résistance au roulement

La génération de chaleur créée par le phénomène d'hystérésis provoque une élévation de température, une diminution de la résistance à l'abrasion et une diminution de la résistance à la fatigue en flexion du matériau du pneu.

La résistance au roulement est affectée par tous les phénomènes qui jouent sur la déformation des parties du pneumatiques soumises à flexion / compression répétés, à savoir :

- La structure du pneu : la résistance au roulement des pneus à carcasse radiale est plus faible que celle des pneus à carcasse diagonale,
- Les conditions opérationnelles : la résistance au roulement diminue avec la pression de gonflage,
- La température de fonctionnement : la résistance au roulement diminue lorsque la température augmente,
- La vitesse au delà d'une certaine allure. L'apparition de vibrations et d'ondes de déformation stationnaires au dessus d'une vitesse seuil entraîne des pertes d'énergie supplémentaires, des dissipations de chaleur et une usure accélérée,
- Le glissement longitudinal et la dérive,
- La nature et la raideur de la surface de la route. La résistance au roulement est beaucoup plus basse sur des surfaces dures et lisses.

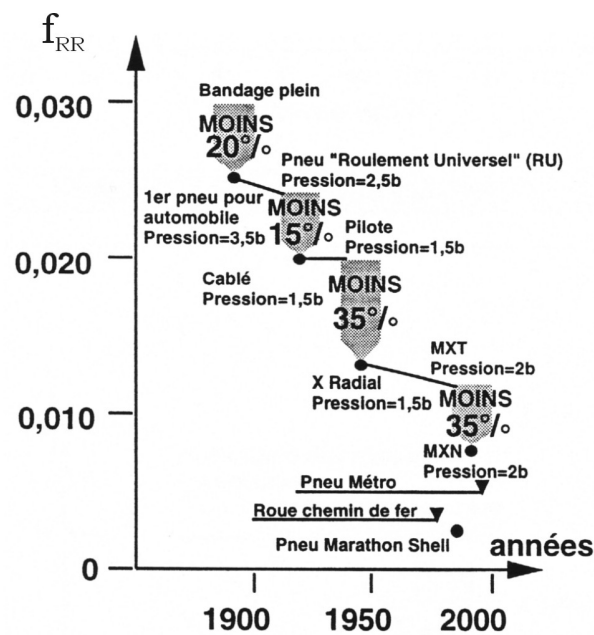


FIGURE 3.64 – Evolution technologique et réduction de la résistance au roulement des pneumatiques

Influence de la construction du pneumatique

La construction du pneumatique, l'arrangement de ses couches internes, la nature et les propriétés du caoutchouc et des fibres de renfort influencent clairement la résistance au roulement du pneumatique. La réduction de la résistance au roulement est le fruit d'une série d'innovations technologiques résumées à la Figure 3.64. La première innovation technologique a été le remplacement des bandages pleins par des pneumatiques creux et gonflés. Ensuite une seconde innovation majeure provient de l'utilisation (et surtout la fabrication !) de carcasses radiales en lieu et place de carcasses diagonales. Enfin plus récemment, l'utilisation d'additifs à base de silice a permis de contrôler l'hystérésis du caoutchouc aux différentes fréquences. Le façonnage de la gomme permet de placer un maximum d'hystérésis aux fréquences responsables de l'adhérence du pneumatique et, a contrario, de diminuer la dissipation d'énergie aux fréquences caractéristiques du roulement et de la résistance au roulement.

La Figure 3.65 montre que les pneus radiaux présentent une résistance roulement inférieure d'environ 20 % par rapport aux pneus diagonaux. Ils donnent également une valeur de vitesse critique plus élevée. Cela peut s'expliquer par la conception de la structure du pneu. La carcasse plus souple

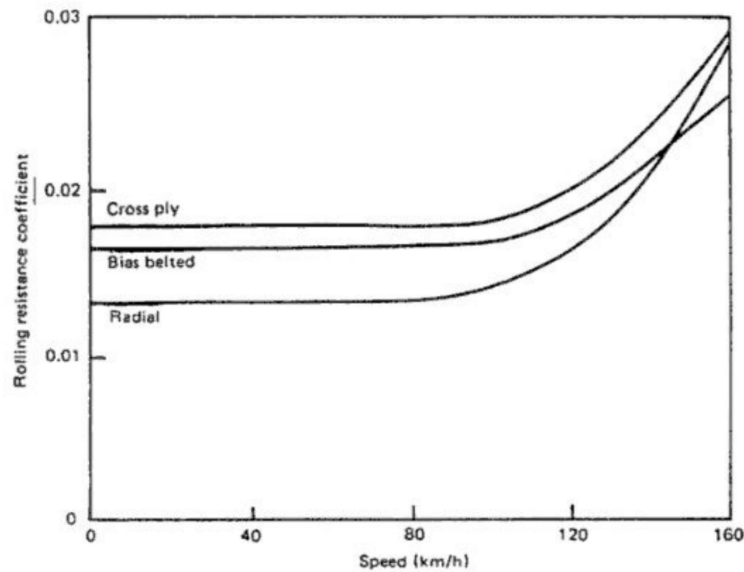


FIGURE 3.65 – Résistance au roulement pour des pneumatiques à carcasse radiale ou diagonale

entraîne moins de déformation du caoutchouc de la bande de roulement. Cet effet est amplifiée par l'utilisation de gommes avec des additifs de silice, pour lesquels les fabricants annoncent une réduction de 40 % par rapport aux pneumatiques radiaux conventionnels. Ces pneumatiques à faible résistance au roulement ou "éco" présentent une résistance au roulement deux fois inférieure à celles des pneumatiques à structure diagonale.

D'autres aspects de la conception ont également un impact notable sur la résistance au roulement, tels que le nombre et l'orientation des plis, la composition du caoutchouc et la conception de la bande de roulement. Les caoutchoucs naturels ont un amortissement plus faible que les caoutchoucs synthétiques, ce qui conduit à une résistance au roulement plus faible, mais au prix d'une vitesse critique plus basse et d'une durée de vie réduite. La raideur des ceintures et de la bande de roulement influencent la résistance au roulement comme le montre la Figure 3.66. Les pneumatiques avec des indices de vitesse et de raideur plus modestes présentent la plus faible résistance au roulement à basse vitesse. Par contre ils sont sujets à une apparition précoce de vibrations importantes à hautes vitesses et génèrent, par voie de conséquence, une résistance au roulement plus importante. Pour maintenir une faible résistance au roulement à haute vitesse, il faut monter des pneus à indices de vitesse et de charge élevés.

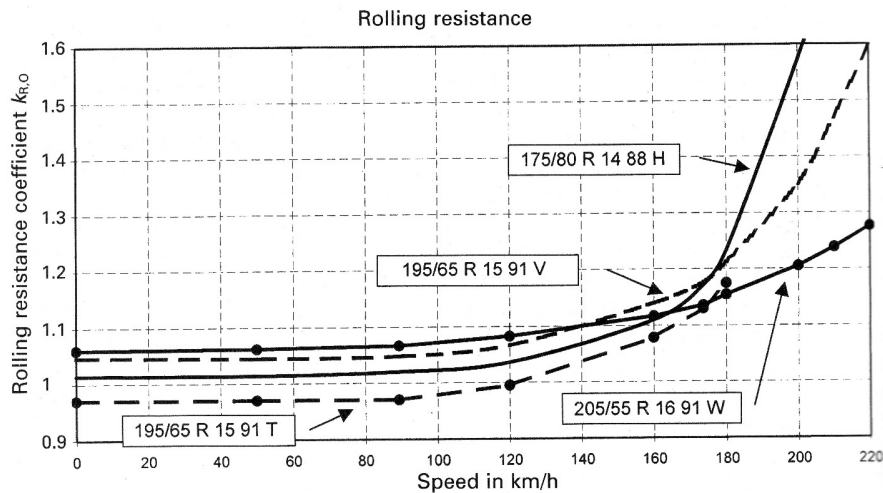


FIGURE 3.66 – Résistance au roulement pour des pneumatiques radiaux de différents indices de vitesse

Influence de la nature du sol

La nature du sol a une grande influence sur la valeur du coefficient de résistance au roulement. Plus le sol est dur, plus la résistance au roulement sera faible. À l'inverse on voit que pour les sols mous, le pneu tend à creuser un sillon et dissipe une quantité importante d'énergie dans la déformation du sol. Dans ce cas, il convient de diminuer la pression dans l'aire de contact en réduisant la pression de gonflage et en adoptant des profils de pneumatique présentant des empreintes très larges.

Le Tableau 3.9.2 donne quelques valeurs typiques du coefficient de résistance au roulement sur des sols de différentes natures. Alors que sur des sols rigides, le coefficient de résistance au roulement f_{RR} est de l'ordre de 0.01, il peut augmenter d'un ordre de grandeur sur des sols meubles avec beaucoup d'aspérités.

À la Figure 3.69, on constate l'impact d'un revêtement dégradé sur la résistance au roulement et par conséquent sur la consommation du véhicule. Un revêtement dégradé augmente le coefficient de résistance au roulement de 8 à 25 %. Ce résultat montre l'importance pour les gestionnaires de voirie de préserver la qualité du revêtement pour minimiser la consommation d'énergie du trafic routier.

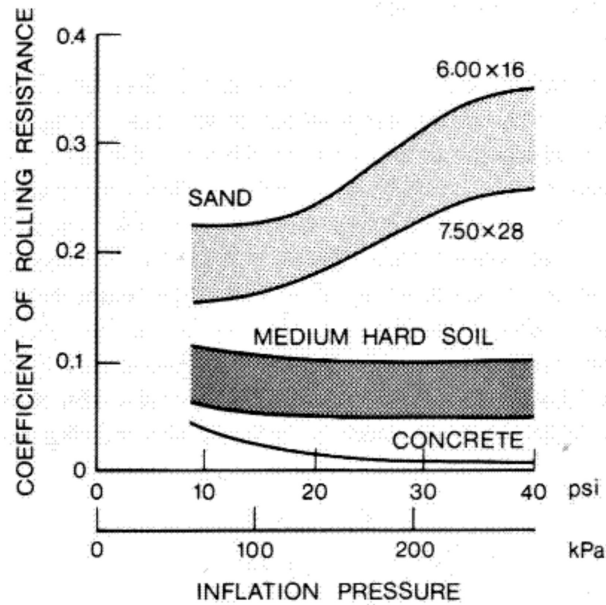


FIGURE 3.67 – Résistance au roulement pour des pneumatiques des sols de différentes natures

| Road Surface | Coefficient of Rolling Resistance |
|----------------------------|-----------------------------------|
| Pneumatic car tires on | |
| Large sett pavement | 0.015 |
| Small sett pavement | 0.015 |
| Concrete, Asphalt | 0.013 |
| Rolled gravel | 0.020 |
| Tarmacadam | 0.025 |
| Unpaved road | 0.05 |
| Field | 0.10 - 0.35 |
| Pneumatic truck tires on | |
| Concrete, Asphalt | 0.006 - 0.010 |
| Strake wheel in the fields | 0.14 - 0.24 |
| Track-type tractor | |
| In field | 0.07 - 0.12 |
| Railways | |
| Wheel on rail | 0.001 - 0.002 |

TABLE 3.4 – Coefficient de Résistance au Roulement pour différentes surfaces selon Bosch [2]

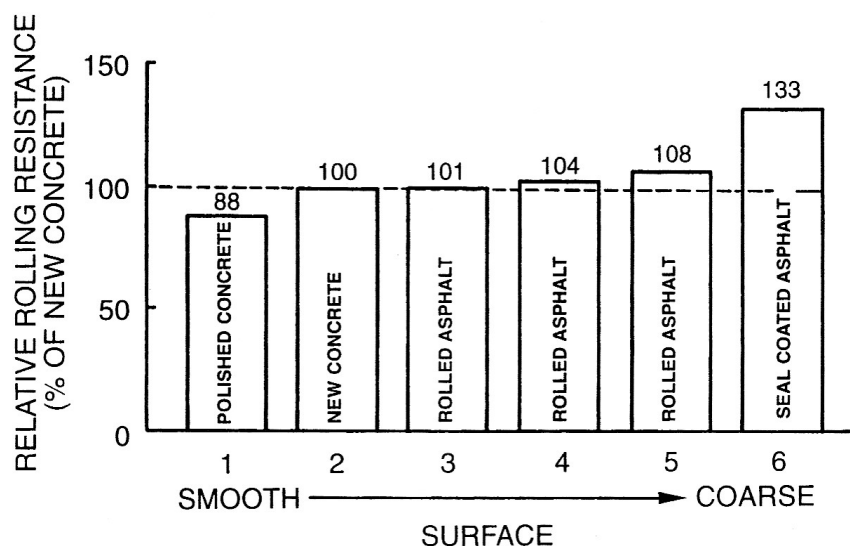


FIGURE 3.68 – Impact de la qualité du revêtement sur le coefficient de résistance au roulement

Influence de la vitesse

Les Figures 3.65 et 3.66 montrent l'évolution typique du coefficient de résistance au roulement avec la vitesse. A basse vitesse, le coefficient de roulement reste constant. Au delà d'une certaine vitesse, généralement 80 à 100 km/h, la résistance au roulement connaît une croissance rapide.

La croissance du coefficient de résistance au roulement à haute vitesse peut s'expliquer par le développement d'ondes vibratoires stationnaires sur la circonférence du pneu comme illustré à la Figure 3.69. La Figure 3.70 montre les premiers mode de vibration des pneumatiques. Les fréquences de ces modes se situent au alentours aux alentours de 1000 Hz. En roulant à haute vitesse, le contact répété avec le sol excite les premiers modes du pneu et crée des ondes stationnaires. Ces nouvelles déformations du pneumatique dissipent de plus en plus d'énergie et on assiste à une croissance rapide de la résistance au roulement. Ces vibrations et ces ondes de déformation stationnaires entraînent des dissipations d'énergie importantes, un libération de chaleur et une usure accélérée. On observe ainsi une forte surchauffe qui peut finir par détruire le pneu au-delà d'une vitesse critique.

L'apparition d'ondes stationnaires sur la circonférence du pneu (Fig. 3.69), en particulier à la sortie de la zone de contact, conduit à une sorte de "lift-off" du pneu à l'arrière de la zone de contact, avec une répartition de la

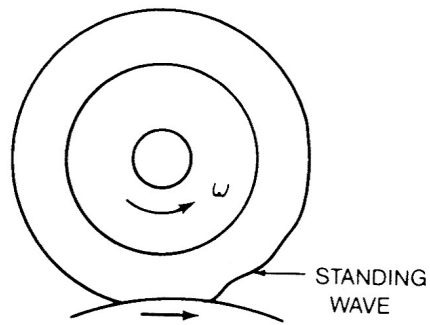


FIGURE 3.69 – Formation d'ondes stationnaires dans le pneus à haute vitesse

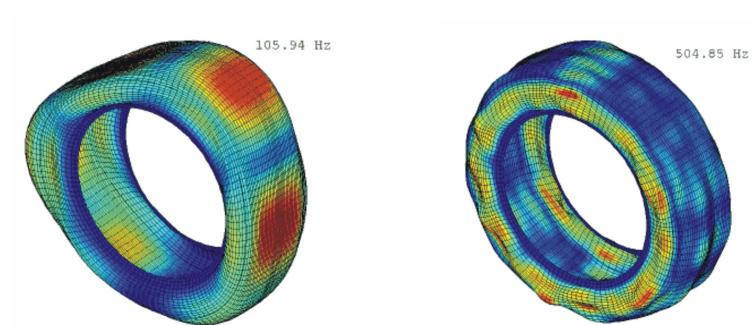


FIGURE 3.70 – Premiers modes de vibration naturelle des pneumatiques

pression de contact qui se déplace vers la partie avant de la zone de contact. Comme on l'a vu précédemment, la résistance au roulement s'explique par le moment résultant du décentrement de la résultante verticale par rapport au centre de la roue. Ce moment est augmenté en cas d'ondes stationnaires. En effet l'onde stationnaire a tendance à réduire la pression de contact locale dans la partie arrière de la zone de contact, voire même à se détacher de la surface. Par conséquent, la résultante des pressions de contact se déplace sur la partie avant de la zone de contact. Il en résulte un plus grand moment par rapport à l'axe de rotation de la roue.

On doit remarquer que l'apparition d'ondes stationnaires sur la circonférence du pneu dépend de la masse linéique de la bande de roulement et de sa raideur. L'influence de l'allègement de la bande de roulement a une influence complexe. D'une part la réduction de la masse de la partie circonférentielle du pneu diminue la résistance au roulement à basse vitesse. D'autre part elle entraîne un affaiblissement de la raideur par rapport aux forces centrifuge et elle conduit à une augmentation des vibrations du pneu à haute vitesse. Enfin, une masse plus faible de la bande de roulement et des ceintures a tendance à augmenter les fréquences propres des vibration circonférentielles du pneu, et donc à abaisser la *vitesse critique*. Les deux effets ont des effets contradictoires. Pour ne pas simplifier, l'impact combiné sur la vitesse critique dépend également de la rigidité des flancs qui est plus faible pour les pneus radiaux.

L'allure des courbes du coefficient de résistance au roulement suggère une expression sous la forme d'un polynôme.

$$f_{RR} = f_0 + \sum_{k=1}^N f_k V^k$$

La SAE recommande une expression du second ordre, même si d'autres études mettent en évidence qu'une expression de quatrième ordre rend mieux compte de l'augmentation brutale de la force de résistance au roulement à haute vitesse et que, par ailleurs, le terme du second ordre peut être négligé face aux forces aérodynamiques :

$$f_{RR} = f_0 + f_1 \frac{V}{100} + f_4 \left(\frac{V}{100} \right)^4 \quad (3.28)$$

où V est mesuré en km/h et où les coefficients f_0 , f_1 et f_4 sont des fonction de la pression des pneumatiques, de la vitesse d'homologation du pneumatique.

Au contraire, la SAE recommande de considérer un polynôme d'ordre 2. Les termes d'ordre 0 et 2 sont dominants et on a tendance à négliger

le terme linéaire. L'expression suivante est communément adoptée pour les calculs préliminaires de performance :

$$f_{RR} = f_0 + f_2 V^2 \quad (3.29)$$

Cette expression présente l'intérêt d'être formellement comparable avec celles des forces aérodynamiques et de se prêter à une expression plus efficace des forces de résistance à l'avancement du véhicule. Cependant, on observe que la description du second ordre ne montre pas suffisamment la forte augmentation du coefficient de résistance au roulement à grande vitesse, comme observé expérimentalement. L'approximation d'ordre supérieur (ordre 4) devrait alors être préférée si le phénomène nécessitait d'être pris en considération de manière plus précise.

Pour les pneumatiques à carcasse radiale utilisés pour des véhicules de passagers, Wong [26] suggère de travailler avec l'expression suivante :

$$f_{RR} = 0.0136 + 0.40 \cdot 10^{-7} V^2 \quad (3.30)$$

tandis que pour les pneumatiques radiaux, on prendra :

$$f_{RR} = 0.0169 + 0.19 \cdot 10^{-6} V^2 \quad (3.31)$$

avec V en km/h. Pour les camions on peut utiliser (Ref. Wong [26]) :

$$f_{RR} = 0.006 + 0.23 \cdot 10^{-6} V^2 \quad (3.32)$$

Influence de la pression de gonflage et de la charge verticale

L'influence de la pression de gonflage est visible à la Figure 3.67. Sur un sol dur, la pression de gonflage raidit le pneu et diminue la déformation du pneu dans la bande de roulement et dans les flancs au droit de l'aire de contact. Moins de déformation signifie également moins de dissipation d'énergie. La vitesse critique augmente aussi avec la pression de gonflage. La pression de gonflage conduit donc à diminuer la résistance au roulement.

L'augmentation de la charge du pneu entraîne une plus grande déformation, et donc une résistance au roulement accrue.

Une augmentation de la température entraîne une augmentation de la pression de gonflage, ce qui diminue la résistance au roulement et la dissipation thermique. Ceci conduit à un effet stabilisateur sur la température.

La Figure 3.71 extraite de Popov et al. [19] montre que la résistance au roulement est presque proportionnelle à la charge sur le pneu. La pente

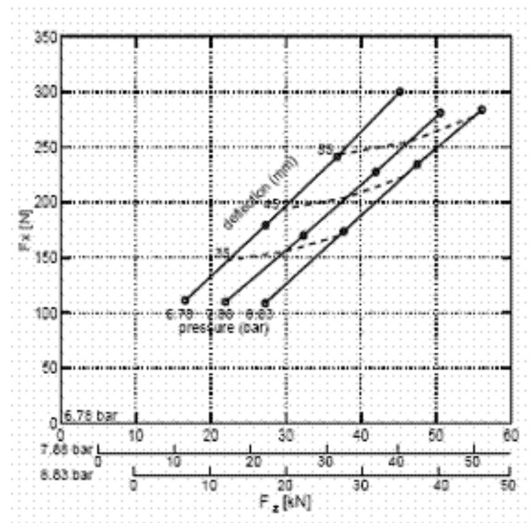


FIGURE 3.71 – Résistance au roulement en fonction de la charge, de la pression et de la déformation des pneus [19]

des droites augmente légèrement lorsque la pression interne diminue. La résistance au roulement augmente donc légèrement. Des déformations identiques du pneu donnent lieu à une résistance au roulement plus élevée pour une pression de pneu plus élevée.

La SAE a proposé une formule empirique pour décrire la résistance au roulement en fonction de la pression de gonflage p [N/m^2], de la vitesse d'avancement V [m/s] et de la charge verticale du pneumatique F_z [N]

$$f_{RR} = \frac{K}{1000} \left(5.1 + \frac{5.5 \cdot 10^5 + 90 F_z}{p_i} + \frac{1100 + 0.0388 F_z}{p_i} V^2 \right) \quad (3.33)$$

Le facteur K est de 0.8 pour les pneus radiaux et de 1.0 pour les pneus diagonaux. La Figure 3.72 montre l'allure des courbes exprimant la résistance au roulement en fonction de la vitesse pour différents paramètres de charge et pression interne du pneu conformément à l'expression (3.33).

Pour un sol mou, l'expérience montre que l'effet inverse se produit. Le pneu surgonflé creuse un plus grand sillon dans le terrain meuble et dissipe d'avance d'énergie dans sa course. Dans cette situation, on recommande de dégonfler les pneumatiques pour diminuer la résistance au roulement.

On notera également que l'augmentation de gonflage diminue également l'usure du pneumatique. Pour les pneus à carcasses radiales, l'effet est beaucoup moins perceptible. A cause de la souplesse du flanc, on garde une meilleure distribution de pression dans l'aire de contact et l'usure reste stable.

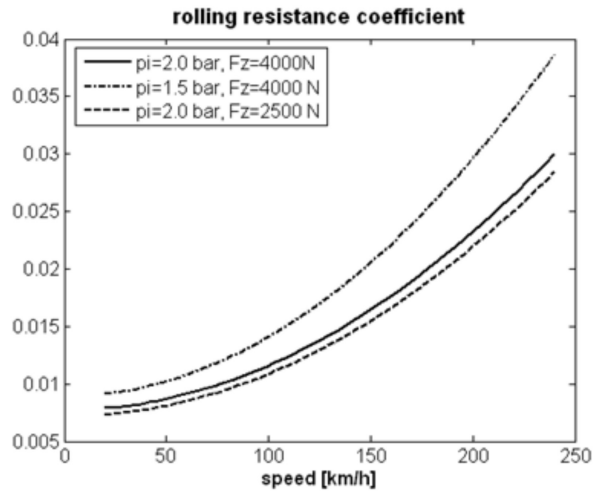


FIGURE 3.72 – Résistance au roulement pour différents pression de gonflage et de charge verticale

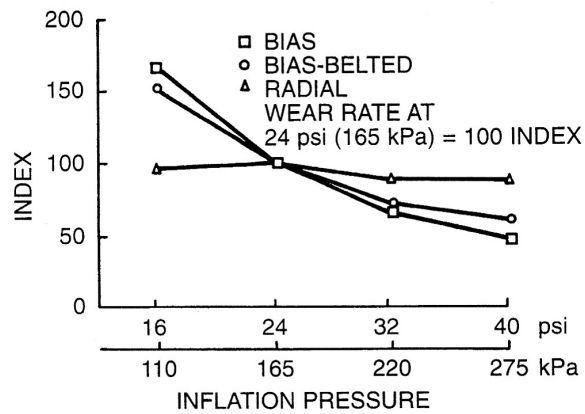


FIGURE 3.73 – Influence de la pression de gonflage sur l'usure du pneumatique [26]

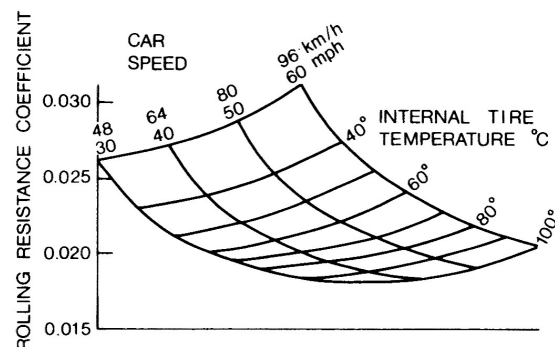


FIGURE 3.74 – Effet de la température interne du pneumatique sur la résistance au roulement

Influence de la température de fonctionnement

L'amortissement interne du caoutchouc diminue avec l'augmentation de la température. En conséquence, la résistance au roulement diminue aussi. De plus, le frottement entre la route et le pneu diminue également avec la température, ce qui entraîne une réduction de la contribution du glissement local à la résistance au roulement. En revanche, si la résistance au roulement est moins élevée, la dissipation de chaleur diminue et réduit d'autant l'échauffement du pneumatique. Par conséquent, la diminution de la résistance au roulement tend aussi à stabiliser la température du pneu.

L'effet de la température est visible aux Figures 3.74 et 3.75. La Figure 3.76 illustre la variation de la température lors d'un démarrage pour un pneu radial 184/82R13 sur un tambour de 2,5 m avec une charge de 4 kN et une pression de pneu de 1.5 bar. On observe un accroissement progressif de la température pour atteindre une température stabilisée. Au cours du processus de mise en température, la résistance au roulement diminue pour atteindre une asymptote.

Influence de la présence d'un angle de dérive

La dérive de la roue a un grand impact sur la résistance au roulement. L'angle de dérive α est défini comme l'angle entre, d'une part, la vitesse locale de la roue mesuré à l'axe de rotation, et, d'autre part, l'intersection du plan horizontal et le plan de symétrie de la roue perpendiculaire à l'orientation de rotation. Un angle de dérive α non nul, éventuellement en combinaison ou non avec un certain carrossage, conduit à une force latérale perpendiculaire au plan du pneu. La situation est décrite à la Figure 3.77. Comme le pneu

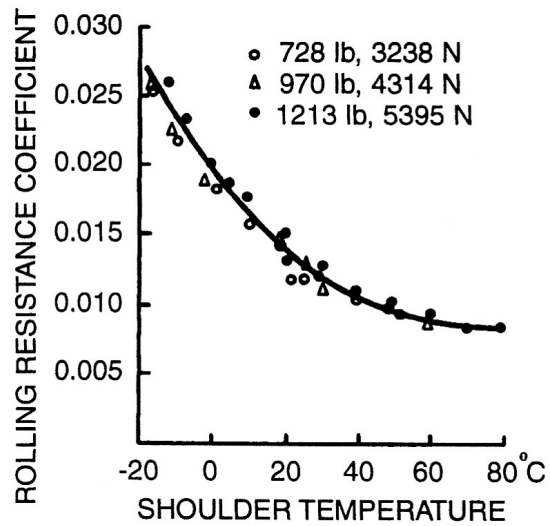


FIGURE 3.75 – Effet de la température du flanc du pneumatique sur la résistance au roulement pour un pneu P195/75 R14 [26]

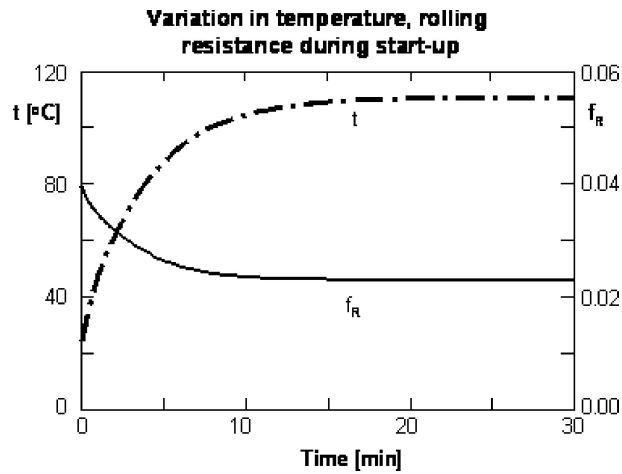


FIGURE 3.76 – Saturation de la température et de la résistance au roulement au démarrage (sur un tambour de 2,5 m)

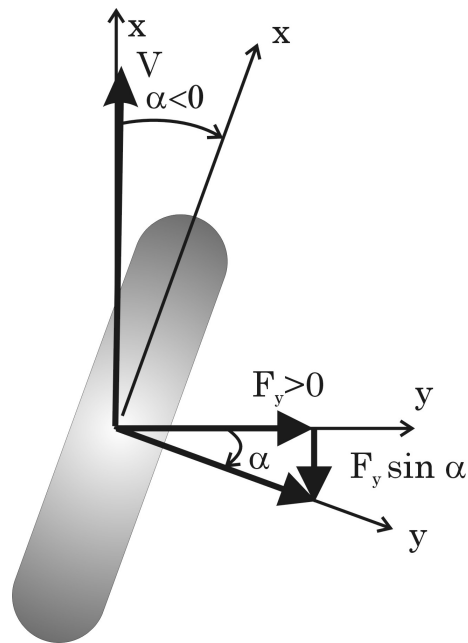


FIGURE 3.77 – Influence de la présence d'un angle de dérive sur la résistance à l'avancement

présente un angle par rapport au vecteur vitesse, la force latérale créée par le pneu donne lieu à deux composantes dans le repère la vitesse. La première est une force perpendiculaire au vecteur vitesse : $F_y \cos \alpha$ et une seconde qui est parallèle à la vitesse mais dans le sens opposé : $F_y \sin \alpha$. Cette dernière composante s'oppose à la direction du mouvement et elle doit être compensée par un surcroît de force propulsive. Elle est donc perçue comme une force de résistance à l'avancement.

Pour un angle de dérive α imposé, la force latérale vaut :

$$F_y \simeq C_\alpha \alpha$$

où C_α est rigidité en virage pour des angles de dérives supposés petits. Si on impose l'angle de dérive α , la projection de F_y sur la direction d'avance du véhicule donne :

$$F_{RES} = F_y \sin \alpha \simeq C_\alpha \alpha^2$$

Même si la composante longitudinale de la force d'envirage est petite parce que l'angle de dérive est petit, l'importance de cette composante est loin d'être négligeable par rapport à la résistance au roulement comme le souligne l'exemple numérique suivant. Supposons que l'on ait un angle de

dérive d'un degré

$$1^\circ = 1.7452 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

et une rigidité en virage approchée de façon conservatrice par

$$CC_\alpha \simeq 10 \text{ N/N/rad}$$

on obtient une contribution à la résistance à l'avancement de l'ordre de

$$F_{RES} = 10.0 (1.7452 \cdot 10^{-2})^2 F_z = 0.003 F_z$$

soit une contribution au coefficient de résistance au roulement de l'ordre

$$F_{RES}(\alpha = 1^\circ) = 0.003$$

ce qui est loin d'être négligeable par rapport au coefficient de résistance au roulement f_{RR} sur une route sèche en béton à angle de dérive nul qui vaut approximativement

$$f_{RR} \sim 0.010$$

Par conséquent, un angle de dérive différent de zéro a un impact important sur la résistance au roulement. Il faut donc prendre soin d'exclure toute force latérale parasite comme par exemple un mauvais réglage de la géométrie des suspensions.

Pour des raisons similaires, le carrossage contribue aussi à la résistance au roulement. Avec une roue non perpendiculaire au sol, une force latérale locale se produit. L'importance de celle-ci peut être discutée de la même manière que la force latérale pour un angle de dérive non nul. En outre, dans des conditions combinées de carrossage et de dérive, on produit un moment d'alignement M_z , qui donne lieu à une contribution au moment autour de l'axe de rotation.

$$M_y = M_z \sin(\gamma)$$

Ce moment s'oppose à la rotation et doit être compensé par un couple moteur supplémentaire M_y .

Influence de la présence d'un effort longitudinal

La partie adhérente de l'aire de contact du pneu est plus importante en présence d'une force de traction ou de freinage, ce qui conduit à une augmentation de la résistance au roulement. La génération de forces longitudinales s'accompagne toujours d'un certain glissement dans une partie de la zone de contact. Le freinage et la traction affectent la déformation de la surface de

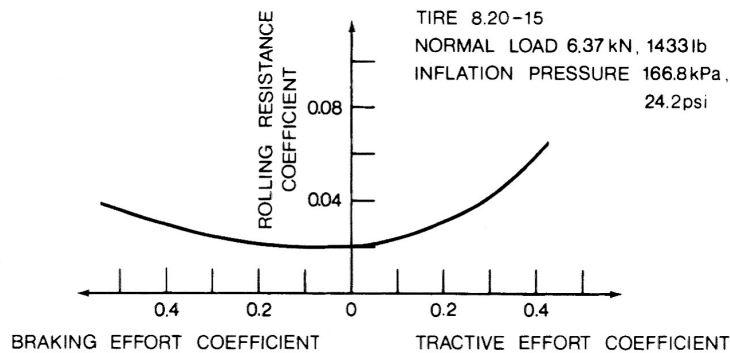


FIGURE 3.78 – Effet d’un effort longitudinal (traction/freinage) sur la résistance au roulement

contact, ce qui peut avoir un impact additionnel sur la résistance au roulement, en plus de l’apparition d’un glissement local.

En cas de la présence d’une force de traction modérée, la résistance au roulement peut diminuer de 15% à 25% par rapport aux conditions de roue libre.

Influence de la présence d’eau et de neige

En présence d’eau sur la route, le pneu doit repousser une certaine quantité d’eau. On observe alors une résistance au roulement supplémentaire. Des études expérimentales montrent que le surcroît de résistance à l’avancement est une fonction de la hauteur d’eau h [mm], de la vitesse v [km/h] et de la largeur w [cm] du pneu. Cette résistance augmente avec la vitesse jusqu’au moment où le pneu commence à flotter sur l’eau (phénomène d’aquaplaning). Au-delà de ce point, la résistance n’augmente plus avec la vitesse.

Des études expérimentales montrent que l’effet de la vitesse sur la force de résistance peut s’exprimer comme suit :

$$F_{Water} \simeq A w V^n \quad n > 1 \quad (3.34)$$

où w est la largeur du pneumatique et l’exposant n est approximativement égal à $n = 1.6$ si $h > 0.5$ mm. Pour $h = 0.2$ mm, n peut être approché par $n = 2.2$. La valeur de A dépend de la hauteur d’eau h . Certains résultats concernant la résistance au roulement dans des conditions d’aquaplanage sont présentés dans la Figure 3.79.

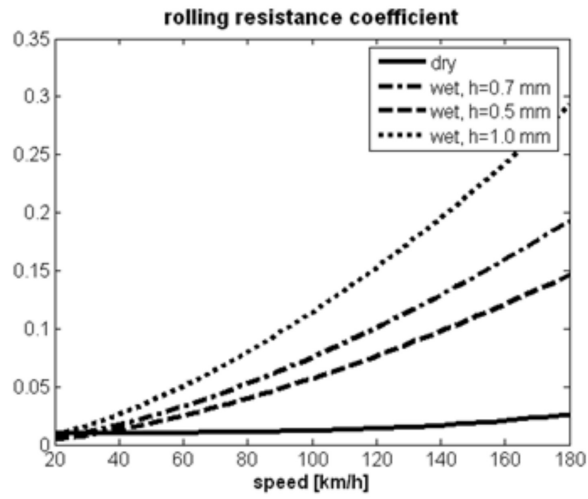


FIGURE 3.79 – Effet de la hauteur d'eau sur la route sur la résistance au roulement

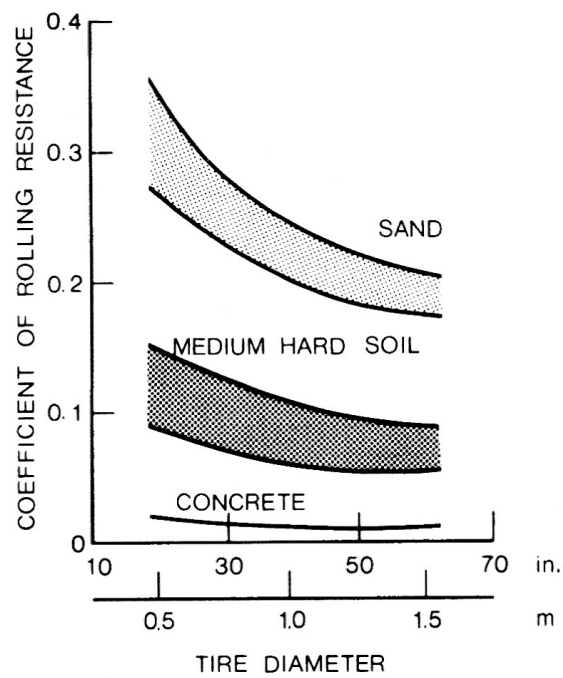


FIGURE 3.80 – Effet de la taille de la roue sur la résistance au roulement

Influence de l'usure de la bande de roulement et des dimensions du pneumatique

La résistance au roulement diminue avec l'usure. Les pertes par hystérésis se produisent surtout dans la bande de roulement. Par conséquent, réduire la quantité de matériau de la bande de roulement conduit à une diminution de la résistance au roulement.

Les deux paramètres géométriques du pneu ont un effet sur la résistance au roulement :

- Le rayon du pneu
- Le rapport d'aspect du boudin (hauteur de section / largeur de pneu)

La résistance au roulement diminue lorsque l'on augmente le rayon extérieur ou lorsque l'on diminue le rapport d'aspect (pneus à profil bas). Par conséquent, les pneus plus petits ont un coefficient de résistance au roulement plus élevé. Toutefois, ces pneumatiques sont généralement utilisés pour les voitures plus légères dont la charge verticale est plus faible, ce qui compense partiellement l'augmentation de résistance au roulement.

Gillespie [5] tente une formule résumant ces considérations en écrivant :

$$f_{RR} = C \frac{F_z}{2 R_u} \sqrt{\frac{h_t}{w_t}} \quad (3.35)$$

où C est une constante fonction de la dissipation intrinsèque du matériau du pneumatique, F_z est la charge verticale sur le pneu, $2 R_u$ est le diamètre extérieur du pneu, h_t la hauteur du bandage pneumatique et w_t la largeur de la section du pneu.

3.10 Opérations combinées

On entend par *opérations combinées*, les situations pour lesquelles le pneumatique développe simultanément des forces longitudinales (freinage ou accélération) et des forces latérales.

3.10.1 Généralisation de la définition du taux de glissement en présence de forces latérales

En présence d'un angle de dérive, le vecteur vitesse n'est plus aligné avec le plan moyen du pneumatique. Dès lors, la vitesse longitudinale perçue par le pneu n'est pas le module du vecteur vitesse V , mais bien $V \cos \alpha$. Dans ces conditions, il convient de modifier la définition du taux de glissement et de



FIGURE 3.81 – Prise de virage combinant forces longitudinales et latérales

prendre en compte la composante longitudinale du vecteur vitesse uniquement. Le taux de glissement fait l'objet de plusieurs définitions légèrement différentes :

- Définition SAE (SAE J670)

$$S = (\Omega R_e / V \cos \alpha) - 1 \quad (3.36)$$

où R_e le est rayon effectif en roue libre à angle de dérive nul.

- Définition TIRF de Calspan :

$$SR = (\Omega R_l / V \cos \alpha) - 1 \quad (3.37)$$

où R_l est rayon chargé (mesuré entre la ceinture et le sol)

- Le 'Practical slip quantity' de Pacejka

$$K_x = (\Omega R_e / V \cos \alpha) - 1 \quad (3.38)$$

et l'Independent slip quantity :

$$s_x = (V \cos \alpha / \Omega R_e) - 1 \quad (3.39)$$

- Sakai (JSAE) définit deux taux de glissement. Pour la traction

$$S_t = (V \cos \alpha / \Omega R_e) - 1 \quad (3.40)$$

et le taux de glissement en freinage

$$S_b = (\Omega R_e / V \cos \alpha) - 1 \quad (3.41)$$

3.10.2 Expérience de Sakai

L'interaction entre les deux phénomènes de traction / freinage et de forces d'envirage et est mise en évidence en étudiant les résultats de l'Expérience de Sakai menée au Japan Automotive Research Institute (JARI). Il s'agit d'un des seuls ensembles complets de données disponibles dans le public. Les résultats ont été obtenus pour un petit pneu de véhicule de tourisme avec une charge verticale de 400 kg (882 lb) et une vitesse 20 km/h (12.4 mph). La définition des taux de glissement adoptée dans cette étude est la suivante :

— Traction

$$S_t = \frac{V \cos \alpha}{\Omega R_e} - 1 \quad (3.42)$$

— En freinage

$$S_b = \frac{\Omega R_e}{V \cos \alpha} - 1 \quad (3.43)$$

Avec cette définition, le taux de glissement en roue libre vaut $S_t = 0$, tandis que la roue bloquée en freinage donne un taux de glissement de $S_b = 1$. En traction, la roue en spin (accélération) est caractérisée par un taux de glissement $S_t = -1/2$ et le patinage avec véhicule à l'arrêt (en accélération) correspond à une valeur $S_t = -1$.

Les résultats de l'expérience sont présentés aux Figures 3.82 à 3.85. Les Figures 3.82 et 3.83 sont les plus faciles à interpréter. A la Figure 3.82, on observe clairement la réduction de la force d'adhérence longitudinale avec l'accroissement d'un angle de dérive. A la Figure 3.83, les courbes étant paramétrées en fonction de l'angle de dérive, on observe la diminution de la force latérale F_y avec l'application d'un taux de glissement longitudinal de plus en plus important. La Figure 3.84 donne l'influence du paramètre taux de glissement longitudinal sur la courbe de angle de dérive vs force latérale. Enfin la Figure montrent que l'application d'un angle de dérive réduit progressivement la force de freinage ou de traction pour un taux de glissement longitudinal donné.

3.10.3 Mise en évidence du phénomène de couplage

L'intuition physique nous suggère que les phénomènes de friction longitudinale et latérale sont intimement liées puisque les deux phénomènes font intervenir la déformation de cisaillement du caoutchouc dans l'aire de contact. Néanmoins au delà d'un certain niveau de déformation, on constate que les forces développées entre le caoutchouc et la route dépassent la capacité de frottement des deux matériaux en contact et qu'un glissement local apparaît. Dès lors, la partie de l'aire de contact saturée au niveau de sa

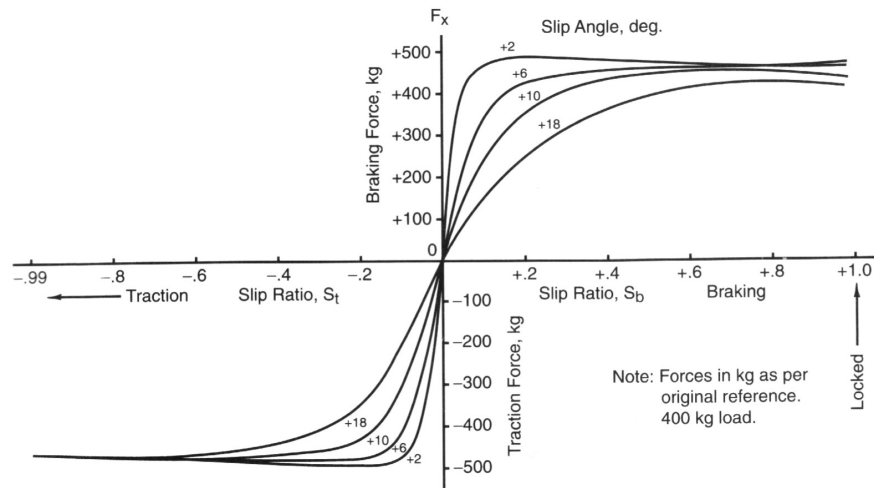


FIGURE 3.82 – Forces de freinage / traction en fonction du taux de glissement longitudinal pour différents angles de dérive d'après [13]

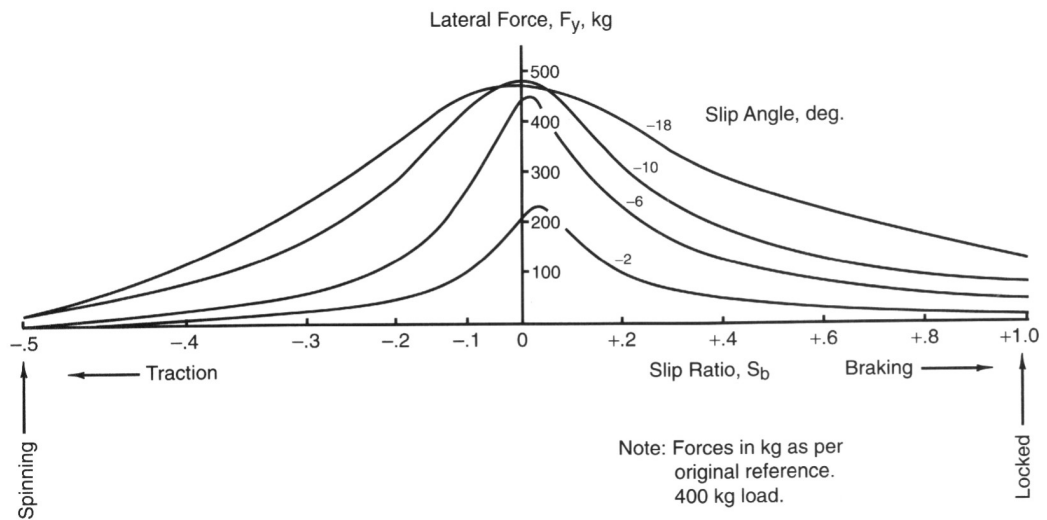
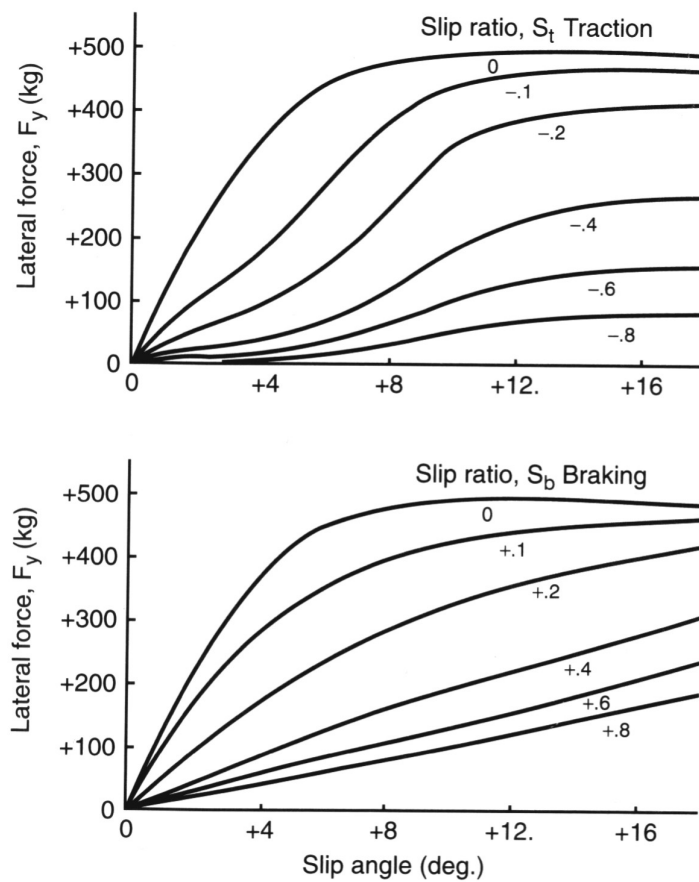
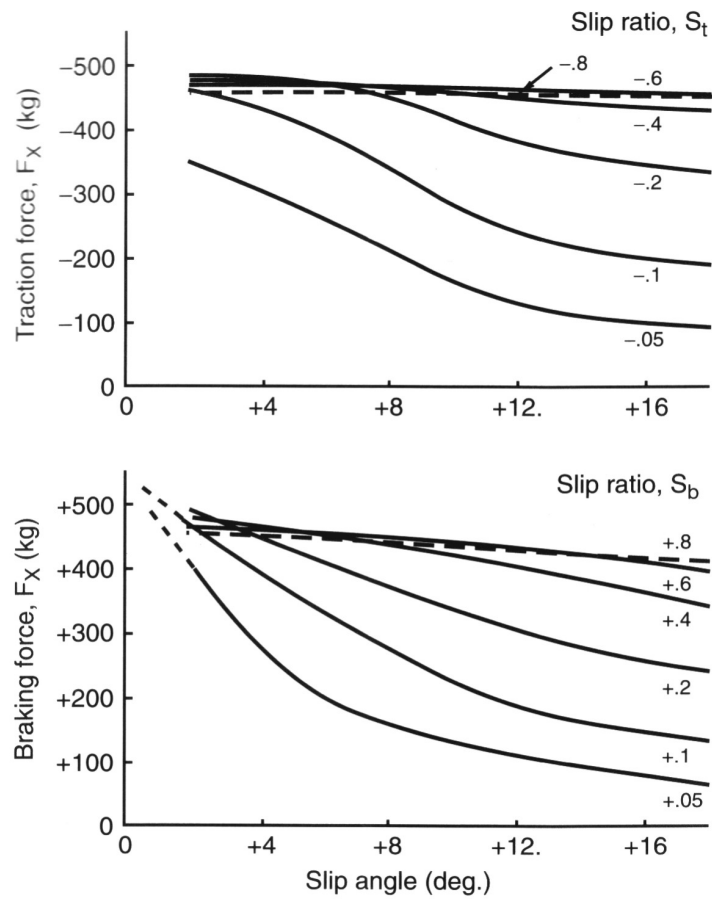


FIGURE 3.83 – Forces latérales en fonction de l'angle de dérive pour différents taux de glissement longitudinal d'après [13]



Notes: Force in kg as per original reference.
Lateral force is normal to wheel plane.
400 kg load.

FIGURE 3.84 – Effet du taux de glissement longitudinal sur la courbe force latérale / angle de dérive d'après [13]



Notes: Longitudinal force in kg as per original reference.
400 kg load

FIGURE 3.85 – Effet de l'angle de dérive sur la courbe force de traction / freinage en fonction du taux de glissement longitudinal d'après [13]

capacité de transmettre des efforts entre le sol et le pneu n'est plus disponible pour développer un supplément de force latérale et longitudinale. On a donc une interaction évidente entre les phénomènes de génération des forces longitudinales et latérales à cause de la saturation des forces de frottement.

La force d'adhérence résultante du pneumatique peut être facilement définie par le module :

$$F_{res} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (3.44)$$

Pour se démontrer l'existence d'un couplage, il faut encore définir un glissement généralisé. On observe que le taux de glissement longitudinal et la dérive latérale sont liés à une différence de vitesse relative entre d'une part la vitesse du pneu à la jante et d'autre part la vitesse au sol sous l'aire de contact. Le pneu lui ne "ressent" que cette vitesse de glissement relative et il développe une force de friction en conséquence. On obtient donc la vitesse de glissement généralisée :

$$V_{lat} = V \sin \alpha \quad (3.45)$$

$$V_{long} = V \cos \alpha - \Omega R_e \quad (3.46)$$

$$V_{res} = \sqrt{V_{long}^2 + V_{lat}^2} \quad (3.47)$$

A la Figure 3.86, on reporte tous les résultats antérieurs en termes des vitesses de glissement globale V_{res} et du module des forces de friction F_{res} obtenus par Sakai. Les données expérimentales se superposent et donnent lieu à une courbe unique donnant la force résultante en fonction du glissement effectif. Ceci prouve l'origine commune des forces d'adhérence et démontre l'interaction des phénomènes qui leur donnent naissance.

3.10.4 Ellipse d'adhérence

L'étude menée précédemment met en évidence le lien entre que la force d'adhérence du pneu en fonction de la vitesse de glissement résultante. La force d'adhérence recouvre deux composantes : les forces longitudinale et latérales.

Cette relation rappelle la force de frottement sec de Coulomb entre deux corps en glissement relatif.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \leq \mu F_z \quad (3.48)$$

Si la force de frottement reste inférieure à μF_z alors il n'y a pas glissement. Si on atteint la valeur limite μF_z alors le glissement se produit mais la valeur de

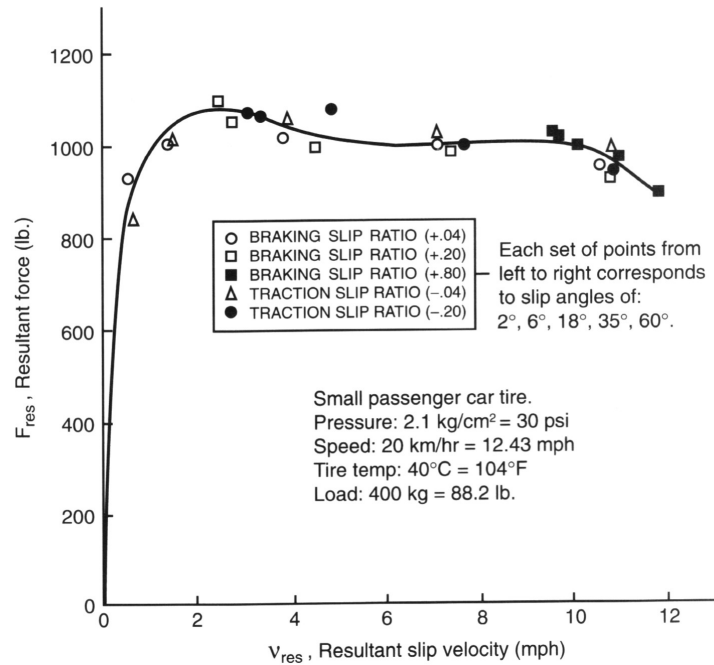


FIGURE 3.86 – Force résultante F_{res} v.s. vitesse de glissement résultante V_{res} d'après [13]

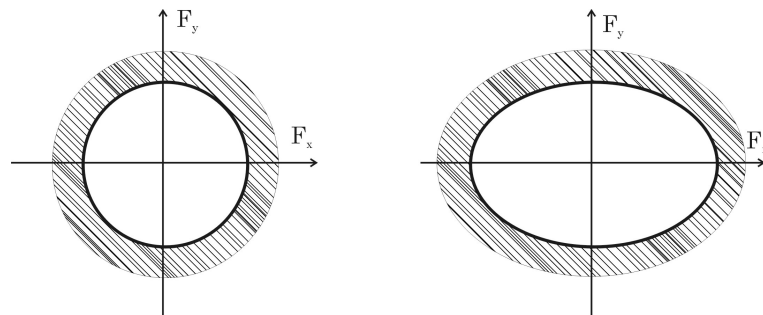


FIGURE 3.87 – Concept of friction circle (right) inspired from the Coulomb friction (left)

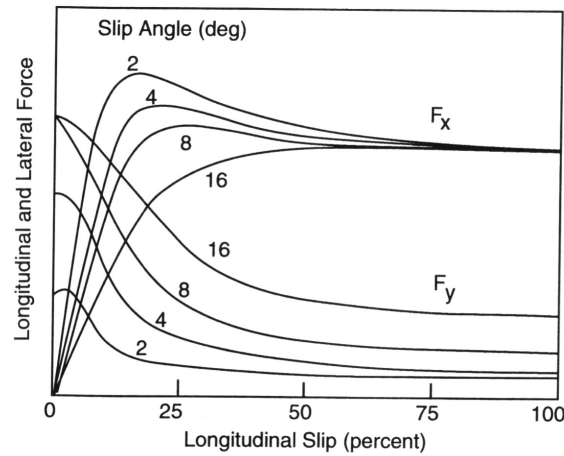


FIGURE 3.88 – Forces de freinage et latérale en fonction du taux de glissement longitudinal d’après [5]

la force de frottement reste plafonnée à la valeur μF_z si on omet la différence entre le coefficient statique et dynamique.

De manière similaire, on souhaite définir un domaine admissible dans lequel le pneumatique est capable de développer des forces d’adhérence sans glissement d’ensemble de l’aire de contact comme esquissé à la Figure 3.87. On souhaite ainsi réunir en un seul diagramme les graphes donnant les forces latérales et longitudinales en éliminant les variables que sont les angles de dérive et le taux de glissement longitudinal. Le cercle de friction représente la limite de la force que le pneu peut produire dans des conditions opérationnelles données (charge, température, surface, etc.) Tout point intérieur à l’ellipse de friction est réalisable par au moins une combinaison de taux de glissement longitudinale et un angle de dérive. Dans le cas des pneumatiques, on doit toutefois considérer le fait que le cercle de friction isotrope pour les forces de frottement sec peut devenir une ellipse, car un pneumatique est généralement caractérisé par une force d’adhérence maximale différente en traction/freinage et en condition d’envirage.

Techniquement, le cercle de friction s’obtient en reportant les couples de forces (F_x, F_y) après avoir éliminé les variables cinématiques (s_L, α) à partir des courbes $F_x(s_L, \alpha)$ et $F_y(s_L, \alpha)$ (courbes de la Figure 3.88). On obtient alors un ensemble de points tous compris dans une enveloppe de forme elliptique dans la plan F_x, F_y donnée à la Figure 3.89.

L’ellipse de friction obtenue pour les données de l’expérience de Sakai est fournie à la Figure 3.90. En outre, on y distingue toutes les courbes d’iso

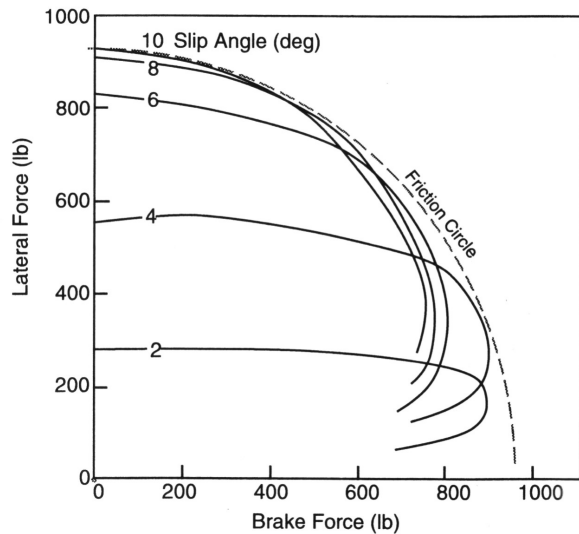


FIGURE 3.89 – Ellipse de friction : Force latérale en fonction de la force de freinage pour des taux de glissement longitudinal. d'après [5]

glissement et d'iso dérive. On constate bien que tous les points physiques se situent dans la domaine intérieur à une enveloppe en forme d'ellipse.

Ellipse de friction pour le couple d'autoalignement

Le couple d'autoalignement et la force latérale étant intimement liés, il est donc naturel d'observer un couplage entre le couple d'autoalignement et la force longitudinale. Le phénomène est ici amplifié par le fait que la déformation du pneumatique par les forces de traction/freinage donnent lieu à un déplacement de l'aire de contact. Les forces latérales et longitudinales qui s'exercent au centre de l'aire de contact donnent alors naissance à des moments autour de l'axe vertical qui s'additionnent ou s'opposent au moment d'autoalignement original. La Figure 3.91 montre les courbes de force d'envirage et de moment d'autoalignement en fonction de l'effort de traction / freinage.

A la Figure 3.91, on note d'abord que le moment d'autoalignement (échelle de droite) est négatif pour une force de traction nulle. Pour un effort de traction grandissant, le couple d'autoalignement se renforce d'abord (son module augmente mais le couple reste négatif). Après avoir atteint son maximum, le couple d'autoalignement s'estompe. sa valeur numérique remonte pour atteindre zéro lorsqu'on développe l'effort de traction maximum et que le pneu entre en glissement d'ensemble. A l'inverse, lorsque l'on développe un effort de freinage, le moment d'autoalignement diminue pour s'annuler et finir

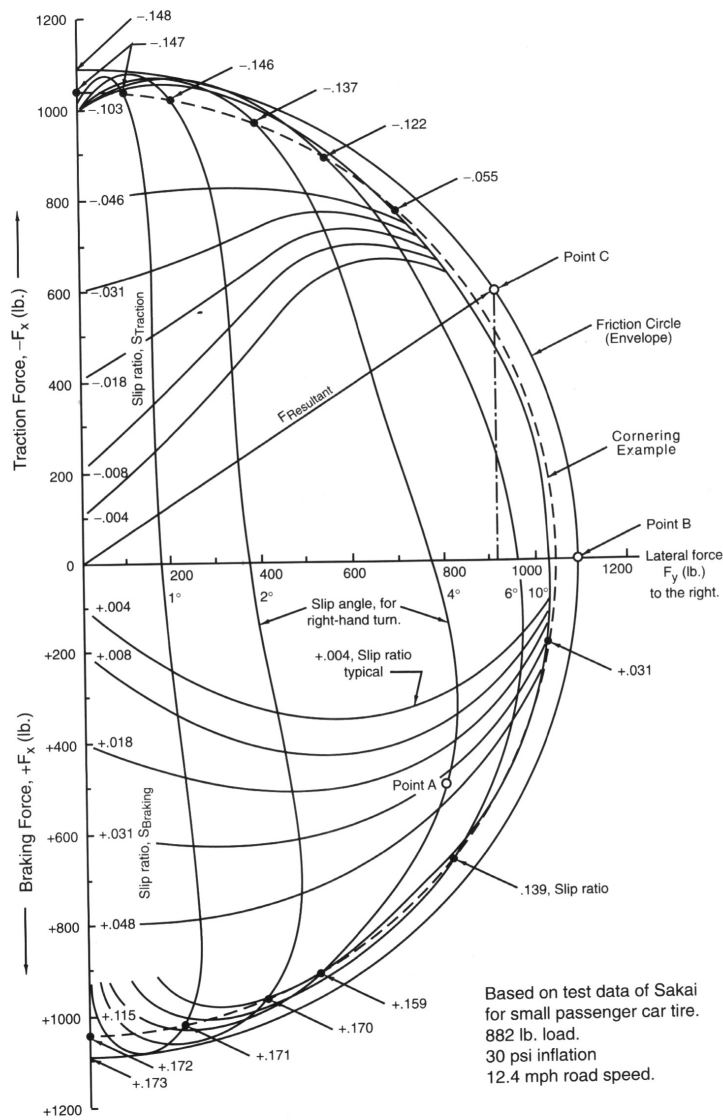


FIGURE 3.90 – Cercle de friction pour l'expérience de Sakai d'après [13]

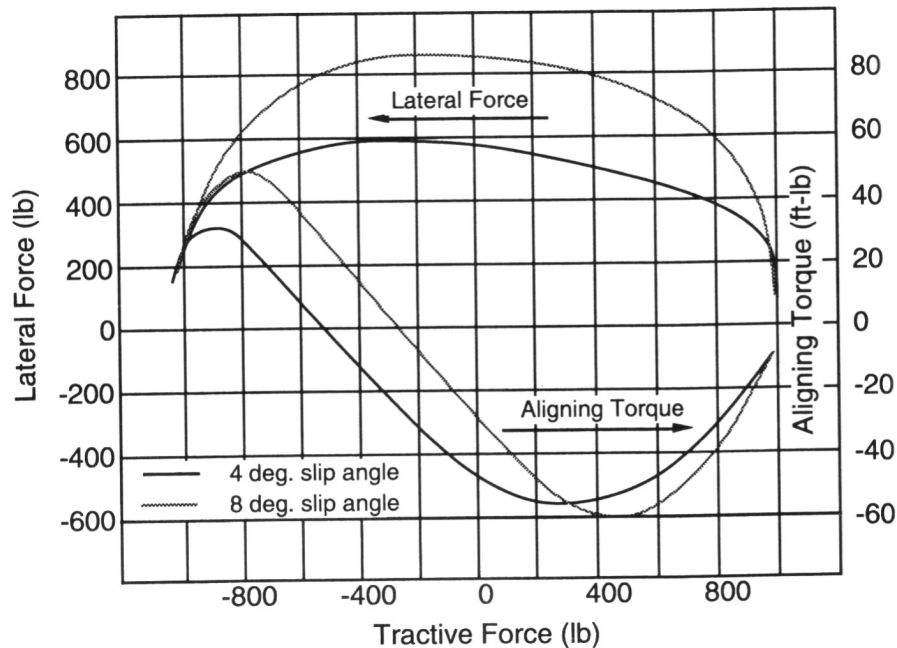


FIGURE 3.91 – Force latérale et couple d’auto alignement en fonction de la force de traction / freinage d’après [5]

par devenir positif, c’est-à-dire être déstabilisant. La courbe atteint alors un maximum avant de décroître à nouveau pour s’annuler lorsque l’on applique l’effort de freinage maximum.

Le phénomène peut se comprendre en examinant les Figures 3.92 et 3.93. Sous l’effet des forces appliquées, l’aire de contact subit un déplacement élastique dû à la flexibilité de la carcasse. Soit Δx et Δy respectivement les déplacements selon x et selon y du centre de l’aire de contact sous l’effet des forces d’adhérence F_x et F_y . En traction, le déplacement latéral de l’aide de contact permet de créer un moment de lacet qui renforce le moment d’autoalignement (voir Fig. 3.92). Toutefois la saturation des forces de contact dans l’aide de contact diminue la chasse pneumatique t . Le déplacement axial Δx réduit le moment d’autoalignement lorsque l’on atteint le maximum de la force de traction. Le phénomène inverse se produit lorsqu’on applique une force de freinage (Voir Fig. 3.93). La force de freinage crée un couple déstabilisateur qui annule le couple d’autoalignement avant de faiblir avec la saturation des forces de friction lorsque l’on atteint le maximum de force de freinage.

3.11. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES COURBES CARACTÉRISTIQUES DES PNEUM.

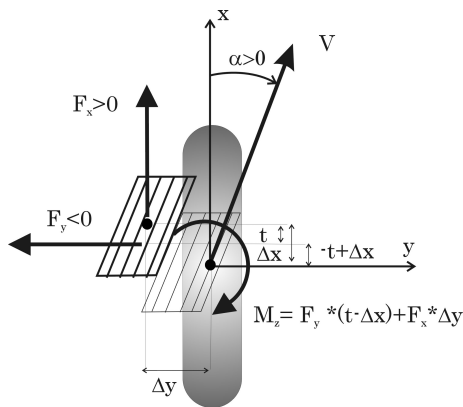


FIGURE 3.92 – Moment d'autolignement résultant de l'application simultanée d'une force de traction et d'une force d'envirage

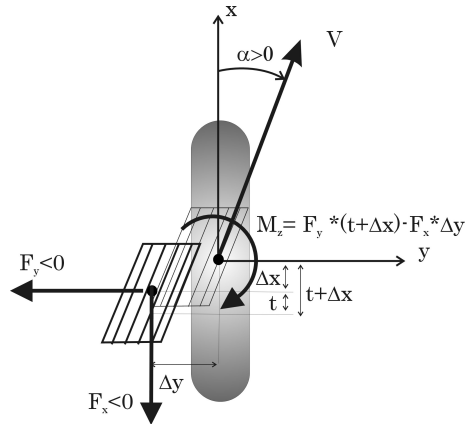


FIGURE 3.93 – Moment d'autolignement résultant de l'application simultanée d'une force de traction et d'une force d'envirage

3.11 Modélisation mathématique des courbes caractéristiques des pneumatiques

Cette section est dédiée aux techniques de modélisation mathématique des courbes de réponse des pneumatiques. Parmi celles-ci, la *formule magique de Pacejka* occupe une place privilégiée. Elle s'est imposée comme un standard permettant de formaliser les résultats d'expérience et de les communiquer aux ingénieurs en charge de l'étude de la dynamique du véhicule. On décrira également succinctement la procédure permettant de réaliser une gestion efficace des données expérimentales. Celle-ci fait appel à la définition de nombres sans dimension permettant de normer les quantités à manipuler et d'améliorer ainsi la précision des traitements numériques réalisés ultérieurement.

3.11.1 Formule magique de Pacejka

Pour les cas simples de réponse comme la dérive ou le glissement longitudinal purs, la *formule magique* proposée par Pacejka [16, 17, 15] peut être employée pour décrire les courbes d'évolution de F_y , M_z et F_x en fonction de l'angle de dérive α ou du taux de glissement longitudinal κ . La formule magique prend la forme :

$$y(x) = D \sin [C \arctan \{ Bx - E (Bx - \arctan(Bx)) \}] \quad (3.49)$$

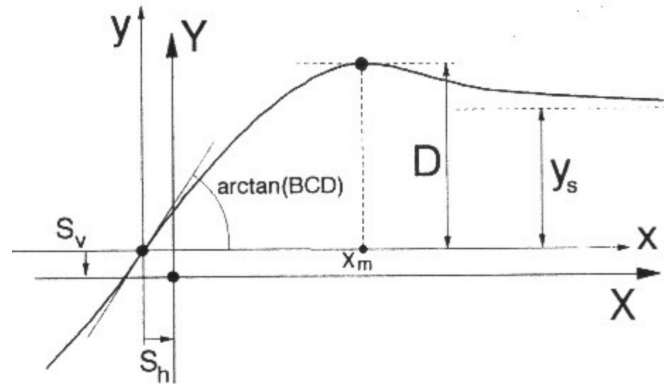


FIGURE 3.94 – Approximation de la courbe de réponse d'un pneumatique par la formule magique de Pacejka

On peut également introduire les offsets S_v et S_h :

$$Y(X) = y(x) + S_v \quad (3.50)$$

$$x = X + S_h \quad (3.51)$$

La formule de Pacejka se comprend mieux en décomposant l'expression mathématique. Pour supporter le raisonnement, on considère la réponse $y = F_y = \bar{F}$, force latérale créée pour un angle de dérive $x = \bar{\alpha}$. Il vient

$$\bar{F} = D' \sin \theta \quad (3.52)$$

$$\theta = C' \arctan(B' \phi) \quad (3.53)$$

$$\phi = (1 - E') \bar{\alpha} + (E'/B') \arctan(B' \bar{\alpha}) \quad (3.54)$$

Interprétation des paramètres de la formule magique

Il est important d'analyser la formule (3.49) et d'interpréter la signification physique de chacun des coefficients A, B, C, D, E.

En examinant la Figure 3.94, BCD est la pente à l'origine de la courbe. Elle est liée à la raideur d'environnement C_α ou de la raideur à l'origine de la courbe de force longitudinale C_κ .

$$\left. \frac{d}{dx} y(x) \right|_{x=0} = BCD \quad (3.55)$$

Le coefficient D est la valeur du maximum de la courbe $y(x)$.

$$x_m = \sup_x y(x) \quad \text{et} \quad D = \max_x y(x) \quad (3.56)$$

3.11. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES COURBES CARACTÉRISTIQUES DES PNEUM.

Il est facile de déterminer ce coefficient ou de l'ajuster pour reconstruire des données expérimentales.

Le paramètre C contrôle les limites du champ de l'argument du sinus. Il détermine donc la forme de la courbe. Pacejka propose les valeurs typiques de C :

- $C = 1.3$ force latérale,
- $C = 2.4$ moment d'auto-alignement,
- $C = 1.65$ force de freinage.

En effet, on peut calculer la limite pour un taux de glissement infini :

$$y_s = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}C\right) \quad (3.57)$$

Une fois C et D fixés, on peut déterminer le paramètre restant B afin d'ajuster la pente de la courbe à l'origine. En conséquence, il est souvent appelé facteur de raideur.

Le dernier paramètre E permet de contrôler la valeur du glissement x_m donnant lieu au maximum de force (s'il y a un maximum à la courbe).

$$E = \frac{Bx_m - \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)}{Bx_m - \arctan(Bx_m)} \quad (3.58)$$

3.11.2 Nombres sans dimensions

Afin de faciliter le traitement numérique de données expérimentales dont les ordres de grandeurs sont parfois très différents, la bonne pratique est de recourir à des nombres sans dimension. Définissons ceux qui sont utilisés dans le cas de réponses caractéristiques des pneumatiques.

Soient les forces et moments sous forme adimensionnelle :

- La force latérale F_y

$$\overline{F} = \frac{F_y}{\mu_y Z} \quad (3.59)$$

- Le moment d'auto-alignement M_z

$$\overline{M}_z = \frac{M_z}{T_z \mu_y Z} \quad (3.60)$$

- Le moment de retournement M_x

$$\overline{M}_x = \frac{M_x}{P_x \mu_y Z} \quad (3.61)$$

— La force de traction / freinage F_x

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{\mu_x Z} \quad (3.62)$$

Les variables de glissement et d'angle s'expriment également sous la forme adimensionnelle :

— L'angle de dérive

$$\bar{\alpha} = \frac{C \tan \alpha}{\mu_y Z} \quad (3.63)$$

— L'angle de carrossage

$$\bar{\gamma} = \frac{G \sin \gamma}{\mu_y Z} \quad (3.64)$$

— Le taux de glissement longitudinal

$$\bar{S} = \frac{k_x SR}{\mu_x Z} \quad (3.65)$$

avec la définition du taux de glissement longitudinal

$$SR = \frac{\Omega R_0 - V \cos \alpha}{V \cos \alpha} \quad (3.66)$$

3.11.3 Exemple

La procédure d'exploitation et de traitement des données expérimentales est illustrée sur un pneumatique Pneu P 195/70 R 14 (voir Ref. [13])

La procédure d'identification permet de déterminer les coefficients de la formule magique pour la force latérale normalisée en fonction de l'angle de dérive normalisé. La courbe est représentée à la Figure 3.95.

On procède de même avec les coefficients de la formule magique pour le moment d'auto-alignement normalisée en fonction de l'angle de dérive normalisé (voir Fig. 3.96).

On traite également les données pour la poussée de carrossage normalisée en fonction de l'angle de carrossage normalisé (voir Fig. 3.97) :

Enfin on détermine les coefficients de la formule magique pour la force de traction et de freinage normalisée en fonction de le taux de glissement normalisé (voir Fig. 3.98) :

3.11. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES COURBES CARACTÉRISTIQUES DES PNEUM.

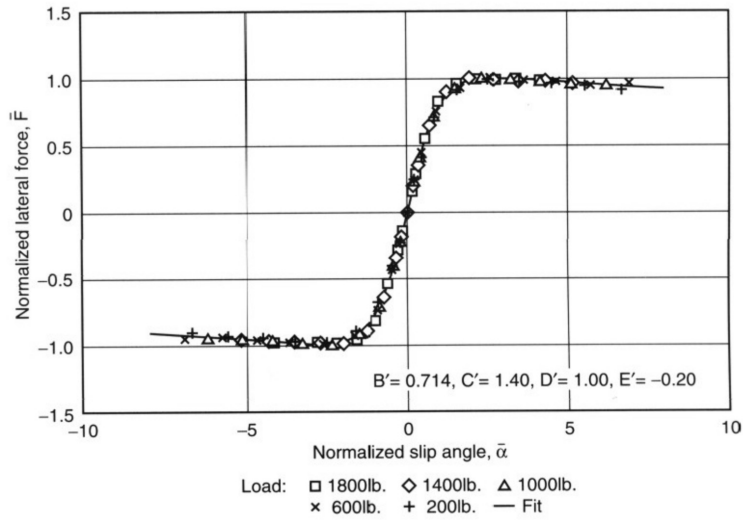


FIGURE 3.95 – Force latérale normalisée vs Angle de dérive normalisé

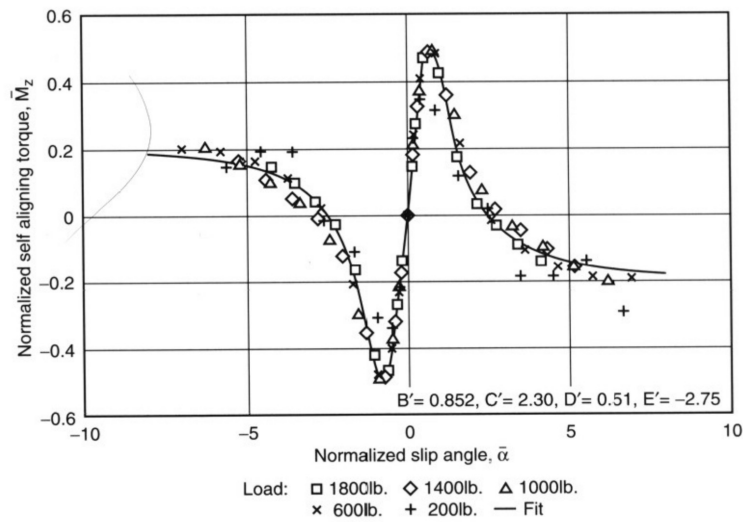


FIGURE 3.96 – Moment d'auto-alignement normalisée vs Angle de dérive normalisé

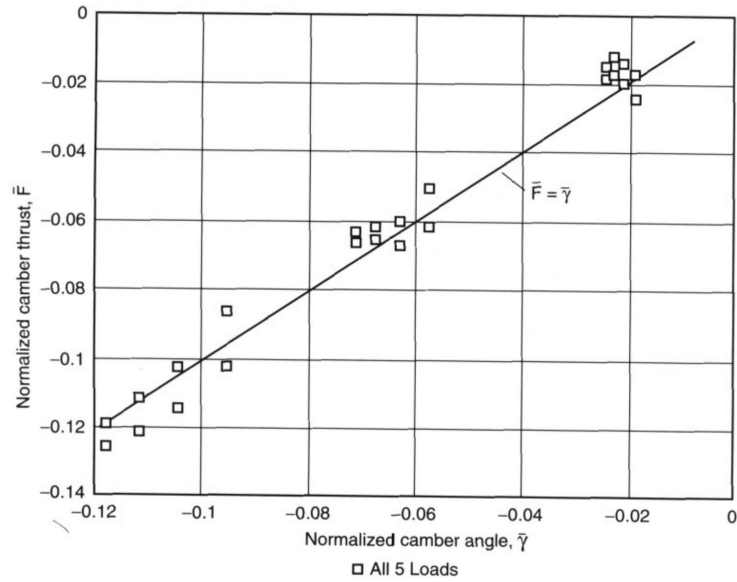


FIGURE 3.97 – Poussée de carrossage normalisée vs angle de carrossage normalisé

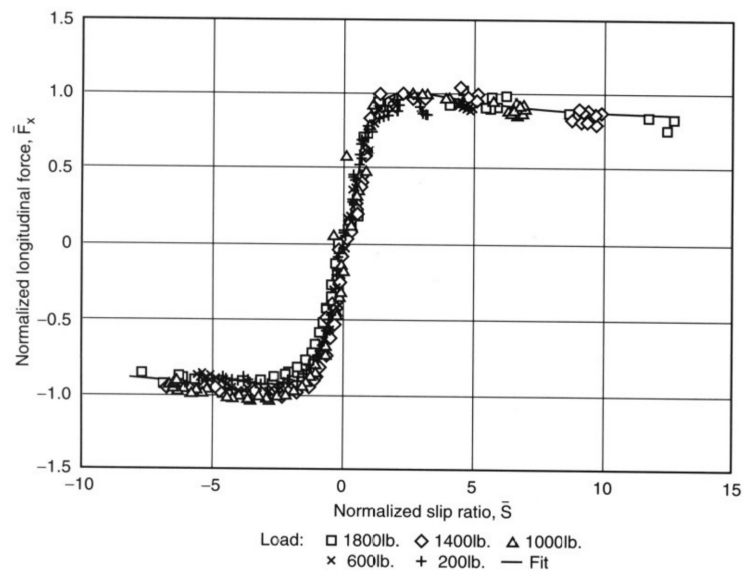


FIGURE 3.98 – Force de traction / freinage normalisée vs taux de glissement normalisé

Deuxième partie
PERFORMANCES

Chapitre 4

EQUILIBRE LONGITUDINAL

4.1 Introduction

Les deux facteurs limitatifs des performances d'un véhicule sont la puissance motrice disponible et la saturation des capacités de transmission des efforts à l'interface roues-sol. Afin de déterminer ce dernier problème, il est nécessaire d'étudier en premier lieu la répartition des efforts sous les essieux. Ceux-ci peuvent se calculer à l'aide des équations d'équilibre longitudinal, vertical et en rotation autour de l'axe de tangage.

Considérons le véhicule comme un corps rigide ou, dans le cas de véhicules articulés et de véhicules des remorques ou des wagons, comme un ensemble de corps rigides reliés par des joints cinématiques.

Un véhicule avec plus de 3 roues est statiquement indéterminé sauf si la suspension est élastique ou si le corps est flexible. C'est pourquoi on distingue le cas du véhicule à deux essieux (autos, motos) du cas des véhicules à plusieurs essieux. Dans ce dernier cas le système est hyperstatique et il faut introduire la notion de souplesse des éléments d'amortisseur pour déterminer toutes les charges sous les essieux.

En outre pour les véhicules avec une remorque, la présence du joint cinématique implique également un traitement particulier. On doit alors procéder à la séparation par l'esprit de chaque corps grâce à son schéma rendu libre et déterminer les inconnues additionnelles que constituent les efforts qui sont transmis par chaque articulation.

L'étude des performances repose sur l'étude du mouvement rectiligne du véhicule. Le véhicule étant symétrique par rapport au plan xy , il est habituel

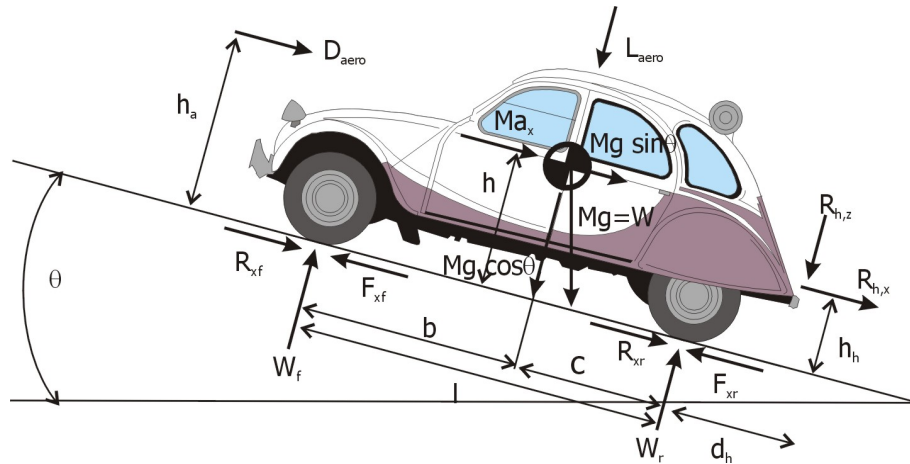


FIGURE 4.1 – Équilibre longitudinal du véhicule

de faire l'hypothèse que la répartition des efforts est également symétrique et que l'on peut négliger le mouvement de roulis. Cela permet de déterminer les réactions sous les essieux du véhicule à deux essieux. Cette modélisation cache néanmoins l'hypothèse plus lourde que la répartition des charges est elle-même symétrique. Cela revient par exemple à supposer qu'il n'y a pas de transfert de charge latéral dû au couple du moteur lorsque celui-ci est monté de manière longitudinale. On admet aussi que l'étude fait abstraction du dévers de la route.

4.2 Véhicules à deux essieux

4.2.1 Equations du mouvement

Étudions le mouvement rectiligne d'un véhicule symétrique à deux essieux sur une route présentant une pente d'angle θ que l'on peut assimiler à un angle d'assiette si on se place dans les axes liés au corps. La pente est positive si on se déplace dans le sens de la montée. La situation est esquissée à la Figure 4.1.

Les équations d'équilibre en translation selon les axes x et z et autour de l'axe y du véhicule donnent lieu aux équations décrivant le mouvement

longitudinal :

$$\sum F_x = m \frac{d}{dt}(u) = ma_x \quad (4.1)$$

$$\sum F_z = m \frac{d}{dt}(w) = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_y = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}\omega)_y = 0 \quad (4.3)$$

En se référant à la Figure 4.1, où on adopte les définitions suivantes :

- m est la masse du véhicule et $g = 9.81m/s^2$ la constante de gravitation ;
- $W = mg$ est le poids du véhicule ;
- Soit a_x l'accélération longitudinale du véhicule : $a_x = \dot{u}$;
- L , b , c sont respectivement l'empattement de la voiture (distance entre les deux essieux), la distance entre l'essieu avant et le centre de masse et la distance entre l'essieu arrière et le centre de masse. On a évidemment la relation :

$$L = b + c \quad (4.4)$$

- La hauteur du centre de masse par rapport au sol est h ;
- Le crochet d'attelage est situé à une distance d par rapport à l'essieu arrière et à une hauteur h_h du sol ;
- F_{xf} et F_{xr} sont respectivement les forces propulsives sous les roues avant et arrière ;
- R_{xf} et R_{xr} sont respectivement les forces de résistance à l'avancement sous les roues avant et arrière ;
- W_f et W_r sont les réactions sous les essieux avant et arrière ;
- Les forces aérodynamiques sont caractérisées par une force de traînée horizontale D_{Aero} , une force de déportance L_{Aero} (orientée positivement vers le bas). La traînée agit au centre de pression situé à une hauteur h_A du sol ;
- $R_{h,x}$ et $R_{h,z}$ sont les réactions respectivement selon les directions horizontales et verticales au crochet d'attelage.

En examinant la Figure 4.1, il vient :

$$ma_x = F_{xf} + F_{xr} - R_{xf} - R_{xr} - mg \sin \theta - F_{AERO} - R_{h,x} \quad (4.5)$$

$$0 = mg \cos \theta - W_f - W_r + L_{AERO} + R_{h,z} \quad (4.6)$$

$$0 = (F_{xf} + F_{xr})h - (R_{xf} + R_{xr})h + W_f b - W_r c + D_{AERO}(h_A - h) + R_{h,x}(h_h - h) + R_{h,z}(d_h + c) \quad (4.7)$$

4.2.2 Équilibre longitudinal

L'équilibre horizontal (4.5) du véhicule permet de relier les forces d'inertie aux forces propulsives aux roues et aux forces de résistance à l'avancement.

$$\boxed{ma_x = (F_{xf} + F_{xr}) - (R_{xf} + R_{xr}) - mg \sin \theta - F_{AERO} - R_{h,x}} \quad (4.8)$$

Cette équation sera abondamment utilisée pour calculer les performances du véhicule.

Appelons :

- $F_x = F_{xf} + F_{xr}$, la force propulsive totale,
- $R_{RR} = R_{xf} + R_{xr}$, la résistance au roulement totale,
- $mg \sin \theta$ la composante du poids selon la pente est la résistance due à la pente,
- $F_{RES} = R_{RR} + mg \sin \theta + F_{AERO} + R_{h,x}$, la force résistante totale au mouvement.

Il est alors possible d'écrire de manière très synthétique :

$$\boxed{ma_x = F_x - R_{RR} - mg \sin \theta - F_{AERO} - R_{h,x}} \quad (4.9)$$

ou encore

$$\boxed{ma_x = F_x - F_{RES}} \quad (4.10)$$

Sous forme de puissance, l'équation devient :

$$\boxed{\mathcal{P}_x = m \frac{du}{dt} u + \mathcal{P}_{RES} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u^2 \right) + \mathcal{P}_{RES}} \quad (4.11)$$

où l'on a défini :

- $\mathcal{P}_x = F_x \cdot u$, la puissance propulsive totale,
- $\mathcal{P}_{RES} = F_{RES} \cdot u$, la puissance dissipée par les forces de résistance.

Cette équation signifie que *la puissance produite par la propulsion sert d'une part à combler la puissance absorbée par les forces de résistance au mouvement et d'autre part à augmenter l'énergie cinétique du système.*

4.2.3 Équilibre vertical et en rotation

Les équations d'équilibre vertical (4.6) et en rotation (4.7) permettent de déterminer les réactions sous les essieux.

L'équilibre vertical donne :

$$W_f + W_r = mg \cos \theta + L_{AERO} + R_{h,z} \quad (4.12)$$

Tirons la valeur de W_r de cette équation

$$W_r = mg \cos \theta + R_{h,z} - W_f + L_{AERO}$$

et remplaçons sa valeur dans l'équation d'équilibre en rotation, il vient :

$$\begin{aligned} W_f = & mg \cos \theta \frac{c}{L} - (F_x - R_x) \frac{h}{L} - D_{AERO} \frac{h_A - h}{L} \\ & + L_{AERO} \frac{c}{L} - R_{h,x} \frac{h_h - h}{L} - R_{h,z} \frac{d_h}{L} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Répetons la même procédure pour extraire W_r .

$$W_f = mg \cos \theta + R_{h,z} - W_r + L_{AERO}$$

et substituons dans l'équation d'équilibre en rotation, il vient :

$$\begin{aligned} W_r = & mg \cos \theta \frac{b}{L} + (F_x - R_{RR}) \frac{h}{L} + D_{AERO} \frac{h_A - h}{L} \\ & L_{AERO} \frac{b}{L} + R_{h,x} \frac{h_h - h}{L} + R_{h,z} \frac{d_h + L}{L} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il est encore de coutume de faire apparaître l'accélération du véhicule pour interpréter les résultats. En effet les variables cinématiques sont mesurables alors que les forces ne le sont pas facilement.

$$ma_x = F_x - R_{RR} - mg \sin \theta - D_{AERO} - R_{h,x}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} W_f = & mg \cos \theta \frac{c}{L} - ma_x \frac{h}{L} - D_{AERO} \frac{h_A}{L} - mg \sin \theta \frac{h}{L} \\ & L_{AERO} \frac{c}{L} - R_{h,x} \frac{h_h}{L} - R_{h,z} \frac{d_h}{L} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} W_r = & mg \cos \theta \frac{b}{L} + ma_x \frac{h}{L} + D_{AERO} \frac{h_A}{L} + mg \sin \theta \frac{h}{L} \\ & + L_{AERO} \frac{b}{L} + R_{h,x} \frac{h_h}{L} + R_{h,z} \frac{d_h + L}{L} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Conclusion :

Ces équations nous montrent que la charge sous les essieux est variable en fonction des conditions d'accélération et des forces appliquées. Il s'agit du *phénomène de transfert de charge longitudinal*. La charge sous l'essieu avant est réduite tandis qu'inversement la charge sous l'essieu arrière est augmentée par :

- l'accélération du véhicule ;
- la résistance aérodynamique ;
- la pente ;
- la charge à remorquer.

A contrario, la charge sur l'essieu avant est augmentée tandis que la charge sur l'essieu arrière se trouve réduite par

- un freinage du véhicule.

4.2.4 Cas particuliers**Charge statique**

Dans des conditions statiques et à vitesse faible i.e. $a_x = 0$, $D_{AERO} = 0$, sur une route plane et en l'absence de remorque $R_{h,x} = R_{h,z} = 0$, on obtient :

$$W_f = mg \frac{c}{L} \quad (4.17)$$

$$W_r = mg \frac{b}{L} \quad (4.18)$$

Ces équations permettent de déterminer la position horizontale du centre de masse par simple mesure du poids sous chacun des essieux.

Accélération à basse vitesse

Si on suppose maintenant que l'on est en présence d'une accélération, mais que la vitesse reste faible de sorte que les forces aérodynamiques peuvent être négligées $D_{AERO} \simeq 0$, il vient :

$$W_f = mg \frac{c}{L} - ma_x \frac{h}{L} = mg \left(\frac{c}{L} - \frac{a_x}{g} \frac{h}{L} \right) \quad (4.19)$$

$$W_r = mg \frac{b}{L} + ma_x \frac{h}{L} = mg \left(\frac{b}{L} + \frac{a_x}{g} \frac{h}{L} \right) \quad (4.20)$$

Effet de la pente

L'effet de la pente peut maintenant être mis en évidence en considérant des conditions statiques. Dans ce cas l'angle d'assiette est non nul $\theta \neq 0$ et on trouve :

$$W_f = mg \cos \theta \frac{c}{L} - mg \sin \theta \frac{h}{L} \quad (4.21)$$

$$W_r = mg \cos \theta \frac{b}{L} + mg \sin \theta \frac{h}{L} \quad (4.22)$$

Si la pente est faible on peut linéariser les fonctions trigonométriques :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$$

$$\cos \theta \simeq 1$$

On obtient alors :

$$W_f = mg \left(\frac{c}{L} - \frac{h}{L} \theta \right) \quad (4.23)$$

$$W_r = mg \left(\frac{b}{L} + \frac{h}{L} \theta \right) \quad (4.24)$$

4.2.5 Applications**Calcul de la position horizontale du centre de masse**

En pesant le poids W_f et W_r sous chaque essieu, il est possible de déterminer facilement la position horizontale du centre de masse. En effet les équations (4.17) et (4.18) donnent immédiatement :

$$m g = W_f + W_r \quad (4.25)$$

et

$$\frac{b}{L} = \frac{W_r}{W_f + W_r} \quad (4.26)$$

$$\frac{c}{L} = \frac{W_f}{W_f + W_r} \quad (4.27)$$

Calcul de la position verticale du centre de masse

La hauteur de la position du centre de gravité peut être obtenue par une seconde mesure. On place un essieu sur un socle permettant de créer une assiette significative du véhicule et on mesure à nouveau les charges P_f et P_r sous les deux essieux dans la position inclinée.

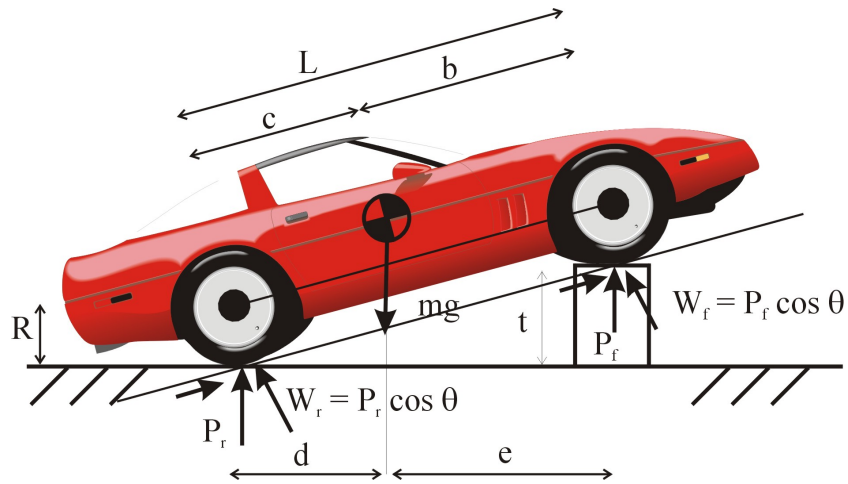


FIGURE 4.2 – Procédure de mesure de la hauteur du centre de masse

De la géométrie de l'expérience (voir Figure 4.2), on calcule aisément la pente équivalente :

$$\sin \theta = \frac{t}{L} \quad (4.28)$$

où t est la hauteur du support que l'on a placé sous les roues avant.

La situation est analogue à celle d'un véhicule sur une pente d'angle θ , à l'exception près que les charges mesurées P_f et P_r ne sont pas les efforts normaux au plan du véhicule compte tenu des conditions de l'expérience (voir figure 4.2). Dans les conditions statiques où l'on se trouve, les forces sont reliées par les conditions suivantes :

$$W_f = P_f \cos \theta \quad \text{et} \quad W_r = P_r \cos \theta$$

Les équations (4.21) et (4.22) donnant les charges normales au plan de la voiture conduisent à écrire :

$$\begin{aligned} W_f + W_r &= m g \cos \theta \\ c W_r - b W_f &= m g \sin \theta \frac{h}{L} (b + c) \end{aligned}$$

On en tire la valeur de h :

$$\frac{h}{L} = \frac{c W_r - b W_f}{m g} \frac{1}{\sin \theta}$$

En remplaçant W_f et W_r par les valeurs mesurées par les capteurs sous les roues, on a :

$$\frac{h}{L} = \frac{c P_r - b P_f}{P_f + P_r} \cot \theta \quad (4.29)$$

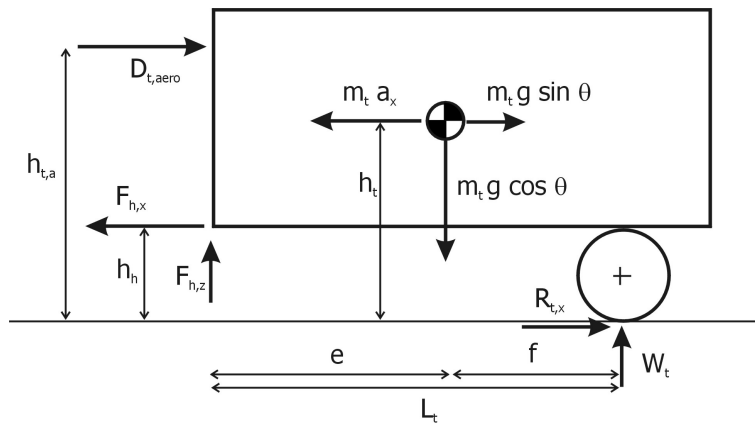


FIGURE 4.3 – Équilibre longitudinal de la remorque

où l'on a tenu compte que $P_f + P_r = m g$.

4.3 Véhicules avec remorque

Lorsque le véhicule comporte une remorque, comme dans le cas d'un camion semi-remorque ou remorque, il faut tenir compte de l'articulation ou en général du joint cinématique. Dans la méthode de Newton-Euler, le joint cinématique est d'abord ouvert et remplacé par un ensemble de forces (réactions) qui passent par l'articulation. Ces dernières constituent autant de nouvelles inconnues du problème qu'il faudra déterminer. Par exemple pour une boule de remorquage, seules les forces longitudinales et verticales sont transmises à travers l'articulation. On peut alors effectuer l'étude du schéma rendu libre de chaque corps rigide.

Le cas des véhicules avec remorques est illustré à la Figure 4.3 par l'exemple d'un camion semi-remorque.

Définissons :

- m_t est la masse de la remorque. $W_t = m_t g$ est le poids de la remorque ;
- Soit a_x l'accélération longitudinale du véhicule : $a_x = \dot{u}$. C'est la même que celle du véhicule de traction ;
- L_t , e et f sont respectivement l'empattement de la remorque (distance entre le point d'attelage et l'essieu arrière), la distance entre le point d'attelage et le centre de masse et la distance entre l'essieu arrière et le centre de masse. On a évidemment

$$L_t = e + f \quad (4.30)$$

- La hauteur du centre de masse de la remorque par rapport au sol est h_t
- Le crochet d'attelage est situé à une hauteur h_h du sol (rappel) ;
- $R_{t,x}$ est la force de résistance à l'avancement sous les roues de la remorque ;
- W_t est la réaction sous l'essieu de la remorque ;
- Les forces aérodynamiques sont caractérisées par une force de traînée horizontale $D_{t,A}$ qui s'exerce en un point de pression situé à une hauteur $h_{t,A}$ du sol. On néglige la force de déportance $L_{t,A}$ sur la remorque ;
- $R_{h,x}$ et $R_{h,z}$ sont les forces au crochet d'attelage respectivement selon les directions horizontales et verticales .

Il vient :

$$ma_x = F_{h,x} - D_{t,AERO} - R_{t,x} - m_t g \sin \theta \quad (4.31)$$

$$0 = m_t g \cos \theta - W_t - F_{h,z} \quad (4.32)$$

$$0 = D_{t,AERO} (h_{t,A} - h_t) - W_t f - R_{t,x} h_t + F_{h,x} (h_t - h_h) + F_{h,z} (L_t - f) \quad (4.33)$$

On en déduit la force horizontale de traction au crochet d'attelage s'obtient à partir de l'équation d'équilibre horizontal :

$$\boxed{F_{h,x} = ma_x + D_{t,AERO} + R_{t,x} + m_t g \sin \theta} \quad (4.34)$$

La réaction verticale sous l'essieu arrière W_f et la force verticale $F_{h,z}$ dans le crochet s'obtiennent par l'équilibre en rotation et l'équilibre vertical. Il vient successivement en éliminant les inconnues :

$$F_{h,z} = m_t g \cos \theta - W_t$$

et

$$W_t f = D_{t,AERO} (h_{t,A} - h_t) - R_{t,x} h_t + F_{h,x} (h_t - h_h) + F_{h,z} (L_t - f)$$

On tire :

$$W_t = m_t g \cos \theta \frac{e}{L_t} + D_{t,AERO} \frac{h_{t,A} - h_t}{L_t} - R_{t,x} \frac{h_t}{L_t} + F_{h,x} \frac{h_t - h_h}{L_t} \quad (4.35)$$

et

$$F_{h,z} = m_t g \cos \theta \frac{f}{L_t} - D_{t,AERO} \frac{h_{t,A} - h_t}{L_t} + R_{t,x} \frac{h_t}{L_t} - F_{h,x} \frac{h_t - h_h}{L_t} \quad (4.36)$$

Comme pour le véhicule, il est de coutume de faire apparaître l'accélération en utilisant l'équilibre longitudinal (4.31). On trouve alors :

$$\begin{aligned} W_t &= m_t g \cos \theta \frac{e}{L_t} + m_t a_x \frac{h_t - h_h}{L_t} + m_t g \sin \theta \frac{h_t - h_h}{L_t} \\ &\quad + D_{t,AERO} \frac{h_{t,A} - h_h}{L_t} - R_{t,x} \frac{h_h}{L_t} \end{aligned} \quad (4.37)$$

et

$$\begin{aligned} F_{h,z} &= m_t g \cos \theta \frac{f}{L_t} - m_t a_x \frac{h_t - h_h}{L_t} - m_t g \sin \theta \frac{h_t - h_h}{L_t} \\ &\quad - D_{t,AERO} \frac{h_{t,A} - h_h}{L_t} + R_{t,x} \frac{h_h}{L_t} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Chapitre 5

PERFORMANCES

5.1 Introduction

Les performances d'un véhicule recouvrent sa capacité à accélérer, freiner, décélérer, négocier des pentes ou tracter des charges. On s'intéresse ici au mouvement longitudinal du véhicule. L'échelle du mouvement étant beaucoup plus grande que les dimensions caractéristiques du véhicule, le mouvement est supposé s'effectuer *en ligne droite*.

Les performances du véhicule sont déterminées par l'importance relative des forces de traction ou de freinage développées par les pneumatiques d'une part et des forces de résistance au mouvement agissant sur le véhicule d'autre part. Ces deux types de forces seront discutés en détail dans cette partie de l'exposé.

Les deux facteurs limitatifs des performances sont soit la limitation de la puissance motrice disponible, soit le glissement des pneumatiques sur le sol c'est-à-dire la saturation des capacités de transmission des efforts à l'interface roues-sol.

Pour comparer les performances des véhicules, on définit plusieurs critères de natures différentes. Les premiers sont relatifs à des conditions stationnaires de fonctionnement : la vitesse maximale en pallier et la pente maximale franchissable sont les deux exemples les plus importants de critères de performance en vitesse stationnaire. Une deuxième catégorie mesure les performances en accélération. Ce sont les critères de reprises ou d'accélération depuis l'arrêt ou une vitesse stabilisée. Enfin avec l'importance grandissante des économies d'énergie et de la limitation des émissions de polluants, les critères de consommation et des émissions doivent maintenant être considérés avec soin. Ces critères seront abordés au chapitre suivant.

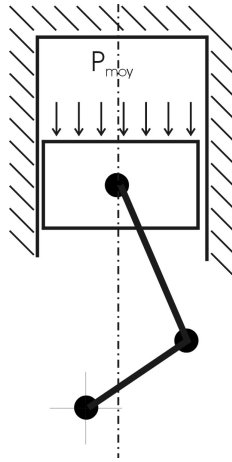


FIGURE 5.1 – Schéma d'un piston

5.2 Caractéristiques des moteurs thermiques

5.2.1 Puissance et couple des moteurs à combustion interne

Pour faire apparaître les grandeurs dont dépendent le couple et la puissance du moteur, on utilise un raisonnement très simple fondé sur la notion de *pression moyenne*. Dans le jargon des motoristes cette pression moyenne est appelée *pression moyenne effective au frein* ou *brake mean effective pressure*, *bmep*. Par pression moyenne, on entend la pression constante dans le temps qui, pendant la course motrice du piston, produit le travail d'un cycle complet. On a donc

$$\mathcal{W}_{1\text{ cycle}}^{\text{cyl}} = \text{bmep} \frac{\pi B^2}{4} c = \text{bmep} V_1 \quad (5.1)$$

où $S = \frac{\pi B^2}{4}$ est la surface du piston, c la course du moteur et $V_{1\text{ cyl}}$ la cylindrée d'un cylindre (voir figure 5.1). Pour un moteur à n cylindres, le travail fourni en un cycle vaut

$$\mathcal{W}_{1\text{ cycle}}^{\text{ncyl}} = \text{bmep} V_{1\text{ cyl}} n = \text{bmep} V_d \quad (5.2)$$

où V_d est la cylindrée totale du moteur. Le moteur peut fonctionner suivant le cycle à 2 temps ou le cycle à 4 temps. Pour un moteur à 2 temps, le cycle prend un tour de vilebrequin tandis que dans les moteurs à 4 temps, le cycle s'étend sur 2 tours de vilebrequin. Ainsi pour un moteur à k temps, un cycle s'étend sur $n_R = k/2$ tours. Par conséquent, le temps nécessaire pour effectuer un cycle vaut

$$t_{1\text{ cycle}} = t_{n_R\text{ turn}} = 2n_R \pi / \omega \quad (5.3)$$

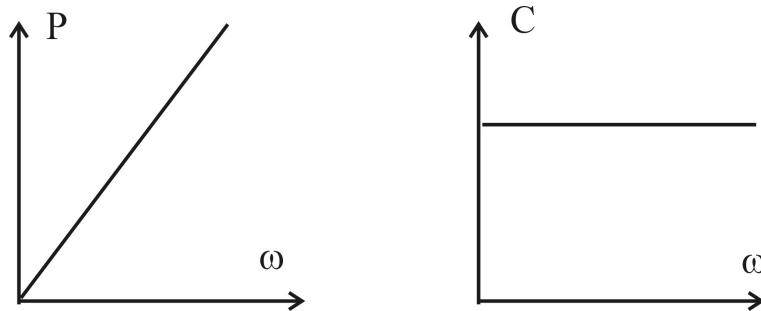


FIGURE 5.2 – Courbes caractéristiques idéales des moteurs à essence et diesel

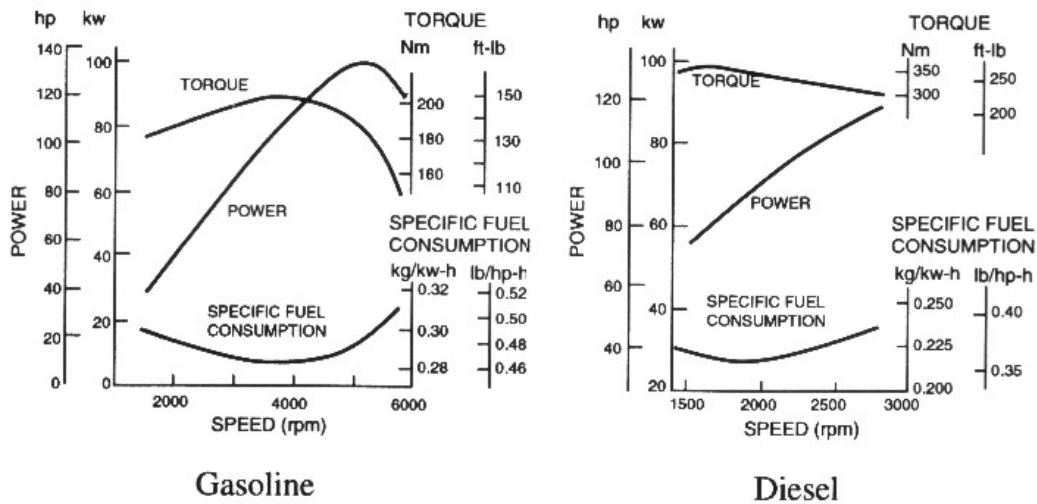


FIGURE 5.3 – Courbes caractéristiques des moteurs à essences et diesel [5]

ce qui permet de calculer la puissance

$$\mathcal{P} = \dot{W} = \frac{\omega}{2n_R\pi} bmep V_d \quad (5.4)$$

et le couple

$$\mathcal{C} = \frac{\dot{W}}{\omega} = \frac{1}{2n_R\pi} bmep V_d \quad (5.5)$$

Si l'on suppose que la pression moyenne $bmep$ est indépendante de la vitesse, on obtient les courbes idéalisées des Figures 5.2. La courbe de puissance est une fonction linéaire de la vitesse de rotation tandis que le couple reste constant en fonction de la vitesse.

En pratique, la pression moyenne varie avec le régime, et on obtient des courbes quelque peu différentes des précédentes comme cela apparaît aux

Figures 5.3). On peut expliquer le phénomène comme suit. On appelle pertes par friction d'un moteur à piston la somme des pertes par frottement dans le moteur et les pertes dues au pompage du gaz dans et hors du moteur. Pour des régimes moteurs élevés, la puissance diminue, car les pertes par friction augmentent et deviennent significatives par rapport à la puissance libérée par le cycle thermodynamique. La courbe de puissance qui est proportionnelle à la vitesse de rotation croît donc jusqu'au moment où les pertes par friction deviennent dominantes et la puissance nette diminue. La courbe de puissance présente donc un maximum appelé *puissance nominale* \mathcal{P}_{max} du moteur.

En ce qui concerne le couple, même s'il ne dépend pas de la vitesse de rotation, la courbe de couple en fonction du régime présente également un maximum appelé *couple maximum* \mathcal{C}_{max} . La présence de ce maximum s'explique également. Aux bas régimes, les pertes de chaleur vers les parois des cylindres deviennent proportionnellement importantes compte tenu de l'accroissement du temps de séjour des gaz dans le cylindre et le rendement du cycle se dégrade, le couple diminue. A haut régime, le travail pour ingérer l'air dans le moteur et vaincre les frictions augmente. Le couple diminue comme la puissance.

Selon le réglage du moteur, on peut avoir une courbe de couple assez plate et, par conséquent, une courbe de puissance assez linéaire ou, au contraire, une courbe de couple plongeante donnant une courbe de puissance plus plate (i.e. horizontale). La forme de ces courbes dépend essentiellement de la distribution, et spécialement du retard de fermeture de l'admission. En augmentant ce retard, on favorise les hauts régimes au détriment des régimes plus bas : en général, si la puissance maximale \mathcal{P}_{max} augmente alors le régime de couple maximum $\omega_{\mathcal{C}_{max}}$ se rapproche du régime nominal de ω_{nom} (régime de puissance maximale) et parfois même la valeur du couple maximum \mathcal{C}_{max} diminue. En diminuant le retard, on favorise les bas régimes : la puissance maximale \mathcal{P}_{max} diminue, le régime de couple maximum $\omega_{\mathcal{C}_{max}}$ diminue et le couple maximum \mathcal{C}_{max} augmente. Un moteur à fort couple maximum et relativement faible puissance est dit *souple*.

Les moteurs suivant le cycle Diesel présentent le plus souvent une courbe de couple assez plate. Leur courbe de puissance ne présente parfois pas de maximum analytique, le régime étant limité par le régime maximal du moteur par des moyens artificiels (rupteur). Pour citer quelques chiffres, au régime de couple maximum, on obtient des valeurs de *bmep* allant de 700 à 1700 kPa. La valeur de 1000 kPa est une bonne moyenne. Les petits moteurs font moins. Les moteurs les plus poussés notamment les moteurs turbocompressés s'approchent de la plus grande valeur.

Les ordres de grandeurs de la pression moyenne effective sont les suivants pour les moteurs quatre temps :

| | |
|--------------------------------|-----------------|
| Moteurs à essence | 850 - 1050 kPa |
| Moteurs Diesel | 700 - 900 kPa |
| Moteurs à essence suralimentés | 1250 - 1700 kPa |
| Moteurs Diesel suralimentés | 1000 - 1200 kPa |

Exemples :

| Modèle | p_{moy} |
|-----------------------|-----------|
| Porsche s 911 TURBO | 1569 kPa |
| Ferrari 400 i | 1227 kPa |
| Maserati biturbo | 1594 kPa |
| Peugeot 505 (2litres) | 1026 kPa |
| BMW 528 i | 1083 kPa |

5.2.2 Normes de mesures des puissances et couples

Afin de permettre la comparaison des caractéristiques de différents moteurs, il convient que les circonstances des essais soient comparables. C'est pourquoi des normes ont été développées. Les normes les plus courantes sont :

- La norme S.A.E. (Society of Automotive Engineers)

On mesure la puissance brute au banc, sans aucune servitude extérieure, c'est-à-dire sans aucun des équipements nécessaires au fonctionnement du moteur. Les conditions normalisées de l'essai sont une température ambiante de 16°C et une pression ambiante de 1 bar. Les réglages de l'avance à l'allumage et du carburateur peuvent être réajustés pour chaque régime. En résumé, les conditions sont : a) Le moteur est dépouillé de la dynamo (alternateur), du ventilateur, du filtre à air et de la boîte de vitesses. b) L'échappement se fait dans le pot à détente du banc d'essais (très faible perte de charge). c) Des carburants spéciaux étudiés pour la pleine puissance sont autorisés. d) Pour chaque régime, on peut effectuer le réglage spécialement approprié du carburateur et de l'avance à l'allumage.

Les mesures S.A.E. s'écartent donc très fort des conditions réelles d'emploi, dans un sens optimiste. Néanmoins, elles présentent un intérêt pour le constructeur de moteurs. Ainsi, on considère souvent que le régime maximal admissible du moteur est le régime de puissance S.A.E. maximale.

- la norme C.U.N.A. (Commissione Technica de Unification Nell' Automobile - ITALIE)

La norme C.U.N.A. est identique à la norme S.A.E., sauf que la température ambiante normalisée vaut cette fois 15°C. Les réglages de l'allumage et du carburateur doivent cependant être identiques à ceux qui seront appliqués en série sur les voitures.

- la norme D.I.N. (Deutsches Institut Normen), et CE (Norme Européenne)

Dans la norme D.I.N. on mesure la puissance nette effective, c'est-à-dire du moteur complet, dans l'état où il est monté sur la voiture. Température ambiante : 20°C. Pression ambiante : 1 bar. a) Le moteur entraîne la dynamo (alternateur) en charge, le ventilateur, la pompe à eau. Il fonctionne avec le filtre à air et l'échappement de série. b) Tous les réglages, y compris le carburateur et l'avance à l'allumage, sont ceux de série. c) Le carburant est le carburant normal de la voiture.

Il est clair que l'on a

$$\mathcal{P}_{DIN} < \mathcal{P}_{CUNA} < \mathcal{P}_{SAE} \quad (5.6)$$

En ce qui concerne les performances de la voiture, seule la puissance DIN est représentative, les deux autres constituant des surestimations sans intérêt dans le cadre de cette étude. Aussi, tous les calculs que nous effectuerons découleront des données établies suivant la norme DIN.

Effets des accessoires

Lors de l'usage dans le véhicule, la puissance disponible est emputée de la puissance absorbée par les multiples accessoires présents. Parmi les plus courants, on peut citer, les phares et systèmes d'éclairage, l'autoradio et la sonorisation. Toutefois les plus gourmands sont les systèmes de chauffages, de dégivrage et de conditionnement d'air. La multiplication des accessoires est telle que la consommation des auxiliaires devient loin d'être négligeable. Comme le montre la Figure 5.4, la consommation des accessoires doit être prise en considération lors de l'évaluation des performances du véhicule, car elle se révèle être significative avec quelques kilowatts consentis dans l'air conditionné par exemple.

Effets des conditions atmosphériques

Les conditions atmosphériques (température, pression, hygrométrie) affectent également les performances du moteur. Pour toutes conditions autres

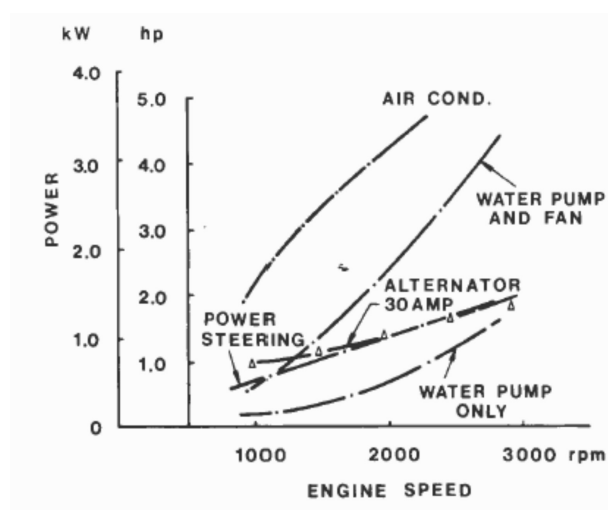


FIGURE 5.4 – Consommation de puissance des accessoires

que celles de l'essai normalisé, il faut corriger les valeurs normalisées. On appelle cela le *détarage*. Différentes formules ont été proposées pour lier la puissance mesurée aux conditions atmosphériques locales.

Wong [26] mentionne la formule proposée par Taborek [25], pour estimer la perturbation due à une variation de température par les formules suivantes. Soient \mathcal{P}_0 la puissance mesurée dans les conditions normalisées à la pression $p_0 = 1 \text{ bar}$ et la température $T_0 = 293 \text{ K}$. La puissance $\mathcal{P}(p, T)$ obtenue pour une pression d'admission p (en bar) et une température T (en Kelvin) est pour les moteurs à essences :

$$\mathcal{P}(p, T) = \mathcal{P}_0 \frac{p - p_v}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \quad (5.7)$$

et pour les moteurs Diesel

$$\mathcal{P}(p, T) = \mathcal{P}_0 \frac{p - p_v}{p_0} \frac{T_0}{T} \quad (5.8)$$

où p_v est la pression partielle de vapeur dans l'air (en bar).

La formule de Taborek a le mérite d'être simple et d'illustrer clairement l'influence de la température et de la pression atmosphérique sur la puissance disponible. Notons en particulier qu'en altitude, la pression étant plus faible qu'au niveau de la mer, le véhicule s'en trouve moins puissant. Malheureusement le formule de Taborek est trop peu précise et la formule a été améliorée au cours d'une série de travaux.

Actuellement, on utilise la formule proposée par la norme EEC 80/1269 - ISO 1585 - JIS D1001 - SAE J1349 (Voir Ref. [2]).

La norme considère les conditions standards suivantes : température $T_0 = 298$ K et pression d'air sec $p_0 = 99$ kPa. On définit les ratios suivants respectivement de pression et de température :

$$A = 99/p_{PT}(\text{kPa}) \quad (5.9)$$

$$B = T(K)/298 \quad (5.10)$$

Pour le moteur à allumage commandé (essence), la norme propose la formule suivante pour relier la puissance du moteur dans les conditions standards et non standards moyennant les deux facteurs de correction :

$$\mathcal{P}_0 = A^{1.2} B^{0.6} \mathcal{P} \quad (5.11)$$

Pour le moteur à allumage par compression (Diesel), la norme lie la puissance du moteur dans les conditions standards et non standards moyennant selon la relation :

$$\mathcal{P}_0 = A^{0.7} B^{1.5} \mathcal{P} \quad (5.12)$$

5.2.3 Ajustement des courbes de puissance

Il n'est pas rare que l'on ne possède pas les courbes réelles de puissance et de couple du moteur à tous les régimes. Par contre, on connaît souvent les valeurs particulières suivantes :

- la puissance maximale $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{max}$ et son régime $\omega_1 = \omega_{nom}$ appelé le *régime nominal* ;
- le couple maximal $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{max}$ et le régime correspondant $\omega_2 = \omega_{C_{max}}$.

A partir de ces données minimales, on cherche à établir des relations analytiques simples pour établir des estimations généralement satisfaisantes dans le cadre d'approches simplifiées.

Approximation de type puissance généralisée

Au regard des courbes expérimentales qui possèdent un maximum en $\omega = \omega_1$, on peut supposer que la courbe de puissance peut être approchée par l'approximation expression de la forme suivante :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 - a |\omega - \omega_1|^b \quad \text{avec } b > 0 \quad (5.13)$$

où a et $b > 0$ sont des constantes à ajuster. Par construction la courbe atteint son maximum en $\omega = \omega_1$,

$$\mathcal{P}(\omega_1) = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{max} \quad (5.14)$$

Il reste à exprimer les conditions que la puissance est égale à la puissance en $\omega = \omega_2$ et que la courbe de couple y passe par un maximum :

$$\mathcal{P}(\omega_2) = \mathcal{P}_2 = C_{max} \omega_{C_{max}} \quad (5.15)$$

$$\left. \frac{dC}{d\omega} \right|_{\omega_2} = \left. \frac{d(\mathcal{P}/\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_2} = 0 \quad (5.16)$$

En exprimant la première des deux conditions, il vient :

$$a = \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{|\omega_1 - \omega_2|^b} \quad (5.17)$$

et donc que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) \left| \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1 - \omega_2} \right|^b$$

Le paramètre b est déterminé en exprimant la seconde condition spécifiant que le couple est maximal en $\omega = \omega_2$. On a :

$$\left. \frac{dC}{d\omega} \right|_{\omega_2} = \frac{\omega_2 \left. \frac{d\mathcal{P}}{d\omega} \right|_{\omega_2} - \mathcal{P}_2}{\omega_2^2} = 0$$

soit

$$\mathcal{P}_2 = \omega_2 \left. \frac{d\mathcal{P}}{d\omega} \right|_{\omega_2}$$

Cette l'interprétation géométrique de cette condition est que la tangente à la courbe de puissance en ω_2 passe par l'origine des axes. En développant la dérivée de l'expression de la puissance, il vient :

$$\left. \frac{d\mathcal{P}}{d\omega} \right|_{\omega_2} = -a b |\omega_1 - \omega_2|^{b-1} \text{sign}(\omega_1 - \omega_2) (-1) = a b (\omega_1 - \omega_2)^{b-1}$$

où le module a pu être omis puisque $\omega_2 < \omega_1$ et que $\mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_1$ par définition. On obtient finalement :

$$\mathcal{P}_2 = \omega_2 a b (\omega_1 - \omega_2)^{b-1} = b \omega_2 \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{\omega_1 - \omega_2}$$

Soit :

$$b = \frac{\frac{\omega_1 - 1}{\omega_2} - 1}{\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2} - 1} \quad (5.18)$$

En définitive la loi de type puissance généralisée s'écrit :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) \frac{|\omega_1 - \omega|^b}{|\omega_1 - \omega_2|^b} \quad (5.19)$$

Pour plus de précision, il est souvent utile de travailler sous forme de variables adimensionnelles. La formule s'écrit alors :

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_1} = 1 - \left(1 - \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1}\right) \left| \frac{1 - \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}} \right|^b \quad (5.20)$$

La courbe de couple s'en déduit par la relation :

$$\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{P}(\omega)/\omega \quad (5.21)$$

L'expérience montre que cet ajustement donne de bons résultats dans la plupart des cas lorsque l'on est dans le voisinage du point de puissance nominale. Malheureusement la qualité de l'approximation se détériore nettement aux basses vitesses et s'avère carrément fautive à faible vitesse de rotation. Dans ces plages, les approximations de type polynôme se révèlent souvent supérieures.

Approximation par un polynôme

Une autre possibilité pour réaliser une approximation de la courbe de puissance en fonction de la vitesse est d'utiliser un polynôme. Sous forme normalisée, cette approximation peut s'écrire de manière générale :

$$\mathcal{P}(\omega) \simeq \sum_{i=0}^n a_i \omega^i \quad (5.22)$$

A nouveau il est préférable de travailler avec des variables normalisées adimensionnelles.

$$\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{P}_{max} \simeq \sum_{i=0}^n a_i (\omega/\omega_{nom})^i \quad (5.23)$$

où $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{max}$ est la puissance maximale du moteur réalisée à la vitesse nominale $\omega_1 = \omega_{nom}$. Le couple moteur est donné par :

$$\mathcal{C}(\omega)/\mathcal{C}_1 \simeq \sum_{i=0}^n a_i (\omega^{i-1}/\omega_{nom}^i) \quad (5.24)$$

où $\mathcal{C}_1 = \mathcal{P}_1/\omega_1$ est le couple à la puissance nominale. On remarque immédiatement que le couple est infini à une vitesse de rotation nulle si le terme a_0 n'est pas nul. On supposera donc toujours :

$$\mathcal{P}(0) = 0 \quad \text{et} \quad a_0 = 0 \quad (5.25)$$

Genta [4] fait référence aux travaux d'Artomonov [1] qui propose d'utiliser un polynôme du troisième ordre ($n=3$).

$$\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{P}_1 = a_0 + a_1 (\omega/\omega_1) + a_2 (\omega/\omega_1)^2 + a_3 (\omega/\omega_1)^3 \quad (5.26)$$

Artomonov propose les coefficients suivants pour tous les types de moteur :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_3 = -1, \quad (5.27)$$

Pour les moteurs à essence (allumage par bougies), il suggère de prendre :

$$a_1 = 1, \quad \text{et} \quad a_2 = 1, \quad (5.28)$$

Pour les moteurs Diesel, Artomonov préconise les valeurs

$$a_1 = 0,6 \quad \text{et} \quad a_2 = 1,4 \quad (5.29)$$

si le moteur est à injection indirecte et

$$a_1 = 0,87 \quad \text{et} \quad a_2 = 1,13 \quad (5.30)$$

pour les moteurs diesel à injection indirecte.

L'examen des approximations obtenues avec la proposition d'Artomov montre que le choix des coefficients donne lieu à des approximations assez grossières. En reprenant l'idée d'un polynôme du troisième degré, on peut imposer réaliser un lissage permettant de prendre en compte les données connues. On impose d'abord que $\mathcal{P}(0) = 0$ et que $\mathcal{P}(\omega_1) = \mathcal{P}_{max}$. Il vient :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \end{aligned} \quad (5.31)$$

On peut encore imposer deux conditions afin de déterminer tous les coefficients. On impose généralement que la courbe de couple passe par un maximum en $\omega_2 = \omega_{C_{max}}$ et que ce maximum vaut C_{max} :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega_2) &= \mathcal{P}_2 = C_{max} \omega_{C_{max}} \\ \left. \frac{dC}{d\omega} \right|_{\omega_2} &= 0 \end{aligned}$$

On peut facilement exprimer ces deux conditions supplémentaires. Pour la facilité de l'écriture posons $n_2 = \omega_2/\omega_1$, il vient :

$$a_1 n_2 + a_2 n_2^2 + a_3 n_2^3 = \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1 \quad (5.32)$$

$$a_2 + 2 a_3 n_2 = 0 \quad (5.33)$$

La solution du système d'équations (5.31) - (5.33) nous livre :

$$a_3 = \frac{\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} - \frac{\omega_2}{\omega_1}}{-\frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3} \quad (5.34)$$

$$a_2 = -2 n_2 a_3 \quad (5.35)$$

$$a_1 = 1 + a_3(2n_2 - 1) \quad (5.36)$$

Malheureusement, les approximations cubiques ne permettent pas d'imposer que le régime nominal correspond au maximum de la puissance. Ceci n'est pas trop grave pour les moteurs Diesel parce que souvent pour ceux-ci le régime maximal est dicté par le rupteur, mais ceci est plutôt gênant pour les moteurs à essence. Pour satisfaire cette condition supplémentaire, il faut travailler au minimum avec une approximation par un polynôme du quatrième degré.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{P}_1 = a_0 + a_1 (\omega/\omega_1) + a_2 (\omega/\omega_1)^2 + a_3 (\omega/\omega_1)^3 \\ + a_4 (\omega/\omega_1)^4 \end{aligned} \quad (5.37)$$

En plus des conditions énoncées précédemment, on peut imposer que la dérive de la puissance est nulle en ω_1 , soit :

$$a_1 + 2 a_2 + 3 a_3 + 4 a_4 = 0 \quad (5.38)$$

Les valeurs numériques des coefficients se déduisent alors en résolvant le système linéaire :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \quad (5.39)$$

$$a_1 + 2 a_2 + 3 a_3 + 4 a_4 = 0 \quad (5.40)$$

$$a_1 n_2 + a_2 n_2^2 + a_3 n_2^3 + a_4 n_2^4 = \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1 \quad (5.41)$$

$$a_2 + 2 a_3 n_2 + 3 a_4 n_2^2 = 0 \quad (5.42)$$

Exercice 1

Soient les valeurs caractéristiques suivantes du moteur Peugeot XV3 (moteur à essence de 943 cm^3) :

$$\mathcal{P}_1 = 33,85 \text{ kW} \quad \text{à} \quad n_1 = 6000 \text{ tr/min}$$

$$\mathcal{C}_2 = 67,81 \text{ N.m} \quad \text{à} \quad n_2 = 3000 \text{ tr/min}$$

On calcule d'abord :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 628,30 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 314,15 \text{ rad/s} \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{C}_2 \omega_2 = 21,30 \text{ kW}\end{aligned}$$

Il vient ensuite :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1 &= 0,6293 \\ \omega_2/\omega_1 &= 0,5\end{aligned}$$

On peut alors trouver pour l'approximation de type puissance :

$$b = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1}{\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2} - 1} = \frac{2 - 1}{1,5996 - 1} = 1,698$$

On introduit ensuite les valeurs de la puissance pour déterminer le coefficient A :

$$a = \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{|\omega_1 - \omega_2|^b} = \frac{33,85 \cdot 10^3 - 21,30 \cdot 10^3}{|628,30 - 314,14|^{1,698}} = 722,34 \cdot 10^{-3}$$

Il vient l'expression finale de l'approximation :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{P}_1 - a |\omega - \omega_1|^b \\ &= 33,85 - 722,34 \cdot 10^{-6} |628,30 - \omega|^{1,698} \text{ [kW]}\end{aligned}$$

Exercice 2

La seconde application concerne un moteur 2.0 litre HDI de PSA. On dispose seulement des courbes de puissance et de couple (voir Figure 5.5). On y lit la puissance nominale du moteur vaut 100 kW (à 4000 tr/min) et son couple maximal est de 320 Nm (à 2000 tr/min). On calcule successivement les coefficients des approximations 1/ de type puissance généralisée et 2/ de type polynôme du troisième degré.

A la Figure 5.6, on compare les courbes de puissance proposées par les deux approximations. Les deux courbes passent par la valeur de la puissance nominale \mathcal{P}_1 en ω_1 . Par contre le polynôme n'atteint pas son maximum en ω_1 . Elle est donc moins précise au niveau de la puissance maximale.

A la Figure 5.7, on compare les courbes de couple proposées par les deux approximations. La courbe de couple de l'approximation de type puissance généralisé montre clairement une incohérence aux faibles vitesses. L'approximation polynomiale reste par contre de bonne qualité à basse vitesse autour du couple maximale et même à des vitesses de rotations inférieures. Elle sera donc recommandée pour la simulation des accélérations et des reprises.

Moteur 2.0 HDi - 138 ch (DIN)
2.0 HDi engine - 138 hp (DIN)

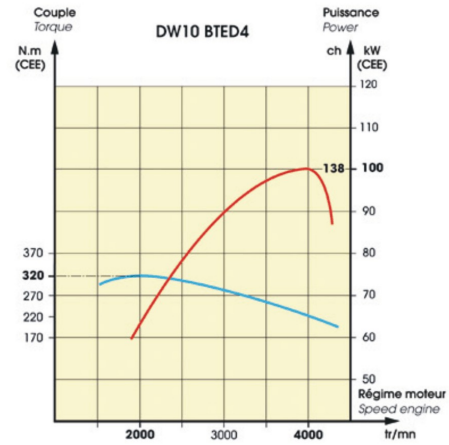
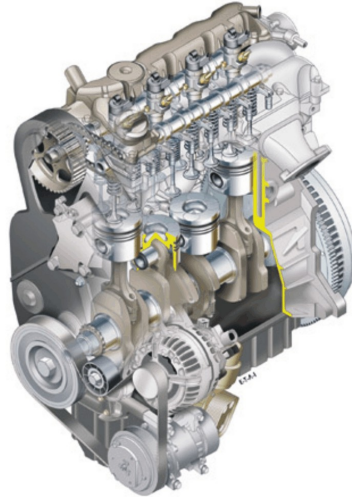


FIGURE 5.5 – Courbes de puissance et de couple d'un moteur 2.0 HDI

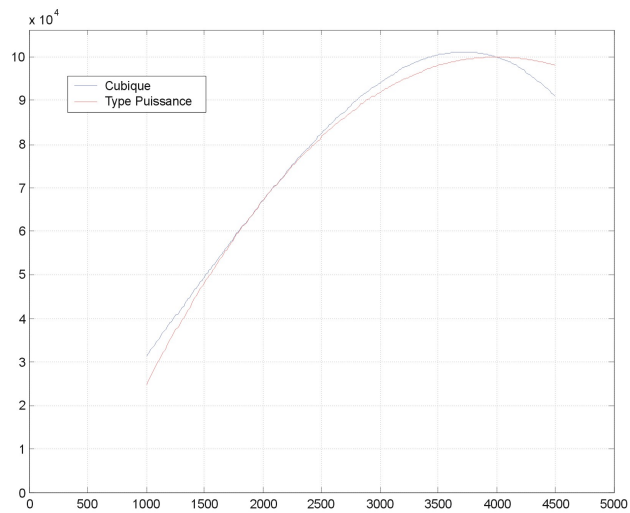


FIGURE 5.6 – Courbes d'approximation de la puissance d'un moteur 2.0 HDI
a/ Puissance généralisée b/ Polynôme de degré 3

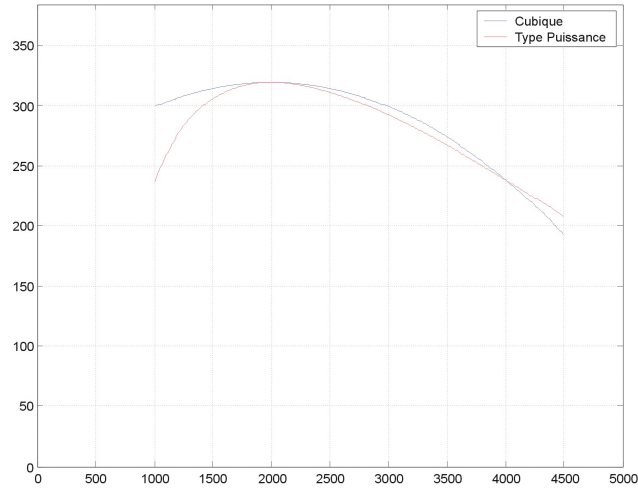


FIGURE 5.7 – Courbes d’approximation du couple d’un moteur 2.0 HDI a/ Puissance généralisée b/ Polynôme de degré 3

5.3 Puissance et effort de traction à la roue

5.3.1 Puissance aux roues

Les courbes de puissance et de couple du moteur étant maintenant connues, on peut prédire la puissance et la force aux roues. La puissance aux roues est directement liée à la puissance du moteur par la relation :

$$\mathcal{P}_{roues} = \eta \mathcal{P}_{mot} \quad (5.43)$$

Avec η le rendement global de la ligne de transmission. Dans ce rendement interviennent tous les éléments de la transmission à savoir (voir Figure 5.8) :

- l’embrayage,
- la boîte de vitesses,
- le pont,
- les joints cinématiques (joints homocinétiques par exemple) s’il y en a.

Le rendement global s’écrit donc

$$\eta = \eta_{embrayage} \eta_{boite} \eta_{pont} \eta_{joints} \quad (5.44)$$

En première approximation, Wong [26] propose d’admettre les valeurs suivantes :

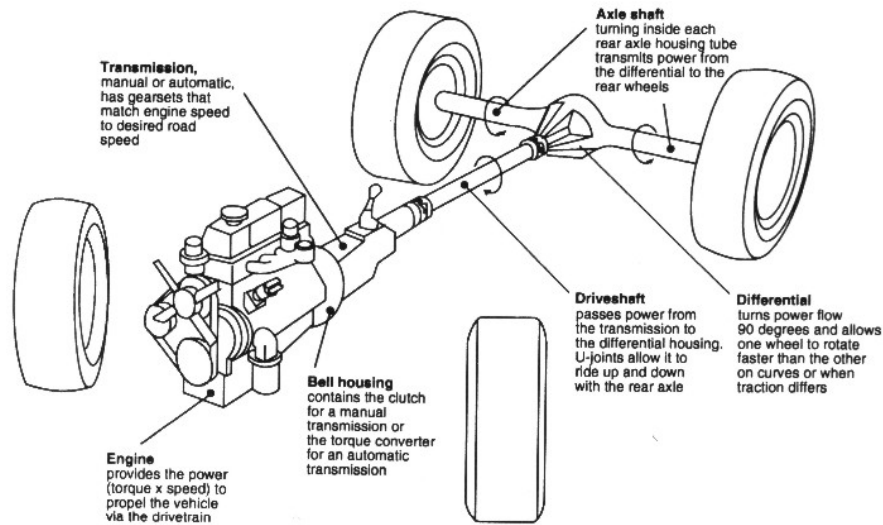


FIGURE 5.8 – La ligne de transmission d'un véhicule [5]

- Embrayage à friction sèche : $\eta_{embrayage} = 100\%$
- Embrayage hydraulique : $\eta_{embrayage} = 90\%$
- Boîte de vitesses en prise directe : $\eta_{boite} = 98\%$
- Boîte de vitesses en prise indirecte : $\eta_{boite} = 95\%$
- Ligne de transmission et pont : $\eta_{pont} = 95\%$
- Joints cinématiques : $\eta_{joints} = 99\%$

mais une analyse plus fine permet d'obtenir des valeurs de rendement plus optimistes comme on peut le voir par la suite.

Embrayage

Une fois en contact, un *embrayage à friction sèche* n'admet plus de glissement relatif et ne consomme pas d'énergie en fonctionnement normal :

$$\eta_{embrayage} = 100 \%$$

Il n'en est pas de même pour un *embrayage hydraulique*, comme on en place sur les transmissions automatiques. Le principe d'un embrayage hydraulique est rappelé à la Figure 5.11. De côté moteur, un *impulseur* joue le rôle d'une pompe centrifuge et communique une certaine vitesse et quantité de mouvement au fluide. Du côté récepteur, la turbine reçoit le fluide sur ses aubes et convertit la quantité de mouvement en rotation et en puissance mécanique. Dans les versions modernes, le coupleur hydraulique comporte

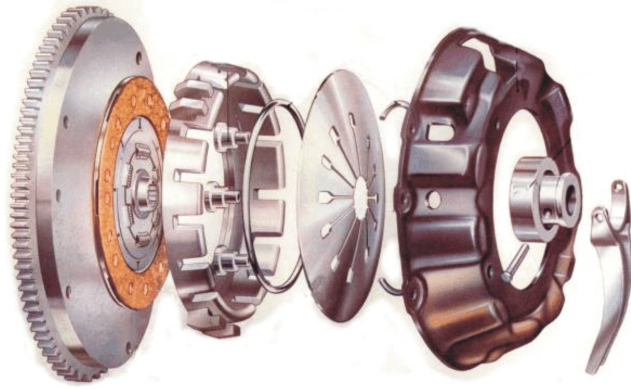


FIGURE 5.9 – Embrayage à friction sèche

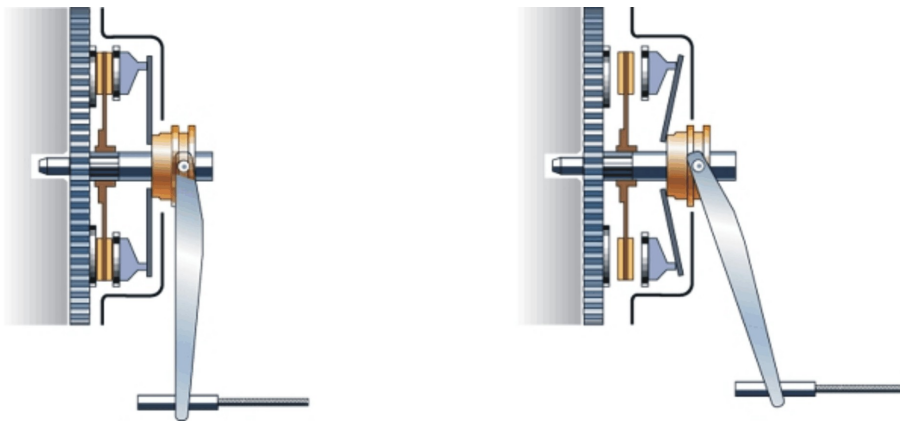


FIGURE 5.10 – Fonctionnement d'un embrayage à friction sèche

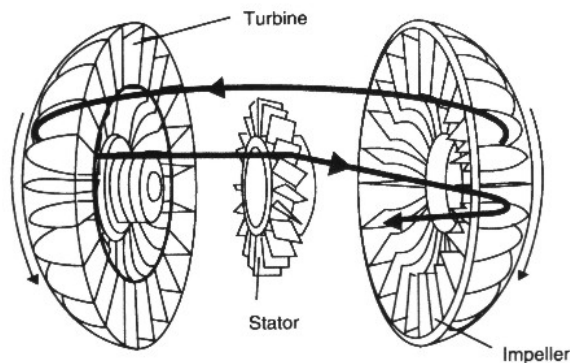


FIGURE 5.11 – Principe de fonctionnement d'un embrayage hydraulique d'après Gillespie [5]

également un stator que l'on peut soit laisser tourner librement soit bloquer en fonction des conditions. Le stator permet de rediriger le fluide à la sortie de la turbine au niveau de l'axe de rotation et de lui conférer un vecteur vitesse meilleur pour l'incidence sur les aubes d'entrée de l'impulseur. Ceci permet d'améliorer le rendement en réduisant les pertes pour des ratios importants entre la vitesse de rotation de sortie et d'entrée.

Par définition, l'embrayage hydraulique travaille toujours avec un léger glissement relatif, ce qui se traduit par un rendement nécessairement inférieur à 100 %. La Figure 5.12 extraite de Gillespie [5] donne une idée du rendement de l'embrayage hydraulique en fonction de la vitesse relative de l'arbre d'entrée et de sortie. Pour des calculs rapides, on peut prendre :

$$\eta_{\text{embrayage}} \approx 90 \%$$

en admettant un glissement d'environ 90 %.

Boîte de vitesses

Une boîte de vitesses manuelle est classiquement composée d'un axe d'entrée, d'un axe de sortie et d'un axe intermédiaire. La réduction s'effectue en deux étages. La première paire d'engrenages opère une première réduction entre l'arbre d'entrée et l'arbre intermédiaire. Ensuite plusieurs paires d'engrenages sont positionnées entre l'arbre intermédiaire et l'arbre de sortie. Seule une paire d'engrenages, au plus, est active à chaque instant. La sélection de la paire d'engrenages s'effectue grâce à une tringlerie. Un baladeur muni de crabots connecte la rotation de la roue dentée à l'arbre de sortie. A tout instant un rapport de marche avant met en jeu deux paires

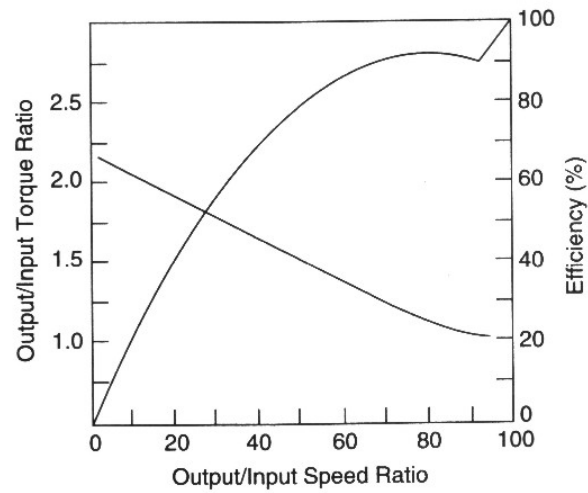


FIGURE 5.12 – Courbe de rendement d'un embrayage hydraulique d'après Gillespie [5]

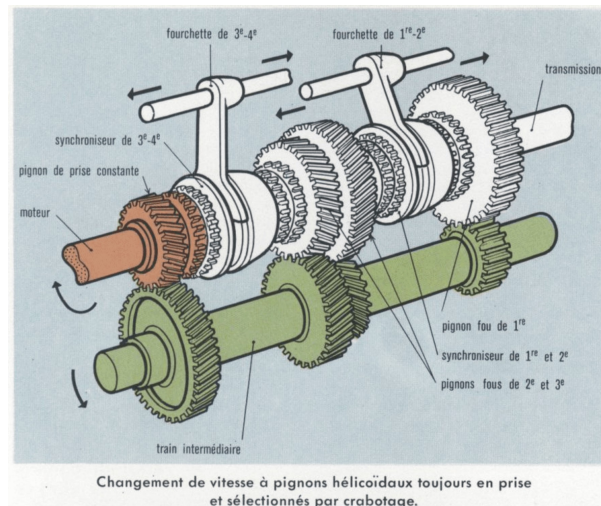


FIGURE 5.13 – Boîte de vitesse manuelle

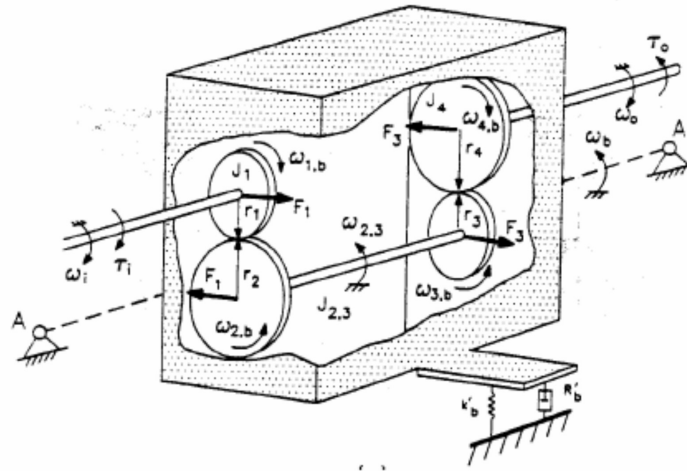


FIGURE 5.14 – Schéma de principe d'une boîte de vitesse manuelle

d'engrenage sauf dans le cas d'une prise directe où un embrayage connecte directement l'arbre d'entrée et l'arbre de sortie si ceux-ci le permettent parce qu'ils sont placés bout à bout.

Selon Henriot [9], un engrenage de bonne qualité a un rendement compris entre 98,5% et 99%. Dans les boîtes de vitesses courantes, il y a une double réduction, sauf en prise directe. On obtient ainsi :

$$\eta_{boite} = 0,97 \dots 0,98 \approx 0,975 \quad \text{pour un rapport normal}$$

$$\eta_{boite} = 1 \quad \text{en prise directe}$$

Pont

Dans le cas d'une transmission avec un moteur longitudinal et un renvoi d'angle, on utilise très souvent un couple hypoïde dont l'avantage est de permettre un déport de l'arbre de transmission vers le bas, mais ce déport se fait au détriment du rendement. On admet dans ce cas

$$\eta_{pont} = 0,975$$

Cette disposition longitudinale du moteur rend la prise directe possible.

Dans les véhicules à moteur transversal et traction avant, la transmission ne comporte pas de renvoi d'angle et le différentiel est réalisé avec un engrenage classique de sorte qu'on admet que :

$$\eta_{pont} = 0,9875$$

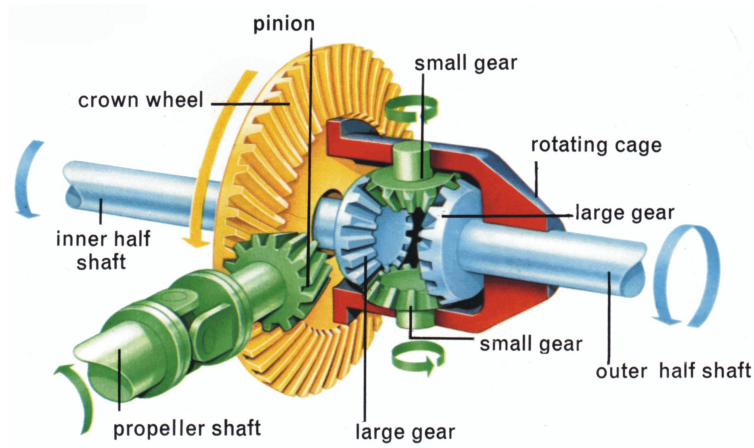


FIGURE 5.15 – Schéma d'un différentiel

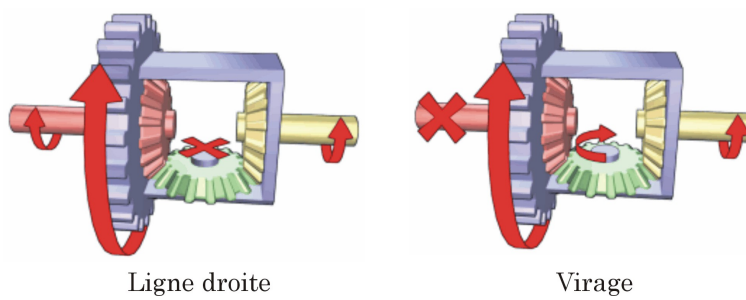


FIGURE 5.16 – Principe de fonctionnement d'un différentiel

Par contre, dans cette disposition du pont il est impossible d'obtenir une prise directe pour les boîtes de vitesses.

Estimations des rendements

Sur la base des estimations des rendements des différents composants de la ligne de transmission, on peut mener une estimations des rendements cumulés de la ligne de transmission. Ces valeurs sont livrés au tableau suivant :

| Embrayage | Rapport | Moteur longitudinal | Moteur transversal |
|-------------|---------------|---------------------|--------------------|
| Mécanique | Normal | 0,95 | 0,96 |
| | Prise directe | 0,975 | x |
| Hydraulique | Normal | 0,86 | 0,865 |
| | Prise directe | 0,88 | x |

5.3.2 Forces de propulsion aux roues

Boîte manuelle

Considérons d'abord le cas d'une boîte manuelle avec un embrayage à friction sèche. On déduit aisément l'effort aux roues des considérations précédentes. Pour cela il suffit de tenir compte des divers rapports de réduction vitesse.

Pour rappel on définit *le rapport de réduction* i comme le rapport entre la vitesse de rotation d'entrée et la vitesse de rotation de sortie :

$$i = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} \quad (5.45)$$

Ce rapport est supérieur à 1 pour un réducteur de vitesse. La vitesse de rotation étant réduite au travers de la boîte de vitesses et du pont, le rapport de réduction global de la vitesse de rotation entre l'arbre moteur et l'arbre des roues est :

$$i = i_{boite} i_{pont} \quad (5.46)$$

et

$$\omega_{mot} = i \omega_{roues} \quad (5.47)$$

Par ailleurs, les puissances aux roues et au moteur s'écrivent :

$$\mathcal{P}_{roues} = F_{roues} v \quad (5.48)$$

et

$$\mathcal{P}_{mot} = C_{mot} \omega_{mot} \quad (5.49)$$

Au rendement près, la conservation des puissances s'écrit :

$$F_{roues} v = \eta C_{mot} \omega_{mot}$$

Il vient :

$$F_{roues} = \eta C_{mot} \frac{\omega_{mot}}{v} \quad (5.50)$$

Or la vitesse du véhicule est liée à la vitesse de rotation des roues par le *rayon de roulement effectif* des pneus R_e .

$$v = \omega_{roues} R_e \quad (5.51)$$

Le rayon effectif de la roue R_e est inférieur au rayon géométrique extérieur de la roue considérée comme rigide. Il est également supérieur au rayon R_l du pneu sous charge. D'après Genta [4], pour des pneumatiques à carcasse radiale, R_l est de l'ordre de 92% du rayon rigide tandis que le rayon effectif de roulement R_e vaut environ 98% du rayon extérieur. Par ailleurs, on néglige également le glissement longitudinal du pneumatique SR . Celui-ci est défini comme le rapport :

$$SR = \frac{\omega R_e}{V} - 1$$

En effet la mécanique des pneumatiques requiert que toute accélération ou tout freinage s'accompagne d'une vitesse de rotation différente entre le pneu et la vitesse d'avance. En roue libre, ce glissement longitudinal est nul. Pour des phases d'accélération ou de freinage en régime habituel, ce glissement est de l'ordre de 2 à 5 %. Si on voulait en tenir compte on devrait écrire :

$$v = \omega_{roues} \frac{R_e}{1 + SR}$$

Cette formule suggère qu'une manière équivalente de voir les choses serait de considérer que le rayon effectif de roulement n'est plus R_e , mais bien $R_e/(1+SR)$ lors des phases d'accélération et de freinage. Dans cette première étude, cette correction est souvent négligée.

On a donc la vitesse linéaire du véhicule en fonction de la vitesse de rotation du moteur :

$$v = \frac{R_e}{i} \omega_{mot} \quad (5.52)$$

On appelle le rapport R_e/i la *longueur de transmission*, car il indique de combien de mètres on avance par radian (ou plus souvent par de tour) de moteur. Un rapport de boîte est plus long qu'un autre si son rapport R_e/i

est plus long. Il n'est pas rare que l'on définisse la longueur de transmission en donnant la vitesse linéaire par unité de vitesse du moteur. Par exemple, si on dit que dans le quatrième rapport on fait 30 km/h pour 1000 tr/min, on a :

$$\frac{R_e}{i} = \frac{30/3,6}{1000 \cdot 2\pi/60} = 0,07958 \text{ m}$$

En injectant le résultat (5.52) dans l'équation (5.50), on en tire *la force aux roues* :

$$F_{roues} = \eta C_{mot} \frac{\omega_{mot}}{\omega_{roues} R_e} = \eta C_{mot} \frac{i}{R_e} \quad (5.53)$$

La force aux roues est au rendement près égale au couple moteur divisé par la longueur de transmission.

5.3.3 Diagramme des forces aux roues

Boîte manuelle et embrayage à friction sèche

Avec les relations (5.52) et (5.53), on peut tracer le diagramme de la force aux roues $F_{roues}(v)$ à partir de celui de $C(\omega)$. Pour tracer ce graphe de la force aux roues en fonction de la vitesse, on calcule d'abord la vitesse de rotation du moteur en fonction de la vitesse d'avance v :

$$\omega_{mot} = i \omega_{roues} = v \frac{i}{R_e}$$

de sorte que on peut évaluer le couple développé par le moteur à cette vitesse d'avance :

$$C_{mot}(\omega_{mot}) = C_{mot}\left(v \frac{i}{R_e}\right)$$

Ensuite on calcule la force aux roues à partir des couples du moteur :

$$F_{roues} = \eta \frac{i}{R_e} C_{mot}\left(v \frac{i}{R_e}\right)$$

En résumé pour tracer le diagramme de $F_{roues}(v)$ esquissé à la Figure 5.17 à partir de celui de $C(\omega)$:

- On multiplie l'échelle des abscisses ω par R_e/i pour obtenir la vitesse d'avance du véhicule v ,
- On contracte l'échelle des ordonnées $C(\omega)$ par le rapport $\eta i/R_e$ pour obtenir la force à la jante F_{roues} .

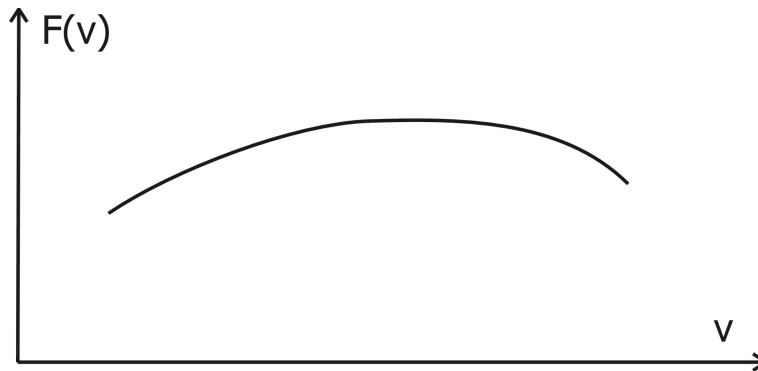


FIGURE 5.17 – Courbes de force à la roue

On peut également tracer la courbe de puissance à la roue en fonction de la vitesse v . Dans ce cas, la puissance étant conservée au rendement près par la ligne de transmission, la courbe de puissance moteur n'est pas déformée dans le sens des ordonnées. Par contre les abscisses subissent la même transformation que précédemment. On a :

$$\mathcal{P}_{roues} = \eta \mathcal{P}_{mot} \left(v \frac{i}{R_e} \right)$$

Il apparaît clairement que les caractéristiques de la transmission avec embrayage avec friction sèche ne modifient par l'allure des courbes de puissance et de couple. Les transformations n'affectent que les proportions. En particulier, les points de puissance maximale et de couple maximum restent des maximums de la courbe de puissance aux roues et de la force aux roues.

Pour les différents rapports de boîte, on trouve une famille de courbes telle que celles qui sont esquissées à la Figure 5.18. On peut également tracer les courbes de puissance à la roue pour les différents rapports et on obtient la situation de la Figure 5.19. L'enveloppe supérieure des courbes de puissances à la roue pour les différents rapports de boîte tend à recréer une courbe de puissance constante. De même l'enveloppe des courbes des forces à la roue pour les différents rapports de boîte tend à produire une hyperbole inversement proportionnelle à la vitesse (courbe de puissance maximale) :

$$\bar{\mathcal{P}}(v) \simeq \eta \mathcal{P}_{max} \quad (5.54)$$

$$\bar{F}_{roues}(v) \simeq \eta \mathcal{P}_{max} / v \quad (5.55)$$

Courbe enveloppe des forces aux roues

La Figure 5.18 donnant la force à la roue pour différents rapports de réduction suggère que la boîte de vitesse permet de recréer l'apparence d'une

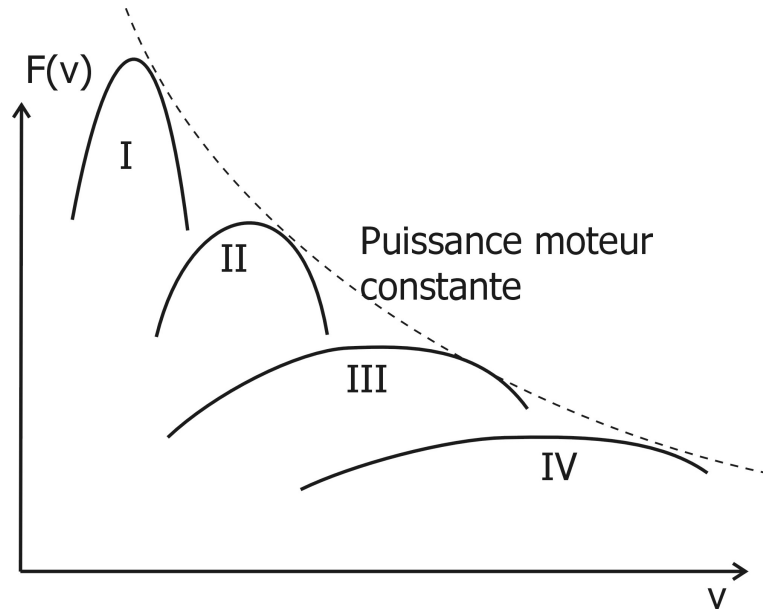


FIGURE 5.18 – Courbes de forces à roues pour différents rapports d’une boîte manuelle avec un embrayage à friction sèche

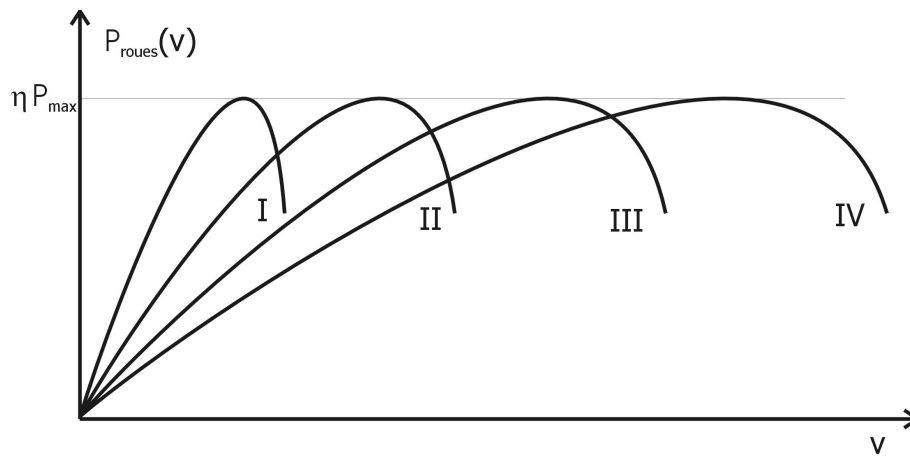


FIGURE 5.19 – Courbes de puissance à la roue pour une boîte manuelle

motorisation capable de produire une puissance contante dans une large plage de vitesse du véhicule. Cette hypothèse peut être facilement démontrée de la manière suivante.

Supposons que la puissance du moteur, manette des gaz complètement ouverte (WOT) soit donnée par un polynôme du troisième degré :

$$P_m = P_1 \omega_m + P_2 \omega_m^2 + P_3 \omega_m^3$$

Le couple moteur est donné par :

$$C_m = \frac{P_m}{\omega_m} = P_1 + P_2 \omega_m + P_3 \omega_m^2$$

Dès lors la force à la roue s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{roues} &= \eta C_m \frac{i}{R_e} \\ &= \eta [P_1 + P_2 \omega_m + P_3 \omega_m^2] \frac{i}{R_e} \end{aligned}$$

En tenant compte maintenant de la relation entre la vitesse du véhicule et de la vitesse de rotation du moteur au moyen de la longueur de transmission $r = i/R_e$:

$$v = \frac{v}{R_e} i$$

on trouve

$$\begin{aligned} F_{roues} &= \eta [P_1 + P_2 (\frac{i}{R_e} v) + P_3 (\frac{i}{R_e} v)^2] \frac{i}{R_e} \\ &= \eta P_1 (\frac{i}{R_e}) + \eta P_2 (\frac{i}{R_e})^2 v + \eta P_3 (\frac{i}{R_e})^3 v^2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc aussi d'un polynôme du second degré en la vitesse d'avance du véhicule dont les coefficients sont modifiés par le rapport de réduction i .

Cherchons à présent la courbe enveloppe de la famille des courbes de force aux roues $F_{roues}(i/R_e)$ pour tous les rapports de réduction i . L'hypothèse que l'on souhaite démontrer est que cette courbe enveloppe générées par tous les paramètres i/R_e recrée une courbe de motorisation idéale de puissance maximale constante :

$$\hat{F}_{roues} = \eta \frac{\hat{P}_{max}}{v}$$

Pour cela éliminons le paramètre i/R_e entre les courbes après avoir identifié l'ensemble des points qui maximisent la force aux roues pour chacune des

vitesses données v . Dérivons l'expression de la force aux roues par rapport au rapport de réduction, la vitesse v étant figée :

$$\frac{\partial F_{roues}}{\partial i} = 0$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{roues}}{\partial i} &= \eta \left(\frac{P_1}{R_e} \right) + \eta P_2 \frac{2i}{R_e^2} v + \eta P_3 \frac{3i^2}{R_e^3} v^2 = 0 \\ &= \left(\eta \frac{P_1}{R_e} \right) + \left(\eta P_2 \frac{2v}{R_e^2} \right) i + \left(\eta P_3 \frac{3v^2}{R_e^3} \right) i^2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré en i dont on peut facilement extraire la solution. Pour plus de facilité, on peut retravailler la forme de l'équation. En faisant un peu d'algèbre on trouve successivement :

$$\begin{aligned} \left(\eta \frac{P_1}{R_e} \right) + \left(\eta P_2 \frac{2v}{R_e^2} \right) i + \left(\eta P_3 \frac{3v^2}{R_e^3} \right) i^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow P_1 + 2 P_2 \frac{v i}{R_e} + 3 P_3 \left(\frac{v i}{R_e} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow P_1 + 2 P_2 x + 3 P_3 x^2 &= 0 \end{aligned}$$

en notant $x = \frac{v i}{R_e}$. La solution de l'équation est donnée par :

$$x^* = \frac{-P_2 \pm \sqrt{P_2^2 - 3P_1P_3}}{3P_3}$$

Etant donné que la solution doit être positive ($vi/R_e > 0$) et que on a $P_3 > 3$ par la forme expérimentale de la courbe de couple qui possède une concavité vers le bas, seule la solution a un sens :

$$\left(\frac{v i}{R_e} \right)^* = \frac{-P_2 + \sqrt{P_2^2 - 3P_1P_3}}{3P_3}$$

En substituant cette valeur dans l'expression de la force aux roues, on obtient le lieu, c'est-à-dire la courbe enveloppe.

$$\begin{aligned} \hat{F}_{roues} &= \frac{\eta P_1}{v} \left(\frac{v i}{R_e} \right)^* + \frac{\eta P_2}{v} \left(\frac{v i}{R_e} \right)^{*2} + \frac{\eta P_3}{v} \left(\frac{v i}{R_e} \right)^{*3} \\ &= \frac{\eta}{v} \left(\frac{v i}{R_e} \right)^* \left[P_1 + P_2 \left(\frac{v i}{R_e} \right)^* + P_3 \left(\frac{v i}{R_e} \right)^{*2} \right] \\ &= \frac{\eta}{v} \frac{-P_2 + \sqrt{\rho}}{3P_3} \left[P_1 + P_2 \left(\frac{-P_2 + \sqrt{\rho}}{3P_3} \right) + P_3 \left(\frac{-P_2 + \sqrt{\rho}}{3P_3} \right)^2 \right] \\ &\quad \text{avec } \rho = P_2^2 - 3P_1P_3 \end{aligned}$$

Cette équation peut se simplifier quelque peu avec un peu d'algèbre. En particulier la dernière paranthèse devient :

$$\begin{aligned}
& \left[P_1 + P_2 \frac{-P_2 + \sqrt{\rho}}{3P_3} + P_3 \left(\frac{-P_2 + \sqrt{\rho}}{3P_3} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{9P_3^2} \left[9P_1P_3^2 + 3P_2P_3(-P_2 + \sqrt{\rho}) + P_3(2P_2^2 - 3P_1P_3 - 2P_2\sqrt{\rho}) \right] \\
&= \frac{1}{9P_3^2} \left[9P_1P_3^2 - 3P_2^2P_3 + 3P_2P_3\sqrt{\rho} + 2P_2^2P_3 - 3P_1P_3^2 - 2P_2P_3\sqrt{\rho} \right] \\
&= \frac{1}{9P_3^2} \left[6P_1P_3^2 - P_2^2P_3 + P_2P_3\sqrt{\rho} \right] \\
&= \frac{1}{9P_3} \left[6P_1P_3 - P_2^2 + P_2\sqrt{\rho} \right]
\end{aligned}$$

On trouve donc finalement

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{roues} &= \frac{\eta}{v} \frac{-P_2 + \sqrt{\rho}}{3P_3} \frac{1}{9P_3} \left[6P_1P_3 - P_2^2 + P_2\sqrt{\rho} \right] \\
&= \frac{\eta}{v} \frac{1}{27P_3^2} (-P_2 + \sqrt{\rho}) (6P_1P_3 - P_2^2 + P_2\sqrt{\rho}) \\
&= \frac{\eta P_2}{v} \frac{1}{27P_3^2} (-P_2 + \sqrt{\rho}) \left(\frac{6P_1P_3}{P_2} - P_2 + \sqrt{\rho} \right) \\
&\quad \text{avec } \rho = P_2^2 - 3P_1P_3
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à l'équation de la force aux roues d'une motorisation idéale

$$\hat{F}_{roues} = \eta \frac{\hat{P}_{max}}{v}$$

de puissance \hat{P}_{max}

$$\hat{P}_{max} = \frac{P_2}{27P_3^2} (P_2 - \sqrt{P_2^2 - 3P_1P_3}) \left(P_2 - \sqrt{P_2^2 - 3P_1P_3} - \frac{6P_1P_3}{P_2} \right)$$

Boîte automatique

Dans le cas des boîtes automatiques avec un embrayage hydraulique, le développement réalisé précédemment doit être considérablement révisé à cause du glissement inhérent à l'embrayage hydraulique et à l'amplification du couple comme cela est illustré à la Figure 5.20. Le glissement et l'amplification du couple modifient donc l'allure des courbes de couple et de puissance du moteur comme cela est montré à la Figure 5.21.

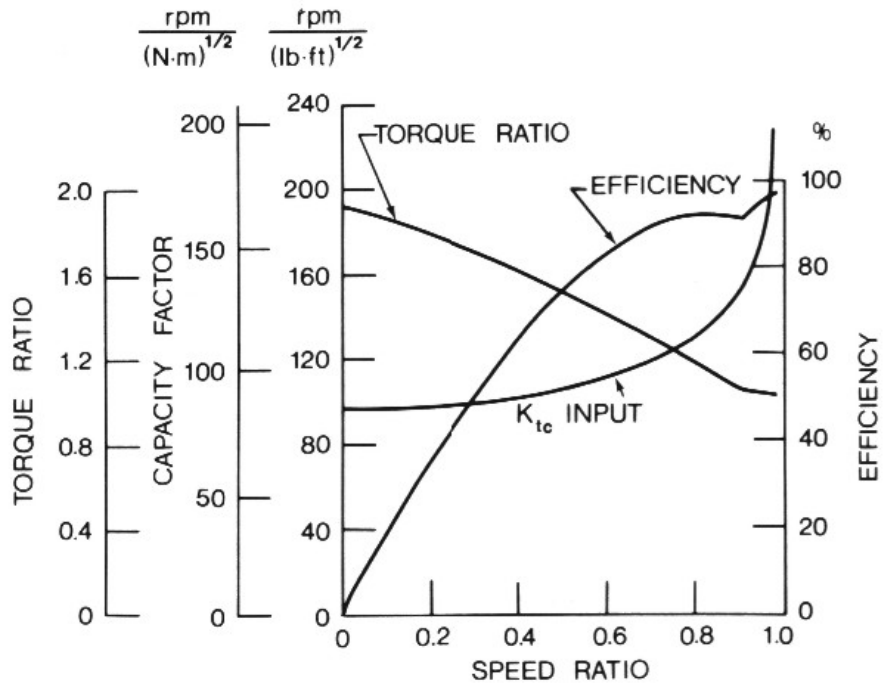


FIGURE 5.20 – Caractéristiques d'un embrayage hydraulique d'après [26]

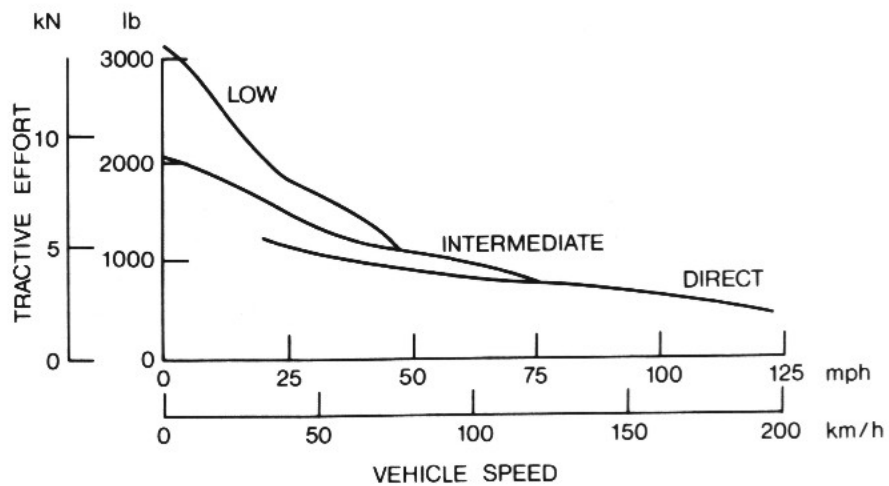


FIGURE 5.21 – Courbes de force à la roue, pour une boîte automatique avec un embrayage hydraulique d'après [26]

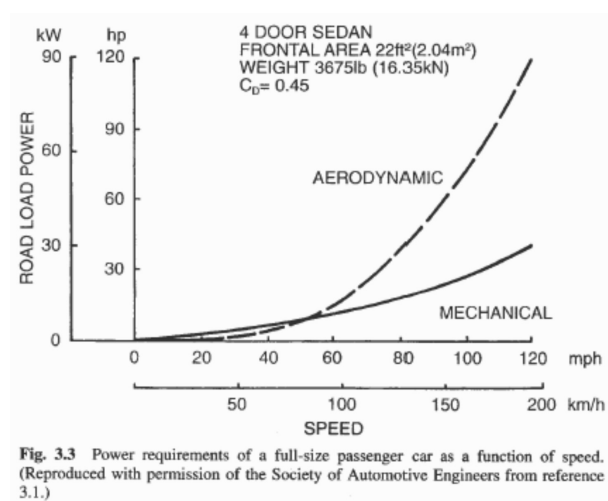


FIGURE 5.22 – Puissance des forces de résistance en fonction de la vitesse d'avance d'après [26]

5.4 Forces de résistance à l'avancement

L'avance du véhicule est entravée par différentes forces de résistance à l'avancement. De manière intuitive, la première est la force de pesanteur que l'on doit vaincre en côte, situation dans laquelle il faut gagner de l'énergie potentielle. Mais même à plat, le véhicule est confronté à une *résistance aérodynamique* et à une *résistance au roulement*. La force aérodynamique est la force nécessaire pour modifier l'écoulement du fluide autour la voiture, tandis que la force de résistance au roulement recouvre toutes les dissipations d'énergie due au roulement : déformation dans les pneumatiques, dans les suspensions etc. A faible vitesse, c'est la force de résistance au roulement qui est prépondérante. La situation s'inverse lorsque la vitesse augmente pour mener à une prépondérance de la force aérodynamique à hautes vitesses. Pour une voiture, ce croisement a lieu pour une vitesse de 80 km/h environ. Pour les poids lourds, elle survient à très haute vitesse tandis que pour les véhicules légers, il peut déjà survenir pour 20 à 30 km/h.

Avec l'importance grandissante des économies d'énergie et la réduction des émissions de polluants, il est devenu de plus en plus important de réduire la demande énergétique du véhicule. A cette fin, les recherches et les développements dans les véhicules ont pour objet de réduire les pertes aérodynamiques, mais aussi toutes les pertes proportionnelles au poids du véhicule à savoir les pertes dues aux forces de résistance au roulement, la résistance de pente et les forces d'inertie.

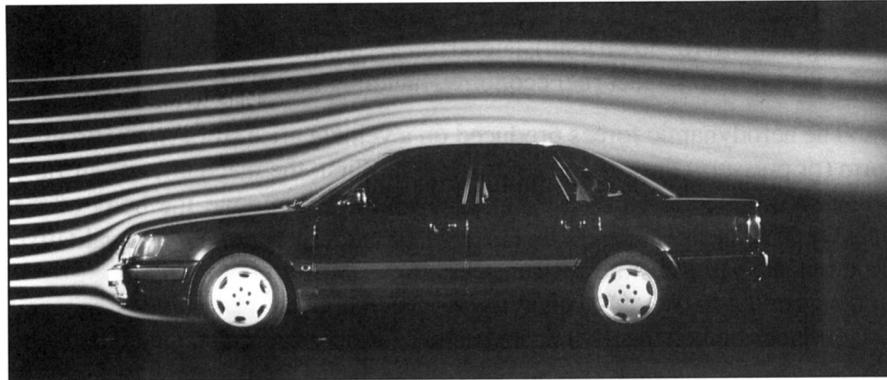


FIGURE 5.23 – Écoulement autour de la surface d'une voiture [5]

5.4.1 Forces aérodynamiques

L'écoulement de l'air autour du véhicule en mouvement donne naissance à des forces aérodynamiques qui peuvent être très importantes spécialement à haute vitesse. Le véhicule est un corps peu fuselé, avec des décollements importants de l'écoulement en haut de la lunette arrière, la formation de tourbillons, etc. L'effet de sol modifie fortement l'écoulement. Par ailleurs, la rotation des roues crée un écoulement local qui interfère fortement avec l'aérodynamique générale du véhicule. L'aérodynamique interne pour le refroidissement du moteur et du système de conditionnement d'air augmente également la résistance.

La résistance aérodynamique provient de deux sources. La première est l'écoulement de l'air autour de l'extérieur du véhicule ; c'est l'aérodynamique externe du véhicule. La seconde provient de l'écoulement interne au véhicule : i.e. écoulement à travers le compartiment moteur, à travers le système de radiateur et le flux d'air à l'intérieur de l'habitacle pour le refroidissement, le chauffage, la climatisation, et la ventilation ; c'est l'aérodynamique interne. Des deux sources la première est la plus importante. Elle compte pour environ 90 % de la résistance aérodynamique totale présentée par une voiture automobile.

L'écoulement de l'air autour de la carrosserie produit des contraintes normales de pression et des contraintes tangentielles de cisaillement sur la surface du corps. En conséquence, on distingue dans la résistance aérodynamique deux composantes, l'une généralement appelée *traînée de forme ou de pression* et l'autre *traînée de friction*. La traînée de forme est due à une résultante des pressions qui agit en sens inverse du mouvement. La traînée de friction est due à l'effet de viscosité du fluide dans les couches limites qui se

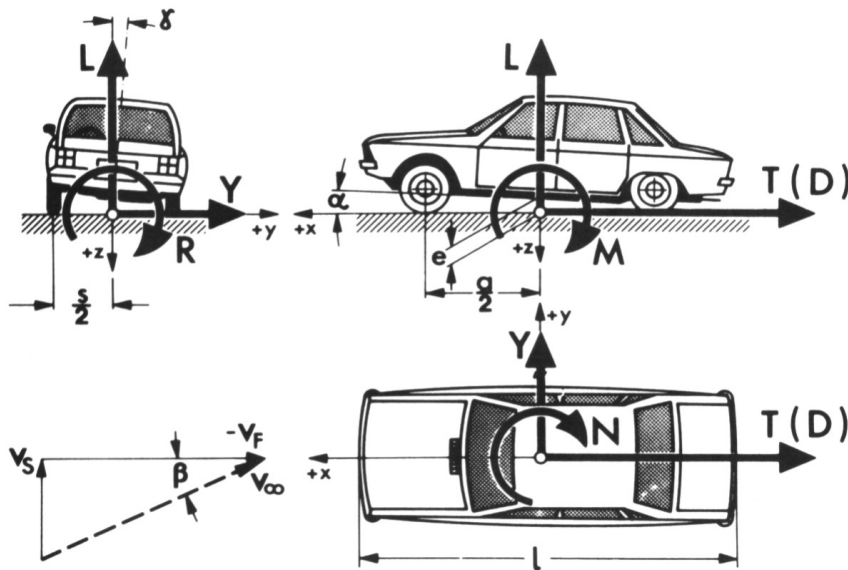


FIGURE 5.24 – Définition des efforts sur une automobile [5]

développent autour de la surface du corps. Pour les véhicules automobiles qui sont généralement peu élancés et ont un fini de surface habituel, la traînée de forme est de loin la plus importante. Elle peut contribuer jusqu'à 90 % de la traînée totale. Pour les véhicules très allongés tels que les trains, et même les bus ou les camions avec remorque, c'est l'inverse. On notera toutefois que l'énergie perdue dans le sillage du véhicule et l'énergie dépensée pour créer les tourbillons générés par le véhicule ne sont pas à considérer en supplément, mais sont des manières alternatives de considérer les traînées de pression et de friction.

Expression des forces aérodynamiques

Soit S la surface frontale du véhicule, L l'empattement du véhicule, t la voie du train roulant, ρ la masse volumique de l'air et V la vitesse relative totale du véhicule par rapport à l'air. On peut écrire $V = v_w + v$ avec v_w la vitesse du vent de face et v la vitesse du véhicule par rapport au sol.

Les aérodynamiciens ont l'habitude d'écrire les forces et moments résultants de l'action de l'écoulement du fluide sur le corps au moyen de quantités adimensionnelles, appelées *coefficients aérodynamiques*. On peut montrer grâce aux théorèmes de Vaschy-Buckingham sur les nombres adimensionnels que

l'on peut écrire :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_x \quad (5.56)$$

$$F_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y \quad (5.57)$$

$$F_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_z \quad (5.58)$$

et

$$M_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S t C_l \quad (5.59)$$

$$M_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S L C_m \quad (5.60)$$

$$M_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S L C_n \quad (5.61)$$

Les coefficients aérodynamiques utilisés en automobile portent respectivement les noms de coefficient de force longitudinale C_x , coefficient de force latérale C_y , coefficient de force normale C_z , coefficient de moment de roulis C_l , coefficient de moment de tangage C_m et coefficient de moment de lacet C_n .

Ces coefficients sont très difficiles à obtenir de manière précise par calcul et sont généralement déterminés de manière expérimentale par des essais en soufflerie.

On remarquera en outre que les moments sont exprimés par rapport à un point de référence situé à mi empattement entre les roues et au niveau du sol (voir figure 5.24). En effet lors des études aérodynamiques en soufflerie, le centre de masse du véhicule n'est pas connu. Seule une référence purement géométrique de la carrosserie est disponible. La conversion des grandeurs dans les axes liés au centre de masse est obtenue au moyen du théorème de transport.

Expression des forces de traînée

En général pour l'étude des performances, on ne considère qu'un mouvement rectiligne du véhicule en ignorant les vents latéraux. Dès lors on se contente de considérer les forces de traînée, c'est-à-dire des forces aérodynamiques selon la direction d'avance du véhicule, de sorte que la résistance aérodynamique s'écrit :

$$F_{aéro} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_x \quad (5.62)$$

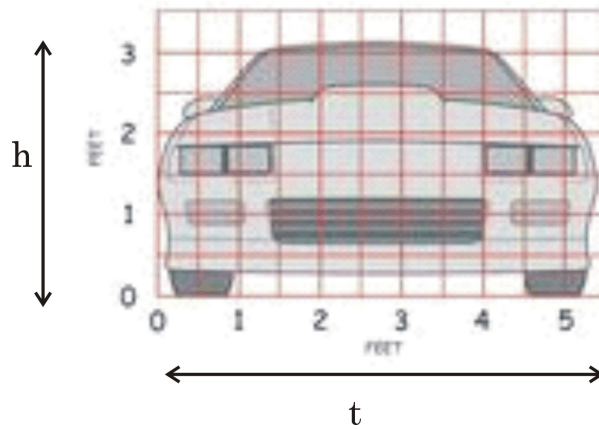


FIGURE 5.25 – Définition de la surface frontale du véhicule (maître couple)

Pour les véhicules automobiles, la SAE recommande de prendre la section S comme étant la section du véhicule projetée dans la direction d'avance, en incluant les pneumatiques et les parties sous la voiture. (Voir Figure 5.25).

Cette surface frontale n'étant pas toujours connue, elle peut être approchée de manière assez valable par la *formule dite de Paul Frère* :

$$S \simeq \psi h t \quad (5.63)$$

où h et t sont les hauteurs et largeurs de la surface frontale du véhicule projetée et ψ est un coefficient de corrélation qui dans l'état de la technologie varie entre 0,80 et 0,95. Pour les voitures modernes on préconise $\psi = 0.83$.

Alternativement Wong [26] propose une formule obtenue par corrélation entre la surface frontale et la masse pour un grand nombre de voitures dont la masse se trouve entre 800 et 2000 kg :

$$S \simeq 1.6 + 0.00056 (m - 765) \quad (5.64)$$

avec la surface S frontale exprimée en m^2 et la masse m en kg .

La Figure 5.26 et la Table 5.4.1 donnent quelques coefficients de traînées typiques pour des formes simples et des automobiles.

Origine des forces aérodynamiques

Etant donné les nombres de Mach et de Reynolds, l'écoulement autour des voitures peut-être considéré comme incompressible et non visqueux, sauf

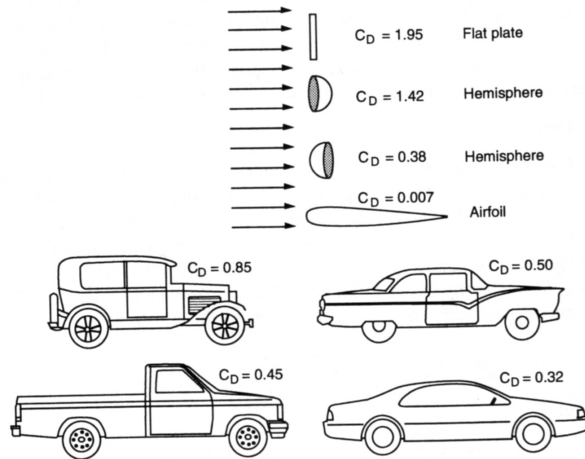


FIGURE 5.26 – Coefficients de traînée pour différentes voitures [5]

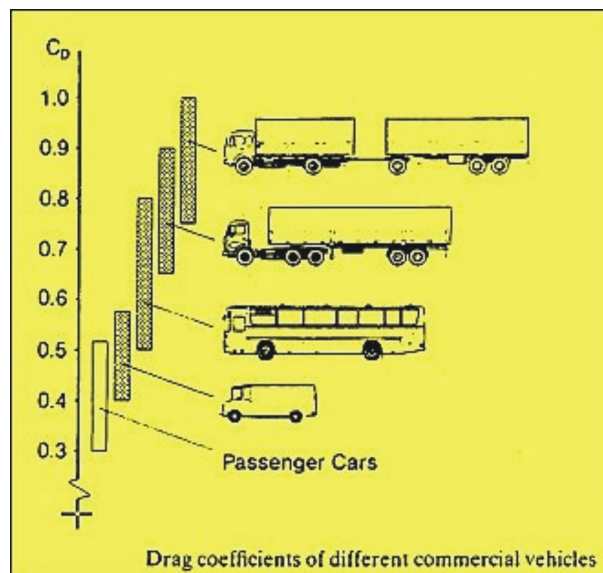


FIGURE 5.27 – Coefficients de traînée pour différents types de véhicules

| Vehicle Type | Drag coefficient |
|-----------------------|------------------|
| Passenger Car | 0.3 – 0.52 |
| Vans | 0.4 – 0.58 |
| Convertible | 0.5 – 0.7 |
| Buses | 0.5 – 0.8 |
| Tractor - semitrailer | 0.64 – 1.1 |
| Truck-trailers | 0.74 – 1.0 |
| Motorcycles | 0.6 – 0.7 |

TABLE 5.1 – Coefficient de traînée pour différents types de véhicule

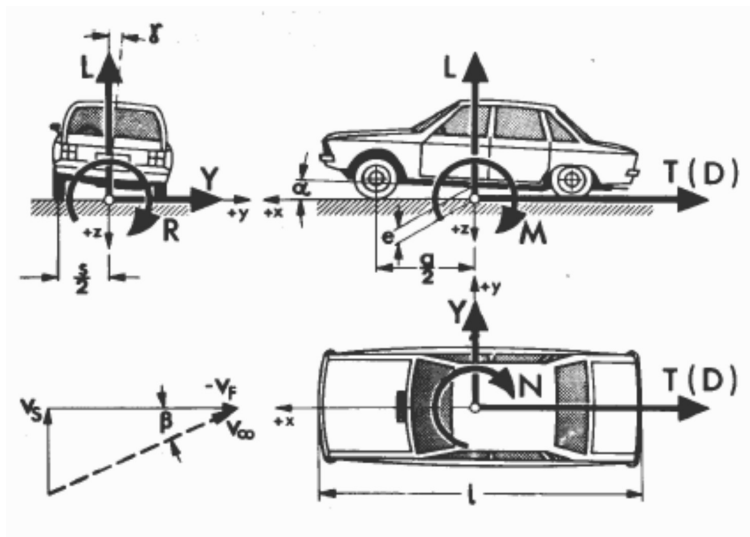


FIGURE 5.28 – Visualisation des lignes de fluides autour du véhicule

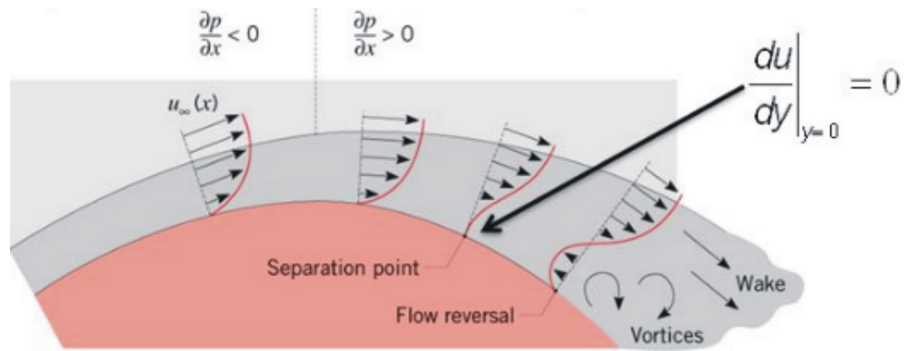


FIGURE 5.29 – Décollement de la couche limite sous l'effet d'un ralentissement de l'écoulement et d'un gradient adverse de pression

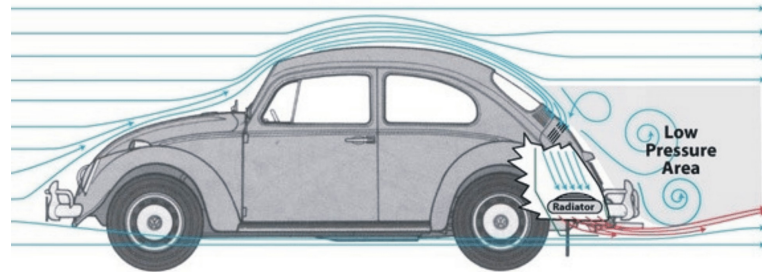


FIGURE 5.30 – Naissance de la trainée autour du véhicule

dans les couches limites. Pour ces écoulements, la loi de Bernoulli s'applique

$$p_t = p + \frac{1}{2}\rho V^2 = Cste \quad (5.65)$$

Les effets de viscosité sont confinés à la couche limite.

En appliquant l'équation de Bernoulli (5.65), on constate l'apparition d'un point de stagnation à l'avant du véhicule avec une zone de surpression. Comme observé à la Figure 5.28, l'écoulement s'écarte ensuite pour contourner le véhicule par le dessous et surtout par le dessus. Cela entraîne une mise en vitesse de l'écoulement et par conséquent une diminution de la pression. Globalement la mise en survitesse sur le toit du véhicule étant plus importante que sous le plancher, on mesure un effet net de déportance et l'écoulement donne lieu à une force orientée vers le haut. Si l'écoulement était idéal, les lignes de fluide se resserreraient à l'arrière du véhicule et une zone de surpression et un point de stagnation serait présente à l'arrière. Malheureusement, à cause du ralentissement de l'écoulement, on assiste à un décollement de la couche limite au niveau de l'arrière, au large de tour-

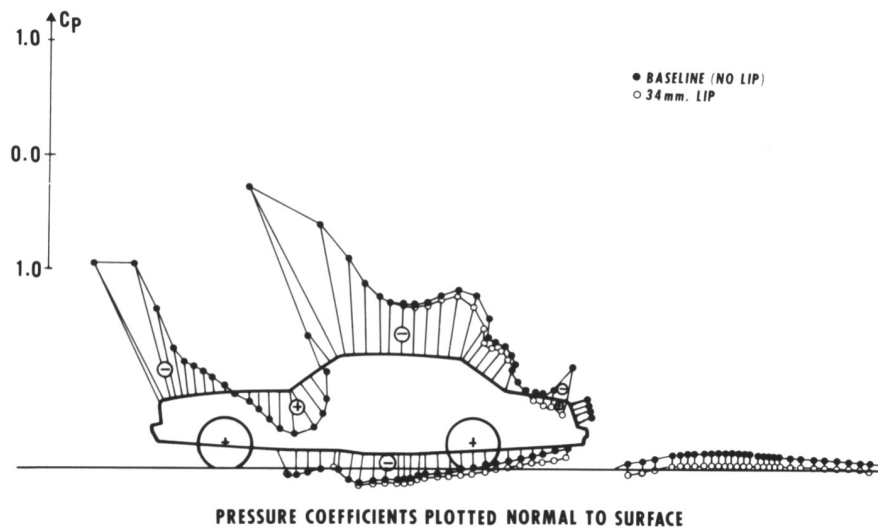


FIGURE 5.31 – Distribution de pression le long de la ligne médiane d'une voiture [5]

billons et à une chute de pression à l'arrière du véhicule à cause de la remontée d'air calme. En effet le ralentissement de l'écoulement conduit à un gradient adverse de pression (voir Figure 5.29) qui déstabilise la couche limite et entraîne sa séparation de la paroi. La présence d'une zone de haute pression sur la face avant et de basse pression à l'arrière produit une résultante nette des forces de pression dirigée vers l'arrière et une résistance à l'avancement, appelée traînée aérodynamique (Voir Figure 5.30).

L'explication qui vient d'être livrée est fondée sur une analyse bidimensionnelle dans le plan médian du véhicule. Lorsque l'on considère la nature 3D de l'écoulement (voir Figure 5.32), le phénomène de décollement et de traînée est amplifié, car le décollement de l'écoulement a lieu non seulement dans le plan vertical mais aussi sur les côtés du véhicule. Lorsque l'angle de la plage arrière grandit, les lignes de courant latérales peuvent être également aspirées dans la dépression arrière et donner naissance à des nappes tourbillonnaires. On observera l'importance du dessin de l'arrière du véhicule et singulièrement du coffre, de la descente de toit et des arrêtes latérales.

La Figure 5.33 dresse le bilan des contributions de chaque partie du véhicule sur la traînée globale (ici $C_x = 0.42$). On voit immédiatement que la partie la plus importante (ici 65%) de la traînée provient de la carrosserie (avant, arrière, dessous, friction). On pointe ainsi l'importance du soin à apporter à l'arrière pour mieux contrôler les décollements et réduire la traînée. Le

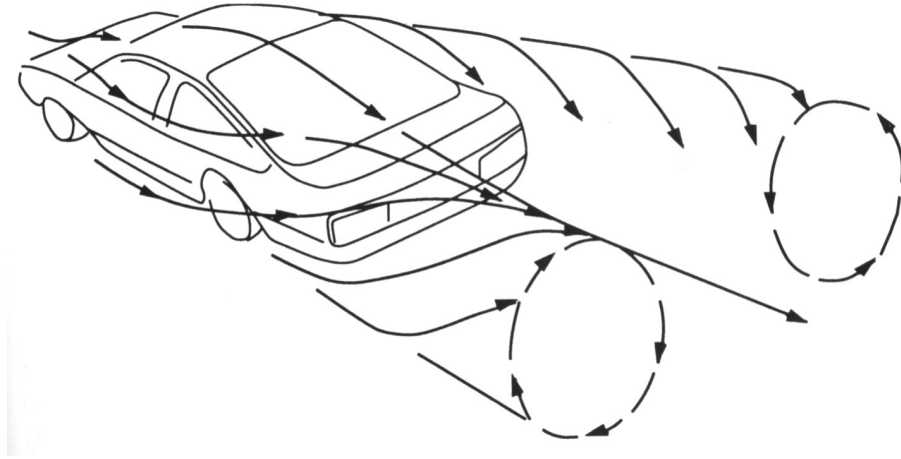


FIGURE 5.32 – Développement d'un système de tourbillons 3D autour du véhicule [5]

| DRAG COEFFICIENT COMPONENT | TYPICAL VALUE |
|----------------------------|-------------------|
| Forebody | 0.05 |
| Afterbody | 0.14 |
| Underbody | 0.06 |
| Skin Friction | 0.025 |
| Total Body Drag | 0.275 |
| Wheels and wheel wells | 0.09 |
| Drip rails | 0.01 |
| Window recesses | 0.01 |
| External mirrors | 0.01 |
| Total Protuberance Drag | 0.12 |
| Cooling system | 0.025 |
| Total Internal Drag | 0.025 |
| Overall Total Drag | 0.42 ¹ |
| VEHICLE OF THE 1980s | |
| Cars | 0.30 - 0.35 |
| Vans | 0.33 - 0.35 |
| Pickup trucks | 0.42 - 0.46 |

¹ Based on cars of 1970s vintage.

FIGURE 5.33 – Contributions des différentes parties d'une voiture à la traînée aérodynamique totale [5]

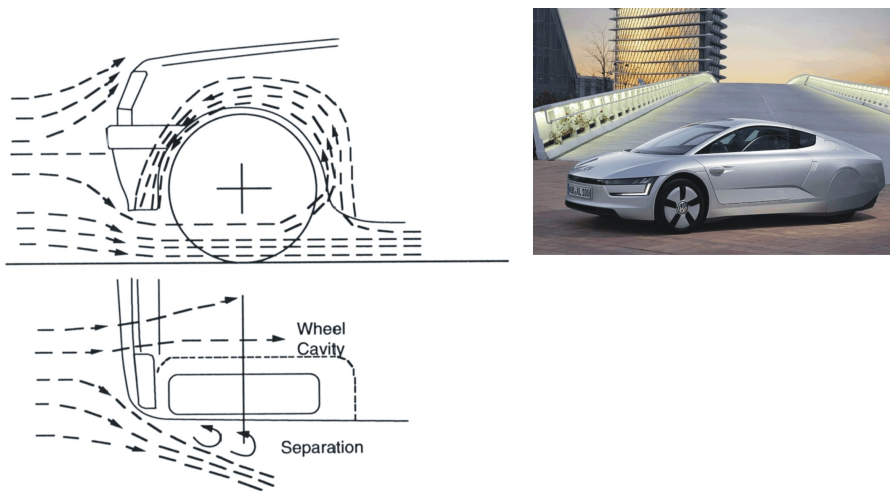


FIGURE 5.34 – Traînée liée à la rotation des roues

lieu et l'importance de la zone de séparation influencent évidemment très fort les forces aérodynamiques dont la traînée et la portance. Plus cette zone est petite, plus la traînée est réduite. Par contre il est moins intuitif de constater qu'une part non négligeable de la traînée est imputable aux roues (21%), aux détails de la carrosserie (7%), et à l'aérodynamique interne (6%). Ces points offrent aussi un large potentiel de réduction de la traînée pour les ingénieurs.

La rotation des roues contribue fortement à la traînée, car elle est une source de turbulence dans l'écoulement et de recirculation de l'air. Pour améliorer la performance aérodynamique, il faut couvrir les puits de roue et diminuer l'espace entre les roues et les garde boue (Voir Figure 5.34).

Le système de refroidissement lui aussi a un impact majeur sur la traînée. En effet l'air qui entre dans le compartiment moteur est arrêté sur les parois du moteur et exerce une pression aérodynamique importante (Voir Figure 5.35). L'écoulement y est très chaotique. La situation peut être améliorée en concevant l'aération afin de permettre au fluide de s'écouler à travers le moteur et d'en ressortir facilement. Un bon design consiste à réduire au minimum les prises d'air en fonction des besoins pratiques de refroidissement de la motorisation et de l'échange de chaleur avec l'écoulement (Voir Figure 5.36).

Les détails de carrosserie ont un impact non négligeable sur la traînée globale comme le montre la Figure 5.37. Ils méritent donc une attention particulière, car ils peuvent induire des petits décollements. Des contours aussi lisses que possible sont importants pour la traînée mais aussi pour la réduction des bruits aérodynamiques.

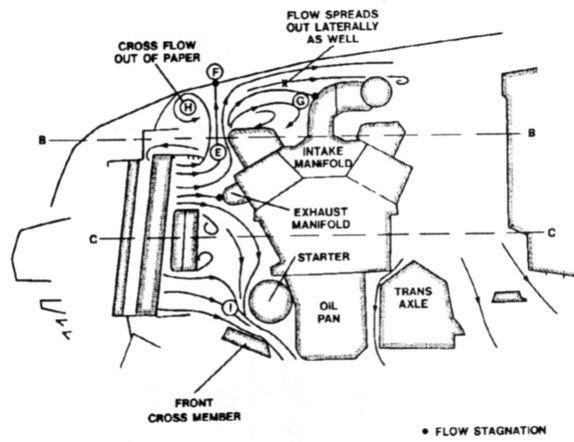


FIGURE 5.35 – Influence du système de refroidissement du moteur sur la traînée [5]

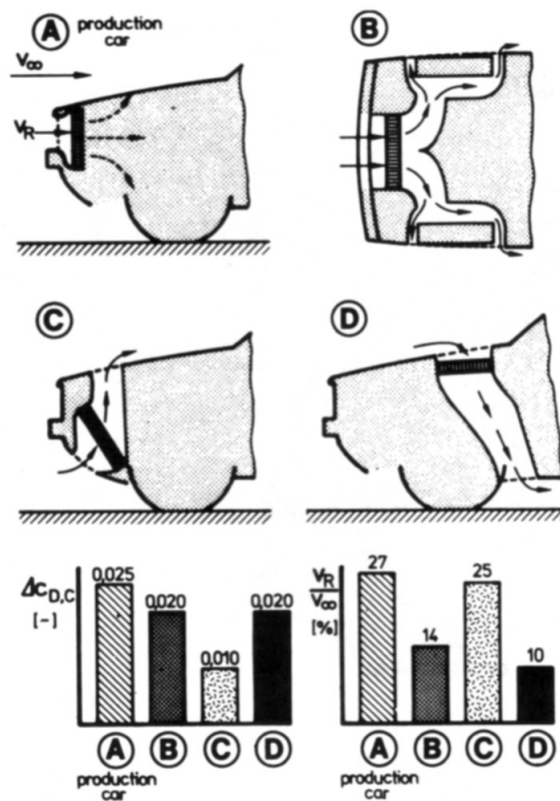


FIGURE 5.36 – Influence du design du système de refroidissement sur la traînée [5]

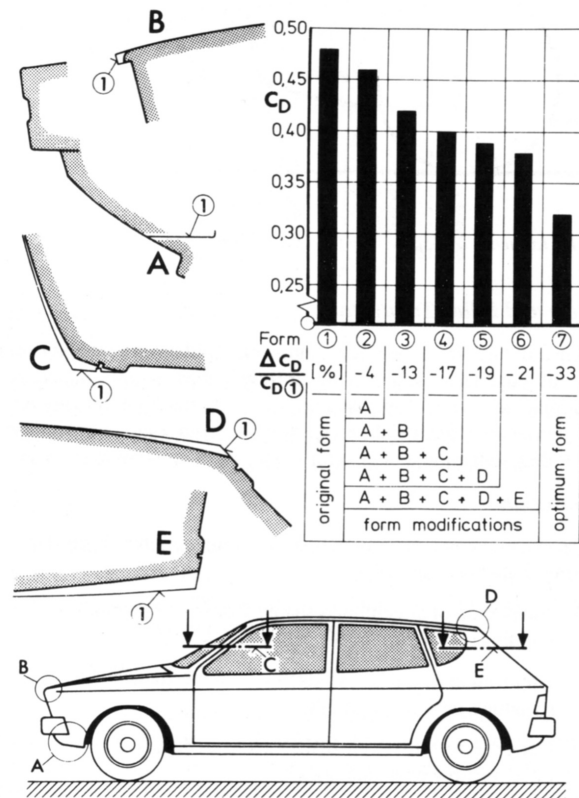


FIGURE 5.37 – Optimisation des détails de carrosserie pour réduire la traînée [5]

5.4.2 Forces de résistance au roulement

Les forces de résistance au roulement recouvrent des effets provenant de différentes sources :

- le travail de déformation des pneumatiques,
- la déformation du terrain (surtout s'il est meuble),
- le frottement des roulements, des paliers, etc.
- le travail de la suspension,
- les défauts d'alignements . . .

De manière générale, les forces de résistance étant liées au travail de déformation des pneumatiques ou des suspensions, elles sont proportionnelles au poids sur la roue. L'expérience montre qu'elles peuvent s'exprimer selon le modèle :

$$\boxed{F_{RR} = f_{RR} F_z = f_{RR} m g} \quad (5.66)$$

où le coefficient de proportionnalité f_{RR} est appelé *coefficient de résistance au roulement*.

La première source de la résistance au roulement est l'hystérésis des matériaux visco-élastiques constituant le pneumatique lors de la déformation cyclique qui survient au cours du roulement. Il y a néanmoins d'autres causes telles que les frictions locales et les glissements locaux dans l'aire de contact, la circulation de l'air à l'intérieur du pneu et l'effet de ventilation du pneu sur l'air qui l'entoure, mais ces effets restent secondaires. A titre d'exemple, Wong [26] rapporte que des études ont pu déterminer quelles étaient les fractions d'énergies dissipées par les différentes sources pour des vitesses allant de 128 à 152 km/h. 90 à 95 pourcents de l'énergie dissipée étaient imputables à l'hystérésis des matériaux du pneu, 2 à 10 % étaient perdus dans les frictions et 1,5 à 3,5 % étaient perdus dans la résistance de l'air. En ce qui concerne la répartition de la perte par hystérésis dans le matériau, une étude sur des pneus de camions a montré que la bande de roulement et la ceinture contribuaient pour 73 %, les flancs pour 13 %, les épaulements compris entre les flancs et la bande de roulement pour 12 % et les tringles pour 2 %.

Origine des forces de résistance au roulement

Quand le pneu roule, la carcasse subit des cycles de traction - compression dans l'aire de contact de sorte que la pression dans la première moitié de l'aire de contact est supérieure à la pression dans la partie arrière. La situation est illustrée à la Figure 5.38. La résultante des pressions F_z est dès lors située en avant du point projection du moyeu de la roue dans l'aire de contact. Ce décalage Δx de la résultante des forces verticales donne lieu à un moment

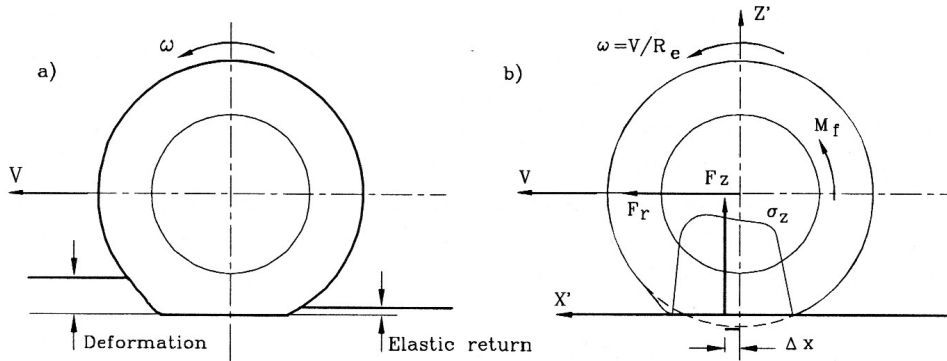


FIGURE 5.38 – Répartition des forces de pression dans l'empreinte d'un pneu et explication de la résistance au roulement [4]

$M_y = -F_z \Delta x$ autour de l'axe de rotation de la roue appelé *moment de résistance au roulement*. Comme en conditions de roulement libre, il n'y a pas de moment appliqué, l'entretien du mouvement requiert l'application d'une force horizontale. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le moment de résistance au roulement est équivalent à l'application d'une force horizontale dans l'aire de contact. Si on suppose en toute généralité qu'on a également un moment M_f de résistance au roulement provenant des pertes aérodynamiques et des frictions dans les paliers et roulements, il vient :

$$F_{RR} = \frac{-F_z \Delta x - M_f}{R_e} \quad (5.67)$$

Puisque la résultante verticale équilibre le poids sur la roue, on a $F_z = mg$. L'équation (5.67) montre immédiatement que la force de résistance au roulement est proportionnelle (si on néglige les contributions des forces aérodynamiques et des pertes dans les roulements) au poids sur la roue :

$$F_{RR} = \frac{-F_z \Delta x}{R_e} = -\frac{\Delta x}{R_e} F_z = -f_{RR} F_z \quad (5.68)$$

Cette équation fait apparaître le coefficient de résistance au roulement f_{RR} . En pratique, le coefficient de résistance au roulement, rapport entre la force de résistance au roulement et la force normale, englobe toutes les propriétés et les phénomènes physiques compliqués qui existent entre le pneu et le sol. La prédiction par calcul de celui-ci est extrêmement difficile. Elle est toujours déterminé par voie expérimentale.

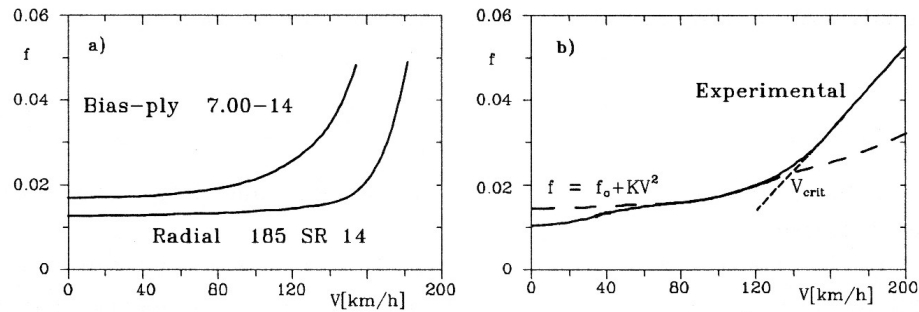


FIGURE 5.39 – Résistance au roulement pour des pneus radiaux et diagonaux en fonction de la vitesse [4]

Variations des forces de résistance au roulement

Le coefficient de résistance au roulement f dépend de nombreux facteurs comme la vitesse d'avance v , la pression de gonflage p , la force normale appliquée F_z , les dimensions du pneumatique et de l'aire de contact, la structure et les matériaux du pneumatique, la température de fonctionnement T , les conditions de route et également l'application de forces de traction / freinage F_x ou de les forces latérales F_y .

La résistance au roulement est affectée par la structure du pneu : la résistance au roulement des pneus à carcasses radiales est plus faibles que celle des pneus à carcasse diagonale comme le montre la Figure 5.39.

La résistance au roulement est beaucoup plus basse sur des surfaces dures et lisses. (Voir Figure ??). Le Tableau 5.4.2 donne quelques valeurs typiques du coefficient de résistance au roulement sur des sols de différentes natures. Alors que sur des sols rigides, le coefficient de résistance au roulement f_{RR} est de l'ordre de 0.01, il peut augmenter d'un ordre de grandeur sur des sols meubles avec beaucoup d'aspérités.

Les conditions opérationnelles affectent également la résistance au roulement. Celle-ci diminue avec l'augmentation de la pression de gonflage pour les revêtements durs mais elle augmente avec la pression sur des sols meubles.

La résistance au roulement dépend également de la vitesse. Aux basses vitesses, la résistance au roulement reste stable et quasi constante. Aux hautes vitesses, il y a apparition de vibrations et d'ondes de déformation stationnaires (voir Figure 5.41). Ces ondes entraînent des pertes d'énergie supplémentaires, des dissipations de chaleur et une usure accélérée. On a pu déterminer qu'il existe une vitesse seuil dont l'ordre de grandeur est donnée

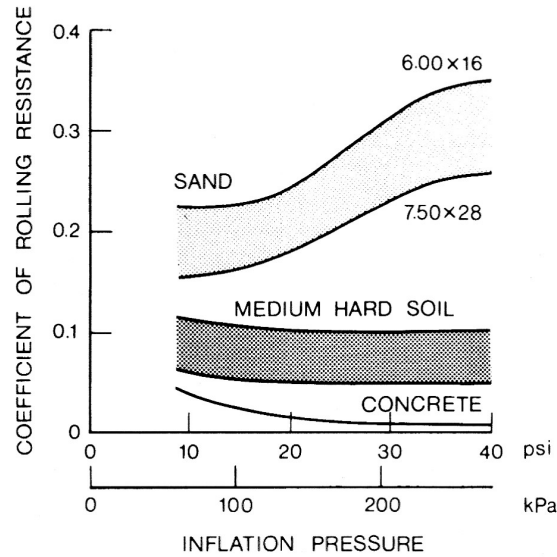


FIGURE 5.40 – Influence de la nature du sol et de la pression de gonflage sur la résistance au roulement [26]

| Road Surface | Coefficient of Rolling Resistance |
|----------------------------|-----------------------------------|
| Pneumatic car tires on | |
| Large set pavement | 0.015 |
| Small set pavement | 0.015 |
| Concrete, Asphalt | 0.013 |
| Rolled gravel | 0.020 |
| Tarmacadam | 0.025 |
| Unpaved road | 0.05 |
| Field | 0.10 - 0.35 |
| Pneumatic truck tires on | |
| Concrete, Asphalt | 0.006 - 0.010 |
| Strake wheel in the fields | 0.14 - 0.24 |
| Track-type tractor | |
| In field | 0.07 - 0.12 |
| Railways | |
| Wheel on rail | 0.001 - 0.002 |

TABLE 5.2 – Coefficient de Résistance au Roulement pour différentes surfaces selon Bosch [2]

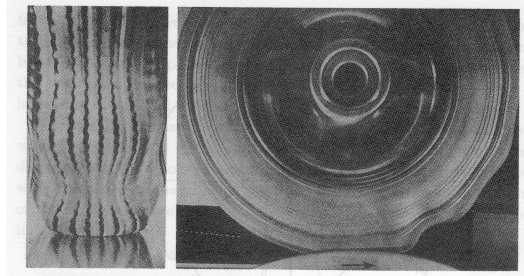


FIGURE 5.41 – Développement d'ondes stationnaires au-delà d'une certaine vitesse [4]

par $\sqrt{F_t/\rho_t}$ où F_t est la tension dans la bande de roulement et ρ_t est la densité de la bande de roulement. Au-delà de la vitesse seuil, la résistance au roulement augmente rapidement.

Pour tenir compte des conditions opératoires que sont la pression de gonflage et la force verticale sur le pneu, la S.A.E. propose la formule empirique suivante pour tenir compte de l'effet de la vitesse v et de la pression de gonflage p :

$$f = \frac{K'}{1000} \left(5.1 + \frac{5.5 \cdot 10^5 + 90 F_z}{p} + \frac{1100 + 0.0388 F_z}{p} v^2 \right) \quad (5.69)$$

avec K' qui vaut 1 pour les pneus conventionnels et 0.8 pour les pneus radiaux. La vitesse est exprimée en m/s , la pression en Pa (N/m^2) et la force normale en Newton (N).

De manière générique, on propose d'utiliser la formule suivante qui englobe les autres expressions :

$$f = f_0 + f_2 v^2 \quad (5.70)$$

Remarque : on peut toutefois noter que la pression de gonflage de chaque pneu est déterminée par des considérations de conception en fonction de la force normale F_z de sorte qu'il n'est, en général, pas question d'augmenter substantiellement la pression de gonflage pour diminuer la résistance au roulement.

Forces de résistance due à la pente

Ainsi qu'on a pu le montrer lors de la présentation des équations du mouvement longitudinal du véhicule, la pente introduit une composante de

la force de poids propre selon l'axe horizontal du véhicule :

$$\boxed{F_{pente} = mg \sin \theta} \quad (5.71)$$

Il convient de remarquer qu'en présence d'une pente, la charge normale est modifiée et devient $mg \cos \theta$ de sorte que la force de résistance au roulement est calculée par :

$$F_{rlt} = f_r F_z = f_r mg \cos \theta \quad (5.72)$$

Forme générale des forces de résistance à l'avancement

La force de résistance totale résulte de la somme des forces de résistance au roulement, des forces aérodynamiques et de la force de pente :

$$F_{rés} = F_{aéro} + F_{RR} + F_{pente} \quad (5.73)$$

Compte tenu de l'expression de chacune de ces contributions, elles peuvent se mettre sous la forme générique

$$F_{rés} = A + Bv^2 \quad (5.74)$$

où les coefficients A et B collectent respectivement les termes indépendants de la vitesses et ceux proportionnels au carré de la vitesse :

$$A = m g \cos \theta f_0 + m g \sin \theta \quad (5.75)$$

$$B = 1/2 \rho S C_x + m g \cos \theta f_2 \quad (5.76)$$

De manière plus générale, on peut introduire un coefficient linéaire et montrer que les forces de résistances ont une forme polynomiale du second ordre :

$$F_{rés} = F_0 + F_1 v + F_2 v^2 \quad (5.77)$$

Compte tenu du terme quadratique dans les vitesses, à basse vitesse c'est toujours le premier terme qui est prépondérant tandis qu'à haute vitesse c'est le second qui domine.

La puissance dissipée par les forces de résistance est également donnée :

$$\mathcal{P}_{rés} = F_{rés} v \quad (5.78)$$

soit sous forme générique :

$$\mathcal{P}_{rés} = Av + Bv^3 \quad (5.79)$$

La puissance dissipée grandit comme le cube de la vitesse.

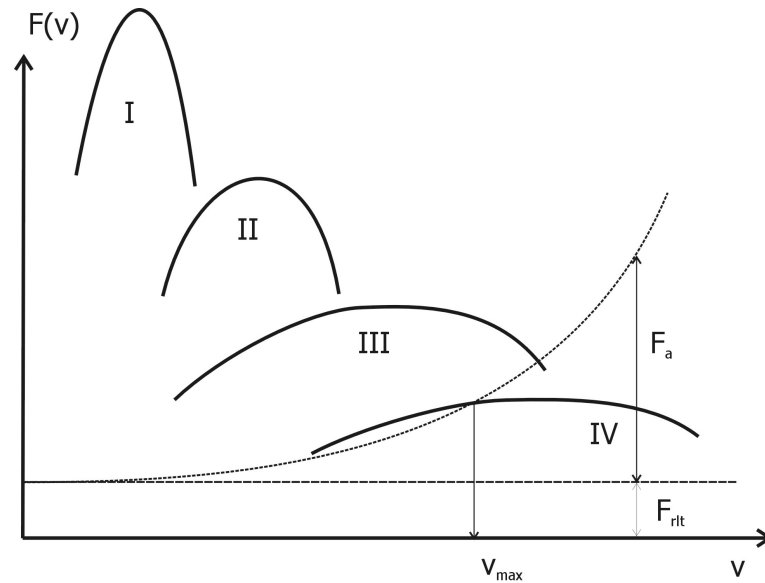


FIGURE 5.42 – Estimation de la vitesse maximale à partir du diagramme des forces à la roue

5.5 Étude des performances en régime stationnaire

5.5.1 Diagramme des forces aux roues

L'étude des performances en régime stationnaire est réalisée à l'aide du diagramme des forces et des puissances en fonction de la vitesse du véhicule. En régime continu, il n'y a ni accélération ni force d'inertie. On suppose donc qu'on a égalité entre les forces de propulsion et les forces de résistance à l'avancement :

$$F_{roues} = F_{rés} \quad (5.80)$$

et de même on a égalité entre les puissances développées par les forces de propulsion et la puissance dissipée par les forces de résistance :

$$\mathcal{P}_{roues} = \mathcal{P}_{rés} \quad (5.81)$$

En examinant le diagramme des forces à la Figure 5.42, on détermine facilement les vitesses maximales dans les différents rapports. Elles correspondent aux intersections entre les courbes de forces aux roues et les courbes des forces de résistance à l'avancement.

Le point A intersection de la courbe $F_{aéro} + F_{rlt}$ avec la courbe de F_{Roues} en 4^e vitesse fournit *la vitesse maximale en pallier* sur ce dernier rapport. En

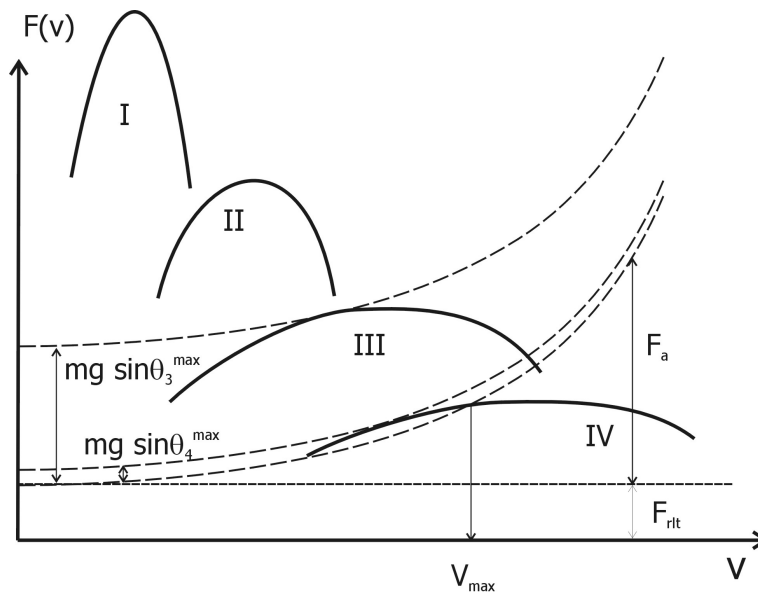


FIGURE 5.43 – Calcul de la pente maximale franchissable sur le diagramme des forces à la roue

côte, la résistance à l'avancement est augmentée de $mg \sin \theta$, ce qui translate la courbe de résistance vers le haut et déplace le point d'intersection en B situé à une vitesse plus faible (voir figure 5.43). Ce point correspond à la *pente maximale franchissable dans ce rapport*. Pour franchir une pente plus forte, il faut redescendre dans un rapport de boîte inférieur comme le montre le point C dans le troisième rapport.

On peut ainsi redescendre successivement de rapport jusqu'en première vitesse. Sur le diagramme de la Figure 5.44, la plus grande pente franchissable par le véhicule se détermine par l'intersection entre la courbe de forces aux roues en première vitesse et la courbe de force de résistance la plus élevée possible. On remarquera toutefois qu'on peut encore franchir une pente légèrement supérieur à vitesse très faible en roulant en laissant patiner l'embrayage.

Pour ces rapports, il faut encore vérifier que le véhicule est capable de transmettre la force maximale aux roues à la surface de la route. En d'autres mots, il faudra vérifier que les forces de traction ne saturent pas le coefficient de friction roues-sol. Les courbes donnant la limite de force transmissible à la route peuvent être tracées pour différentes valeurs du coefficient de friction μ .

On simplifie parfois la présentation en établissant le diagramme des *forces*

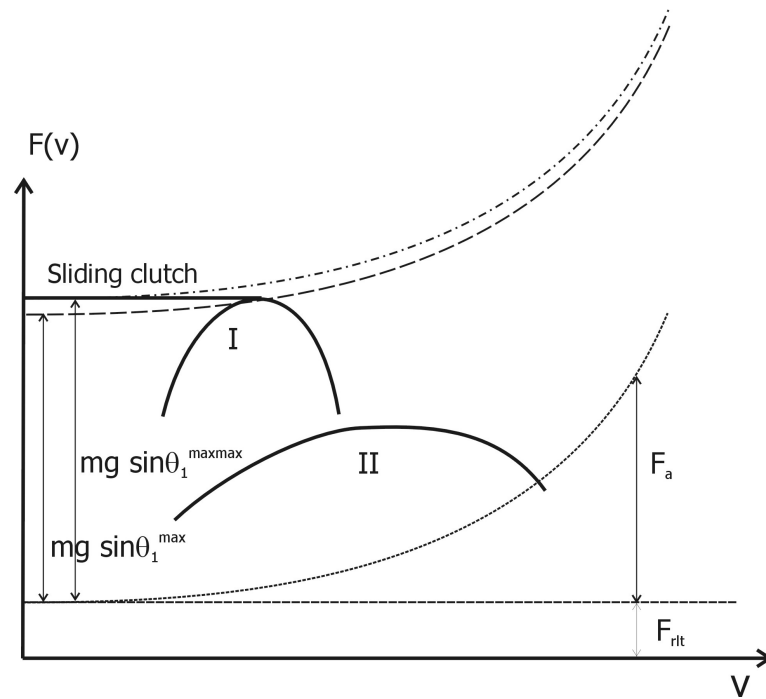


FIGURE 5.44 – Pente maximale franchissable

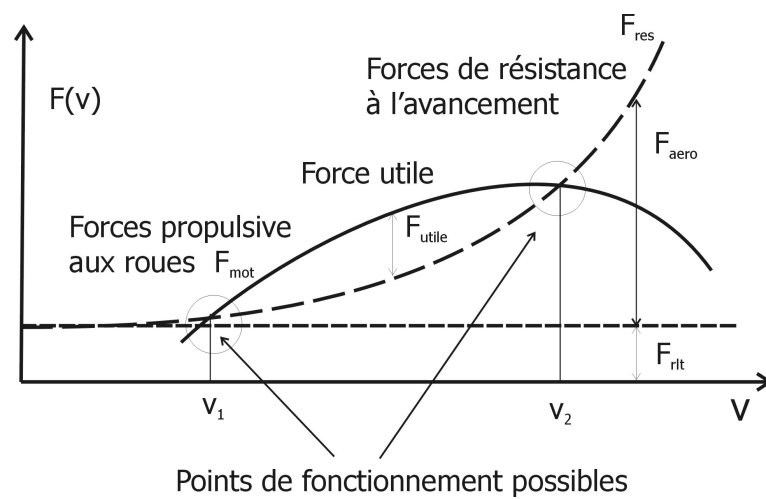


FIGURE 5.45 – Étude du point de fonctionnement à l'aide du diagramme des forces

utiles aux roues ou des *forces nettes*, c'est-à-dire la force résiduelle disponible après avoir vaincu les forces de résistance à l'avancement :

$$F_{net} = F_{roues} - F_{aéro} - F_{RR} - F_{pente} \quad (5.82)$$

Cette définition est illustrée à la Figure 5.45. Pour obtenir les pentes maximales franchissables dans chaque rapport, il suffit dans ce diagramme de tracer les droites horizontales au diagramme des forces utiles. La force utile est également la force disponible pour accélérer le véhicule

$$a_x = \frac{F_{net}}{m} \quad (5.83)$$

si on néglige l'accélération en rotation de la ligne de transmission. La force utile sert également de réserve de puissance pour vaincre des forces de perturbation (rafale, pente, état de la route, etc.). Ultérieurement, cette notion sera fort intéressante pour l'étude des performances d'accélération et de reprises du véhicule.

On remarquera également sur la figure 5.45 qu'en théorie, deux points de fonctionnement sont possibles. Après un examen plus approfondi du diagramme, on remarque que le point de fonctionnement de plus faible vitesse en V_1 est instable tandis que le second point de fonctionnement de vitesse ayant la plus élevée V_2 est stable. Seul le second régime est donc considéré dans la suite de l'exposé. Si le premier point de fonctionnement était atteint, une perturbation conduirait soit au ralentissement et à l'arrêt du moteur, soit à une accélération menant au second point de fonctionnement stable. En outre, on n'a pas souvent conscience de ce premier régime, car il se situe fort heureusement sous le régime de ralenti du moteur de sorte qu'il est inaccessible.

Les questions qui peuvent ainsi être résolues à l'aide du diagramme des forces aux roues sont :

- l'étude de la vitesse maximale,
- l'étude de la pente maximale franchissable,
- l'étagement des rapports de réduction de la boîte de vitesses.

Elles sont étudiées dans la suite de ce paragraphe.

5.5.2 Questions liées à la vitesse maximale

Le moteur et le véhicule étant donnés, on peut essayer de répondre à différentes questions liées à la vitesse maximale :

- Quel est le rapport de transmission i ou i/R qui réalise la plus grande vitesse en pallier ?

- Que se passe-t-il pour un rapport i/R différent ?
- Pour un rapport différent i/R donné, quelle est la vitesse maximale ?
- La vitesse maximale étant fixée, quel est la transmission qui conduit à cette valeur ?

Quelle longueur de transmission donne la plus grande vitesse maximale ?

Dans ce problème, le moteur étant donné, on a la possibilité de modifier le rapport de réduction de la boîte i ou plus généralement la longueur de transmission R/i puisque l'on peut jouer également sur le rayon des pneumatiques. On recherche donc la longueur de transmission qui donne la plus grande vitesse maximale.

Il est plus commode ici de travailler avec les courbes de puissance. En effet puisque les forces de résistances sont une fonction monotone croissante de la vitesse, la vitesse maximale s'obtient en utilisant la puissance maximale disponible du moteur.

Rappelons qu'en régime stationnaire, la vitesse de fonctionnement en palier s'obtient par l'égalité des puissances motrices et des forces de résistance :

$$\mathcal{P}_{roues} = \mathcal{P}_{rés}$$

où la puissance des forces de résistance est de la forme générale :

$$\mathcal{P}_{rés} = Av + Bv^3 \quad A, B > 0$$

La puissance des forces dissipée par les forces de résistance étant fortement croissante (cube de la puissance), la plus grande vitesse maximale s'obtient en délivrant toute la puissance disponible. Pour un véhicule de caractéristiques données (masse, résistance au roulement, aérodynamique, efficacité de la ligne de transmission), la plus grande vitesse maximale v_{max}^{max} est obtenue en utilisant la puissance maximale du moteur. Elle se détermine en résolvant l'équation :

$$Av + Bv^3 = \eta \mathcal{P}_{max} \quad (5.84)$$

Comme les forces de résistance croissent toujours avec la vitesse, on ne pourra jamais dépasser la solution de ce problème d'où le nom de plus grande vitesse maximale v_{max}^{max} .

On peut soit résoudre cette équation de manière analytique puisqu'il s'agit d'une équation de Cardan, soit de manière numérique en utilisant un schéma

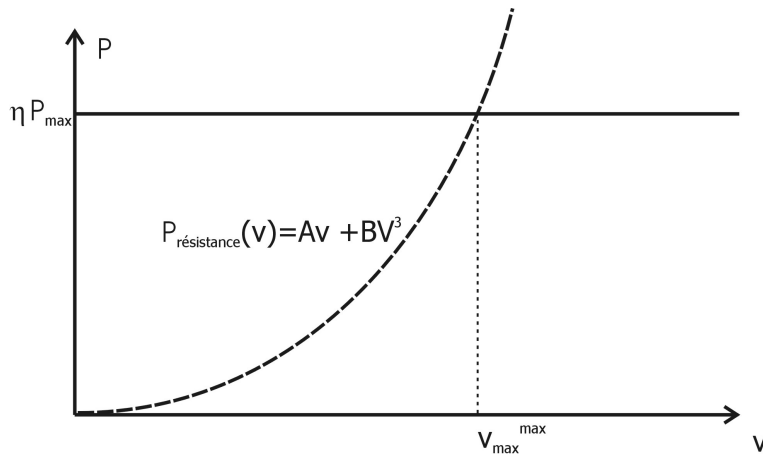


FIGURE 5.46 – Recherche de la plus grande vitesse vitesse maximale possible du véhicule

d'itération de Picard dont on peut montrer les conditions de convergence. Rappelons que le schéma de Picard consiste à résoudre une équation non linéaire :

$$F(x) = 0$$

en la reformulant sous la forme

$$x = f(x)$$

et en recourant à un schéma itératif du type

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$$

Le schéma converge si l'application est contractante, ce qui revient à dire :

$$|f'(x)| < 1$$

dans le voisinage de la solution x^* .

On propose le schéma itératif suivant :

$$v^{(0)} = 0 \tag{5.85}$$

$$v^{(n+1)} = \left(\frac{\eta P_{\max} - Av^{(n)}}{B} \right)^{1/3} \tag{5.86}$$

Après avoir déterminé la vitesse maximale pour laquelle on utilise toute la puissance de propulsion disponible, on peut maintenant calculer la longueur

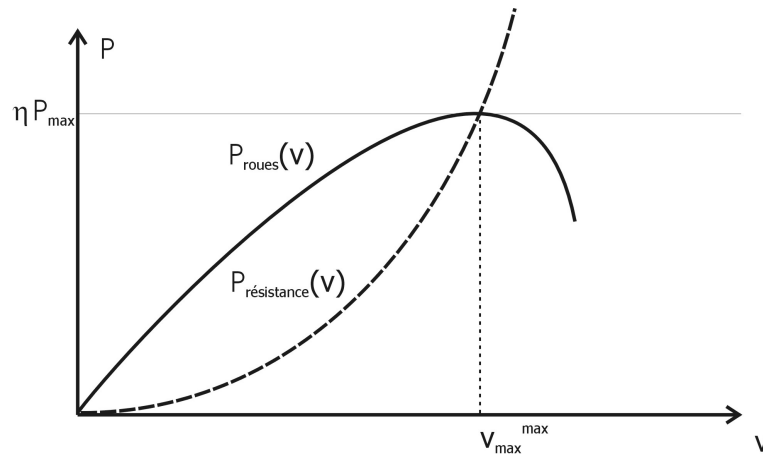


FIGURE 5.47 – Longueur de transmission pour la plus grande vitesse maximale possible du véhicule

de transmission qui permet de positionner le maximum de la courbe de puissance sur le point d'intersection entre la puissance des forces de résistance et la puissance maximale au roues. La puissance maximale du moteur s'obtient pour la vitesse de rotation nominale ω_{nom} qui donne lieu à la puissance maximale du moteur. Connaissant la vitesse d'avance, la relation cinématique entre la vitesse et la vitesse de rotation du moteur permet d'écrire :

$$\left(\frac{R}{i}\right)^* = \frac{v_{max}^{max}}{\omega_{nom}} \quad (5.87)$$

Il s'agit de la longueur de transmission optimale conduisant à la plus grande vitesse maximale v_{max}^{max} . On en déduit également la rapport de réduction optimal i^* si le rayon effectif de roulement de la roue est figé.

$$i^* = \frac{\omega_{nom} \cdot R_e}{v_{max}^{max}}$$

Que se passe-t-il si on choisit un autre rapport ?

Pour tout autre rapport de réduction ou ce qui revient au même de longueur de transmission, on diminue la vitesse maximale du véhicule. La situation est esquissée à la Figure 5.48.

Si la longueur de transmission est plus longue que la longueur optimale, on atteint la vitesse maximale avant la vitesse nominale de rotation du moteur. A contrario, on voit à la Figure 5.48 que pour une longueur de transmission plus courte, la vitesse de rotation du moteur est plus grande que la vitesse

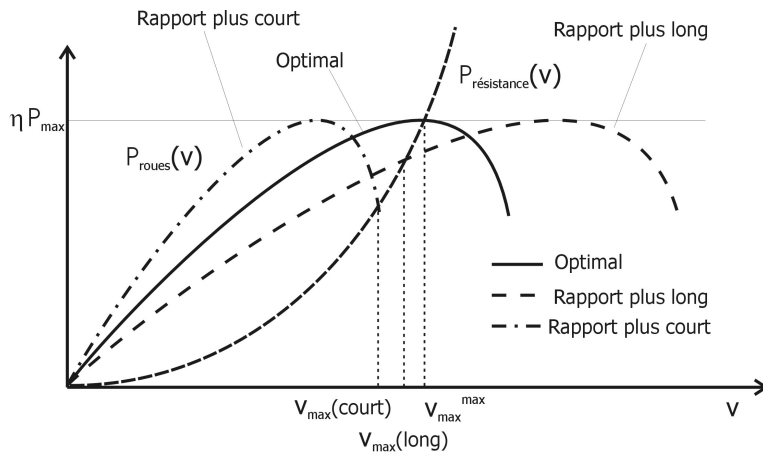


FIGURE 5.48 – Influence du rapport de réduction sur la vitesse maximale

nominale, et l'intersection a lieu dans la partie descendante de la courbe de puissance du moteur. Si la longueur de transmission est vraiment trop courte, il se peut même que la vitesse maximale soit obtenue au régime maximal du moteur (limitation par le rupteur).

En choisissant un rapport plus long, la courbe de puissance des forces de résistante coupe la courbe de puissance du moteur dans sa partie ascendante, i.e. avant le régime nominal. Ceci favorise un réduction de la consommation.

Pour un rapport de transmission donné quel est la vitesse maximale ?

Pour un rapport de transmission donné \bar{i} , l'intersection n'a plus lieu à la puissance maximale ni au régime nominal du moteur, mais à une vitesse de rotation différente. Pour trouver le régime moteur et la vitesse du véhicule, il faut tenir compte de l'égalité des puissances et de la relation entre la vitesse de rotation et la vitesse d'avance. Pour trouver la vitesse maximale du véhicule, on résout l'équation non linéaire :

$$\begin{cases} \eta \mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}_{rés} = Av_{max} + Bv_{max}^3 \\ \omega = v \frac{\bar{i}}{R_e} \end{cases}$$

soit en éliminant la variable rotation du moteur :

$$\mathcal{P}_{rés} = Av_{max} + Bv_{max}^3 = \eta \mathcal{P}\left(\frac{\bar{i}}{R}v_{max}\right) \tag{5.88}$$

La solution numérique de cette équation non linéaire peut être réalisée

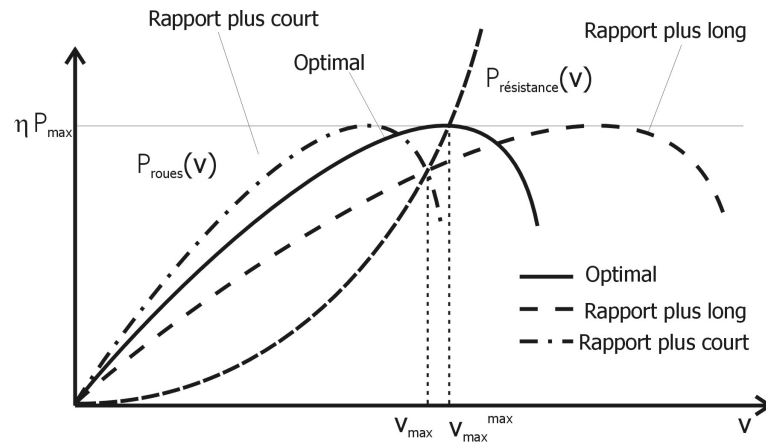


FIGURE 5.49 – Influence du rapport de réduction sur la vitesse maximale

par exemple avec le schéma itératif suivant :

$$v^{(0)} = 0 \quad \text{ou} \quad v^{(0)} = v_{max}^{max} \quad (5.89)$$

$$\omega^{(k)} = v^{(k)} \frac{\bar{i}}{R_e} \quad (5.90)$$

$$\mathcal{P}^{(k)} = \eta \mathcal{P}(\omega^{(k)}) \quad (5.91)$$

$$v^{(k+1)} = \left(\frac{\mathcal{P}^{(k)} - Av^{(k)}}{B} \right)^{1/3} \quad (5.92)$$

La convergence est plus lente que pour la plus grande vitesse maximale, mais on obtient une solution avec une précision satisfaisante en 5 à 6 itérations.

Quelle longueur de transmission donne une vitesse maximale donnée ?

On peut également se fixer une vitesse maximale pour le véhicule, et rechercher la longueur de transmission qui y donne lieu. Soit \bar{v}_{max} la vitesse maximale donnée. Il faut évidemment que $\bar{v}_{max} \leq v_{max}^{max}$ pour que le problème ait un sens. On peut dans ce cas rechercher le rapport de transmission à partir de la solution du problème suivant :

$$\bar{\mathcal{P}}_{mot} = \frac{\mathcal{P}_{rés}}{\eta} = \frac{1}{\eta} (A\bar{v}_{max} + B\bar{v}_{max}^3) \quad (5.93)$$

En utilisant l'approximation de type puissance de la caractéristique du moteur, on trouve alors la vitesse de rotation du moteur qui donne lieu à

la puissance moteur $\bar{\mathcal{P}}_{mot}$ nécessaire pour vaincre la puissance des forces de résistance à l'avancement

$$\frac{\bar{\mathcal{P}}_{mot}}{\mathcal{P}_1} = 1 - \left(1 - \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1}\right) \left| \frac{1 - \frac{\omega_{mot}}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}} \right|^b \quad (5.94)$$

avec $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{max}$ et $\omega_1 = \omega_{nom}$ soit

$$\left| 1 - \frac{\omega_{mot}}{\omega_{nom}} \right| = \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_{nom}}\right) \left(\frac{1 - \frac{\bar{\mathcal{P}}_{mot}}{\mathcal{P}_{max}}}{1 - \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_{max}}} \right)^{1/b} = \alpha \quad (5.95)$$

Il y a deux solutions (à cause du module) :

$$\left| 1 - \frac{\omega_{mot}}{\omega_{nom}} \right| = \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{mot} = \omega_{nom}(1 \pm \alpha) \quad (5.96)$$

La plus grande des deux solutions correspond à une longueur de transmission plus faible que le rapport optimal tandis que la plus petite correspond à une longueur de transmission plus grande que le rapport optimal. Le choix entre les deux solutions résulte d'une option totalement différente.

Si on recherche les meilleures performances possibles, on choisit le rapport proche du rapport optimum ou un rapport de réduction plus faible (longueur de transmission plus courte). Dans ce dernier cas, la vitesse maximale diminue, mais la force utile augmente ce qui améliore les accélérations dans le dernier rapport. Cependant comme le moteur tourne plus vite, le bruit augmente dans le dernier rapport et surtout la consommation augmente.

Un rapport plus long que l'optimum diminue également la vitesse maximale (on a un rapport d'*overdrive*). De plus il rend les accélérations dans le dernier rapport nettement plus faible ce qui diminue la réserve de puissance et réduit les accélérations. Par contre il diminue le bruit du moteur et surtout place le moteur dans des régimes où le moteur consomme nettement moins de carburant.

Actuellement la seconde solution est souvent favorisée pour des questions de réduction de consommation. On trouve sur la majorité des véhicules des derniers rapports d'*overdrive* afin de donner une vitesse économique au véhicule, particulièrement sur autoroute. Néanmoins sur les véhicules à caractère sportif, la première solution se retrouve fréquemment.

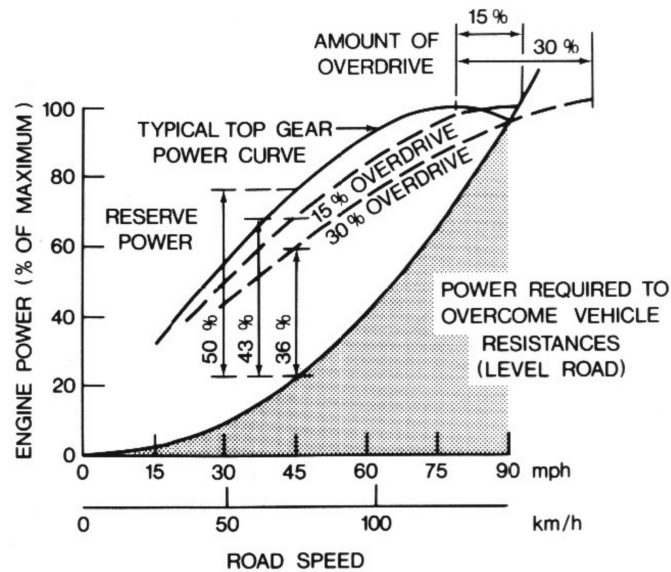


FIGURE 5.50 – Effet du dernier rapport de transmission sur les performances du véhicules

Choix du dernier rapport

Le calcul de la vitesse maximale permet d'aborder le choix du dernier rapport de boîte. Plusieurs critères doivent être considérés :

- Être capable d'atteindre une vitesse maximale avec le moteur sélectionné.
- Être capable de maintenir une vitesse constante de 88 à 96 km/h tout en gravissant au moins une côte de 3% avec le plus grand rapport.

Ces spécifications permettent le choix du dernier rapport. La première spécification permet un premier choix. On choisira le rapport qui donne une vitesse de rotation du moteur légèrement supérieure à la vitesse de rotation nominale (donnant la puissance max) afin de garder une réserve de puissance pour maintenir la vitesse du véhicule contre des rafales, des pentes ou une détérioration des performances du moteur avec l'usage comme le précise la seconde spécification.

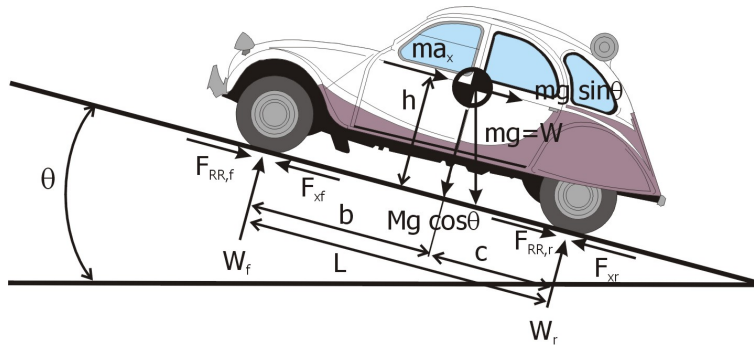


FIGURE 5.51 – Equilibre du véhicule sur une pente

5.6 Problème de la pente maximale franchissable

5.6.1 Pente maximale franchissable

Rappelons que deux limitations sont à considérer pour l'étude des performances d'un véhicule terrestre :

- La limitation de la force et de la puissance aux roues ;
- Le coefficient d'adhérence entre les roues motrices et le sol qui limite la force maximale transmissible à la route.

En ce qui concerne la limitation de la force aux roues, l'effet de la pente se marque par une résistance à l'avancement :

$$F_{pente} = mg \sin \theta \quad (5.97)$$

qui translate la courbe des forces de résistance à l'avancement vers le haut. Lorsqu'il n'est plus possible de trouver une intersection entre la courbe des forces motrices et celle des résistances à l'avancement, on atteint la limite de la pente franchissable.

L'autre limitation provient de la saturation du coefficient de friction. Il est accentué par le phénomène de transfert de charge lorsque l'on gravit une pente. En considérant la Figure 5.51 l'équilibre vertical et en rotation du véhicule permet de déterminer les charges de réaction sous les essieux :

$$W_f = mg \cos \theta \frac{c}{L} - ma_x \frac{h}{L} - F_{aéro} \frac{h_A}{L} - mg \sin \theta \frac{h}{L} \quad (5.98)$$

$$W_r = mg \cos \theta \frac{b}{L} + ma_x \frac{h}{L} + F_{aéro} \frac{h_A}{L} + mg \sin \theta \frac{h}{L} \quad (5.99)$$

| Conditions | Coefficient de friction μ |
|-------------------------------|-------------------------------|
| Route sèche | 0,8 à 1,2 |
| Route mouillée - 0,2 mm d'eau | 0,5 - 0,8 |
| Gravier | 0,4 |
| Route mouillée - 2 mm d'eau | 0,05 - 0,5 |
| Neige | 0,2 |
| Glace | 0,1 ou moins |

TABLE 5.3 – Coefficient d'adhérence sol roue dans différentes conditions

A faible vitesse ($F_{aéro} \simeq 0$) et en régime permanent ($a_x = 0$), on a :

$$W_f = mg \cos \theta \frac{c}{L} - mg \sin \theta \frac{h}{L} \quad (5.100)$$

$$W_r = mg \cos \theta \frac{b}{L} + mg \sin \theta \frac{h}{L} \quad (5.101)$$

La force de traction est limitée par le glissement des roues motrices sur le sol et le coefficient d'adhérence roues-sol μ sous l'essieu avant et arrière respectivement.

$$F_{mot,f} \leq \mu W_f \quad \text{ou / et} \quad F_{mot,r} \leq \mu W_r \quad (5.102)$$

avec

$$F_{mot} = F_{pente} + F_{rft} = mg \sin \theta + mg \cos \theta f \quad (5.103)$$

A titre d'exemple, le tableau 5.3 fournit les ordres de grandeurs de coefficients de friction dans différentes conditions de fonctionnement.

5.6.2 Traction intégrale

Pour une traction intégrale avec répartiteur idéal de couple entre les essieux, le problème est assez facile :

$$F_{mot} = F_{mot,f} + F_{mot,r} \leq \mu (W_f + W_r) \quad (5.104)$$

$$mg \sin \theta + mg \cos \theta f \leq \mu mg \cos \theta \quad (5.105)$$

Soit

$$\boxed{\tan \theta \leq \mu - f} \quad (5.106)$$

5.6.3 Traction avant

On considère la limite d'adhérence sur les roues avant uniquement

$$F_{mot,f} \leq \mu W_f \quad (5.107)$$

soit

$$mg \sin \theta + mg \cos \theta f \leq \mu mg \left(\cos \theta \frac{c}{L} - \sin \theta \frac{h}{L} \right)$$

Ce qui donne la pente maximale franchissable

$$\boxed{\tan \theta \leq \frac{\mu c/L - f}{1 + \mu h/L}} \quad (5.108)$$

5.6.4 Propulsion

Pour une propulsion arrière, les roues arrières patinent lorsque

$$F_{mot,r} \leq \mu W_r \quad (5.109)$$

soit

$$mg \sin \theta + mg \cos \theta f \leq \mu mg \left(\cos \theta \frac{b}{L} + \sin \theta \frac{h}{L} \right)$$

Et la pente maximale est :

$$\boxed{\tan \theta \leq \frac{\mu b/L - f}{1 - \mu h/L}} \quad (5.110)$$

5.6.5 Choix du premier rapport

Comme on sait que la force motrice aux roues est fonction du rapport de transmission, on peut choisir d'ajuster la force aux roues pour permettre de franchir une pente donnée. Cette limitation de la force aux roues motrices est liée au choix du rapport de transmission. Certains auteurs (tel que Wong [26] par exemple) se donnent une pente maximale franchissable de 15% ; d'autres auteurs parlent d'une pente maximale de 1/5 ou 1/4 (voir [8]).

On rappelle que l'expression des forces aux roues est :

$$F_{roues} = \eta \frac{i}{R_e} C_{mot}$$

En prenant le couple maximal du moteur comme couple de design, il vient :

$$\eta C_{max} \frac{i}{R_e} = F_{rés} \quad (5.111)$$

La force de résistance à vaincre (à basse vitesse) est donnée par la force de pente et la force de résistance au roulement :

$$F_{rés} = m g \sin \theta_{max} + m g f \quad (5.112)$$

Cette condition fixe la borne maximale sur le rapport de réduction de la transmission :

$$i_{max} = \frac{R_e F_{rés}}{\eta C_{max}} \quad (5.113)$$

Si on néglige les forces de résistance au roulement, on a l'expression

$$i_{max} = \frac{R_e mg \sin \theta_{max}}{\eta C_{max}} \quad (5.114)$$

Ceci conduit généralement à proposer une valeur du rapport de réduction conduisant à des forces à la roue trop importantes au regard des forces d'adhérence disponible sous l'essieu moteur. Dans ce cas, on doit réduire le rapport de réduction et on peut prendre par exemple :

$$i_1 \approx 0.8 i_{max} \quad (5.115)$$

5.7 Étagement des rapports de boîte

Pour adapter les caractéristiques du moteur aux différentes conditions de fonctionnement du véhicule (vitesse, charge de traction), il est nécessaire de disposer d'une boîte de vitesses à plusieurs rapports.

Les rapports de boîte extrêmes sont d'abord respectivement choisis pour rencontrer d'une part la vitesse maximale du véhicule et d'autre part la force maximale transmissible aux roues, ou, en d'autres termes, être capable de franchir des pentes maximales données.

On choisit ensuite l'étagement des rapports de boîte intermédiaires en fonction de ces deux extrêmes. En théorie les rapports devraient être espacés pour reproduire la caractéristique idéale d'une motorisation, soit être capable de délivrer une puissance maximale quelle que soit la vitesse du véhicule. En d'autres mots, on veut recréer la meilleure approximation possible de la caractéristique idéale entre la force aux roues et vitesse (fonction en $1/v$). En pratique l'étagement des rapports de boîte suit une progression qui balaie la plage de vitesse de manière plus ou moins régulière.

La gamme de rapports de réduction est plus ou moins étendue en fonction du nombre de rapports que l'on s'autorise. Plus le nombre de rapports est élevé, au plus on peut ouvrir la plage des rapports de réduction. Pour les voitures, on a typiquement :

| Nombre de rapports | Plage de rapports de réduction |
|--------------------|--------------------------------|
| 4 | 3,5 :1 à 3,9 :1 |
| 5 | 4,3 :1 à 5,2 :1 |
| 6 | 6 :1 |

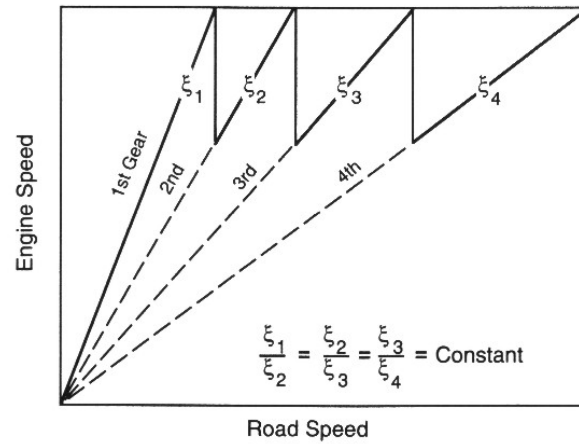


FIGURE 5.52 – Étagement théorique des rapports de boîte d'après [5]

Étagement en progression géométrique

En première approximation, on peut supposer que le moteur fonctionne toujours dans la même gamme de régime soit entre un régime inférieur $N_L [tr/min] = 60/2\pi \omega_L [rad/s]$ et un régime supérieur $N_H = 60/2\pi \omega_H$. Cette plage de fonctionnement est par exemple sélectionnée en fonction de la consommation de carburant, du bruit ou du régime maximal et minimal du moteur. On change de vitesse lorsque l'on atteint le régime supérieur N_H et on retombe au régime inférieur N_L , idéalement sans changer de vitesse par rapport à la route. Soit i_k la réduction du k^e rapport. Il vient pour le changement entre la première et la deuxième vitesse :

$$v_{1 \rightarrow 2} = \omega_H \frac{R_e}{i_1} = \omega_L \frac{R_e}{i_2}$$

Soit

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{\omega_L}{\omega_H} = K < 1$$

De la même manière on peut montrer que

$$\begin{aligned} \frac{i_3}{i_2} &= \frac{\omega_L}{\omega_H} = K \\ \frac{i_4}{i_3} &= \frac{\omega_L}{\omega_H} = K \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}i_2 &= K i_1 \\i_3 &= K i_2 = K^2 i_1 \\i_4 &= K i_3 = K^3 i_1 \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

De manière générale :

$$i_k = K^{k-1} i_1 \quad (5.116)$$

Ce qui montre que les rapports de boîte sont *en progression géométrique* de raison $K = N_L/N_H$.

Pour le dernier rapport on a

$$i_n = K^{n-1} i_1$$

En général on connaît le nombre de rapports de boîte n , le plus grand et le plus petit rapport. On en tire alors la raison de la boîte

$$K = \sqrt[n-1]{\frac{i_n}{i_1}} \quad (5.117)$$

Pour les véhicules utilitaires, les rapports de boîte sont arrangés en progression géométrique. Par contre pour les voitures, les écarts entre les rapports supérieurs sont souvent plus étroits que ceux de la progression géométrique pour avoir un meilleur agrément de conduite, principalement en conduite urbaine. Le phénomène est accentué lorsque l'on a faible nombre de rapports. Le rétrécissement des écarts dans les hauts rapports a pour effet de compenser la plus grande diminution de vitesse lors du changement de rapport à cause des forces aérodynamiques importantes.

Étagelement en progression géométrique de raison variable

On pourrait remarquer sur le diagramme des forces aux roues en fonction de la vitesse, que, à haute vitesse, là où l'enveloppe de couple est étirée sur une large plage de vitesses, les sauts de rapport se font plus petits. Cela a pour effet de minimiser le caractère abrupte des derniers changements de rapport.

Par exemple pour une voiture avec une boîte 6 vitesses, si on veut avoir un étagelement des rapports en progression géométrique régulière, on doit avoir un ratio de progression géométrique $K = \sqrt[6]{6} \simeq 1.348$. Néanmoins on prend généralement un ratio moyen $\langle K \rangle$ plus faible pour obtenir un

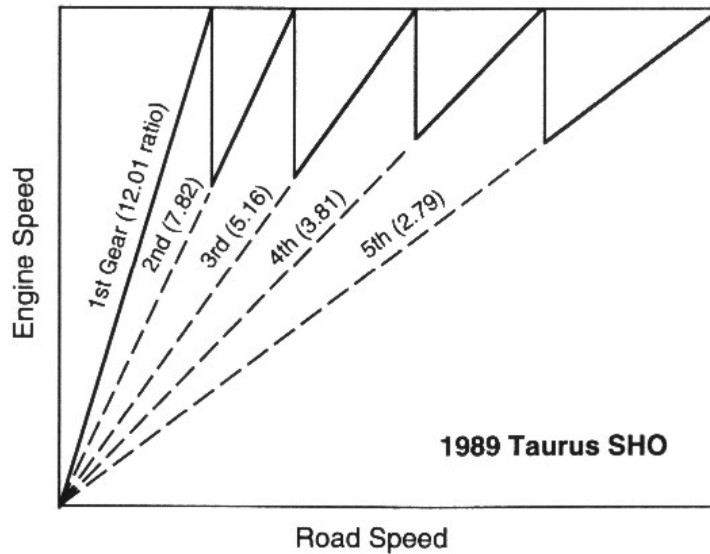


FIGURE 5.53 – Étagement pratique des rapports de boîte d'après [5]

facteur d'accélération. Ceci signifie qu'en fonction du rapport sélectionné, une accélération est donnée au rapport géométrique pour adoucir la transition dans les rapports élevés (c'est-à-dire un plus petit pas). On utilise généralement un facteur d'accélération

$$a = 1.33 \quad (5.118)$$

Les rapports de boîte suivent la relation empirique :

$$i_k = i_1 K^{(k-1)^a} \quad (5.119)$$

avec $k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le rapport de réduction de base $i_1 = 0,7 < 1$ pour une boîte à 6 rapports. Ce rapport est un rapport dit de *overdrive*, car il correspond à une vitesse des roues plus grande que celle du moteur et un couple au roue plus petit que le couple moteur.

Ceci donne par exemple les rapports suivants :

| Rapport | Haut | | Moyen | | Bas | |
|---------|------|-------|--------|-------|------|------|
| $6 - n$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| i_n | 0,7 | 0,861 | 1,1178 | 1,709 | 2,59 | 4,07 |

La gamme de rapports $i_6/i_1 = 5.81$ est typique d'une boîte à 6 rapports lorsque on utilise cette boîte avec un ou 3 ou 4 litres V6.

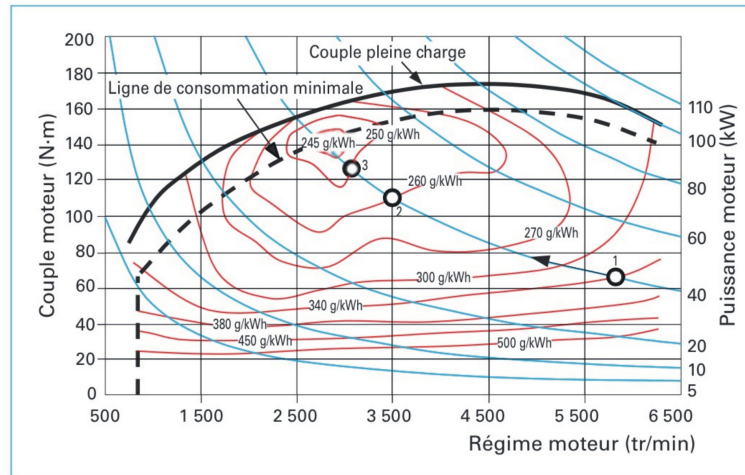


FIGURE 5.54 – Ligne de moindre consommation spécifique d’un moteur d’après [18]

Etagement minimisant la consommation d’énergie

D’autre part le choix des rapports de boîte est actuellement devenu un problème très compliqué avec l’attention portée aux économies d’énergie. En effet le choix des rapports aujourd’hui largement dicté par la recherche d’une réduction de la consommation et des émissions de polluants. Sur base de simulation de la consommation sur différents cycles de conduite de référence, on optimise le placement des points de fonctionnement du moteur vers les zones de moindre consommation (voir Figure 5.54).

5.8 Notion de masse équivalente

Pour déterminer les performances du véhicule en accélération, il faut revenir à la seconde loi de Newton qui donne l’accélération du véhicule en fonction de la force nette disponible, c’est-à-dire le surplus de force propulsive à la roue moins les forces de résistance à l’avancement :

$$F_{roues} - \sum F_{res} = F_{net} = m \frac{dv}{dt} \quad (5.120)$$

On commettrait cependant une erreur en appliquant cette formule de manière directe, car elle ne tient pas compte de l’inertie des composants de la chaîne de transmission et des éléments du moteur dont le mouvement de rotation est lié à la vitesse d’avance du véhicule. En d’autres termes,

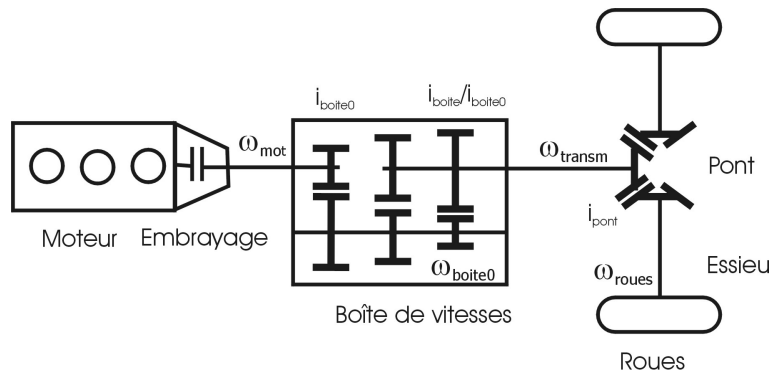


FIGURE 5.55 – Schéma de la cinématique de la chaîne de traction

la puissance nette disponible sert partiellement à augmenter la vitesse du véhicule et donc son énergie cinétique $1/2mv^2$, mais aussi à accroître l'énergie cinétique de rotation des composants de la transmission et du moteur. La rotation de la ligne de transmission et du moteur étant asservie à la rotation des roues et donc à la vitesse d'avance du véhicule, on est amené à corriger le terme d'inertie en translation et à introduire le concept de *masse effective* afin de tenir compte de manière indirecte des forces d'inertie en rotation des composants de la ligne de transmission.

La situation apparaît clairement si on écrit les équations du mouvement en utilisant le formalisme de Lagrange, car celles-ci font intervenir l'énergie cinétique totale du système, dont l'énergie en rotation de la ligne de transmission et celle du moteur. Les équations de Lagrange du système mécanique sont données par :

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t) = 0 \quad (5.121)$$

avec

- T l'énergie cinétique totale du système,
- V l'énergie potentielle totale du système,
- $L = T - V$ le Lagrangien du système,
- D la fonction de dissipation du système,
- q_i les degrés de liberté du système,
- $Q_i(t)$ les forces généralisées, associées au degré de liberté q_i , qui ne dérivent pas d'un potentiel.

En regardant la situation qui est illustrée à la Figure 5.55, l'énergie ciné-

tique totale du système s'écrit :

$$\begin{aligned}
 T = & 1/2mv^2 + 1/2(\sum I_{roue} + I_{essieu}) \omega_{roue}^2 \\
 & + 1/2(I_{transm} + I_{boite2}) \omega_{transm}^2 \\
 & + 1/2(I_{boite0}) \omega_{boite0}^2 \\
 & + 1/2(I_{boite1} + I_{embrayage} + I_{vilebrequin}) \omega_{mot}^2
 \end{aligned}$$

La vitesse de rotation des roues est liée à la vitesse d'avance du véhicule par le rayon effectif de la roue R_e :

$$\omega_{roue} = v/R_e$$

et les vitesses de rotation des différentes parties de la transmission sont liées à la vitesse de rotation des roues par les rapports de réduction :

$$\begin{aligned}
 \omega_{roue} &= \omega_{transm}/i_{pont} \\
 \omega_{roue} &= \omega_{boite0}/(i_{pont} * i_{boite}/i_{boite0}) \\
 \omega_{roue} &= \omega_{mot}/(i_{pont} * i_{boite})
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 T = & 1/2mv^2 + 1/2(\sum I_{roue} + I_{essieu}) v^2/R_e^2 \\
 & + 1/2(I_{transm} + I_{boite2}) v^2 i_{pont}^2 / R_e^2 \\
 & + 1/2(I_{boite0}) v^2 (i_{pont}^2 i_{boite}^2 / i_{boite0}^2) / R_e^2 \\
 & + 1/2(I_{boite1} + I_{embrayage} + I_{vilebrequin}) v^2 i_{pont}^2 i_{boite}^2 / R_e^2
 \end{aligned}$$

Il est possible d'obtenir une expression équivalente de l'énergie cinétique du véhicule en fonction de la vitesse d'avance uniquement :

$$T = 1/2 m_e v^2$$

où l'on définit l'expression de la *masse effective* équivalente :

$$\begin{aligned}
 m_e = & m + \frac{\sum I_{roue} + I_{essieu}}{R_e^2} + \frac{(I_{transm} + I_{boite2}) i_{pont}^2}{R_e^2} + \\
 & \frac{(I_{boite0}) i_{pont}^2 i_{boite}^2}{i_{boite0}^2 R_e^2} + \frac{(I_{boite1} + I_{embr} + I_{vilebr}) i_{pont}^2 i_{boite}^2}{R_e^2}
 \end{aligned} \tag{5.122}$$

En remarquant qu'une partie de l'expression dépend du rapport de réduction global i et qu'une autre reste constante, l'expression (5.122) peut s'écrire :

$$m_e = m_0 + m_1 i^2 \quad (5.123)$$

Où on a défini :

— m_0 regroupant les termes qui ne dépendent pas du rapport de boîte

$$m_0 = m + \frac{\sum I_{\text{roue}} + I_{\text{essieu}}}{R_e^2} + \frac{(I_{\text{transm}} + I_{\text{boite2}}) i_{\text{pont}}^2}{R_e^2} \quad (5.124)$$

— $m_1 i_{\text{boite}}^2$, collectant les termes qui introduisent une dépendance vis-à-vis du rapport de boîte sélectionnée

$$m_1 = \frac{(I_{\text{boite0}}) i_{\text{pont}}^2}{i_{\text{boite0}}^2 R_e^2} + \frac{(I_{\text{boite1}} + I_{\text{embr}} + I_{\text{vilebr}}) i_{\text{pont}}^2}{R_e^2} \quad (5.125)$$

Ce calcul des termes d'inertie et donc de m_0 et de m_1 est souvent difficile à mener, car il faut disposer de toutes les données nécessaires (géométrie, matériaux de toute la ligne de transmission et du moteur), ce qui est rarement le cas au stade de la conception préliminaire. Dans cette situation, on préfère alors des relations empiriques telle que celle citée par Wong [26] pour les voitures avec passagers équipés d'un **moteur à combustion interne à piston** :

$$\gamma_m = \frac{m_e}{m} = 1.04 + 0.0025 i^2 \quad (5.126)$$

où i est le rapport de réduction total : $i = i_{\text{pont}} * i_{\text{boite}}$. Dans celle-ci, le premier terme représente la contribution des roues tandis que le second représente les contributions des autres pièces ramenées au moteur.

Les formules (5.123) et (5.126) permettent également de se rendre compte que le facteur correctif de la masse effective est important pour les grands rapports de réduction, soit en première et en deuxième vitesse. La correction est faible pour les derniers rapports de boîte (de l'ordre de 5 %). Par contre, la masse équivalente du véhicule en première vitesse est de l'ordre de 40 à 50 % supérieure à sa masse en translation.

Afin d'illustrer l'importance de l'effet des masses tournantes, on considère le cas d'un véhicule de type Peugeot 308 HW à boîtes à 5 rapports. La fiche technique donne un rapport de pont de $i = 3,95$. Les valeurs du rapport de réduction des autres rapports sont donnés au tableau suivant ainsi que le rapport de réduction global et le coefficient de masse effective :

| Rapport | i_{boite} | i_{global} | γ_m |
|---------|-------------|--------------|------------|
| 1 | 3,95 | 13,63 | 1,5043 |
| 2 | 1,87 | 7,39 | 1,1764 |
| 3 | 1,16 | 4,58 | 1,0925 |
| 4 | 0,82 | 3,24 | 1,0662 |
| 5 | 0,66 | 2,61 | 1,0570 |

Véhicules ferroviaires

Pour les systèmes ferroviaires, on dispose également de telles estimations. Par exemple Kaller et Allenbach [11] mentionnent les valeurs suivantes des coefficients de masses tournantes pour les véhicules ferroviaires :

| Véhicules | Transmission | Coefficient γ |
|--------------------|---------------|----------------------|
| Train complet | à adhérence | 1,06 à 1,10 |
| Voitures et wagons | ” | 1,02 à 1,04 |
| Voitures vides | ” | 1,05 à 1,12 |
| Automotrices | ” | 1,08 à 1,14 |
| Locomotives | ” | 1,15 à 1,30 |
| Voitures | à crémaillère | 1,05 à 1,10 |
| Automotrices | ” | 1,30 à 2,50 |
| Locomotives | ” | 1,50 à 3,50 |

5.9 Vitesses et déplacements en fonction du temps

5.9.1 Critères d'accélération et de reprise

En plus des critères évalués en régime stationnaire, on dispose pour comparer les véhicules d'une deuxième famille de critères relatifs aux accélérations et aux reprises du véhicule. On parle ainsi souvent de temps pour atteindre une vitesse donnée depuis l'arrêt (typiquement 0 à 100 km/h ou 0 à 60 mph). C'est un premier critère fort apprécié des amoureux de véhicules à caractère sportif. On compare aussi le temps nécessaire pour parcourir une distance spécifiée (le 400 m ou 1000 m départ arrêté).

On teste aussi l'aptitude du véhicule à effectuer des reprises dans les derniers rapports. Pour cela on chronomètre le temps nécessaire pour accélérer à partir d'une vitesse constante de départ et arriver à une vitesse finale. On mesure alors *l'élasticité du véhicule*. Cette mesure est peu standardisée. On entend souvent parler de test de reprise 80 - 120 km/h ou de reprise 90 - 120

km/h, mais d'autres essayeurs effectuent également des tests de reprise 60 - 120 km/h alors qu'anciennement on effectuait des tests 40 - 120 km/h.

Pour évaluer ces critères, il faut considérer le comportement dynamique du système et donc intégrer les équations de mouvement au cours du temps. Les résultats des simulations ne concordent malheureusement pas toujours avec les valeurs mesurées expérimentalement. Ceci est imputable à plusieurs facteurs :

- Les résultats sont assez sensibles à la puissance maximale du moteur qui n'est connue souvent qu'avec une tolérance assez grande. Celle-ci peut varier jusqu'à + ou - 5 % par rapport à la valeur nominale annoncée.
- Les simulations sont effectuées avec des valeurs de puissance et de couple mesurées en conditions stationnaires sur banc. Ces valeurs peuvent différer significativement lors de manoeuvres transitoires rapides des régimes du moteur, particulièrement courantes dans les premiers rapports de boîte.
- Les manoeuvres de changement de rapport pour une boîte manuelle et, en particulier, la manoeuvre de démarrage où il y a glissement de l'embrayage sont fortement variables en fonction des individus et de leur habilité. Il y a donc une grande incertitude sur ces données.

5.9.2 Diagramme accélérations

Reprenons la seconde équation de Newton selon la direction d'avance x .

$$m_e \frac{dv}{dt} = F_{roues} - \sum F_{res} = F_{net}(v) \quad (5.127)$$

L'accélération du véhicule est fonction de l'excédent de la force de propulsion par rapport aux forces de résistance, appelée *force propulsive nette* $F_{net}(v)$. Pour un véhicule donné, l'allure des courbes de force nette disponible pour l'accélération est montré à la figure 5.56. Sur cette figure, la force nette est normalisée en fonction de la masse effective du véhicule pour rendre compte de l'accélération $a_x = F_{net}/m_{eff}$ que l'on peut communiquer au véhicule.

5.9.3 Vitesse en fonction du temps

L'évolution de la vitesse en fonction du temps s'obtient par intégration de l'équation de Newton (5.127). L'équation différentielle étant en variables séparables, il vient

$$dt = \frac{m_e dv}{F_{net}(v)} \quad (5.128)$$

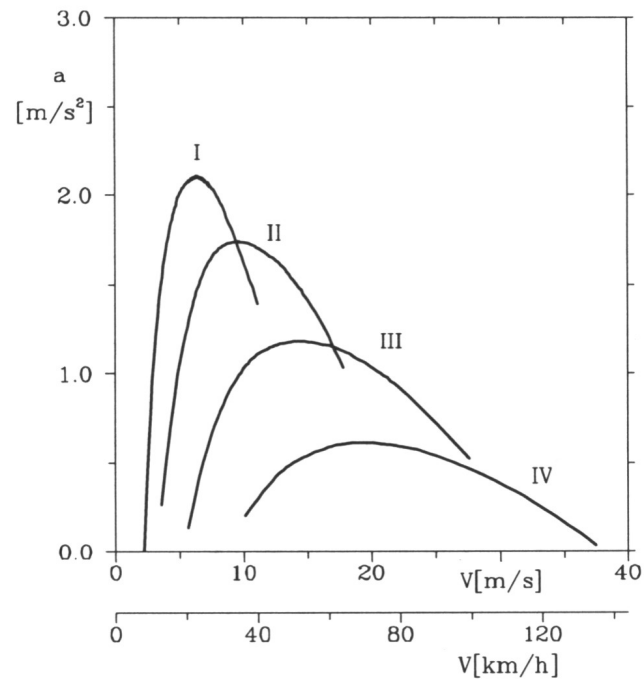


FIGURE 5.56 – Accélération disponible $a_x = F_{net}/m_{eff}$ d'après Genta [4]

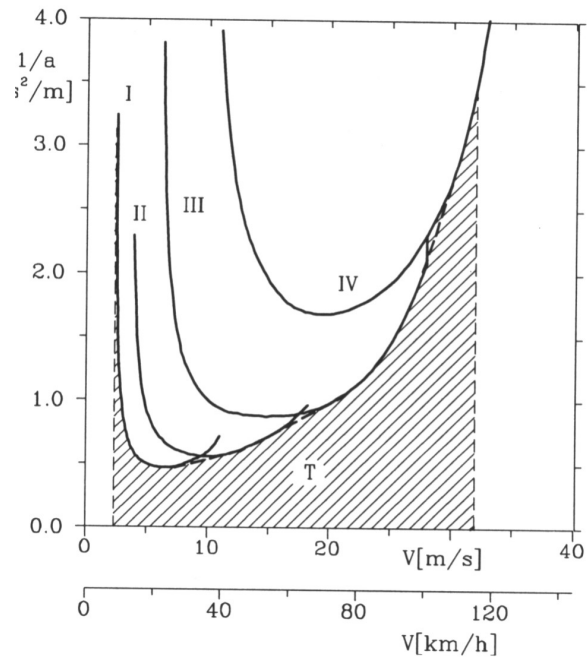


FIGURE 5.57 – Accélération disponible $1/a = m_{eff}/F_{net}$ d'après [4]

Le temps pour passer d'une vitesse V_1 à une vitesse V_2 s'obtient par intégration :

$$\Delta t_{V_1 \rightarrow V_2} = m_e \int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{F_{net}(v)} \quad (5.129)$$

Cette intégration est en général impossible à réaliser de manière analytique. On a recours généralement à une technique d'intégration numérique. La masse effective dépendant du rapport de boîte, il convient d'évaluer cette intégrale par morceaux entre chaque changement de rapport.

Si on a connaissance de la puissance nette $\mathcal{P}_{net} = F_{net}(v) v$ à la place de la force nette, il est facile de voir que l'on peut calculer l'expression qui est équivalente à l'expression (5.129) :

$$\Delta t_{V_1 \rightarrow V_2} = m_e \int_{V_1}^{V_2} \frac{v dv}{\mathcal{P}_{net}(v)} \quad (5.130)$$

L'intégrale (5.129) donnant le temps nécessaire pour passer de la vitesse V_1 à la vitesse V_2 s'interprète facilement sous forme graphique comme étant l'aire comprise sous la courbe de l'accélération nette $1/a = m_e/F_{net}$ dans l'intervalle $[V_1, V_2]$. Minimiser le temps pour passer d'une vitesse à l'autre revient donc à minimiser l'aire sous la courbe.

On en déduit la meilleure stratégie de changement des rapports de boîte afin de réduire le temps d'accélération. Lorsqu'il y a intersection des courbes relatives à deux rapports consécutifs (comme cela est le cas pour les rapports 1-2 et 2-3 à la Figure 5.57), on change de vitesse à l'intersection des courbes. Lorsqu'il n'y a pas d'intersection des courbes (cas des rapports 3-4 à la Figure 5.57), le changement de vitesse survient en poussant le rapport inférieur jusqu'au régime maximal du moteur avant de changer de vitesse. Pour minimiser d'avantage le temps d'accélération, on pourrait augmenter le nombre de rapports pour approcher l'enveloppe inférieure des courbes d'accélération. A la limite cette enveloppe s'obtiendrait en prenant en prenant un nombre infini de rapports. Cette situation idéale correspond à l'utilisation d'une transmission à variation continue (CVT) puisque celle-ci permet en principe d'obtenir tout rapport de réduction. Ces conclusions doivent encore être modérées par la considération des temps requis pour changer de vitesse et par le rendement mécanique inférieur des CVT.

La solution de l'équation (5.129) pour différentes vitesses v donne lieu à la relation $t = f(v)$. Cependant, on désire souvent visualiser la relation plus habituelle $v = g(t)$. Pour cela, on doit inverser le graphe de la fonction $f(v)$ et créer la fonction $g = f^{-1}$. La courbe de vitesse en fonction du temps est

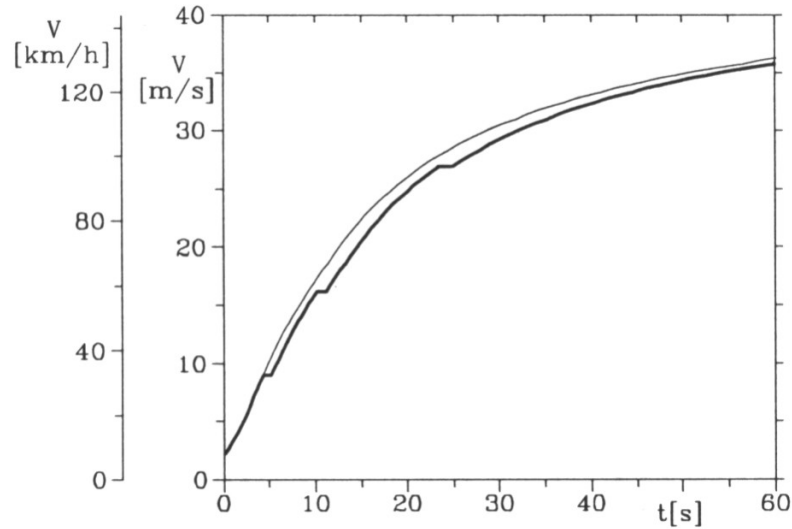


FIGURE 5.58 – Accélération du véhicule en fonction du temps d’après [4]

donnée à la Figure 5.58. On y remarque les changements de rapport de boîte pendant lesquels il y a diminution de la vitesse. On reviendra ultérieurement sur ce point.

5.9.4 Déplacement parcouru

Pour calculer le déplacement parcouru pendant le temps Δt nécessaire pour passer de V_1 à V_2 , il suffit de remarquer que, sous forme différentielle, la vitesse et le déplacement sont liés par :

$$dx = v dt \quad (5.131)$$

En utilisant la relation différentielle (5.128), il vient :

$$\Delta x_{V_1 \rightarrow V_2} = m_e \int_{V_1}^{V_2} \frac{v dv}{F_{net}(v)} \quad (5.132)$$

Si on dispose de la puissance nette $\mathcal{P}_{net} = F_{net}(v) v$, on a de manière alternative l’expression :

$$\Delta x_{V_1 \rightarrow V_2} = m_e \int_{V_1}^{V_2} \frac{v^2 dv}{\mathcal{P}_{net}(v)} \quad (5.133)$$

La relation du déplacement en fonction du temps s’obtient en combinant les relations $\Delta t = f(\Delta v)$ donnée par (5.129) et $\Delta x = h(\Delta v)$ donnée par (5.132).

Sous forme compacte, si on a la relation inverse $\Delta v = f^{-1}(\Delta t)$, alors la relation recherchée prend la forme :

$$\Delta x = h(f^{-1}(\Delta v)) \quad (5.134)$$

5.9.5 Prise en compte des changements de rapport de boîte

On a vu que l'aire sous la courbe devant être minimisée, le critère des changements de vitesse est de changer de rapport à l'intersection des courbes d'accélération des deux rapports consécutifs si elle existe, sinon de pousser le rapport inférieur jusqu'à son régime maximal avant de changer de rapport. Les changements de rapport doivent être cependant examinés plus en détails. En effet pour une boîte manuelle la manoeuvre de changement de rapport prend un certain temps et pendant le changement de rapport, il n'y a plus de force motrice communiquée aux roues. Pendant ce temps, le véhicule ralentit sous l'effet des forces de résistance à l'avancement. Il convient d'évaluer cette perte de vitesse.

Soit Δt le temps requis pour effectuer la manoeuvre de changement de rapport de boîte. Ce temps pour un conducteur entraîné est de l'ordre de $\Delta t \approx 0,8s$. La diminution de vitesse est faible et on peut l'estimer au premier ordre par la formule suivante :

$$\Delta v \approx -\frac{F_{rés}(v)}{m_{eff}} \Delta t \quad (5.135)$$

Si la vitesse finale à atteindre requiert plusieurs changements de rapport (supposons en 3^e rapport pour fixer les idées), le temps mis pour arriver est calculé par la formule :

$$\begin{aligned} T_{V_1 \rightarrow V_2} = & \int_{V_1}^{V_{I \rightarrow II}} \frac{m_e(i_1) dv}{F_{net}(v)} + \Delta t + \int_{V_{II}}^{V_{II \rightarrow III}} \frac{m_e(i_2) dv}{F_{net}(v)} \\ & + \Delta t + \int_{V_{III}}^{V_2} \frac{m_e(i_3) dv}{F_{net}(v)} \end{aligned} \quad (5.136)$$

avec

$$\begin{aligned} V_{II} &= V_{I \rightarrow II} - \frac{F_{rés}(V_{I \rightarrow II})}{m_e} \Delta t \\ V_{III} &= V_{II \rightarrow III} - \frac{F_{rés}(V_{II \rightarrow III})}{m_e} \Delta t \end{aligned}$$

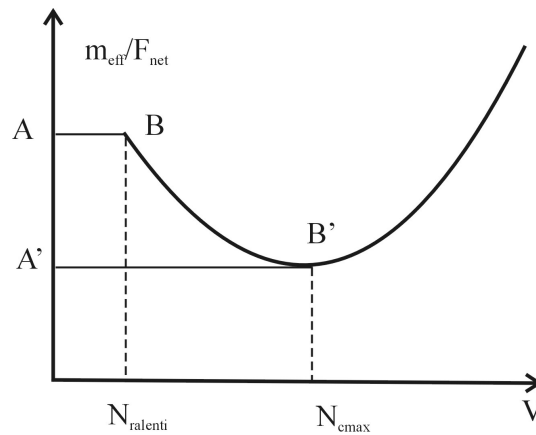


FIGURE 5.59 – Démarrage du véhicule : estimation du démarrage le plus rapide et le plus économique

5.9.6 Démarrage depuis l'arrêt

Il reste encore à examiner les conditions de démarrage. En effet, pour une vitesse nulle, on ne peut rester embrayé à cause du régime de ralenti du moteur. L'examen de l'opération demande réflexion, car il faut utiliser l'embrayage et le laisser patiner jusqu'à ce que la vitesse soit suffisante pour être compatible avec la vitesse de rotation du moteur. Plusieurs stratégies sont possibles pour la manoeuvre et la rapidité du démarrage dépend en grande partie de la manière dont le conducteur va procéder. Un conducteur soucieux d'économiser le carburant et de minimiser l'usure de son embrayage tend à démarrer à un régime proche du ralenti du moteur, ce qui lui permet d'embrayer assez vite au détriment des performances. Ce comportement est esquissé par la ligne AB à la Figure 5.59. Au contraire, si on vise à démarrer le plus vite possible, on doit lancer le moteur à son régime de couple maximal et embrayer progressivement pour ne pas endommager la transmission tout en accélérant pour maintenir le régime de couple maximal. L'opération est représentée par la ligne A'B' à la Figure 5.59. Pour le calcul des accélérations depuis le départ arrêté, c'est ce type de démarrage qu'il faudra prendre en compte dans le calcul du temps nécessaire à la réalisation de la meilleure performance. Il va sans dire que cette manière de procéder ne ménage pas l'embrayage, puisque le temps de glissement est le plus long et que l'effort est important.

Chapitre 6

CONSOMMATION ET EMISSIONS

6.1 Introduction

Avec les défis énergétiques, climatiques et de réduction de la pollution atmosphérique, la consommation des véhicules est devenu un critère très important. C'est par ailleurs un sujet assez difficile car la consommation d'énergie et les émissions de polluants dépendent très fortement d'un nombre de facteurs :

- Les caractéristiques de consommation et le rendement de la motorisation
- Les caractéristiques de la transmission (rapport de réduction, rendement)
- Les caractéristiques du véhicules
 - Le poids du véhicule
 - La résistance aérodynamique
 - La résistance au roulement et les pneumatiques
- Le cycle de conduite (conditions de conduite)
- Le comportement du chauffeur...

La question sera donc introduite progressivement. On définira d'abord les mesures de consommation d'énergie de la motorisation avant de définir la mesures de consommation du véhicule complet. Les deux mesures sont liées via les caractéristiques du véhicule et demandent de préciser les parcours et conditions dans lesquelles elles sont mesurées. On établira alors la procédure de mesure et on définira la notion de cycle de conduite. La procédure de mesure expérimentale en laboartoire sur banc à rouleaux sera ensuite décrite.

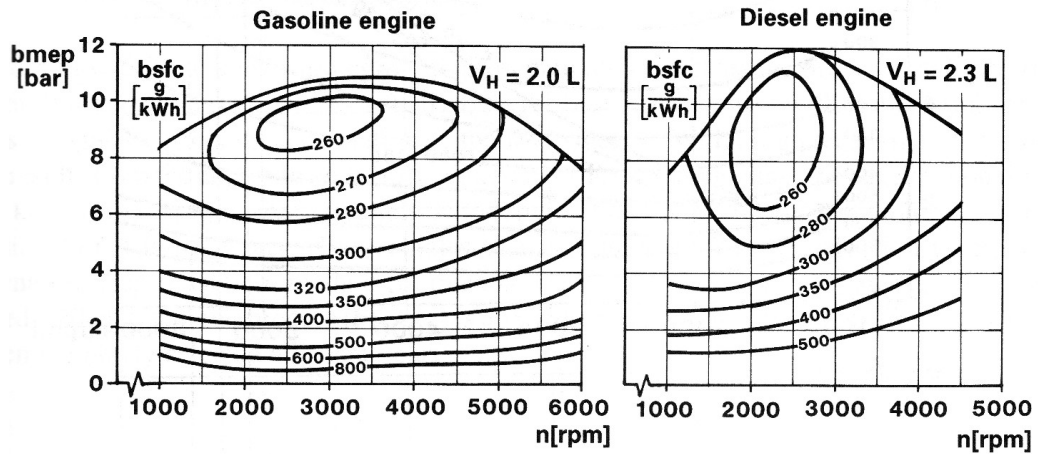


FIGURE 6.1 – Courbes d'iso consommation spécifique des moteurs à essences et diesel d'après [10], figure 3.12

6.2 Définition de la consommation

6.2.1 Consommation et émissions des moteurs thermiques

Pour les moteurs thermiques, on définit la *consommation spécifique* (en anglais *brake specific fuel consumption* ou bsfc) comme étant la quantité de carburant utilisé m_f (en kg ou en gramme) par unité de travail W_{mot} fournie (en Joule ou Watt heure).

$$\text{bsfc} = \frac{m_f}{W_{mot}} \quad (6.1)$$

Cette valeur dépend du point de fonctionnement du moteur : régime, couple ou puissance. Les iso-valeurs de la consommation spécifique sont souvent rapportées sur le diagramme donnant la puissance ou le couple en fonction du régime.

Pour un fonctionnement variable au cours du temps, cette définition s'étend en notant que sur un intervalle dt , le travail élémentaire est donné par la puissance :

$$dW_{mot} = \dot{W}_{mot} dt$$

et la consommation instantanée est :

$$dm_f = \dot{m}_f dt$$

| Carburant | PCI (LHV) massique |
|----------------------------|--------------------|
| Essence Super 95 | 42900 |
| Diesel | 42600 |
| Ethanol | 26900 |
| Esther méthylique de colza | 37700 |
| Diméthyl Ether | 28430 |
| Gepel Butagaz | 46000 |
| Gaz naturel | 50000 |
| Hydrogène | 119930 |

TABLE 6.1 – Pouvoirs calorifiques inférieures de quelques carburants les plus courants. PCI massique en [kJ/kg] à 15° C

On écrit alors (et c'est souvent la définition habituelle de la consommation spécifique) :

$$\text{bsfc} = \frac{\dot{m}_f}{\dot{W}_{mot}} \quad (6.2)$$

Quelquefois, les courbes d'iso-consommation spécifique sont données en fonction du *rendement énergétique* du moteur, c'est-à-dire de la quantité d'énergie mécanique W_{mot} que l'on peut retirer à partir de l'énergie chimique contenue dans le combustible.

$$\eta_e = \frac{W_{mot}}{m_f \text{LHV}_{fuel}} \quad (6.3)$$

H_{fuel} est le pouvoir calorifique inférieur du combustible ou PCI, i.e. l'énergie chimique par kilogramme de combustible. Le PCI de quelques carburants habituels est fourni dans le Tableau 6.1.

En utilisant les notions de puissance mécanique et de débit de carburant, la définition équivalente du rendement du moteur est évidemment :

$$\eta_e = \frac{\dot{W}_{mot}}{\dot{m}_f \text{LHV}_{fuel}} \quad (6.4)$$

Les notions de rendement de conversion du moteur et de consommation spécifique sont évidemment intimement liées. En comparant les définitions (6.2) et (6.4), on obtient sans peine :

$$\eta_e = \frac{1}{\text{bsfc} \text{LHV}_{fuel}} \quad (6.5)$$

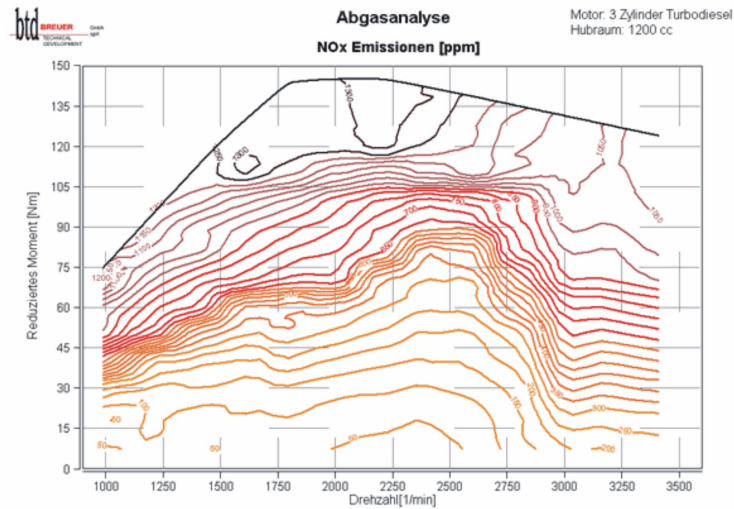


FIGURE 6.2 – Emissions spécifiques d'un moteur expérimental tricylindre turbo Diesel. Source : BTD Malmedy

Emissions de polluants

Avec l'importance grandissante des normes antipollution, on contrôle aussi les émissions de quatre polluants principaux :

- Les oxydes d'azote (NO_x),
- Le monoxyde de carbone (CO)
- Les hydrocarbures imbrûlés (HC),
- Les particules matérielles (PM).

Deux méthodes de mesures des taux de polluants sont les émissions spécifiques (SE) et les indices d'émissions (EI). Les émissions spécifiques sont exprimées en g/kWh tandis que les indices d'émissions sont des flux d'émission par débit massique de fuel.

Les émissions spécifiques :

$$\begin{aligned} (SE)_{NO_x} &= \dot{m}_{NO_x} / \dot{W}_b \\ (SE)_{CO} &= \dot{m}_{CO} / \dot{W}_b \\ (SE)_{HC} &= \dot{m}_{HC} / \dot{W}_b \\ (SE)_{PM} &= \dot{m}_{PM} / \dot{W}_b \end{aligned}$$

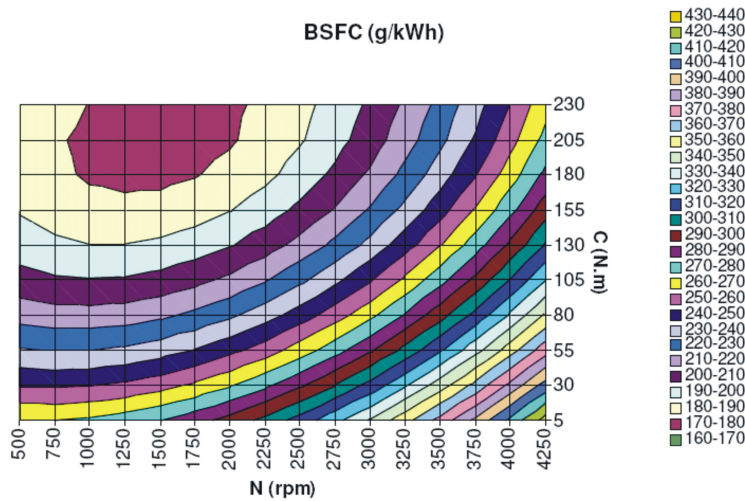


FIGURE 6.3 – Modélisation de la consommation spécifique d'un moteur turbo diesel avec intercooler.

et les indices d'émissions :

$$(EI)_{NOx} = \dot{m}_{NOx} / \dot{m}_f$$

$$(EI)_{CO} = \dot{m}_{CO} / \dot{m}_f$$

$$(EI)_{HC} = \dot{m}_{HC} / \dot{m}_f$$

$$(EI)_{PM} = \dot{m}_{PM} / \dot{m}_f$$

Les émissions spécifiques sont également cartographiées.

Modélisation de la consommation des moteurs

La cartographie de la consommation spécifique des moteurs est typiquement déterminée expérimentalement. Toutefois en vue d'obtenir une représentation analytique, on peut utiliser la techniques de surfaces de réponses et ajuster une fonction polynômiale à plusieurs variables en fonction de données expérimentales. Pour les moteurs Diesel, Golverk [6] a montré que la cartographie peut être identifiée avec une bonne précision à l'aide de l'expression polynômiale en fonction des variable de vitesse de rotation n et du couple T :

$$\text{bsfc} = a_1 + a_2 n + a_3 T + a_4 n^2 + a_5 n T + a_6 T^2 \quad (6.6)$$

Expression dans laquelle on a

— b_e , en g/kWh

— n , la vitesse de rotation en rpm

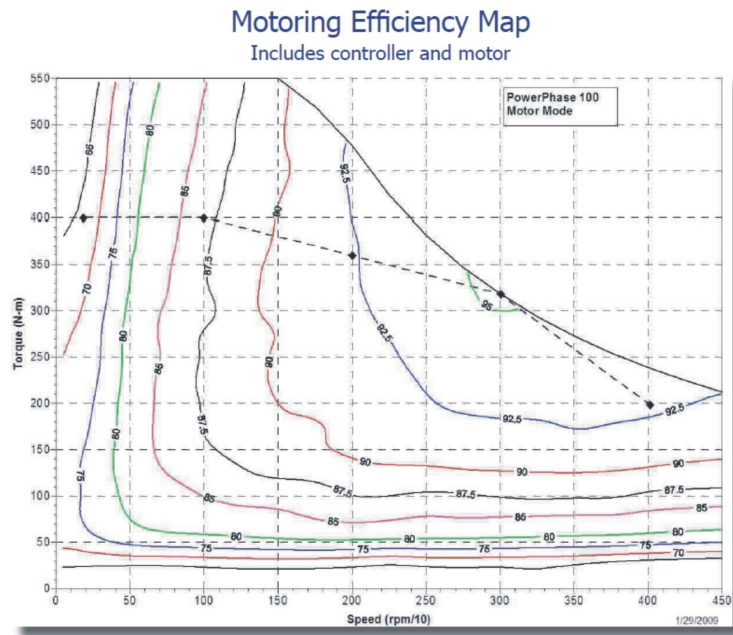


FIGURE 6.4 – Cartographie de rendement de conversion d’un moteur à aimant permanent UQM 100 kW : Source UQM

- T , le couple moteur en $N.m$
- a_i , des coefficients empiriques à identifier avec l’expérience.

6.2.2 Consommation des moteurs électriques

Pour les moteurs électriques, il n’y a évidemment plus de carburant, mais il y a conversion d’une puissance électrique en une puissance mécanique. On parle alors de rendement du moteur électrique :

$$\eta_e = \frac{\mathcal{P}_{mot}}{\mathcal{P}_{elec}} \quad (6.7)$$

En général le rendement des moteurs électriques de traction modernes est très bon : plus de 90 %. Par contre, dans une chaîne de traction électrique, il ne faut cependant pas perdre de vue qu’il faut considérer le rendement global de toute la chaîne de traction : moteur électrique, électronique de puissance, charge- décharge des batteries, pertes joules, etc.

$$\eta_e = \eta_{e\text{-moteur}} \eta_{\text{electronique}} \eta_{\text{batterie}} \quad (6.8)$$

Si le rendement de l’électronique de puissance est généralement très bon : $\eta_{\text{electronique}} \approx 95\%$, le rendement charge - décharge des batteries reste plus

faible, de l'ordre de $\eta_{batterie} \approx 85\%$. Le rendement global de la chaîne de traction électrique tourne donc aux environs de 75 à 85 %.

6.3 Consommation des véhicules

6.3.1 Définition de la consommation des véhicules

Pour les véhicules, on préfère parler de *consommation pour une distance parcourue* donnée. En Europe, la consommation est généralement spécifiée en litres (ou en kg pour le gaz naturel) de carburant par 100 km tandis qu'aux États Unis, la notion habituelle est l'économie de carburant ou *fuel economy* en anglais soit la distance parcourue (en miles) par unité de volume de carburant consommé (en gallons ou en litres). Les deux valeurs sont l'inverse l'une de l'autre aux changements d'unité près :

$$\text{mpg} = \frac{253.2}{L/100 \text{ km}} \quad (6.9)$$

La consommation B en [l/100 km] d'un véhicule se calcule en intégrant le débit volumique instantané de carburant \dot{b} [l/s] consommé durant une période T et en le divisant par la distance parcourue pendant le même temps.

$$B = \frac{\int_0^T \dot{b} dt}{\int_0^T v dt} \quad (6.10)$$

Le débit volumique instantané de carburant \dot{b} est évidemment fonction de la consommation spécifique bsfc et de la puissance instantanée demandée au moteur \mathcal{P}_{mot} :

$$\dot{b} = \frac{\text{bsfc } \mathcal{P}_{mot}}{\rho_{fuel}} \quad (6.11)$$

où ρ_{fuel} est la masse volumique du carburant en [kg/m^3] ou en [g/L].

Définition de la consommation en gramme de CO₂

Aujourd'hui avec le défi du réchauffement climatique lié aux émissions de CO_2 , il est courant d'exprimer la consommation en émissions de CO_2 par kilomètre. Compte tenu de la composition chimique moyenne des carburants, on peut établir un équivalent entre le litre de carburant et la masse de CO_2 émise. La Table 6.2 reprend quelques facteurs de conversion pour des carburants usuels.

| Carburant | CO_2 |
|------------------|--------|
| Essence Super 95 | 2360 |
| Diesel | 2730 |
| Gaz naturel | 1891 |
| Propane | 1500 |

TABLE 6.2 – Emissions moyennes de CO_2 pour la combustion de différents carburants en gramme de CO_2 par litre de carburant

Besoin de parcours d'essai standardisés

La mesure de la consommation dépend très fortement de la manière dont la distance est parcourue : vitesse de croisière, accélérations, freinages, masse du véhicule, présence de pentes, du régime moteur et donc des rapports de boîte sélectionnés, etc. D'une part le travail fourni par le moteur peut être effectué pour :

- Vaincre les forces aérodynamiques. Cette puissance sera d'autant plus grande que l'on roulera vite.
- Vaincre la résistance au roulement. Celle-ci sera d'autant plus grande que la masse sera élevée et que le coefficient de résistance au roulement sera important.
- Augmenter l'énergie potentielle de gravité et lutter contre les forces de pente, ce qui sera le cas pour un parcours vallonné.
- Augmenter l'énergie cinétique et vaincre les forces d'inertie. Le parcours urbain avec des arrêts et des démarrages fréquents sera nécessairement plus gourmand en énergie.
- L'utilisation du moteur comme frein.

En outre la consommation est affectée par le point de fonctionnement du moteur donc du choix du rapport de boîte et de la stratégie de changement de rapport, des accélérations, etc.

En d'autres mots, la consommation pour une distance parcourue dépend très fortement du parcours et des conditions de conduite. Pour pouvoir comparer des véhicules entre eux, il faut définir un parcours standardisé dont les caractéristiques de vitesse et accélération et les conditions opérationnelles sont normalisés. Il s'en suit la définition de *cycles de conduite normalisés*. On distingue les cycles à vitesses constantes et les cycles de conduite variables.

6.4 Calcul de la consommation

6.4.1 Consommation à vitesse constante

Lors de condition de conduite à vitesse constante, la consommation de carburant peut être calculée immédiatement en multipliant la puissance requise pour la conduite à vitesse constante multipliée par le temps de conduite.

La puissance propulsive requise aux roues pour faire avancer le véhicule à la vitesse v est donnée par la puissance dissipée par les forces de résistance \mathcal{P}_{res} :

$$\mathcal{P}_{res} = (A + Bv^2) v$$

La puissance à développer par le moteur est la puissance aux roues au rendement de la ligne de transmission η_t près :

$$\mathcal{P}_{mot} = \frac{\mathcal{P}_{res}}{\eta_t} = \frac{A v + B v^3}{\eta} \quad (6.12)$$

Le temps Δt requis pour parcourir la distance D à la vitesse constante v est :

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

Dès lors le travail consenti par la motorisation est :

$$W_{mot} = \mathcal{P}_{mot} \Delta t = \frac{\mathcal{P}_{mot} D}{v} \quad (6.13)$$

La consommation de carburant m_f s'obtient en utilisant la consommation spécifique bsfc du moteur :

$$m_f = \text{bsfc} W_{mot} = \text{bsfc} \frac{\mathcal{P}_{mot} D}{v} = \text{bsfc} \frac{A + B v^2}{\eta} D \quad (6.14)$$

où bsfc est la consommation spécifique du moteur. Si cette consommation spécifique était indépendante du régime, la formule (6.14) laisserait à penser que la consommation évolue comme le carré de la vitesse. En réalité, le résultat est différent étant donné que la consommation dépend du régime du moteur et de la puissance fournie.

$$\text{bsfc} = \text{bsfc}(\omega, \mathcal{P}_{mot}) = \text{bsfc}(V * i/R_e, \mathcal{P}_{mot}) \quad (6.15)$$

Elle dépend donc du rapport de boîte sélectionnée et de la longueur de transmission. Sa valeur est obtenue sur la cartographie du moteur en fonction des

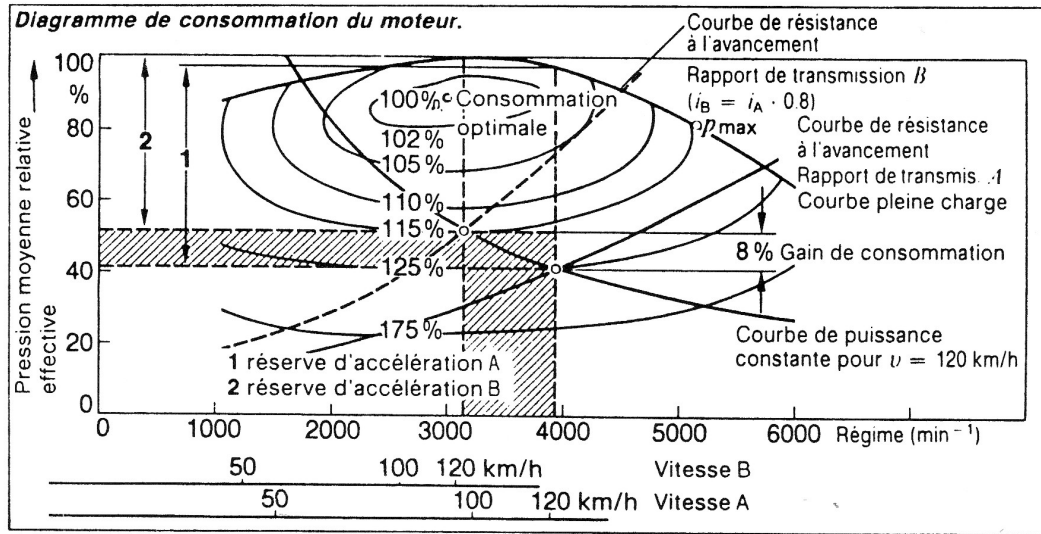


FIGURE 6.5 – Diagramme de la consommation du moteur et points de fonctionnement

données de puissance / couple à fournir par le moteur et de sa vitesse de rotation.

L'étude de la consommation d'un véhicule se déplaçant à vitesse constante se réalise classiquement dans la cartographie du moteur. En effet c'est dans ce diagramme que l'on connaît les courbes d'iso consommation.

La Figure 6.5 illustre la démarche sur le cas de figure d'un véhicule se déplaçant à une vitesse constante $v = 120 \text{ km/h}$.

La puissance \mathcal{P}_{mot} développée pour vaincre les forces de résistance s'écrit :

$$\mathcal{P}_{mot} = \frac{\mathcal{P}_{res}}{\eta} = \frac{A v + B v^3}{\eta_t}$$

La vitesse de rotation étant liée à la vitesse d'avance du véhicule par la relation

$$v = \frac{R_e}{i} \omega_{mot} = \frac{R_e}{i} \frac{2\pi}{60} N_{mot}$$

il est possible d'exprimer la puissance des forces de résistance dans la carto-

graphie du moteur.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{res} &= \frac{A}{\eta} \frac{R_e}{i} \omega_{mot} + \frac{B}{\eta} \left(\frac{R_e}{i} \right)^3 \omega_{mot}^3 \\
 &= \frac{A}{\eta} \frac{R_e}{i} \frac{2\pi}{60} N_{mot} + \frac{B}{\eta} \left(\frac{R_e}{i} \frac{2\pi}{60} \right)^3 N_{mot}^3 \\
 &= A'(i/R_e) N + B'(i/R_e) N_{mot}^3
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Il s'agit également d'une cubique dans les vitesses de rotation N_{mot} (ici exprimée en tours par minutes).

La courbe de couple résistant s'obtient en développant un raisonnement identique :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{res} &= \frac{A}{\eta} + \frac{B}{\eta} \left(\frac{R_e}{i} \right)^2 \omega_{mot}^2 \\
 &= A''(i/R_e) + B''(i/R_e) N_{mot}^2
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Les coefficients A' , B' , A'' et B'' dépendent du rapport de réduction sélectionné. Lorsque l'on a plusieurs rapports de boîte, on a autant de courbes dans l'espace de la cartographie du moteur, soit une par rapport de réduction.

Pour déterminer le point de fonctionnement, plusieurs approches équivalentes sont possibles. On peut déterminer la vitesse de rotation à partir de la relation

$$\omega_{mot} = \frac{v}{R_e} i \tag{6.18}$$

et le couple moteur par

$$\mathcal{C}_{mot} = \frac{1}{\eta_t} F_{res} \frac{R_e}{i} \tag{6.19}$$

On peut également déterminer le couple résistant pour le rapport de réduction i sélectionné, puis rechercher l'intersection avec la parabole de puissance constante.

$$\mathcal{P}_{mot} = \mathcal{P}_{res}(v)/\eta_t$$

C'est une parabole dans la cartographie du moteur :

$$\mathcal{C}_{mot} = \frac{\mathcal{P}_{mot}}{\omega_{mot}} \tag{6.20}$$

Remarquons encore que le travail peut être mené dans la cartographie du moteur exprimée en fonction de la pression moyenne effective bmep. En effet

la pression moyenne effective bmep du moteur est liée à la puissance par la relation suivante pour un moteur à quatre temps :

$$\text{bmep} = \frac{\mathcal{P}}{V_H N}$$

où N est le régime de rotation du moteur en tours par seconde. Soit

$$\text{bmep} * N = \frac{\mathcal{P}_{res}}{V_H} = \text{Cste}$$

qui est une constante pour une puissance et une cylindrée donnée.

On peut maintenant utiliser les résultats pour étudier l'influence du choix du rapport de réduction sélectionné sur la consommation du véhicule. Reprenons l'exemple de la Figure 6.5. Le point A est relatif à un rapport de boîte i_A . Lorsque l'on sélectionne le rapport de réduction plus faible $i_B = 0,8i_A$, le point de fonctionnement se déplace le long de l'hyperbole de puissance constante et le couple moteur augmente tandis que la vitesse de rotation diminue par le facteur inverse. On observe que le point de fonctionnement se rapproche des iso valeurs de consommation les plus faibles. Dans l'exemple sélectionné, il apparaît clairement que le choix du plus petit rapport de réduction i_B permet de réduire la consommation spécifique. Dans le cas de figure sélectionné, on gagne 8 % sur la consommation. En contrepartie, on diminue la force disponible pour l'accélération.

6.5 Consommation sur un cycle à vitesse variable

Pour un cycle de conduite à vitesse variable, on doit calculer la consommation à chaque instant en fonction de la puissance moteur à fournir et du régime moteur. La consommation totale est fournie par l'intégrale des consommations instantanées. On a ainsi l'expression générale :

$$B = \frac{\int_0^T \dot{b} dt}{\int_0^T v dt} = \frac{\int_0^T \frac{\text{bsfc} [\mathcal{P}_{mot}]_+}{\rho_{fuel}} dt}{\int_0^T v dt} \quad (6.21)$$

avec

$$[\mathcal{P}_{mot}]_+ = \begin{cases} \mathcal{P}_{mot} & \text{si } \mathcal{P}_{mot} \geq 0, \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}_{mot} < 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

En effet le moteur ne consomme pas d'énergie lorsqu'il faut ralentir le véhicule ou le freiner. On peut éventuellement introduire une consommation \dot{b}_{Frein} pour certains systèmes de propulsion lorsqu'ils fonctionnent en frein moteur.

En négligeant la consommation lors du freinage moteur, il vient donc :

$$B_e = \frac{\int \frac{\text{bsfc}_v}{\eta} [mfg \cos \theta + 1/2\rho SC_x v^2 + mg \sin \theta + mdv/dt]_+ dt}{\int v dt} \quad (6.23)$$

Cette dernière expression met en évidence l'intervention des différents paramètres sur lesquels on peut jouer pour réduire la consommation :

- La masse m du véhicule, qui intervient au travers des forces d'inertie, des forces de pente et des forces de résistance au roulement ;
- L'aérodynamique via le C_x ;
- La résistance au roulement dont une multitude de paramètres influencent le coefficient f

Des études paramétriques ont montré que, pour un véhicule moyen, on a les ordres de grandeur suivants sur la réduction de consommation ΔB pour une réduction de 10 % respectivement de la masse, du C_x , et du coefficient de résistance au roulement.

| | Δ | ΔB |
|--------------|----------|------------|
| Δm | 10 % | 6 % |
| ΔC_x | 10 % | 3 % |
| Δf | 10 % | 2 % |

6.6 Mesures normalisées de la consommation

6.6.1 Mesure normalisée de la consommation à vitesse constante

Anciennement, la plupart des constructeurs donnaient la consommation en pallier à deux vitesses différentes : souvent 90 km/h et 120 km/h.

La mesure de la consommation à vitesse constante se base sur la réalisation d'un essai soit en laboratoire sur un banc à rouleaux ou soit sur un essai sur route. Dans ce dernier cas le parcours doit avoir plus de 2 km et présenter une pente de moins de 2 %. La charge du véhicule doit être égale à la moitié (1/2) de la charge maximale et au moins supérieure à 180 kg.

Comme la masse volumique de l'essence augmente lorsque la température diminue, la consommation volumique mesurée doit encore être corrigée et rapportée à une consommation à 20 °C. Soit

$$B(20^\circ C) = [1 - \alpha_f(20 - t_c)] B(t_c) \quad (6.24)$$

où t_c est la température de l'essai en degrés centigrades et $B(t_c)$ la consommation mesurée à cette température. Le coefficient de dilatation de l'essence vaut environ $\alpha_c \approx 0,001 / ^\circ C$.

Avant l'imposition des cycles de conduite normalisés, les constructeurs estimaient (de manière très imparfaite) la consommation d'un véhicule au moyen de la consommation DIN (norme DIN 70300) qui représente 110 % de la consommation du véhicule supportant la moitié de sa charge maximale et roulant aux trois quarts de sa vitesse maximale (mais pas à plus de 110 km/h). Les 10 % devaient tenir compte des circonstances défavorables de la situation réelle.

Ultérieurement, la notion de consommation à vitesse constante a survécu jusqu'en 1996 dans la mesure de l'Euromix.

6.7 Cycles normalisés de consommation

Les cycles de conduites définissent des parcours standardisés au cours desquels la vitesse, l'accélération ainsi que, généralement, les rapports de boîte pour les boîtes manuelles doivent être suivis à chaque instant selon les spécifications du cycle.

Il y a deux types de cycles de conduite :

- Les premiers peuvent être qualifiés de "réalistes" dans le sens qu'ils sont déduits directement d'observations du trafic.
- Les seconds sont dits "synthétiques" parce qu'ils sont élaborés à partir de vitesses et d'accélération obtenues à partir d'observations du trafic classées et pondérées en fonction de leur durée et de leur fréquence.

Le cycle de conduite est généralement réalisé sur banc à rouleaux, où les émissions en sorties d'échappement du véhicule sont recueillies et analysées pour évaluer le taux normalisé d'émissions. Dans le domaine des véhicules industriels, le cycle de conduite n'est pas effectué sur un banc à rouleaux, mais sur un banc moteur et est évalué via une série de points de couple moteur et de vitesse moteur au lieu de points de vitesse véhicule.

Les cycles de conduite sont aujourd'hui le seul moyen standardisé pour évaluer si la législation sur les émissions est respectée par les constructeurs automobiles. Ces tests doivent être conçus de manière à ce qu'ils améliorent les réductions des émissions de polluants et de CO_2 et qu'il ne soit pas trop restrictif afin de laisser le marché ouvert à la concurrence. En effet, ce dilemme est délicat à gérer par les gouvernements qui sont souvent tentés de favoriser

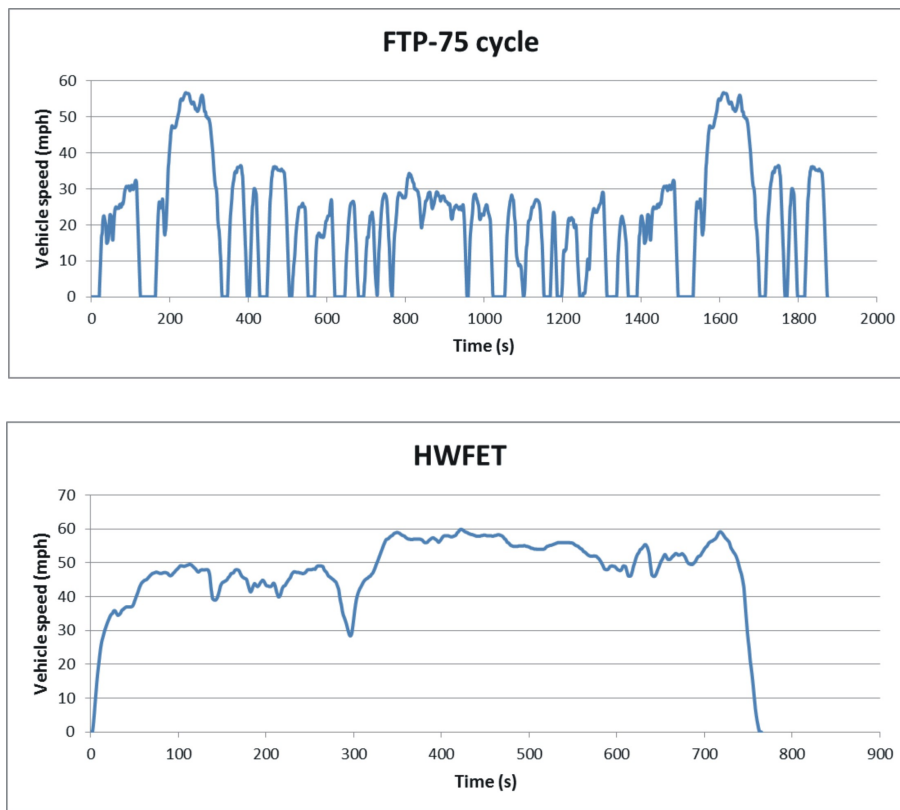


FIGURE 6.6 – Cycles US : FTP75 - conduite urbaine - et HWFET - conduite sur autoroute -

les fabricants locaux au moment de choisir le cycle qui sera utilisé pour les tests.

6.7.1 Les cycles EPA américains

Cycles FTP75 et HWFET

Aux USA, la détermination de la consommation (ou plutôt de l'économie de carburant) est basée sur les cycles de conduite développés par l'EPA (Environment Protection Agency). Le cycle FTP (pour Federal Test Procedure) a été créé par l'EPA (Environmental Protection Agency) pour représenter un cycle urbain avec une grande partie de la conduite en ville avec des arrêts fréquents et une partie de la conduite sur autoroute (voir Figure 6.6a). Le « Highway fuel economy test » (HWFET) est utilisé pour évaluer la consommation de carburant sur un cycle de conduite type autoroute. Il est représenté à la Figure 6.6b. De manière évidente, ces deux cycles sont classés dans la

catégorie 'réaliste' et sont représentatifs des habitudes de conduite aux USA.

A partir de la consommation mesurée sur les deux cycles, on forme l'indice d'économie combiné :

$$\frac{1}{mpg_{\text{combined}}} = \frac{0,55}{mpg_{FTP75}} + \frac{0,45}{mpg_{HWFET}} \quad (6.25)$$

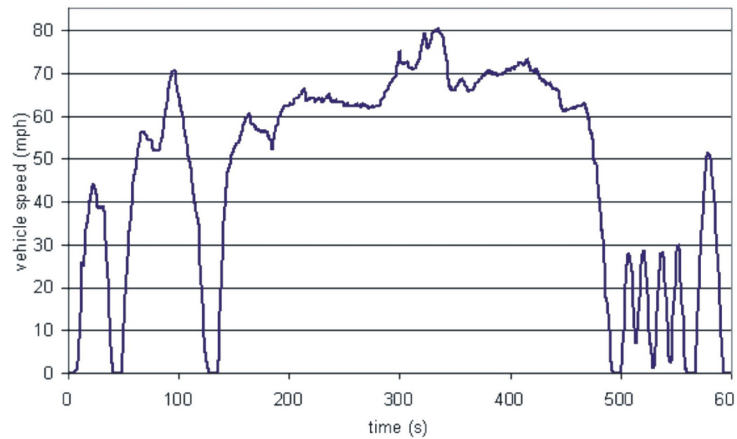
Cycles US06 et SC03

En 2007, l'EPA a décidé d'ajouter trois cycles supplémentaires à ceux déjà existants, afin de mieux refléter les conditions réelles de conduite. Le premier est l'US06, qui est complémentaire à ce qui manque au cycle FTP-75. En effet, ce cycle a une plus grande vitesse de pointe de 80 mph (130 kmh) et des accélérations plus fortes ce qui représente un comportement de conduite plus agressif. Le SC03 est un autre cycle ajouté qui a la particularité d'être effectué à une température ambiante de 35 °C. Ceci est nécessaire pour prendre en compte l'air conditionné dans les calculs de consommation de carburant et d'émissions. Le dernier cycle ajouté est le "cycle froid". Il s'agit en fait d'un FTP-75 effectué à une température ambiante de -7 °C.

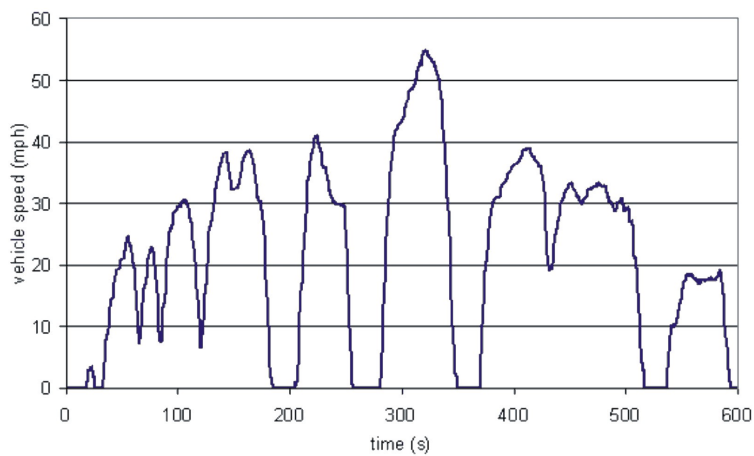
Procédure de test

Les tests sont réalisés sur un banc à rouleaux. Pour une boîte manuelle, les points pour les changements de rapport de boîte sont prescrits.

Cette procédure possède plusieurs inconvénients. Elle est d'abord assez lourde d'un point de vue pratique et technique. Ensuite, la masse du véhicule est classée en groupes; dès lors pour tout véhicule donné, la masse prescrite pour le test n'est pas identique à la masse réelle sur la route. Les mesures officielles de consommation sont effectuées avec cette contrainte. Une conséquence est qu'une réduction de masse n'a un effet visible sur la consommation que si on franchit une limite de classe, ce qui est assez difficile à utiliser en pratique comme outil de développement. Aussi, bien souvent, les calculs de consommation sont réalisés en s'affranchissant de ces contraintes de classe sur la masse. Par contre lorsque l'on compare les tests officiels et les données expérimentales, il y a des différences évidentes qui sont sources de confusion.



US06 Aggressive Driving Cycle



SC03 Driving Cycle

FIGURE 6.7 – Cycles US : US06 - conduite agressive - et SC03 - conduite avec température ambiante élevée -

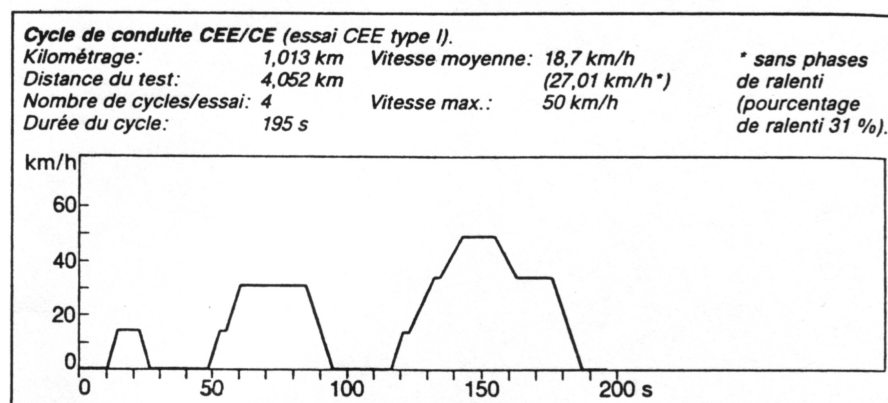


FIGURE 6.8 – Cycle européen en conduite urbaine. D'après [2]

6.7.2 Le cycle européen de conduite et les autres cycles en Europe

L'EUROMIX

Jusqu'en 1978, chaque pays en Europe avait ses propres règles pour la mesure de la consommation. La plupart était déterminée sur la base d'essais à vitesse constante par exemple à 90 km/h et 120 km/h.

Lors des chocs pétroliers des années 1970, il y eut une forte demande de la part des utilisateurs pour avoir des indices de consommation mieux représentatifs que les estimations à vitesse constante qui différaient assez fortement de la réalité vécues par les automobilistes européens.

Dès le début des années 1970, les constructeurs allemands de voitures ont commencé à établir leurs propres cycles de conduite basé sur des statistiques disponibles sur les données du trafic. Un de ceux-ci était le cycle E-70 (voir Ref.[10] page 119), amélioré plus tard par le cycle E-75 sur la base de nouvelles données concernant les habitudes des conducteurs européens. Par ailleurs, la consommation lors de la conduite en ville et sur autoroute étaient souvent mesurées sur la base des cycles EPA.

En 1978, la réglementation 80/1268/EEC propose de mesurer la consommation dans la Communauté Européenne en suivant l'indice de consommation composite EUROMIX. La réglementation définit tout d'abord le cycle urbain européen mis au point pour mesurer la consommation urbaine est représenté à la Figure 6.8. Il s'agit d'un cycle synthétique de conduite en ville. Il comporte trois périodes avec des arrêts. Le cycle CEE donne une plus grande importance à l'aérodynamique que le cycle EPA à cause de sa

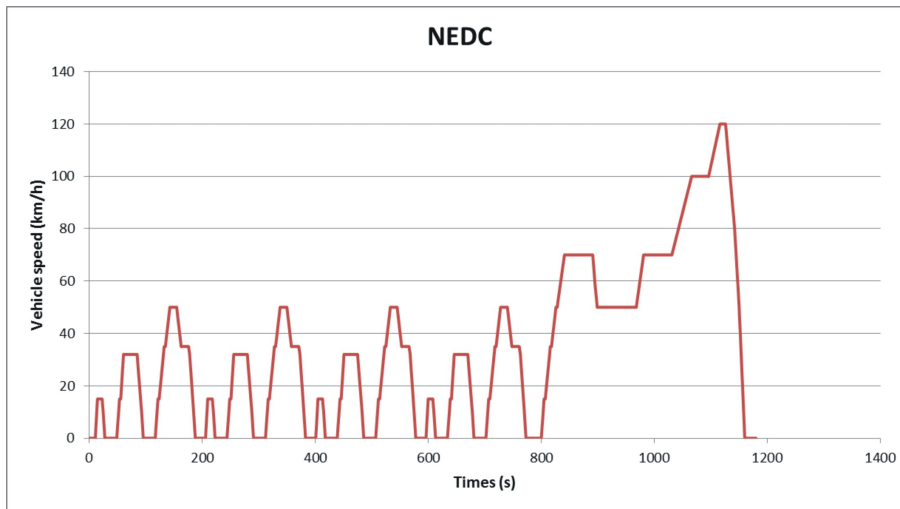


FIGURE 6.9 – Nouveau cycle de conduite européen

vitesse moyenne plus élevée et de ses périodes de vitesse en pallier à vitesse importante pour la ville. La réglementation 80/1268/EEC définit ensuite une consommation normalisée sur la base d'une moyenne entre la consommation sur le cycle européen urbain, la consommation à vitesse constante de 90 km/h et la consommation à vitesse constante de 120 km/h.

$$B_{Euromix} = \frac{1}{3} (B_{City} + B_{90} + B_{120}) \quad (6.26)$$

Bien que l'EUROMIX n'ait jamais été une réglementation officielle obligatoire, il était largement accepté probablement parce qu'il proposait un seul nombre pour représenter la consommation plutôt que 3 valeurs, ce qui est plus parlant pour le public.

Cycle NEDC

A partir du 1er janvier 1996, un nouveau cycle européen de conduite a été introduit à la fois pour la mesure et la certification des émissions de polluants et de la consommation dans la Communauté Européenne. Le cycle NEDC (pour New European Driving Cycle) a été utilisé comme cycle de référence pour l'homologation des véhicules jusqu'à la norme Euro6 en Europe et dans certains autres pays du monde. Il est remplacé à partir de la norme EURO 6d par le cycle WLTP.

Le nouveau cycle européen est représenté à la Figure 6.9. Il est composé de deux parties :

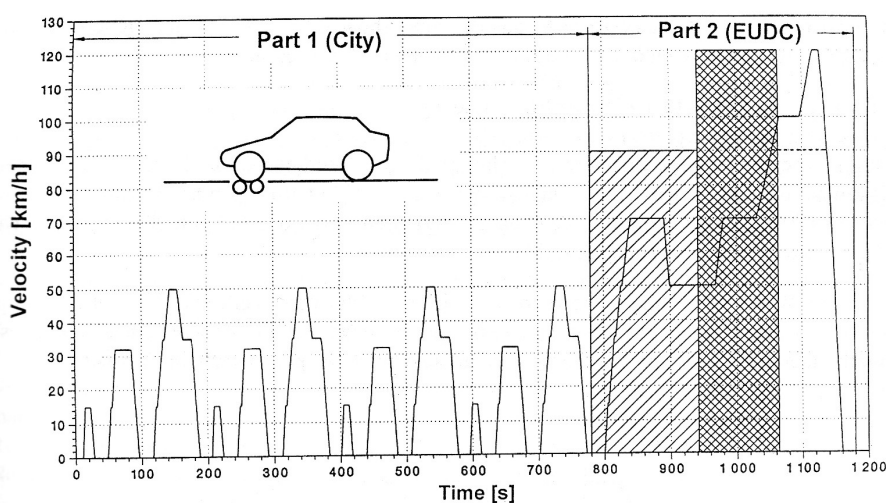


FIGURE 6.10 – Nouveau cycle européen de conduite pour la certification des émissions et de la consommation. La zone hachurée identifie les sections à vitesse constante qui ont été remplacées. D'après [10], Figure 3.21

- La première partie reprend le cycle urbain européen ECE qui doit être parcouru quatre fois après un départ à froid.
- La seconde partie est un cycle à haute vitesse. Il remplace les deux cycles à vitesse constante à 90 et 120 km/h (Voir Figure 6.10).

Le nouveau cycle européen de conduite (NEDC) est réalisé sur banc à rouleaux. Le parcours est de 11 km pendant 1080 secondes. Le parcours est composé d'une portion de 780 secondes en cycle urbain et d'une autre de 300 secondes en cycle extra-urbain. La vitesse moyenne est de 33,6 km/h. En cycle urbain, la vitesse de 50 km/h n'est jamais atteinte, par contre, la voiture tourne plusieurs fois à l'arrêt, comme c'est souvent le cas dans la réalité. Par ailleurs, les simulations d'accélération molles correspondent bien moins à la réalité. En cycle extra-urbain, la vitesse varie entre 60 et 120 km/h, mais la vitesse maximale n'est maintenue que pendant quelques secondes. Les caractéristiques principales du cycle NEDC sont les suivantes :

| | NEDC |
|------------------|------|
| Distance (m) | 1102 |
| Durée (s) | 1180 |
| Vit. moy. (km/h) | 33,6 |

Comparativement à l'EUROMIX avec ses parties à vitesse constante à 90 et 120 km/h, le nouveau cycle européen propose une vitesse moyenne

plus lente. Du fait de cette vitesse moyenne plus lente, l'influence de l'aérodynamique sur la consommation normalisée est réduite (et se rapproche de celle de l'effet de l'aérodynamique dans le cycle américain de l'EPA), tandis que la présence de phases d'accélération dans la partie à haute vitesse augmente l'influence de la masse.

Le cycle NEDC est souvent critiqué par les experts parce qu'il n'est pas du tout représentatif d'une situation réelle de conduite. Bien que sa partie urbaine avec ses longs arrêts puisse représenter le trafic à l'intérieur du centre des villes européennes, il ne rend pas bien compte du trafic dans les zones périphériques et péri urbaines. Les accélérations sont très faibles, il y a beaucoup de plateaux à vitesse constante et beaucoup de phases de ralenti. En outre, la partie à haute vitesse ne reproduit pas très bien la vitesse élevée sur les autoroutes, alors qu'il s'agit souvent de la partie principale du trajet moyen. Dès lors, cela rend impossible le fait d'obtenir les valeurs certifiées de la consommation et des émissions de polluants qui soient une image correcte de la conduite dans des conditions réelles. A la Figure 6.11, le rapport de ICCT [14] montre la dérive entre les valeurs des consommations mesurées sur le cycle d'homologation NEDC et les valeurs mesurées sur des cycles non officiels (ADAC Eco Test) ou des valeurs rassemblées dans les bases de données telles que le *Spritmonitor* rassemblant les consommations mesurées chez les consommateurs. Pour ces raisons, il a été décidé par les autorités européennes de remplacer le NEDC par le nouveau cycle appelé Worldwide Harmonized Light Vehicle Test Procedure (WLTP) qui est entrera en vigueur avec la norme Euro 6d.

Cycle ADAC

Indépendamment des cycles officiels, les magazines d'automobiles et les automobiles clubs ont continué de proposer leurs propres cycles. Un de ceux-ci est le cycle ADAC, automobile club allemand. Issu d'observations du trafic allemand, il est assez réaliste. Comme le montre la Figure 6.12, il est composé de 3 segments :

- Un cycle urbain basé sur le cycle urbain européen.
- Un cycle rural typique d'une conduite dans la campagne à parcourir deux fois.
- Un cycle autoroutier qui diffère selon la vitesse maximale de la voiture. Les voitures avec une vitesse de pointe inférieure à 155 km/h ont un cycle autoroutier à 120 km/h ; les voitures avec une vitesse de pointe de 170 km/h ou plus ont à parcourir un cycle à une vitesse de 140 km/h ; les voitures dont la vitesse de pointe est située entre ces deux

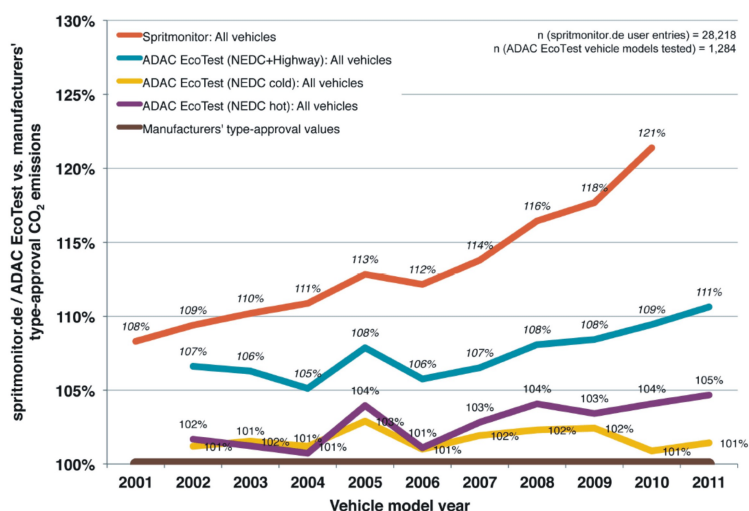


FIGURE 6.11 – Comparaison des émissions de CO_2 mesurées selon le règlement R101 NEDC et constantées sur la base d'autres profils d'usage du véhicule : ADAC Eco Test (NEDC Hot) incluant les effets de la climatisation de l'habitacle, ADAC Eco Test (NEDC Froid) sans la climatisation et les valeurs extraites de la base de données allemandes des consommations Spritmonitor. Source ICCT [14]

limites (140 et 170 km/h) doivent suivre un cycle dont la vitesse est décrite par une règle additionnelle.

Il semble que ce cycle représente assez bien les habitudes de conduite des conducteurs allemands. Il prend en compte que, en Allemagne, les voitures rapides sont conduites plus rapidement.

Cycle ARTEMIS

Ce cycle est basé sur une étude effectuée en Europe dans le cadre du projet Artémis. Il est composé de trois configurations différentes, plus une variante supplémentaire : cycle urbain, rural, autoroute 130 km/h et autoroute 150 km/h. Les principales caractéristiques des cycles ARTEMIS sont les suivantes :

| | Urbain | Rural | Autoroute 150 | Autoroute 130 |
|------------------|--------|-------|---------------|---------------|
| Distance (m) | 4870 | 17272 | 29545 | 28735 |
| Durée (s) | 993 | 1082 | 1068 | 1068 |
| Vit. moy. (km/h) | 17,6 | 57,5 | 99,6 | 96,9 |

Les cycles Artémis ne sont pas utilisés pour la certification de polluants ou de consommation de carburant, cependant, les constructeurs automobiles

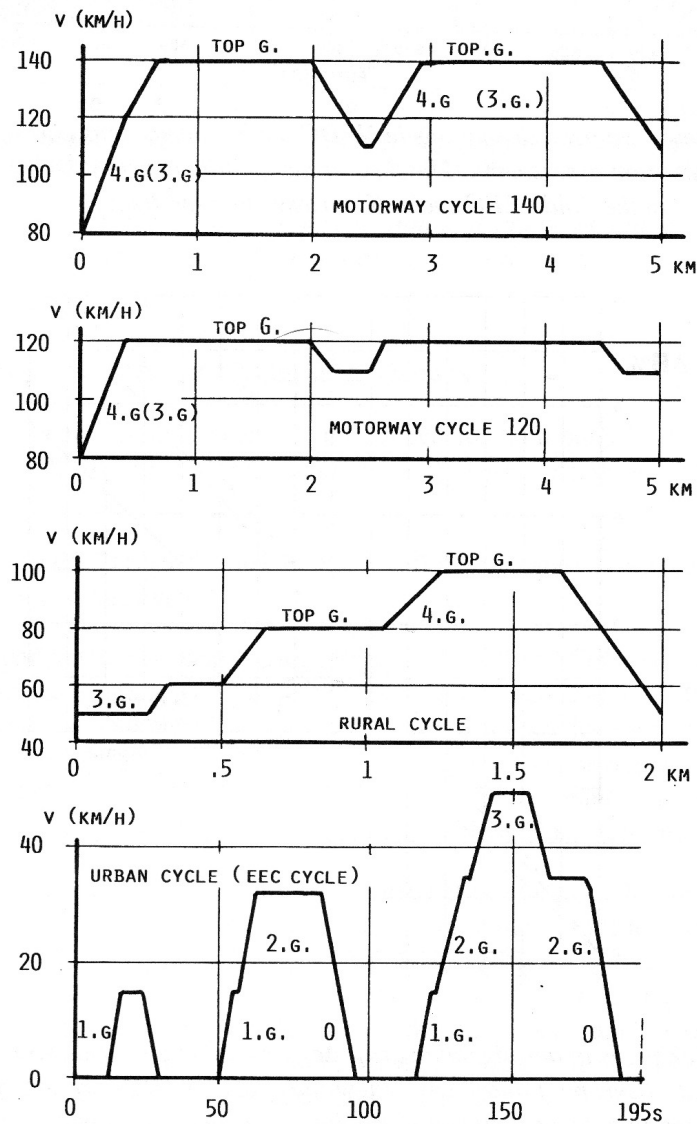


FIGURE 6.12 – Cycle de conduite développé par l'ADAC (Automobile Club Allemand) et utilisé pour la mesure de la consommation. D'après [10], figure 3.23

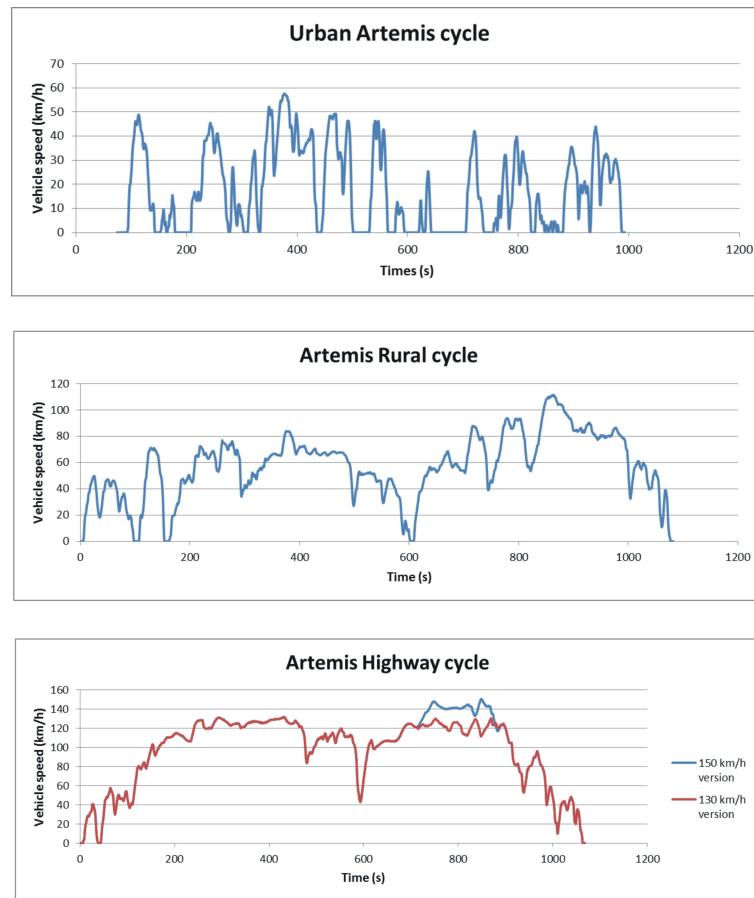


FIGURE 6.13 – Cycles de conduite ARTEMIS : urbain, rural, autoroute 130 et 150

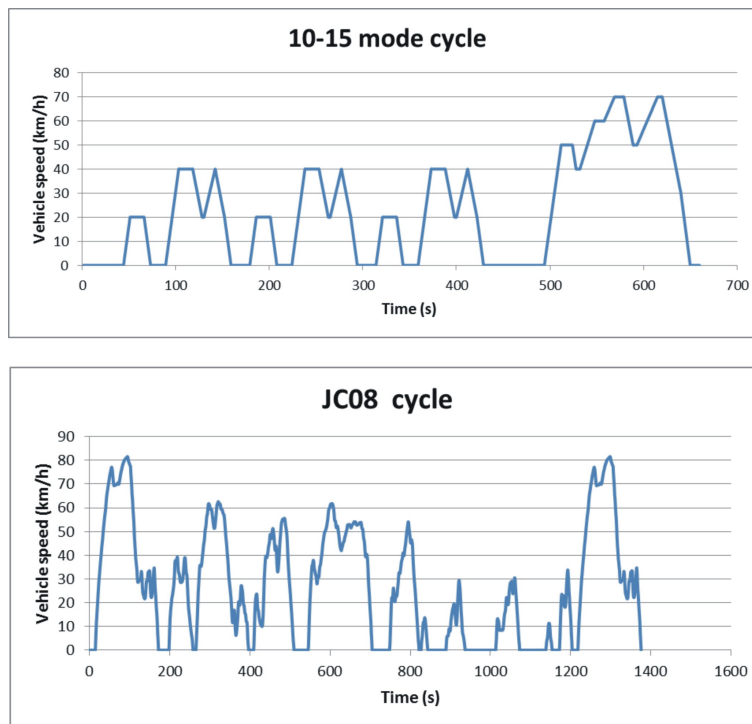


FIGURE 6.14 – Cycles de conduite japonais : cycle 10-15 et cycle JC08

utilisent ce type de cycle pour mieux comprendre les conditions réelles de conduite et pour évaluer les performances réelles de leurs véhicules.

Notons qu'il existe de nombreux autres cycles plus ou moins connus ou utilisés comme le modem-Hyzem qui ne seront pas traités ici.

6.7.3 Cycles japonais

Le cycle Japonais 10-15 mode est utilisé pour la certification des émissions et de la consommation de carburant au Japon. Il représente à la fois un cycle urbain et autoroutier, comprenant des phases de ralenti, des accélérations, des décélérations et des phases de stabilisé. Les mesures sont effectuées moteur est chaud, après une procédure de chauffe moteur standard.

Ce cycle comporte les mêmes désavantages que le NEDC, c'est pourquoi les autorités et les constructeurs Japonais ont décidé de passer à un cycle plus réaliste à partir de 2011, le JC08.

Le JC08 est un cycle transitoire qui est beaucoup plus exigeant que le cycle 10-15 mode. Il est réalisé à la fois avec démarrage à froid et à chaud et

il représente une conduite en trafic congestionné, avec de fortes accélérations et décélérations.

Les caractéristiques des deux cycles japonais sont les suivantes :

| | 10-15 | JC08 |
|------------------|-------|------|
| Distance (m) | 4160 | 8170 |
| Durée (s) | 660 | 1204 |
| Vit. moy. (km/h) | 22,7 | 24,4 |

6.7.4 Procédure d'essai mondiale harmonisée (WLTP)

L'établissement du règlement WLTP résulte d'une concertation entamée dès 2013-2014 entre les différents constructeurs automobiles et les instances gouvernementales Européennes, Japonaises, Chinoises et Indiennes afin de remplacer le cycle NEDC. Le cycle WLTP est construit à partir d'une base de données représentative des usages automobiles au niveau mondial. Comme pour les cycles précédents, la procédure d'essai mondiale harmonisée pour les voitures particulières et véhicules utilitaires légers (WLTP pour Worldwide Harmonized Light vehicles Test Procedures) est un test réalisé sur banc à rouleaux. Il permet d'évaluer les émissions de polluants, la consommation de carburant et l'autonomie en électrique des véhicules utilitaires légers (voitures particulières et camionnettes).

La procédure de test est divisée en 3 cycles, en fonction du rapport entre la puissance et la masse du véhicule testé. Ce rapport de puissance massique (Pm) est défini comme étant la puissance nominale en W, divisée par le poids à vide en kg. Trois classes sont alors définies suivant l'indice de puissance massique du véhicule :

Classe 3 : $Pm \geq 34$ Si la vitesse maximale $V_{max} < 135 \text{ km/h}$, la partie du cycle à vitesse élevée est remplacée par une partie à basse vitesse.

Classe 2 : $22 \leq Pm \leq 34$ Si la vitesse maximale $V_{max} < 90 \text{ km/h}$, la partie du cycle à vitesse élevée est remplacée par une partie à basse vitesse.

Classe 1 : $Pm \leq 22$ Si la vitesse maximale $V_{max} < 70 \text{ km/h}$, la partie du cycle à vitesse élevée est remplacée par une partie à basse vitesse.

Cycle pour les véhicules de classe 3

Le cycle pour classe 3 est composé de quatre zones de vitesse : une représentant de la conduite urbaine, une de conduite périurbaine, une de conduite extra-urbaine et une zone d'autoroute.

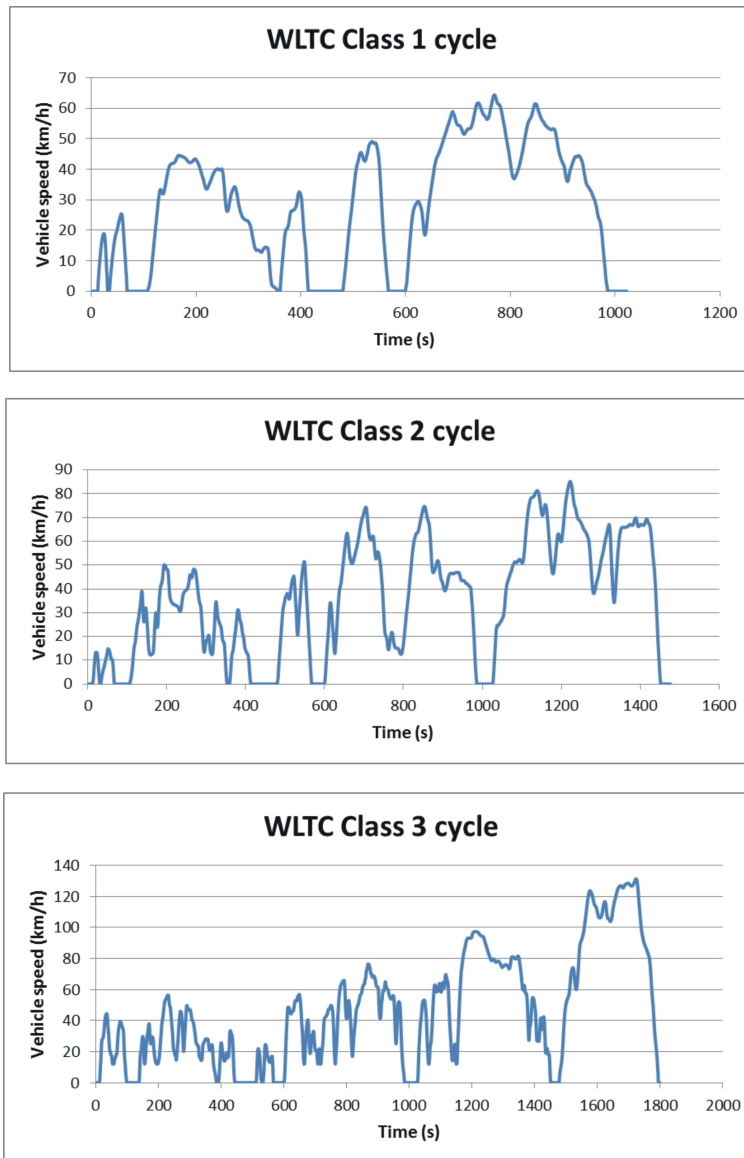


FIGURE 6.15 – Cycles de la procédure d'essai mondiale harmonisée WLTP : classe 1, classe 2, classe 3

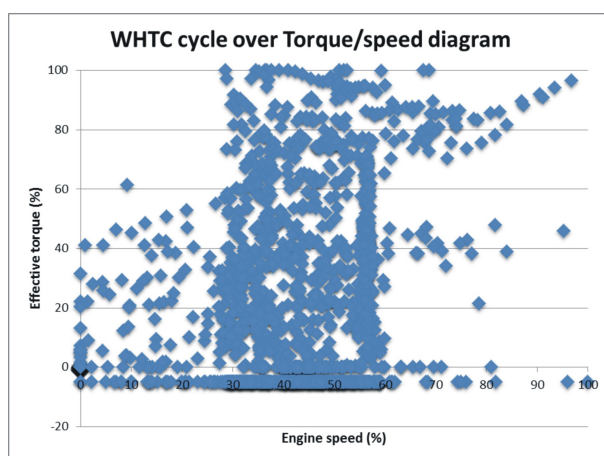


FIGURE 6.16 – Cycles pour les véhicules industriels : WHTC

Cycle pour les véhicules de classe 2

Le cycle pour classe 2 représente des vitesses véhicule basses, moyennes et modérément élevées, couvrant l'utilisation des véhicules indiens et des véhicules européens et japonais de faible puissance.

Cycle pour les véhicules de classe 1

Ce cycle est constitué de zones à faible et moyenne vitesse. Il est typique des véhicules de faible puissance qui peuvent être trouvés en Inde.

Les caractéristiques des trois cycles WLTP sont les suivantes :

| WLTP | Classe 3 | Classe 2 | Classe 1 |
|------------------|----------|----------|----------|
| Distance (m) | 23262 | 14664 | 8091 |
| Durée (s) | 1800 | 1477 | 1022 |
| Vit. moy. (km/h) | 46,5 | 35,7 | 28,5 |

Les cycles pour véhicules industriels

Les émissions et la consommation de carburant des véhicules industriels sont évalués pour homologation au banc d'essai moteur et non sur banc à rouleaux. Il existe deux cycles mondiaux harmonisés utilisés pour l'homologation qui sont représentés par un ensemble de point vitesse moteur normalisée / charge moteur normalisée (en % de la vitesse maximale et de la charge maximale) en fonction du temps. Le premier est un cycle stabilisé (WHSC pour World Harmonized Stationary Cycle) et le second est transitoire (WHTC

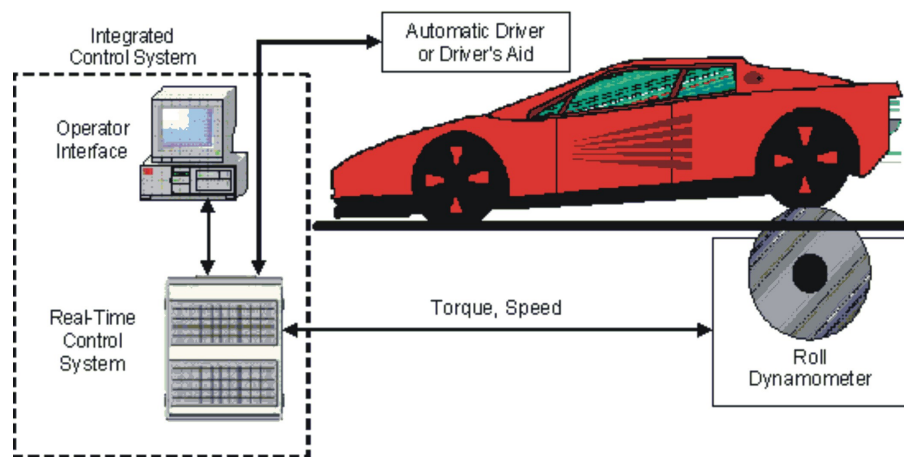


FIGURE 6.17 – Architecture du banc à rouleaux

pour World Harmonized Transiant Cycle). Les valeurs négatives sont fixées arbitrairement pour représenter les pertes par friction.

Comparaison des cycles NEDC et WLTP

Le Tableau 6.3 dresse un résumé de la comparaison entre les caractéristiques des cycles NEDC et WLTP.

6.8 Banc à rouleaux

La réalisation des différents tests de consommation et d'émissions fait référence à l'utilisation d'un *banc à rouleaux*. Il apparaît donc important de préciser quel est ce dispositif.

Afin de réaliser des tests de motorisation ou de véhicules, on a besoin d'un dispositif expérimental capable de reproduire les conditions de fonctionnement sur la route tout en restant dans un laboratoire ou un atelier. Un *banc à rouleaux* (*chassis dynamometer* en anglais) est un dispositif destiné à reproduire les lois d'évolution du véhicule sur la route tout en maîtrisant les conditions de l'expérience en laboratoire.

Un banc à rouleaux consiste typiquement en un ou deux rouleaux menés par les roues motrices et connectés à un système d'absorption de puissance capable de contrôler la charge appliquée aux rouleaux et donc aux roues du véhicule. Une instrumentation électronique et un logiciel de contrôle sur ordinateur sont maintenant habituels. L'opérateur peut contrôler certaines fonctions du banc pendant la conduite du véhicule.

| | NEDC | WLTP |
|-------------------------------------|---|--|
| Cycle de test | Cycle de test unique | Cycle dynamique plus représentatif des conditions de conduite réelle |
| Durée du cycle | 1180 s (20 min) | 1800 s (30 min) |
| Distance du cycle | 11 km | 23,25 km |
| Phases de conduite | 2 phases, 66 % de conduite urbaine et 34 % de conduite rurale | 4 phases plus dynamiques, 52 % de conduite urbaine et 48 % de conduite rurale |
| Durée des phases d'arrêt | 322 s | 235 s |
| Pourcentage d'arrêt | 27,35 % | 13,05 % |
| Vitesse moyenne avec arrêt | 33,3 km/h | 46,5 km/h |
| Vitesse maximale | 120 km/h | 131 km/h |
| Accélérations maximales | 1,06 m/s^2 | 1,75 m/s^2 |
| Décélération maximales | -1,64 m/s^2 | -1,75 m/s^2 |
| Influence des options individuelles | Le NEDC ne tient pas compte de l'impact sur les émissions de CO_2 et sur la performance énergétique | Les caractéristiques additionnelles (pouvant varier selon les modèles) sont prises en compte |
| Changements de vitesse | Changements de vitesse fixes | Points de passage calculés pour chaque véhicule |
| Températures de test | Mesures réalisées entre 20 et 30°C | Essais réalisés à 23°C, CO_2 corrigé à 14°C |

TABLE 6.3 – Comparaison des cycles NEDC et WLTP

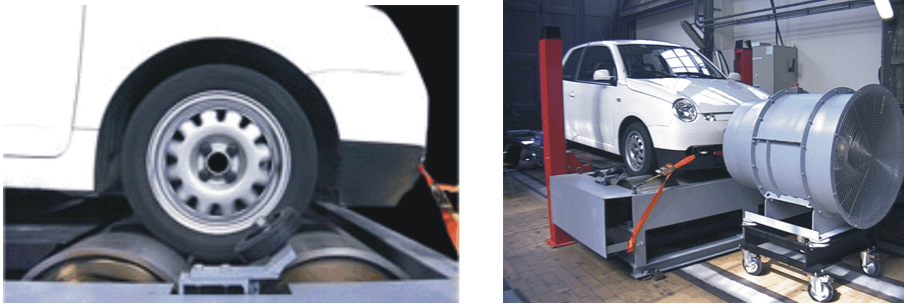


FIGURE 6.18 – Banc à rouleaux de l'Université de Liège

Le banc à rouleau présente plusieurs avantages. Le plus important est la possibilité de tester les performances d'un véhicule complet ou d'un moteur monté sur le véhicule. Il n'est pas nécessaire de retirer le moteur du véhicule, ce qui simplifie, primo, la procédure de test et, secundo, l'environnement pour procéder à la réalisation de l'essai. Toutefois, la précision et la répétabilité de la mesure sont plus faibles que celles d'un banc moteur compte tenu des multiples facteurs de perturbation qui peuvent affecter la mesure (pertes dans la ligne de transmission; type, pression de gonflage, température et usure des pneumatiques...) En outre l'accessibilité et l'installation de capteurs sont également plus limitées.

Les bancs à rouleaux sont généralement utilisés pour :

- effectuer une vérification rapide de la puissance,
- réaliser des tests supplémentaires sur le moteur,
- mesurer les pertes de la ligne de transmission,
- réaliser des tests requérant la mesure précise de la puissance développée par le véhicule,
- effectuer des essais exigeant la présence du véhicule complet pour la mesure de la consommation, des émissions, du bruit, etc.



FIGURE 6.19 – Mesure de la caractéristique du la motorisation d’un banc à rouleaux sur banc à rouleaux à l’Université de Liège

Chapitre 7

LE FREINAGE

7.1 Introduction

Les performances en freinage des véhicules sont de toute évidence une des caractéristiques cruciales pour la sécurité du véhicule. Dans la perspective d'accroître la sécurité, des efforts importants ont été consentis au cours du temps pour améliorer le freinage. Des normes réglementent le freinage dans la plupart des pays.

Ce chapitre traite des approches et méthodes d'analyse des performances de freinage des véhicules à moteur. Les critères d'évaluation des capacités de freinage sont présentés et des approches récentes pour augmenter les performances de freinage telles que l'ABS seront discutées.

7.2 Equations du mouvement

7.2.1 Equations de Newton-Euler

En observant la situation décrite à la Figure 7.1, on peut écrire l'équilibre longitudinal du véhicule selon l'axe x local de la voiture. Selon la convention, une accélération positive est dirigée vers l'avant. Ici en cas de freinage, l'accélération prend une valeur numérique négative $a_x < 0$.

Le décélération de freinage a_x est régie par la seconde loi de Newton :

$$ma_x = -(F_{bf} + F_{br}) - F_{RR} - F_{aero} \mp W \sin \theta - R_t \quad (7.1)$$

avec

— $F_{bf} + F_{br}$ respectivement les forces du système de freinage sur les roues avants et arrières ;

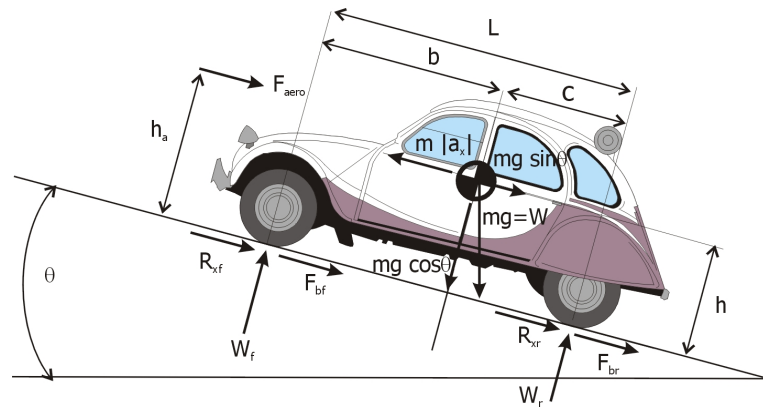


FIGURE 7.1 – Définition des forces agissant sur une automobile lors du freinage

- $F_{RR} = fW \cos \theta = mg \cos \theta$ la force de résistance au roulement ;
- $F_{aero} = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x$ la force de traînée aérodynamique ;
- $F_g = W \sin \theta = mg \sin \theta$ la force de pente ;
- R_t la force de freinage due à la transmission.

En réalité si la source de freinage principale reste bien les freins, les autres forces de résistance à l'avancement contribuent également au ralentissement du véhicule. Examinons l'importance relative de chacune d'elles.

7.2.2 Forces du freinage

La résistance au roulement

La résistance au roulement s'oppose au mouvement du véhicule et contribue à son ralentissement. Sur une route plane :

$$F_{RR} = F_{RR,f} + F_{RR,r} = f (W_f + W_r) = f m g \cos \theta$$

Elle donne lieu à une décélération dont l'importance est la suivante :

$$\frac{F_{RR}}{m} = f g \sim 0.01 g$$

La résistance aérodynamique

La traînée aérodynamique s'oppose également au mouvement. Son action est fonction de la vitesse au carré.

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x$$

A basse vitesse cette force est négligeable, mais certainement pas à haute vitesse. Estimons sa contribution à haute vitesse : soit $\rho = 1.226 \text{ kg/m}^3$, $S = 2 \text{ m}^2$, $C_x = 0.35$, $V = 120 \text{ km/h} = 33.3 \text{ m/s}$, $m = 1200 \text{ kg}$.

$$\frac{F_{aero}}{m} = \frac{0.5\rho V^2 S C_x}{m} \sim 0.04 g$$

La résistance de pente

La pente de la route va contribuer de manière directe au ralentissement du véhicule (positivement ou négativement) selon le sens de la pente évidemment. Pour des faibles pentes et des angles exprimés en radians, on a

$$F_g = W \sin \theta \simeq W \theta$$

Dès lors une pente de 3% va donner lieu à une décélération de :

$$\frac{F_g}{m} = g \theta \sim 0.03 g$$

La résistance de la ligne de transmission

Le moteur, la boîte de vitesses, la transmission et le pont produisent des forces d'inertie et de résistance à l'avancement qui peuvent contribuer au freinage.

D'une part l'inertie des composants en rotation de la ligne de transmission augmente la masse effective du véhicule et doit donc être prise en compte lors du freinage et spécialement lors du dimensionnement du système de freinage des roues motrices.

La ligne de transmission contribue également en apportant une résistance à l'avancement ou traînée. Celle-ci provient du frein moteur et des frictions dans les roulements et dans les paliers de la boîte de vitesses, de la transmission, du différentiel. Le *frein moteur* a pour origine le couple moteur (observable au banc) provenant des frictions internes du moteur et des pertes par pompage de l'air dans les cylindres lorsque le moteur est entraîné et comprime de l'air. On remarquera que les pertes par pompage disparaissent si le moteur est entraîné à un régime suffisamment élevé pour conduire au flottement des soupapes. Pour un régime supérieur à ce régime, les soupapes restent ouvertes et le couple de frein moteur disparaît. Cela peut conduire à des problèmes pour les camions pour lesquels le flottement peut apparaître aux environs de 4000 tr/min et causer des accidents dans de très longues descentes. Pour des boîtes manuelles, le couple de frein moteur est multiplié

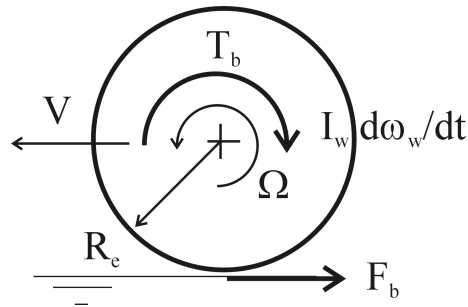


FIGURE 7.2 – Équilibre de la roue freinée

par le rapport de réduction de la boîte lorsque l’embrayage est fermé. Par contre, pour les transmissions hydrauliques, le convertisseur de couple est prévu pour faire passer la puissance du moteur vers les roues mais pas l’inverse (ou de manière très inefficace) de sorte qu’il n’y a pas de frein moteur dans ce cas.

Enfin l’inertie de la ligne de transmission peut contribuer de manière positive ou négative au freinage en fonction du taux de décélération. Si le véhicule ralentit plus vite que ne le feraient les composants sous l’action de leurs propres frictions internes, alors les freins des roues doivent reprendre la partie supplémentaire du couple de freinage qui est nécessaire pour ralentir la ligne de transmission. De même, pour des décélérations assez lentes la friction dans les organes de la ligne de transmission est suffisante pour freiner la ligne de transmission et contribuer positivement à l’effort de freinage du véhicule.

7.2.3 Forces de freinage

La force de freinage produite par les freins reste la source principale du ralentissement du véhicule. La force de ralentissement se développe à l’interface entre les pneumatiques et le sol.

De la discussion du paragraphe précédent sur le rôle des forces d’inertie de la ligne de transmission, on déduit que lorsque la force à la roue reste inférieure à la limite d’adhérence sol roue, la force de freinage développée dans l’aire de contact doit reprendre en supplément la décélération des roues et des organes de la ligne de transmission. En observant la Figure 7.2, la force nette disponible pour freiner le véhicule vaut donc :

$$F_b = \frac{T_b - \sum I_w |\dot{\omega}_w|}{R_e} \quad (7.2)$$

avec

- R_e le rayon effectif de la roue ;
- T_b le couple de freinage produit par le frein ;
- I_w l'inertie de roue et de la ligne de transmission ;
- $\dot{\omega}_w$ la décélération angulaire des roues.

Excepté lors du glissement de la roue suite à la saturation du coefficient d'adhérence, l'accélération angulaire $\dot{\omega}_w$ de la roue est liée à la décélération du véhicule : $a_x = \dot{\omega}_w / R_e$. Dès lors il est possible et souvent plus commode de reporter l'inertie des roues et des organes de la ligne de transmission sur la masse effective du véhicule lors des calculs. Dans ce cas on considère simplement la force de freinage calculée par la relation :

$$F_b = \frac{T_b}{R_e} \quad (7.3)$$

tandis que la masse du véhicule est corrigée pour tenir compte de l'inertie de la ligne de transmission et des roues.

$$m_{e,b} a_x = -F_b \quad (7.4)$$

On est alors amené à définir une masse effective en décélération et un facteur correctif :

$$\gamma_b = \frac{m_{e,b}}{m} \quad (7.5)$$

Ce coefficient de masse effective est plus faible que le coefficient de masse effective en accélération et vaut généralement entre 1,03 et 1,05.

7.3 Mouvement à décélération constante

Supposons que le mouvement de freinage s'effectue à *décélération constante*, ce qui revient à admettre l'hypothèse que les forces de freinage restent constantes avec la vitesse :

$$a_x = -F_x^{tot} / m = \frac{dv}{dt} \quad (7.6)$$

où F_x^{tot} est la force totale de freinage (constante). Cette hypothèse est tout à fait cohérente avec l'hypothèse que l'adhérence est constante $\mu = Cste$ durant le freinage.

Si la vitesse initiale est v_0 , l'intégration de l'équation donne la vitesse $v(t)$:

$$v(t) = v_0 - a_x t \quad (7.7)$$

En intégrant encore une fois on obtient la distance parcourue en fonction du temps $x(t)$

$$x(t) = v_0 t - a_x \frac{t^2}{2} \quad (7.8)$$

Si on considère l'énergie, la différence d'énergie cinétique entre l'instant initial et final est égale à la puissance moyenne dissipée par les forces de freinage multipliées par la distance parcourue :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2(t) = F_x^{tot} x(t) \quad (7.9)$$

Si la vitesse finale est nulle (arrêt complet du véhicule), on obtient le temps d'arrêt t_{stop}

$$v_0 = a_x t_{stop} \Leftrightarrow t_{stop} = v_0/a_x \quad (7.10)$$

et la distance d'arrêt L_{stop} :

$$L_{stop} = \frac{v_0^2}{a_x} - \frac{v_0^2}{2 a_x} = \frac{v_0^2}{2 a_x} = \frac{v_0 t_{stop}}{2} \quad (7.11)$$

Tandis que l'énergie dissipée par le freinage est

$$E_b = \frac{1}{2} m v_0^2 = F_x^{tot} L_{stop} = F_x^{tot} \frac{v_0^2}{2 a_x} \quad (7.12)$$

La puissance moyenne dissipée par le système de freinage est égale :

$$P_b = E_b/t_{stop} \quad (7.13)$$

La puissance maximale est dissipée à l'instant initial et vaut :

$$P_b^{max} = F_b \cdot v_0 \quad (7.14)$$

Comme la puissance instantannée décroît linéairement avec le temps, la puissance maximale est égale au double de puissance moyenne.

En pratique, la distance d'arrêt est supérieure à celle qui est estimée ici, car il y a un temps mort à cause du temps de réaction du conducteur (t_a) et du temps de réaction du système de freinage (t_d). Soit $t_a + t_d$ ce temps de réaction et de mise en action du système de freinage, la distance d'arrêt devient :

$$L_{stop} = v_0 (t_a + t_d) + \frac{v_0^2}{2 a_x} \quad (7.15)$$

$t_a + t_d$ est couramment de l'ordre de 0,5 s.

Applications numériques

Voiture

Soit une voiture de masse totale $m = 1400\text{kg}$. La vitesse initiale est de $v_0 = 120\text{ km/h} = 33\text{ m/s}$. La décélération est de $a_x = 6\text{ m/s}^2$.

L'énergie cinétique du véhicule qui doit être absorbée par le système de freinage vaut :

$$E_b = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} 1400 (33,3)^2 = 776,223\text{ kJ} \quad (7.16)$$

Cette énergie est transformée en chaleur qui devra être dissipée. La décélération étant de 6 m/s^2 , le temps de freinage est de :

$$t_{stop} = v_0/a_x = 33,3/6 = 5,5\text{ s} \quad (7.17)$$

et la distance de freinage

$$L_{stop} = v_0^2/(2.a_x) = 90\text{ m} \quad (7.18)$$

La puissance moyenne qui doit être absorbée par le freinage est :

$$P_b = E_b/t_{stop} = 776.223/5,5 = 141,131\text{ kW} \simeq 190\text{ CV} \quad (7.19)$$

Elle est maintenue pendant 5,5 secondes. La puissance maximale dissipée vaut quant à elle :

$$P_b^{max} = 2 E_b/t_{stop} = 282,262\text{ kW} \quad (7.20)$$

Camion

Un tracteur et son semi-remorque pesant 35 tonnes roulent à 60 km/h ou 16,6 m/s. La décélération est de 5 m/s^2 .

L'énergie cinétique dissipée en chaleur est de

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} 35000 (16,6)^2 = 4806900\text{ J} \quad (7.21)$$

Le temps de freinage est de

$$t_{stop} = V_0/a_x = 16.6/5 = 3,33\text{ s} \quad (7.22)$$

La puissance moyenne à dissiper par les freins est de :

$$P_b = W/t_{stop} = 4806900/3,33 = 1,443513\text{ MW} \simeq 1960\text{ CV} \quad (7.23)$$

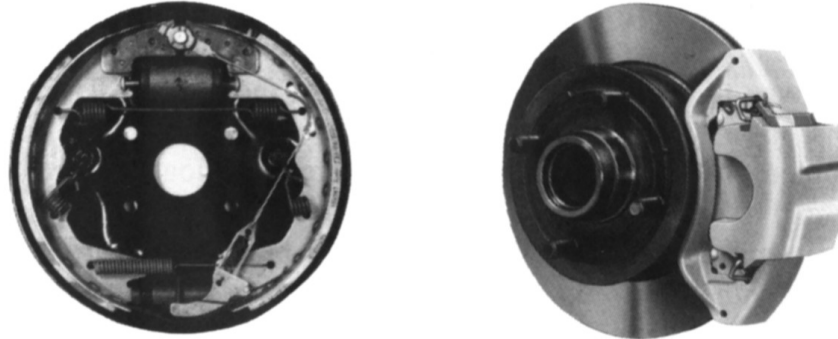


FIGURE 7.3 – Freins à tambour et à disque pour automobiles [5]

7.4 Les Freins

7.4.1 Les types de freins

On distingue deux grands types de freins.

- Les freins à tambour. Ils étaient initialement d'usage courant à cause de leur haut facteur de freinage et de la facilité d'incorporer un dispositif de frein de parking.
- Les freins à disque. Ils ont un facteur de freinage plus faible et demandent une force d'actionnement plus importante. Ils requièrent également des développements supplémentaires pour introduire des freins de parking.

7.4.2 Les freins à tambour

Le *facteur de freinage* est le facteur d'amplification entre la force de commande (entrée) et la force de freinage (sortie) dans un mécanisme de frein. On établit son expression assez facilement dans un frein à tambour à partir de l'équation d'équilibre.

En regardant la Figure 7.4, l'équilibre des moments autour du pivot du sabot de frein donne :

$$\sum M_A = e P_a + n \mu N_A - m N_A = 0 \quad (7.24)$$

En tenant compte des équations constitutives reliant les forces de friction et les forces normales dans le sabot

$$F_A = \mu N_A \quad \text{et} \quad F_B = \mu N_B \quad (7.25)$$

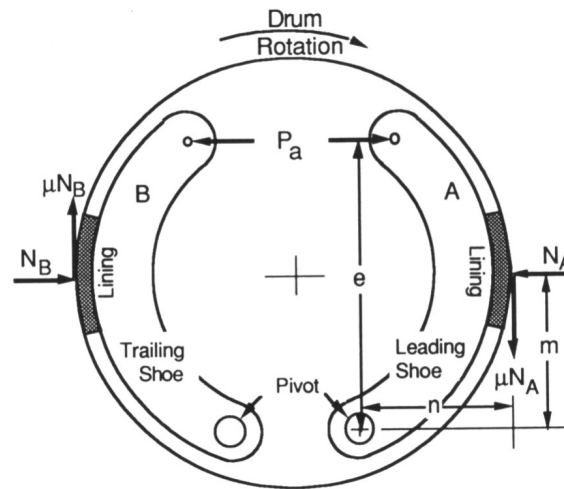


FIGURE 7.4 – Schéma d'un frein à tambour [5]

on trouve

$$\frac{F_A}{P_a} = \frac{\mu e}{(m - \mu n)} \quad \text{et} \quad \frac{F_B}{P_a} = \frac{\mu e}{(m + \mu n)} \quad (7.26)$$

L'étrier A est le patin de tête. Dans ce patin, la force de friction produit un moment qui tend à presser le sabot contre le patin de matériau de friction et augmente la friction. Le système est auto serrant, ce qui est donné lieu à un grand facteur d'amplification mécanique (mechanical advantage), mais qui peut aussi conduire au blocage du patin.

L'étrier B est le patin traîneur. La force de friction tend à créer un moment qui diminue la force de contact. Le facteur de freinage est plus faible. Il n'est pas auto serrant. Une force d'actionnement plus grande doit être appliquée.

Une combinaison judicieuse des patins tirés et traînés permet d'atteindre différents facteurs de freinage effectifs pour le système.

7.4.3 Les freins à disque

Dans les freins hydrauliques, le couple de freinage aux roues dépend de la pression appliquée p_b . On peut trouver la relation donnant le facteur de gain entre la pression dans le piston de frein et le couple de freinage obtenu en établissant l'équilibre de la roue. En examinant la situation de la Figure 7.5, on obtient :

$$T_b = F_b R_e = R_b \mu_b A_b p_b \quad (7.27)$$

$$= R_e k_b p_b \quad (7.28)$$

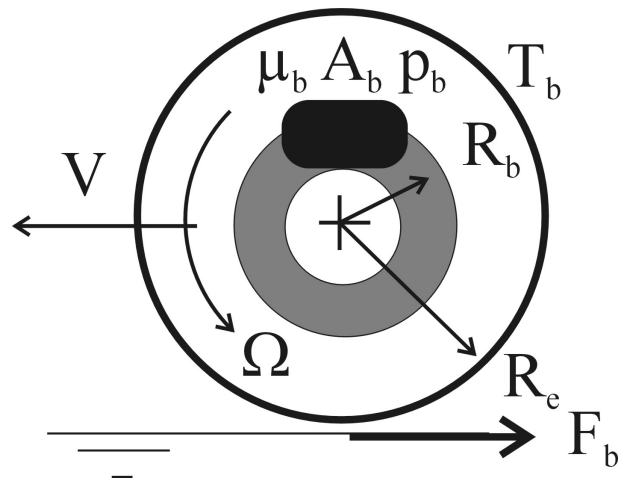


FIGURE 7.5 – Frein à disque

avec

$$k_b = \mu_b A_b R_b / R_e \quad (7.29)$$

On en conclut que le facteur d'amplification du système hydraulique est plus faible que celui du frein à tambour. Le développement des freins à disque est lié à l'essor de système hydraulique capable de fournir la force suffisante à l'actionnement des étriers.

7.4.4 Evolution de la force de freinage au cours du temps

La Figure 7.6 présente l'évolution de la force de freinage au cours du temps pour un système de freins à tambour et un système de freins à disques. La Figure 7.6 montre clairement une tendance des freins à tambour à développer une force variable dans le temps. Au début du freinage, la force grandit rapidement, puis la courbe s'adoucit à cause de la montée en température des patins. Avec l'élévation de la température, le coefficient de friction des patins diminue et la force de freinage décroît. Après un moment, la vitesse relative entre le patin et le tambour se réduit avec la mise à l'arrêt du véhicule. Le coefficient de friction étant sensible à la vitesse relative, le coefficient de friction se redresse et la force de freinage augmente à nouveau.

L'évolution temporelle de la force de freinage d'un système de frein à disque est reprise à la partie droite de la figure 7.6. Elle est moins affectée par les phénomènes expliqués précédemment pour le freins à tambour. Comme on le constate, la force de freinage développée reste quasi constante au cours du

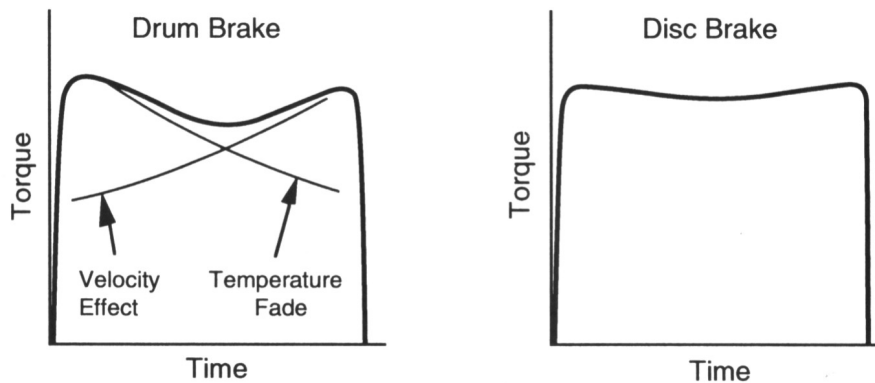


FIGURE 7.6 – Comparaison des forces de freinage des freins à disques et à tambour [5]

temps. La stabilité du freinage est donc supérieure avec ce type de système.

7.4.5 Comparaison des freins à disque et des freins à tambour

Les freins à tambour présentent un haut facteur de freinage de sorte qu'ils requièrent des efforts d'actuation inférieurs. En contre partie, les freins à tambour possèdent également l'inconvénient du haut facteur de freinage. Le système est sensible au coefficient de friction du matériau du patin. Un trop grand facteur de friction peut conduire à des comportements erratiques. Les freins à disque développent par contre des freinages plus constants. Cette évolution du couple de freinage est également plus importante avec le temps compte tenu de la dégradation plus importante de matériau de friction.

En conséquence il est plus difficile de maintenir une balance de freinage avec les freins à tambour. On obtient des meilleures répartitions du freinage avec des freins à disque et, par voie de conséquence, des distances d'arrêt généralement plus courtes.

7.5 Répartition des forces de freinage

7.5.1 Freinage idéal

Dans les conditions de décélération ($a_x < 0$) on sait que l'on assiste à un transfert de charge de l'avant vers l'arrière :

$$W_f = mg \frac{c}{L} \cos \theta - \frac{h}{L} (m a_x + F_{aero} \pm W \sin \theta) \quad (7.30)$$

$$W_r = mg \frac{b}{L} \cos \theta + \frac{h}{L} (m a_x + F_{aero} \pm W \sin \theta) \quad (7.31)$$

avec $W = mg$.

L'équilibre dans la direction horizontale (7.1)

$$m a_x = -F_{bf} - F_{br} - f W - F_{aero} \mp W \sin \theta$$

peut se réécrire

$$F_b + f W \cos \theta = F_{bf} + F_{br} + f W = +m |a_x| - F_{aero} \mp W \sin \theta \quad (7.32)$$

expression dans laquelle $F_b > 0$ pour un freinage et $a_x = -|a_x| < 0$ pour une décélération.

En substituant ce résultat dans les valeurs de poids sous les essieux (on suppose $\theta = 0$ par simplicité), il vient :

$$W_f = mg \frac{c}{L} + \frac{h}{L} (F_b + f W) \quad (7.33)$$

$$W_r = mg \frac{b}{L} - \frac{h}{L} (F_b + f W) \quad (7.34)$$

soit un transfert de charge de valeur

$$\Delta W = \frac{h}{L} (F_b + f W) \quad (7.35)$$

Les forces de freinage maximales transmissibles que le contact sol-roue peut supporter sont déterminées par la force normale et le coefficient de friction.

Supposons que les forces de freinage à l'avant et à l'arrière atteignent simultanément leur limite d'adhésion,

$$F_{bf} = \mu W_f$$

$$F_{br} = \mu W_r$$

$$F_{bf} + F_{br} = F_b = \mu W$$

on obtient le freinage maximal (cette situation est envisageable avec les dispositifs modernes tels que les ABS) et il vient

$$F_{bf}^{max} = \mu W_f = \frac{\mu W (c + h(\mu + f))}{L} \quad (7.36)$$

$$F_{br}^{max} = \mu W_r = \frac{\mu W (b - h(\mu + f))}{L} \quad (7.37)$$

Plus aucun accroissement de la force de freinage ne peut survenir sans causer le blocage des roues.

La répartition des forces de freinage entre les roues avant et arrière dépend à ce moment de la conception du système de freinage, en particulier de la section des différents pistons de frein pour les roues avant et arrière. Supposons que le coefficient de friction est identique sous les essieux avant et arrière, les forces de freinage à appliquer sur les différents essieux sont dans le même rapport que les forces de poids sous les essieux correspondants :

$$\frac{k_{bf}}{k_{br}} = \frac{F_{bf}^{max}}{F_{br}^{max}} = \frac{c + h(\mu + f)}{b - h(\mu + f)} \quad (7.38)$$

On constate que ce ratio entre l'avant et l'arrière dépend fortement :

- De la position du centre de masse (hauteur h et position horizontale b et c)
- Du coefficient d'adhérence sol route μ .

Comme ceux ci sont variables ou inconnus, il est donc impossible, sauf coup de chance, de réaliser les conditions de freinage idéales. C'est pourquoi il est essentiel d'étudier maintenant les conditions de freinage non idéale.

Exemple

Soit un camion léger. Il présente 68 % du poids statique sur l'essieu arrière, soit $c/L = 0,32$, $b/L = 0,68$. On donne encore la hauteur du centre de gravité $h/L = 0,18$, la coefficient d'adhérence $\mu = 0,85$ et le coefficient de résistance au roulement $f = 0,01$. La force de freinage maximale s'exerce si et seulement si la distribution de la force de freinage entre les roues avant et arrière est dans les proportions :

$$\frac{k_{bf}}{k_{br}} = \frac{0.32 + 0.18 (0.85 + 0.01)}{0.68 - 0.18 (0.85 + 0.01)} = \frac{47}{53}$$

7.5.2 La caractéristique du véhicule

Déterminons à présent la *caractéristique du véhicule*. La caractéristique du véhicule est la courbe donnant la relation entre la force de freinage maximale sur les trains avant et arrière.

Reprenons les équations (7.36) et (7.37) donnant respectivement les forces de freinage maximales sur le train avant et le train arrière et, sans perte de généralité, négligeons les forces de résistance au roulement.

$$F_{bf} = \mu mg \left(\frac{c}{L} + \frac{h}{L} \mu \right) \quad (7.39)$$

$$F_{br} = \mu mg \left(\frac{b}{L} - \frac{h}{L} \mu \right) \quad (7.40)$$

Éliminons le coefficient de friction μ entre ces deux équations. Pour cela, on somme les deux équations, il vient :

$$F_{bf} + F_{br} = \mu mg$$

soit

$$\mu = \frac{F_{bf} + F_{br}}{mg} \quad (7.41)$$

En introduisant la relation (7.41) dans (7.39), il vient :

$$F_{bf} = \left(\frac{F_{bf} + F_{br}}{mg} \right) mg \frac{c}{L} + \left(\frac{F_{bf} + F_{br}}{mg} \right)^2 mg \frac{h}{L}$$

En réorganisant les termes, il vient :

$$\frac{h}{L} (F_{bf} + F_{br})^2 - mg \left(F_{bf} \frac{b}{L} - F_{br} \frac{c}{L} \right) = 0 \quad (7.42)$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole d'axes principaux parallèles aux bissectrices des 2ème et 4ème quadrants.

On cherche les intersections de la parabole avec les axes :

— Si $F_{br} = 0$, on a :

$$\frac{h}{L} F_{bf}^2 - mg F_{bf} \frac{b}{L} = 0$$

dont les deux solutions sont $F_{bf} = 0$ et $F_{bf} = mg b/h$ ce qui correspond au point A du graphique 7.7.

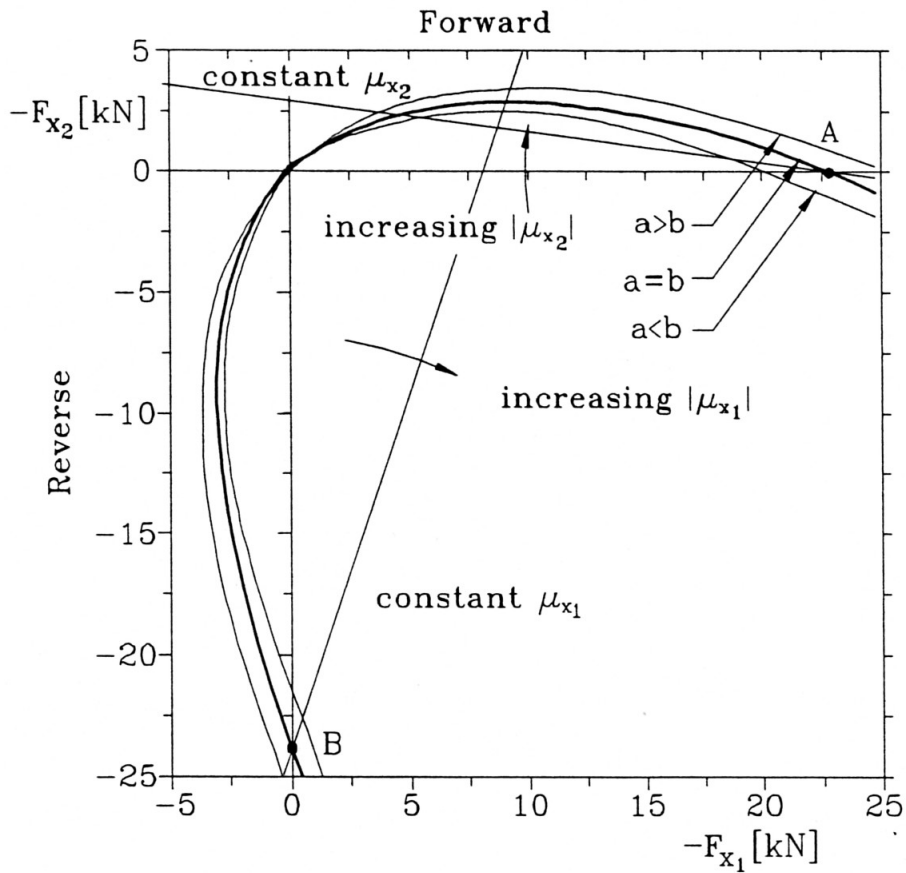


FIGURE 7.7 – Freinage dans des conditions idéales : relations entre les forces de freinage sur les roues avant et arrières. Variation avec la position du centre de gravité : au centre ($a = b$), en avant ($a < b$) et en arrière ($a > b$). Graphique obtenu avec les données suivantes : $m = 1000$ kg, $L = 2,4$ m, $h = 0,5$ m. Extrait de [4]

— Par contre si $F_{bf} = 0$, on a :

$$\frac{h}{L} F_{br}^2 + mg F_{br} \frac{c}{L} = 0$$

qui a comme solutions $F_{br} = 0$ et $F_{br} = -mg \frac{c}{h}$, ce qui correspond au point B du graphique 7.7.

On peut également calculer la force de freinage maximale sur l'essieu avant en fonction de la force de freinage sur l'essieu arrière et vice versa. En utilisant (7.33) et en négligeant la résistance au roulement, on obtient le poids sur l'essieu avant pour une force de freinage donnée sur l'arrière \bar{F}_{br} :

$$W_f = mg \frac{c}{L} + \frac{h}{L} (F_{bf} + \bar{F}_{br}) \quad (7.43)$$

Soit la force de freinage maximale sur l'essieu avant :

$$F_{bf}^{max} = \mu W_f = \mu \left(mg \frac{c}{L} + \frac{h}{L} (F_{bf}^{max} + \tilde{F}_{br}) \right)$$

$$\left(1 - \mu \frac{h}{L} \right) F_{bf}^{max} = \mu \left(mg \frac{c}{L} + \frac{h}{L} \bar{F}_{br} \right)$$

On obtient l'expression de la force de freinage maximale sur l'essieu avant en fonction de la force de freinage sur l'essieu arrière :

$$F_{bf}^{max} = \mu \frac{mg \frac{c}{L} + \frac{h}{L} \bar{F}_{br}}{1 - \mu \frac{h}{L}} \quad (7.44)$$

De même pour la force de freinage sur les arrière en fonction de la force de freinage sur l'essieu avant \bar{F}_{bf} , on trouve successivement :

$$W_r = mg \frac{b}{L} - \frac{h}{L} (\bar{F}_{bf} + F_{br}) \quad (7.45)$$

$$F_{br}^{max} = \mu W_r = \mu \left(mg \frac{b}{L} - \frac{h}{L} (\bar{F}_{bf} + F_{br}^{max}) \right)$$

et finalement, on trouve la valeur de la force de freinage maximale sur l'essieu arrière en fonction de la force de freinage sur l'avant :

$$F_{br}^{max} = \mu \frac{mg \frac{b}{L} - \frac{h}{L} \bar{F}_{bf}}{1 + \mu \frac{h}{L}} \quad (7.46)$$

Sur le graphique 7.7, il s'agit de deux droites passant respectivement par les points A et B. La pente de la droite donnant la force de freinage maximale sur l'essieu avant est :

$$\frac{\mu \frac{h}{L}}{1 - \mu \frac{h}{L}}$$

et de coordonnée à l'origine

$$\frac{\mu mg \frac{c}{L}}{1 - \mu \frac{h}{L}}$$

Pour la droite donnant la force de freinage maximale sur l'essieu arrière, on a une pente

$$-\frac{\mu \frac{h}{L}}{1 + \mu \frac{h}{L}}$$

et de coordonnée à l'origine

$$\frac{\mu mg \frac{b}{L}}{1 + \mu \frac{h}{L}}$$

Ces deux droites se coupent sur la parabole donnant le freinage idéal. L'intersection varie en fonction du coefficient de friction μ comme cela est visible sur l'agrandissement donné à la Figure 7.8. La situation est encore illustrée d'une autre manière à la Figure 7.9. L'intersection des deux droites donne également la rapport de répartition de freinage idéal entre les essieux avant et arrière.

Sur le graphe de la Figure 7.8, on distingue encore les courbes d'iso valeur de la décélération. Elles s'obtiennent simplement en examinant l'équation d'équilibre longitudinal. En négligeant les forces de résistance au roulement, on a :

$$m|a_x| = F_{bf} + F_{br} = \mu(W_r + W_f) = \mu mg$$

dans les conditions idéales. La décélération $|a_x|/g$ est constante pour toute combinaison linéaire de F_{bf} et de F_{br} :

$$F_{bf} + F_{br} = \mu mg = m|a_x|$$

La décélération dépend du coefficient de friction disponible :

$$|a_x|/g = \mu$$

7.5.3 Freinage dans des conditions non-idéales

Perte de contrôle et de stabilité lors du blocage des roues

On ne freine généralement pas dans les conditions idéales évoquées à la section précédente. On peut alors s'interroger sur les conséquences du

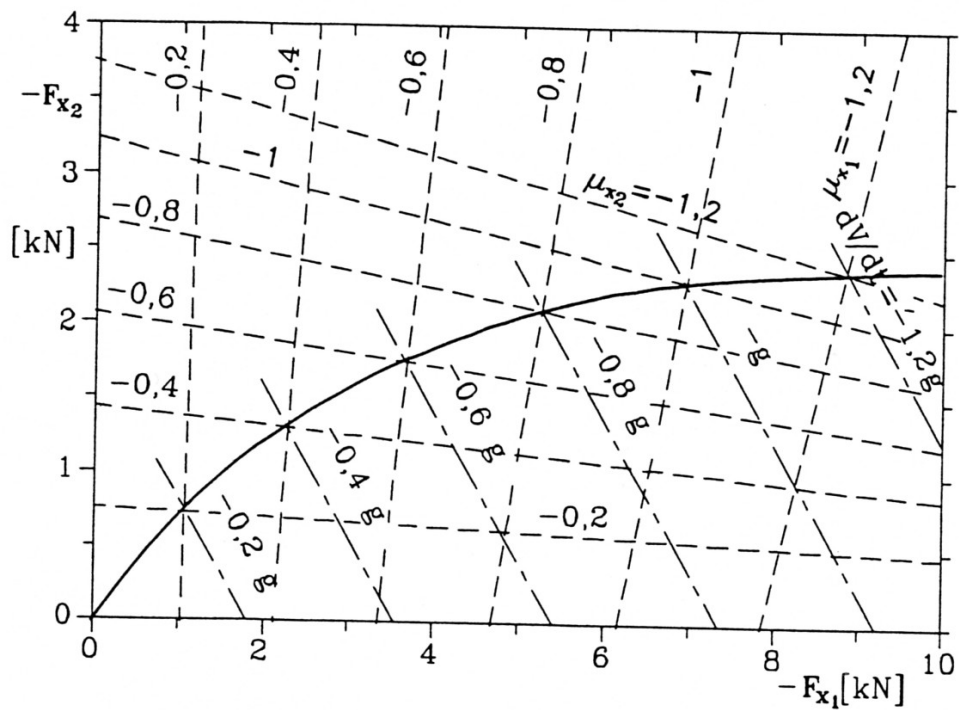


FIGURE 7.8 – Agrandissement de la zone utile du graphique 7.7. La figure montre également les lignes de force de freinage maximale sur les essieux avant et arrière pour différentes valeurs du coefficient de friction. Extrait de [4]

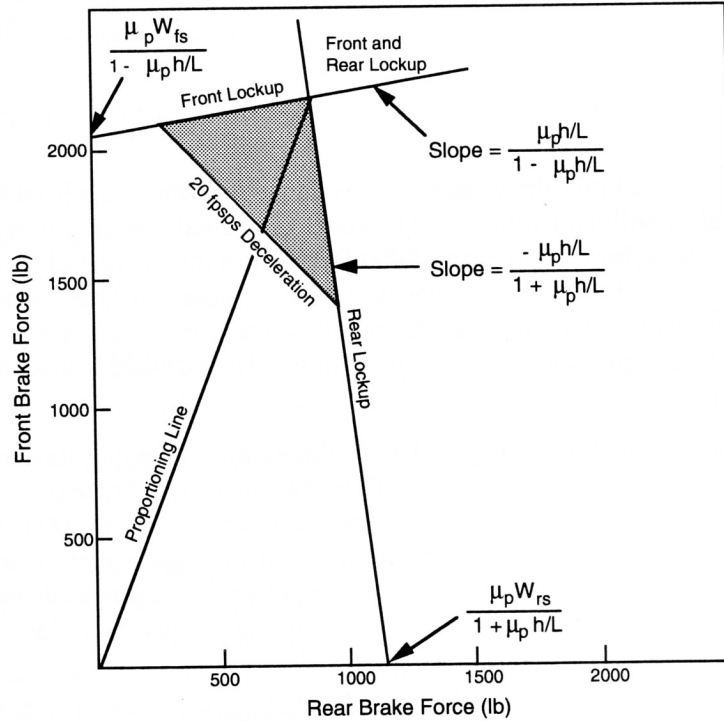


FIGURE 7.9 – Forces de freinage maximales sur les essieux avant et arrière. Extrait de [5]

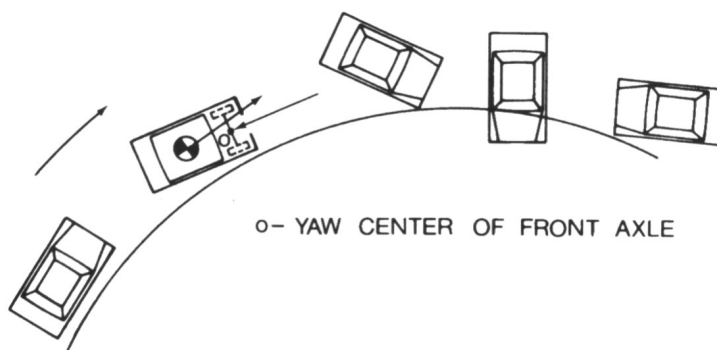


FIGURE 7.10 – Perte de stabilité directionnelle due au blocage des roues arrières [26]

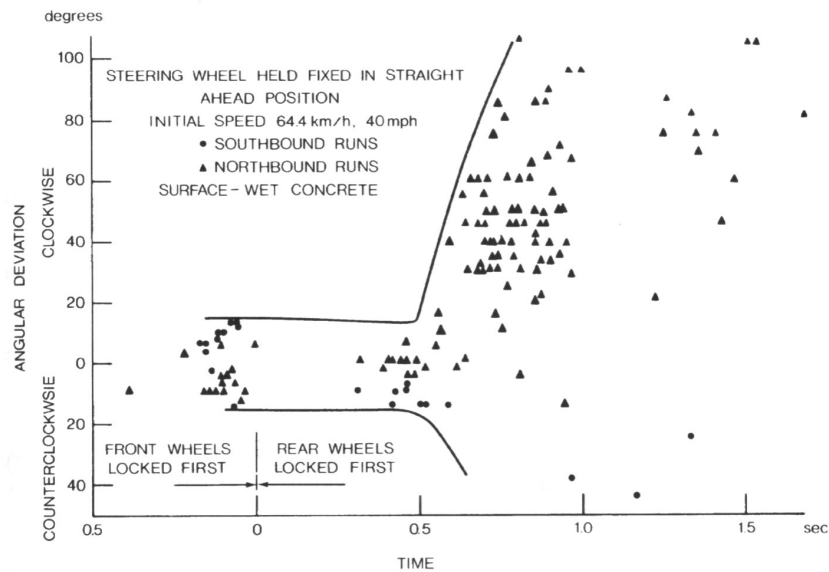


FIGURE 7.11 – Étude sur la déviation angulaire d’une voiture quand les roues avant et arrière ne bloquent pas ensemble [26]

phénomène. La situation observée expérimentalement est évoquée aux Figures 7.10 et 7.11.

Lorsque les roues avant bloquent en premier lieu, on assiste à une *perte de contrôle directionnel*. Le véhicule continue en ligne droite (l’angle de cap du véhicule reste borné comme le montre la Figure 7.11). En retrouvant une trajectoire rectiligne, les forces latérales se réduisent naturellement. Dans cette situation le conducteur peut reprendre le contrôle du véhicule. Le véhicule est considéré comme peu dangereux.

Lorsque les roues arrière bloquent en premier lieu, on observe une *instabilité directionnelle*. L’arrière du véhicule perd sa capacité de résistance aux forces centrifuges. Les perturbations autour du centre de lacet augmentent de manière non contrôlée et grandissent de manière non bornée (voir Figure 7.11). C’est le tête à queue évoqué à la Figure 7.10. Cette situation dangereuse est à éviter à tout prix.

Condition de blocage des roues

Ignorons les forces aérodynamiques et les forces de pente. L’équilibre longitudinal du véhicule donne :

$$F_b + f W = F_{bf} + F_{br} + f W = -m a_x = m |a_x| \quad (7.47)$$

tandis que l'équilibre en rotation et selon la verticale donne le poids sous les essieux :

$$W_f = mg \frac{c}{L} - m a_x \frac{h}{L} = mg \frac{c}{L} + m |a_x| \frac{h}{L} \quad (7.48)$$

$$W_r = mg \frac{b}{L} + m a_x \frac{h}{L} = mg \frac{b}{L} - m |a_x| \frac{h}{L} \quad (7.49)$$

Soient k_{bf} et $k_{br} = 1 - k_{bf}$ respectivement les taux de freinage sur l'avant et sur l'arrière. La force de freinage sur les roues avants est exprimée par :

$$F_{bf} = k_{bf} F_b = k_{bf} W \left(\frac{|a_x|}{g} - f \right) \quad (7.50)$$

tandis que les forces de freinage sur les roues arrières vaut :

$$F_{br} = k_{br} F_b = (1 - k_{bf}) F_b = (1 - k_{bf}) W \left(\frac{|a_x|}{g} - f \right) \quad (7.51)$$

La roue avant est sur le point de bloquer lorsque :

$$F_{bf} = \mu W_f \quad (7.52)$$

Cette condition s'écrit :

$$k_{bf} W \left(\frac{|a_x|}{g} - f \right) = \mu \left(mg \frac{c}{L} - m a_x \frac{h}{L} \right) \quad (7.53)$$

On en déduit que le blocage des roues avants se produit lorsque la décélération $|a_x|$ est supérieure à

$$\left(\frac{|a_x|}{g} \right)_f = \frac{\mu c/L + k_{bf} f}{k_{bf} - \mu h/L} \quad (7.54)$$

Un raisonnement similaire conduit à la condition suivante pour le blocage des roues arrières :

$$\left(\frac{|a_x|}{g} \right)_r = \frac{\mu b/L + (1 - k_{bf}) f}{(1 - k_{bf}) + \mu h/L} \quad (7.55)$$

Pour un véhicule donné et une distribution particulière de la force de freinage k_{bf} sur une surface donnée, le blocage des roues avants survient d'abord si :

$$\left(\frac{|a_x|}{g} \right)_f < \left(\frac{|a_x|}{g} \right)_r \quad (7.56)$$

A contrario si

$$\left(\frac{|a_x|}{g} \right)_r < \left(\frac{|a_x|}{g} \right)_f \quad (7.57)$$

ce sont les roues arrières qui bloquent les premières.

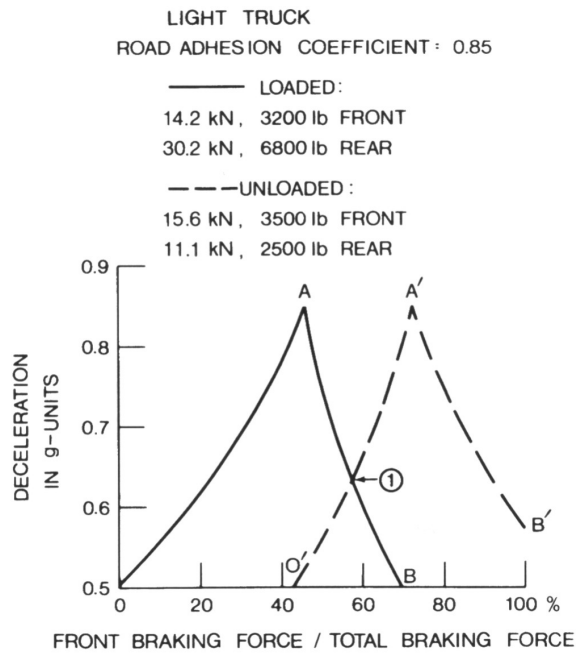


FIGURE 7.12 – Influence de la position du CG d'un camion sur les conditions de freinage [26]

Choix de la répartition de freinage avant - arrière

La Figure 7.12 montre l'influence très forte de la charge et de la position du centre de masse sur la répartition optimale dans le cas d'un véhicule utilitaire. Lorsque le véhicule roule à vide, une distribution des efforts de freinage moins symétrique permet de bloquer les roues avant en premier lieu. Le designer choisira la solution de compromis pour le rapport de freinage avant/arrière désignée par le point 1. Il permet d'assurer simultanément la décélération la plus grande possible dans les deux situations extrêmes.

La même étude est réalisée pour une voiture personnelle à la Figure 7.13. On voit que dans ce véhicule léger l'influence de la charge du véhicule et de la position du centre de masse est moins forte que sur les véhicules utilitaires. A nouveau, on choisira le rapport de freinage avant/arrière proposé par le compromis du point de conception 1.

Limitation de la force de freinage sur l'essieu arrière

Afin de limiter la croissance de la force sur l'essieu arrière, on brise la courbe de croissance de la force de freinage avant/arrière en limitant la crois-

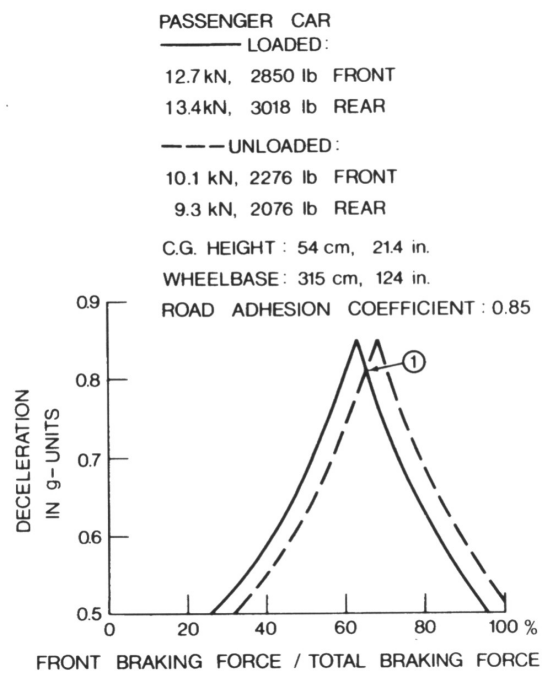


FIGURE 7.13 – Influence de la position du CG sur le freinage d'une automobile [26]

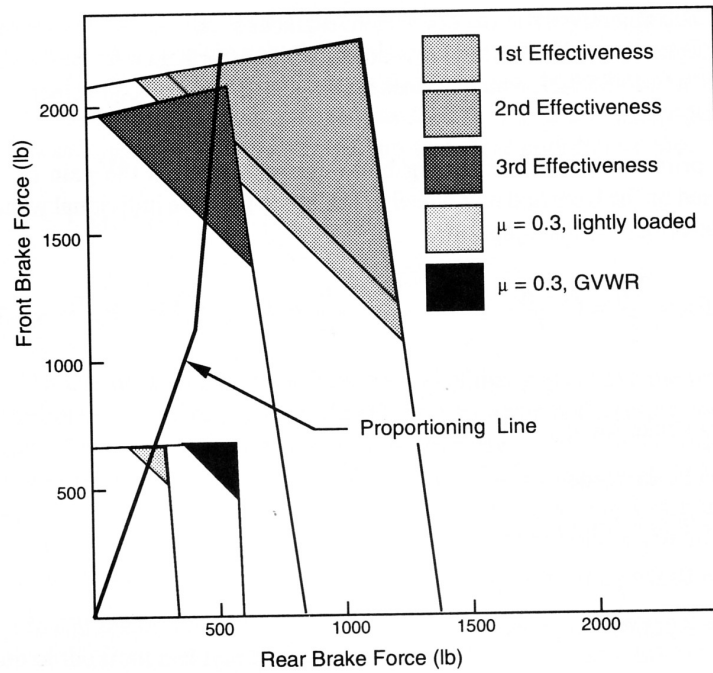


FIGURE 7.14 – Répartition de force de freinage entre avant et arrière pour des conditions variables, d'après [5]

sance de la pression sur l'arrière :

$$\begin{cases} p_r = p_f & \text{if } p_1 < p_i, \\ p_r = p_i + \rho_c(p_1 - p_i) & \text{if } p_1 \geq p_i. \end{cases} \quad (7.58)$$

7.5.4 Efficacité du freinage et distance d'arrêt

Efficacité du freinage

Le meilleur freinage survient lorsque les roues avant et arrière atteignent simultanément la limite du coefficient de friction. Dans ce cas, la décélération du véhicule vaut :

$$ma_x = -(F_{bf} + F_{br}) = -\mu W_f - \mu W_r = -\mu W \quad (7.59)$$

de sorte que la décélération maximale est :

$$a_x^{max} = \mu g \quad (7.60)$$

Cependant nous avons vu que dans un grand nombre de situations, on ne peut atteindre qu'une décélération plus faible que la décélération idéale (7.60), car le blocage d'un essieu limite prématurément la force de freinage.

L'*efficacité du freinage* réalisé effectivement se définit par rapport à la valeur de la décélération idéale (7.60) :

$$\eta_b = \frac{|a_x|/g}{\mu} \quad (7.61)$$

7.6 Distance d'arrêt

Calcul de la distance d'arrêt minimale

La distance d'arrêt s'obtient à partir de l'équation de Newton de l'équilibre longitudinal.

$$\gamma_b m \frac{dv}{dt} = F_b + F_{RES} \quad (7.62)$$

où γ_b est le facteur de masse effective en freinage et F_{RES} regroupe les forces de résistance à l'avancement qui collaborent à l'arrêt du véhicule. Le facteur de masse effective n'est pas nécessairement le même qu'en accélération puisque souvent pour le freinage l'embrayage est désengagé. Pour des voitures et des camions légers, on a souvent γ_b entre 1.03 et 1.05.

Par ailleurs, on a

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (7.63)$$

Il vient donc

$$dx = \frac{\gamma_b m}{F_b + F_{RES}} v dv \quad (7.64)$$

La distance pour passer de V_1 à V_2 est :

$$S_{V_1 \rightarrow V_2} = \int_{V_1}^{V_2} \gamma_b m \frac{v dv}{F_b + F_{RES}} \quad (7.65)$$

En substituant la valeur des forces de résistance au mouvement, il vient :

$$S_{V_1 \rightarrow V_2} = \gamma_b m \int_{V_1}^{V_2} \frac{v dv}{F_b + f W \cos \theta \pm W \sin \theta + F_{aero}} \quad (7.66)$$

Les forces aérodynamiques dépendent de la vitesse v et s'écrivent :

$$R_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_x S v^2 = C_{aero} v^2 \quad (7.67)$$

Il vient alors après intégration :

$$S_{V_1 \rightarrow V_2} = \frac{\gamma_b m}{2 C_{aero}} \ln \left(\frac{F_b + f W \cos \theta \pm W \sin \theta + C_{aero} V_1^2}{F_b + f W \cos \theta \pm W \sin \theta + C_{aero} V_2^2} \right) \quad (7.68)$$

La distance d'arrêt ($V_2 = 0$) s'écrit :

$$S_{Stop} = \frac{\gamma_b m}{2 C_{aero}} \ln \left(1 + \frac{C_{aero} V_1^2}{F_b + f W \cos \theta \pm W \sin \theta} \right) \quad (7.69)$$

Distance d'arrêt minimale

Si l'efficacité du freinage était de 100 %, le frein développerait une force atteignant la limite de friction et annulant l'inertie des pièces mobiles de la ligne de transmission (de sorte que la masse est la simple masse en translation). La distance d'arrêt est alors :

$$S_{Stop}^{min} = \frac{m}{2 C_{aero}} \ln \left(1 + \frac{C_{aero} V_1^2}{\mu W + f W \cos \theta \pm W \sin \theta} \right) \quad (7.70)$$

Lorsque l'efficacité est inférieure à 100 %, la distance d'arrêt est calculée par :

$$S_{Stop} = \frac{m}{2 C_{aero}} \ln \left(1 + \frac{C_{aero} V_1^2}{\eta_b \mu W + f W \cos \theta \pm W \sin \theta} \right) \quad (7.71)$$

Cette distance doit encore être majorée par deux facteurs :

- le temps d'application du système de freinage t_a . Le temps t_a est estimé à environ 0.3 seconde.
- le temps de réaction du conducteur qui est bien plus long que le précédent : t_d est compris entre 0.5 et 2 secondes.

Pendant ce laps de temps le véhicule parcourt la distance :

$$S_a = (t_a + t_d) V_1 \quad (7.72)$$

7.7 Prescriptions légales et réglementations des systèmes de freinage

Les caractéristiques du système de freinage sont une pierre angulaire de la sécurité du véhicule. Dès lors ils font l'objet d'un grand nombre de réglementations. On ne discute ici qu'un nombre limité de points des règlements

7.7. PRESCRIPTIONS LÉGALES ET RÉGLEMENTATIONS DES SYSTÈMES DE FREINAGE 295

l'Union Européenne (Directive Européenne CEE 79/489 du 18 avril 1979 et le règlement E/ECE/324 et E/ECE/TRANS/505 du 24 août 1982.

Les règlements distinguent les freins de services, d'urgence et de parking. The freins de service doivent agir sur l'ensemble des roues avec un distribution adéquate des forces de freinage et avec une symétrie par rapport au plan médian du véhicule. Les deux derniers peuvent n'agir que sur un sous ensemble des essieux.

Le règlement impose une efficacité minimale en fonction de chaque type de véhicule. L'efficacité est mesurée en termes de la distance nécessaire à l'arrêt du véhicule à compter du moment où le conducteur actionne le système de freinage. La distance mesurée en en mètres est donnée par l'expression

$$s \leq a V + \frac{V^2}{b} \quad (7.73)$$

où

- V est la vitesse initiale en km/h,
- s est la distance d'arrêt en m,
- a et b sont des coefficients régis par la législation.

La loi prescrit les valeurs suivantes pour les paramètres a et b en fonction de la nature du véhicule :

- $a = 0,1$ pour les véhicules à moteurs (catégorie M1),
- $a = 0,15$ pour les autres véhicules à moteurs,
- $b = 150$ pour les véhicules de catégorie M1,
- $b = 130$ pour les autres véhicules transportant des passagers (catégories M2 et M3),
- $b = 115$ pour les véhicules transportants des marchandises (catégories N1, N2, N3).

Les valeurs des décélération obtenues avec les paramètres prescrits pour a et b valent $5,8 \text{ m/s}^2$, $5,0 \text{ m/s}^2$ et $4,4 \text{ m/s}^2$ respectivement.

Pour chaque test, les valeurs de la vitesse initiale et la force sur la pédale de freinage sont prescrites. Les tests oivent être réalisés sur route sèches dans de bonnes conditions pour obtenir les valeurs des distances de freinage recommandées. Les résultats du test permettent de calculer l'efficacité du freinage η_b . Par exemple si le coefficient d'adhérence est bon $\mu = 0,8$, les valeurs des décélération trouvées conduisent à des valeurs de l'efficacité du freinage de 0,74, 0,64, et 0,56 % respectivement.

Troisième partie

**COMPORTEMENT
DYNAMIQUE ET STABILITÉ
LATÉRALE DU VÉHICULE**

Chapitre 8

COMPORTEMENT STATIONNAIRE EN VIRAGE

8.1 Introduction

Par le passé, les notions de sous-virage et de sur-virage ont dominé les considérations de stabilité et de contrôle directionnel des automobiles. C'est en effet un facteur très important pour caractériser le comportement dynamique du véhicule, mais une vision plus complète et moderne doit en considérer bien d'autres. Ainsi de manière plus générale, la tenue de route (le « handling » en anglais) réfère communément à la stabilité directionnelle et au contrôle du véhicule.

Dans les cercles techniques, la notion de stabilité directionnelle recouvre le comportement du système incluant le chauffeur et son véhicule lors des tâches de manoeuvres. C'est le système complet constitué du conducteur et du véhicule qui est illustré à la Figure 8.1 et qu'il faudrait considérer pour étudier de manière réaliste le phénomène. Le conducteur y fournit l'intelligence tandis que le véhicule est le système capable de réagir aux commandes du conducteurs et développer des forces de manoeuvre. Représenter ou modéliser le comportement du conducteur n'est pas toujours chose facile, car il n'est pas sous contrôle direct. Dès lors par facilité ou par ignorance, on se focalise généralement sur le contrôle et la stabilité du comportement du véhicule considéré isolément c'est-à-dire sur l'analyse du système en boucle ouverte.

Les variables d'entrée du système véhicule sont le braquage des roues, la pression sur la pédale d'accélérateur et la pédale de frein.

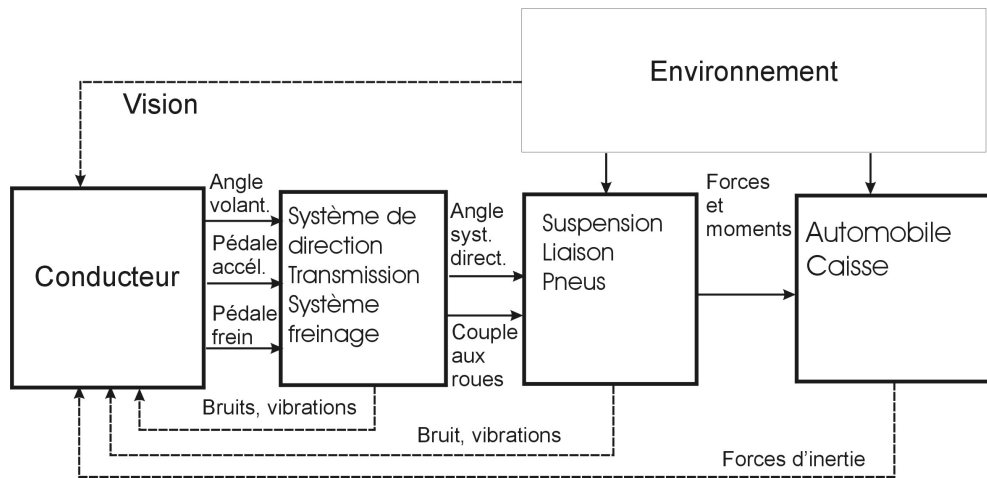


FIGURE 8.1 – Système à retour formé du conducteur et du véhicule

8.2 Modèle bicyclette

L'analyse de la dynamique du véhicule complet exige des efforts de calcul important. Cette approche s'avère assez laborieuse pour comprendre les facteurs importants du comportement en virage. Néanmoins, des résultats d'une grande utilité peuvent être obtenus avec un modèle analytique simple. Dans cette perspective, il est possible de modéliser de manière suffisamment réaliste le véhicule sous la forme d'un modèle simplifié où l'on concentre l'effet de tout l'essieu sur une seule roue, de sorte que le modèle ressemble formellement à celui d'une bicyclette (d'où la dénomination habituelle de *modèle bicyclette*). Ce modèle simplifié est d'un grand intérêt en pratique, car il permet de rendre compte de nombreuses propriétés du comportement et de la stabilité avec une fiabilité satisfaisante.

Le modèle bicyclette repose sur les hypothèses suivantes :

- On suppose qu'il n'y a pas de transfert de charge latéral, de sorte que le comportement gauche et droit du véhicule est identique et le véhicule peut être réduit à une seule trace ;
- Il n'y a pas de transfert de charge longitudinal ;
- On omet le mouvement de roulis ou de tangage ;
- Les pneus restent en régime linéaire ;
- La vitesse d'avance V est maintenue constante ;
- Les effets aérodynamiques sont négligés ;

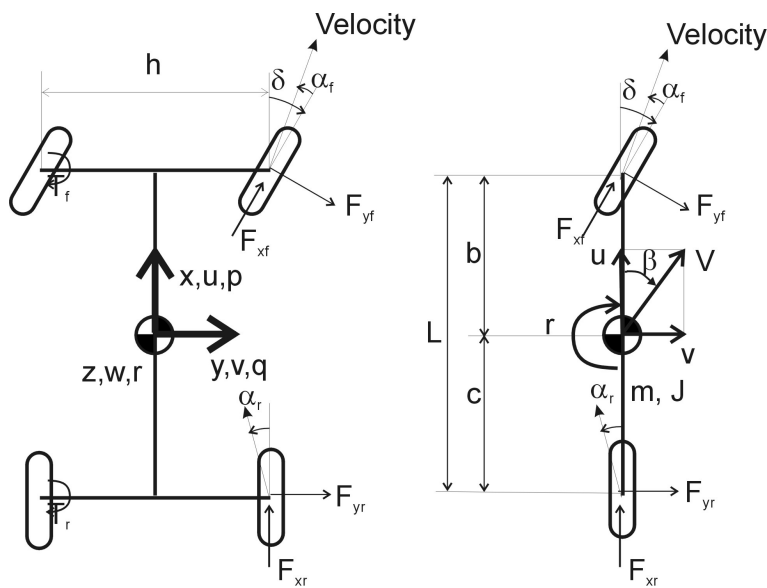


FIGURE 8.2 – Le modèle bicyclette du véhicule

- On exerce un contrôle en position, ignorant les efforts à développer pour maintenir la consigne ;
- On ignore l'effet de souplesse de la suspension et du châssis ;
- On suppose que l'on a des petits angles de dérive et de braquage ($\cos(\alpha) \simeq 1$ et $\sin(\alpha) \simeq \alpha$).

Cette modélisation appelle quelques remarques sur les implications des hypothèses :

- Suivant l'expérience [24], le régime linéaire des pneumatiques peut être admis pour des accélérations inférieures à 0.4 g ;
- On travaille avec des petits angles de braquage, de dérive, etc. On considère que l'on peut imposer des petites perturbations autour d'un mouvement à vitesse constante ;
- Le sol est supposé lisse de sorte qu'il n'y a pas de débattement de suspension. Il n'y a donc pas de modification de voie, de géométrie des roues etc.
- On assure un contrôle en position : le mouvement du véhicule est contraint par les entrées du système (ex. direction) sous forme de déplacements imposés, indépendamment des forces à mettre en oeuvre ;
- Le braquage de la direction est généralement la seule variable d'entrée

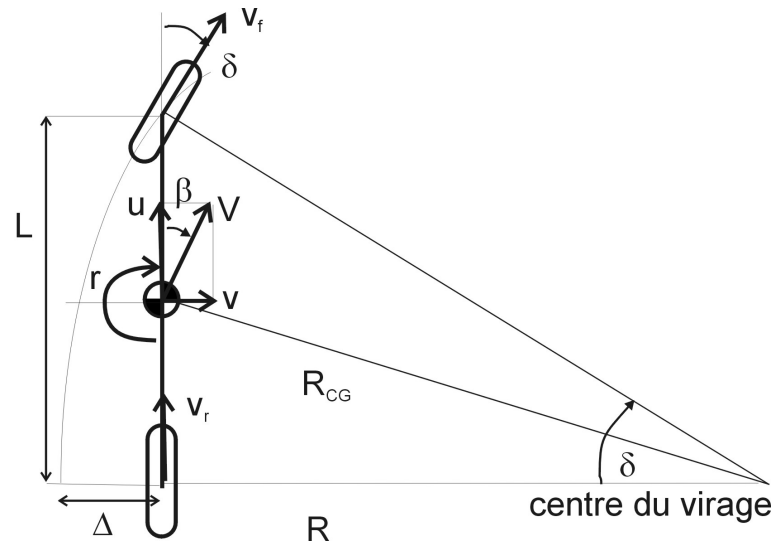


FIGURE 8.3 – Théorie d’Ackerman et le modèle bicyclette du véhicule

retenue. Dans une première approche, les autres variables (actions sur la pédale de frein et la pédale d’accélérateur) sont ignorées ;

Le modèle bicyclette qui en résulte est un *modèle à 2 degrés de liberté* : r , vitesse de lacet et la vitesse latérale v ou de manière équivalente, l’angle de dérive du véhicule β .

8.3 Virage à faible vitesse

A faible vitesse, lors des manoeuvres de parking par exemple, les forces centrifuges sont négligeables et les pneus ne doivent pas développer des forces latérales significatives. On peut donc les négliger. On va donc admettre qu’il y a roulement *sans glissement* et *sans dérive* des pneumatiques.

8.3.1 Théorie d’Ackerman

La théorie développée initialement par Ackerman sur les conditions cinématiques du braquage se fonde sur le modèle simplifié dit du modèle bicyclette rappelé à la figure 8.3. De par sa nature, ce modèle considère que le comportement des roues droite et gauche est identique. En particulier les angles de braquage des roues intérieures et extérieures sont identiques. Ce modèle d’Ackerman est intrinsèquement incapable de prendre en compte le fait que l’on observe pour des virage serrés, un ripage des roues directrices.

Le phénomène est lié au fait que dans ce cas la roue intérieure doit avoir un comportement différent des roues extérieures. C'est pourquoi la théorie d'Ackerman a été améliorées par Jeantaud.

Soit L l'empattement du véhicule et R le rayon de courbure du virage mesuré au niveau du train arrière. Pour que les pneus ne glissent pas latéralement et ne produisent pas de rippage, il faut que les centres instantanés de rotation (CIR) de chaque pneu coïncident avec le centre du virage. En raisonnant sur le modèle bicyclette (Figure 8.3), on considère le triangle rectangle formé par les deux roues et le centre du virage. On peut voir que l'angle de braquage δ du train directeur est donné par :

$$\boxed{\tan \delta = \frac{L}{R}} \quad (8.1)$$

C'est l'angle de braquage d'Ackerman.

On détermine ensuite le rayon de courbure de la trajectoire du centre de masse R_{CG} :

$$R_{CG} = \sqrt{c^2 + R^2} = \sqrt{c^2 + L^2 \cot^2 \delta} \quad (8.2)$$

où δ est l'angle de braquage équivalent du modèle bicyclette et c la distance entre le centre de gravité et l'essieu arrière. Dans le cas de grand rayon de braquage vis-à-vis de l'empattement du véhicule,

$$c \ll R \quad \text{et} \quad L \ll R$$

ce rayon est très proche du rayon de l'essieu arrière

$$R_{CG} = R\sqrt{1 + c^2/R^2} \simeq R(1 + c^2/(2R^2)) \approx R$$

Soit

$$R_{CG} \approx R \approx L \cot \delta \approx \frac{L}{\delta} \quad (8.3)$$

On peut encore déterminer *le gain statique*, ratio entre la commande de braquage et la courbure de la trajectoire :

$$\boxed{\frac{1/R}{\delta} = \frac{1}{L}} \quad (8.4)$$

Il est également intéressant de calculer *la dérive du centre de gravité* β , angle entre le vecteur vitesse tangent à la trajectoire et le plan moyen du véhicule :

$$\begin{aligned} \beta &= \arctan\left(\frac{c}{R}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{c}{R_{CG}}\right) = \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

En linéarisant, on obtient le gain d'angle de dérive :

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{c}{L} \quad (8.6)$$

Enfin il est également utile de remarquer qu'il existe un décalage entre la trajectoire de la roue avant et de la roue arrière. Le rayon au niveau de l'essieu avant vaut

$$R_f = \sqrt{R^2 + L^2}$$

Ce décalage est donné par :

$$\Delta = R_f - R = R(\sqrt{1 + L^2/R^2} - 1) \quad (8.7)$$

En développant en série

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 + \dots$$

il vient :

$$\Delta = \frac{L^2}{2R} \quad (8.8)$$

Ce décalage entre les trajectoires des roues avant et arrière peut être important pour les longs véhicules tels que les camions ou les bus.

8.3.2 Théorie de Jeantaud

La théorie d'Ackerman prédit un angle de braquage identique aux deux roues avant. Néanmoins l'expérience montre toutefois que des engins dont la direction est réalisée selon un tel principe connaît des mouvements de saccade et des ripages des roues. Jeantaud a alors montré que la condition d'Ackerman n'est pas correcte. Une étude plus approfondie de la cinématique du véhicule à quatre roues montre que pour avoir un mouvement cinématiquement compatible, les angles de braquage des roues intérieurs et extérieurs au virage doivent être différents.

La condition cinématique pour que les pneus ne glissent pas latéralement est les centres instantanés de rotation (CIR) de chaque pneu coïncident avec le centre du virage. L'expression graphique de cette condition est appelée *épure de Jeantaud*. Elle est illustrée à la Figure 8.4.

Soit l'empattement du véhicule L , la voie t et R le rayon de courbure du virage mesuré au niveau du train arrière. A l'aide de la figure 8.4, on obtient les relations suivantes pour les angles de braquage intérieurs δ_i et extérieurs δ_e :

$$\tan \delta_i = L/(R - t/2) \quad (8.9)$$

$$\tan \delta_e = L/(R + t/2) \quad (8.10)$$

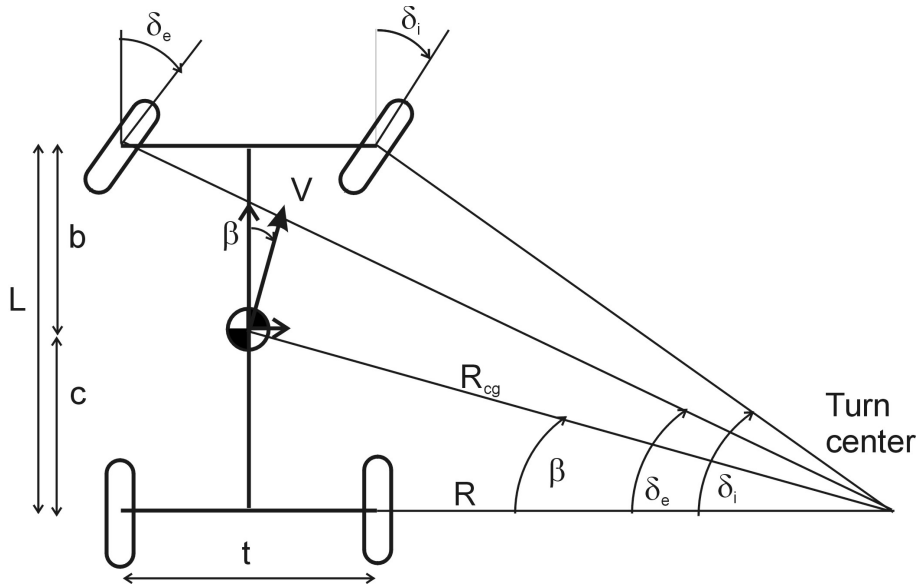


FIGURE 8.4 – Épure de Jeantaud exprimant la condition de coïncidence des CIR pour un virage à basse vitesse

En éliminant le rayon de courbure R , on obtient la relation de compatibilité entre les angles de braquage des roues intérieures et extérieures à faible vitesse. Cette condition est connue sous le nom de *condition de Jeantaud*.

$$\boxed{\cot \delta_e - \cot \delta_i = \frac{t}{L}} \quad (8.11)$$

Cette condition signifie que l'angle de braquage de la roue intérieure δ_i doit être supérieur à l'angle de braquage de la roue extérieure δ_e . Cette différence varie en fonction de largeur de voie et du rayon de courbure du virage.

La relation entre l'angle de braquage d'Ackerman δ et les angles des roues δ_e et δ_i prédits par la condition de Jeantaud sont exprimées en somme l'inverse des relations (8.9) et (8.10) :

$$\cot(\delta) = \frac{R}{L} = \frac{\cot \delta_e + \cot \delta_i}{2} \quad (8.12)$$

Cette valeur de l'angle d'Ackerman $\delta = L/R$ donne en pratique des résultats très proches de la moyenne arithmétique des deux angles δ_i et δ_e . Par exemple, pour une véhicule d'empattement $L = 2500$ mm, de voie $t = 1300$ mm et dont le centre de gravité se trouve à mi-empattement $b = c = L/2$, on trouve pour un rayon de courbure $R = 10$ m : $\delta_i = 15.090^\circ$, $\delta_e = 13.305^\circ$, et $\delta = 14.142^\circ$.

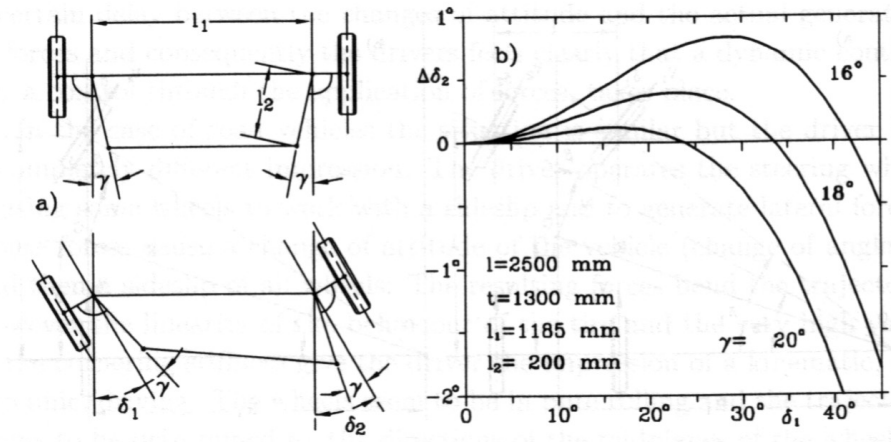


FIGURE 8.5 – Approximation de la condition de Jeantaud par un mécanisme quatre barres [4]

$$\delta_2 = \delta_e \text{ et } \delta_1 = \delta_i.$$

Une moyenne arithmétique des valeurs des angles intérieurs δ_i et extérieurs δ_e auraient donné : $(\delta_e + \delta_i)/2 = 14.197^\circ$ dont l'erreur n'est que de 0.36%.

La condition de Jeantaud n'est pas complètement vérifiée par les dispositifs utilisés en pratique, par exemple le mécanisme de direction dit du quatre barres. On peut montrer qu'un mécanisme qui satisfaisait parfaitement la condition de Jeantaud est le mécanisme de Davis, mais celui-ci n'est pas utilisé en pratique parce qu'il est trop complexe et trop fragile à cause de la présence de joints prismatiques. Aussi pour un mécanisme quatre barres comme celui de la Figure 8.5, on ne réalise qu'imparfaitement la condition (8.11), c'est-à-dire que la condition de Jeantaud n'est satisfaite que pour un angle de braquage nul et pour un autre angle. En dehors de ces deux angles, on a une erreur par rapport à la condition de compatibilité de sorte que les roues ripent sur sol.

Pour le mécanisme quatre barres, on peut montrer (voir la référence [4]) qu'on a la relation suivante entre les angles de braquage des roues intérieures et extérieures :

$$\sin(\gamma - \delta_e) + \sin(\gamma + \delta_i) = \sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2} - 2 \sin \gamma\right)^2 - (\cos(\gamma - \delta_e) - \cos(\gamma + \delta_i))^2} \quad (8.13)$$

Cette relation permet de calculer la valeur de δ_e^c en fonction de la valeur de δ_i . On calcule ensuite l'erreur de braquage $\Delta\delta_e = \delta_e - \delta_e^c$ entre la valeur calculée

par la relation (8.13) et la valeur réelle requise par la condition de Jeantaud (8.12). L'erreur sur la condition de Jeantaud est tracée à la Figure 8.5. On voit qu'elle est nulle pour un angle de braquage nul et pour un certain angle de braquage fonction de γ . Plus l'angle γ est grand, plus cette erreur est petite pour des petits angles de braquage. Toutefois au-delà de cet angle l'erreur grandit fortement. Au vu du graphique 8.5, une valeur de 18° est un bon point de départ pour la conception du mécanisme de direction.

Beaucoup d'efforts ont été consentis en vue de concevoir des mécanismes qui minimisent cette erreur. Cependant l'intérêt pour cette question est actuellement un peu atténué si on considère la réponse directionnelle du véhicule. En effet :

1. les angles de dérive sont quasi toujours présents ;
2. la plupart des mécanismes de suspension autorisent un certain mouvement de roulis de direction ;
3. dans la plupart, des cas les roues ne sont pas parallèles mais ont un certain pinçage ;
4. les déformations élastocinématiques de la suspension conduisent à des petites angles de braquage qui tendent à réduire les erreurs d'alignement sous l'action des forces latérales.

Toutefois le défaut d'alignement des pneumatiques en virage a un effet marqué sur l'usure des pneumatiques et sur les couples de rappel de la direction, ce qui affecte la sensation du conducteur dans la direction. Il convient donc de veiller à ce que le mécanisme de direction garantisse un couple de rappel qui augmente avec l'angle de braquage, caractéristique qui est toujours vérifiée avec la géométrie de Jeantaud.

Épure de Jeantaud

Terminons enfin cette discussion en examinant la Figure 8.6 pour déterminer la condition de Jeantaud de manière graphique. On remarque que la procédure esquissée à la Figure 8.4 est inutilisable en pratique, car elle conduit rapidement à sortir du plan de l'épure ! Une procédure plus correcte consiste à remarquer que lorsque la condition de Jeantaud est satisfaite le point Q appartient à la droite MF. On peut alors tracer graphiquement l'erreur de la direction pour différents angles de braquage comme illustré à la Figure 8.7.

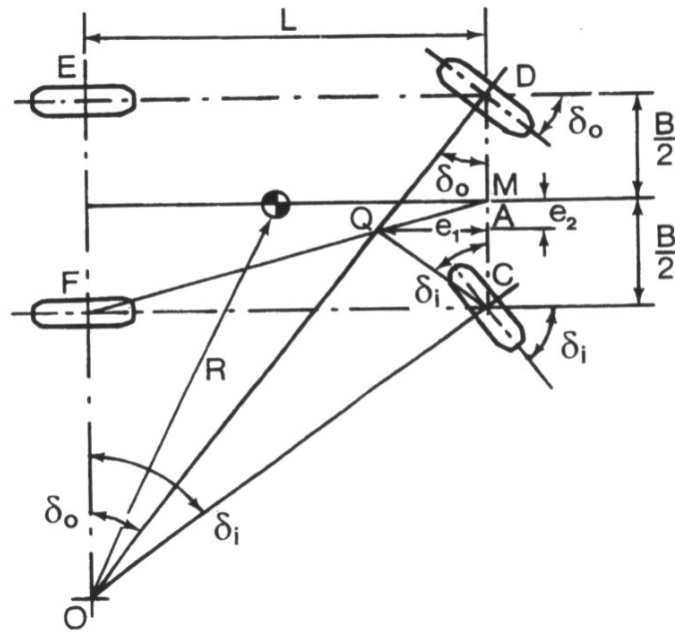


FIGURE 8.6 – Épure de Jeantaud [26]

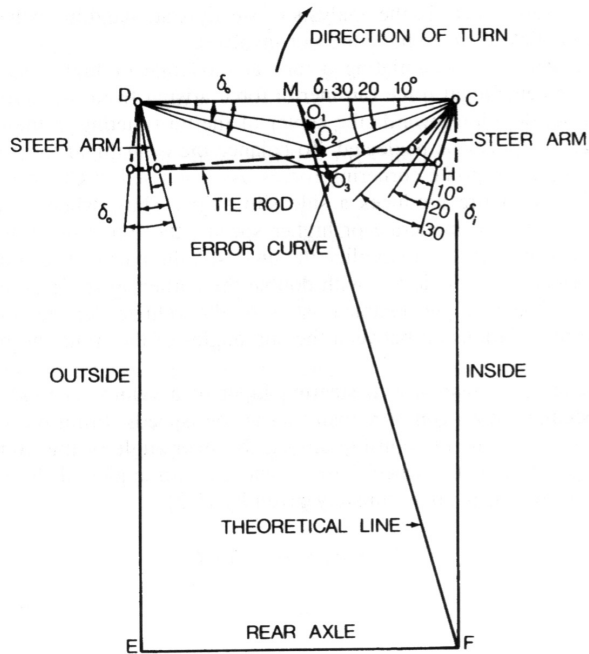


FIGURE 8.7 – Erreur de direction de Jeantaud [26]

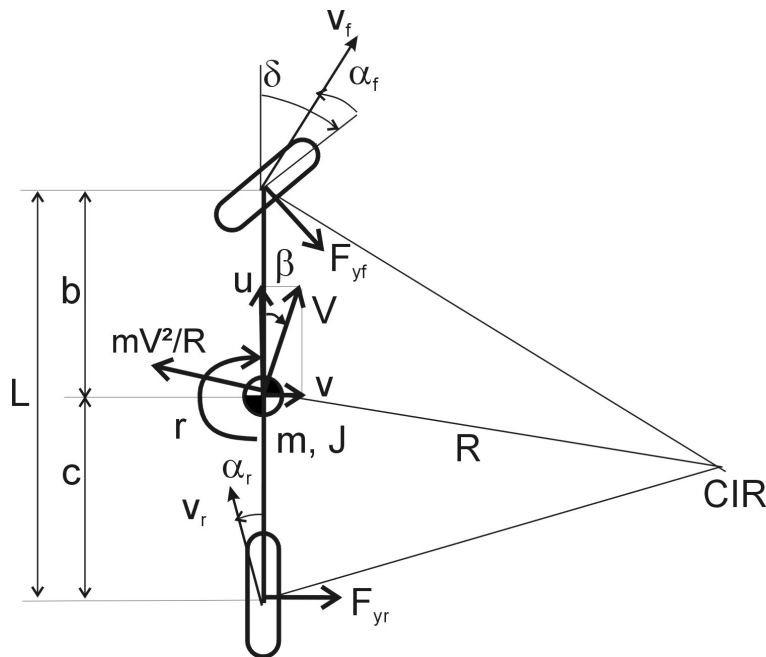


FIGURE 8.8 – Véhicule prenant un virage à vitesse élevée. Modèle bicyclette

8.4 Virage à vitesse élevée

Dans le cas d'un virage pris à vitesse élevée les forces centrifuges ne sont plus négligeables. Elles doivent être reprises par les pneumatiques qui sont donc soumis à une certaine dérive. Le centre du virage se déplace. La situation est esquissée à la Figure 8.8. Puisque le véhicule "glisse" sur sa trajectoire, le comportement n'est plus exclusivement déterminé par des considérations purement cinématiques. On doit dès lors examiner les trois aspects suivants :

- Les équations de comportement des pneumatiques ;
- Les équations d'équilibre latéral ;
- Les équations de compatibilité des vitesses sous les pneumatiques.

La Figure 8.8 permet également d'observer deux phénomènes importants pour le virage à vitesse non négligeable :

- Le centre de instantané de rotation (CIR) *avance* par rapport au véhicule.
- Le rayon effectif de virage *augmente* ou *diminue* selon les valeurs relatives des angles de dérives des trains avant et arrière α_f et α_r .

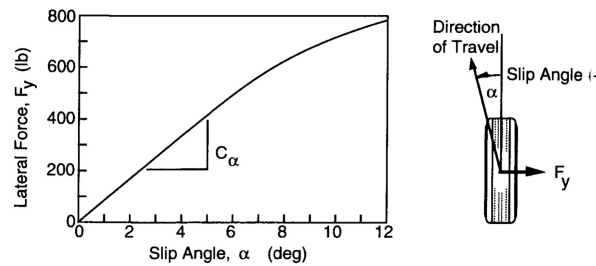


FIGURE 8.9 – Equations linéarisées du comportement des pneumatiques en dérive [5]

8.4.1 Equation constitutive

Pour des petits angles de dérive, on a vu que la force latérale développée par les pneumatiques peut être approximée au moyen de la relation linéarisée suivante (voir Figure 8.9).

$$F_y = C_\alpha \alpha \quad (8.14)$$

La constante de proportionnalité C_α est appelée la raideur d’envirage.

A ce stade, deux commentaires s’imposent.

- Premièrement, on remarque que le pneu développe des forces de dérive positives (selon le sens conventionnel) pour des angles de dérive négatifs.

$$\left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} < 0 \quad (8.15)$$

Il en a été tenu compte lors de la définition des forces et des angles de dérive à la Figure 8.8, de sorte que la raideur d’envirage C_α est la valeur absolue de la dérivée (8.15).

- Ensuite, il faut être attentif au fait que dans le cadre du modèle bicyclette, il convient ici de considérer la raideur d’envirage totale de l’essieu soit toutes les deux roues qui le constituent. Par exemple pour un essieu à deux roues, il faut multiplier par deux la raideur d’envirage d’une roue.

8.4.2 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre en translation selon la direction latérale et en rotation sous l'effet des forces centrifuges donnent :

$$\sum F_y = m \frac{V^2}{R} \quad (8.16)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (8.17)$$

Soit

$$F_{yf} \cos \delta + F_{yr} = m \frac{V^2}{R} \cos \beta \quad (8.18)$$

$$F_{yf} \cos \delta b - F_{yr} c = 0 \quad (8.19)$$

L'angle de braquage δ étant petit, il vient :

$$F_{yf} + F_{yr} = m \frac{V^2}{R} \quad (8.20)$$

$$F_{yf} b - F_{yr} c = 0 \quad (8.21)$$

En résolvant les équations, on tire :

$$F_{yf} = \frac{c}{L} m \frac{V^2}{R} \quad (8.22)$$

$$F_{yr} = \frac{b}{L} m \frac{V^2}{R} \quad (8.23)$$

Les forces latérales se répartissent comme le poids sous les essieux.

Égalité de Gratzmüller

En introduisant les équations de comportement dans ces égalités (8.22) et (8.23), il vient :

$$F_{yf} = C_{\alpha_f} \alpha_f = \frac{c}{L} m \frac{V^2}{R} \quad (8.24)$$

$$F_{yr} = C_{\alpha_r} \alpha_r = \frac{b}{L} m \frac{V^2}{R} \quad (8.25)$$

Soit en éliminant la force centrifuge entre les deux, on obtient la *condition de Gratzmüller* :

$$\boxed{\frac{\alpha_f}{\alpha_r} = \frac{c C_{\alpha_r}}{b C_{\alpha_f}}} \quad (8.26)$$

On appelle les quantités bC_{α_f} et cC_{α_r} les *pouvoirs directeurs des essieux* avant et arrière. L'égalité de Gratzmüller dit que le rapport des angles de dérive sous les essieux avant et arrière est comme l'inverse des pouvoirs directeurs.

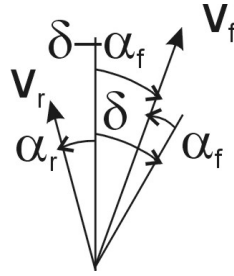


FIGURE 8.10 – Conditions de compatibilité sous les roues du véhicule

8.4.3 Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité relient les variables cinématiques soient les vitesses instantanées et les angles de dérive sous les roues avant et arrière. On utilise l'expression des vitesses sous les roues à partir de la vitesse linéaire et en rotation au centre de gravité :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CG} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/CG}$$

Soient le vecteur vitesse et vitesse angulaire au centre de masse :

$$\vec{v}_{CG} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y$$

$$\vec{\omega} = r \vec{e}_z$$

et les positions relatives des roues avant et arrière par rapport au centre de masse

$$\vec{r}_f = b \vec{e}_x$$

$$\vec{r}_r = -c \vec{e}_x$$

Après calcul du produit vectoriel et en se souvenant que

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

il vient

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_f = b r \vec{e}_y$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_r = -c r \vec{e}_y$$

Au final, composantes de la vitesse sous la roue avant dans les axes liés au véhicule sont données par :

$$u_f = u \simeq V \quad (8.27)$$

$$v_f = v + b r \quad (8.28)$$

De même sous la roue arrière on a :

$$u_r = u \simeq V \quad (8.29)$$

$$v_r = v - c r \quad (8.30)$$

Au final, la compatibilité des vitesses sous la roue arrière s'écrit (en tenant compte de son signe comme représenté sur la Figure 8.10) :

$$\tan \alpha_r = \frac{-v_r}{u_r} = \frac{-v + c r}{V} \quad (8.31)$$

Tenant compte que dans un mouvement circulaire établi, on a

$$V = r R \quad (8.32)$$

Il vient

$$\boxed{\alpha_r = -\beta + \frac{c}{R}} \quad (8.33)$$

Pour la roue avant, il faut remarquer que l'orientation du plan de la roue est modifié par l'angle de braquage δ . Pour le sens supposé sur la Figure 8.10, il vient :

$$\tan(\delta - \alpha_f) = \frac{v_f}{u_f} = \frac{v + b r}{V} \quad (8.34)$$

Soit

$$\boxed{\delta - \alpha_f = \beta + \frac{b}{R}} \quad (8.35)$$

Pour trouver la relation qui relie l'angle de braquage et les angles de dérive des pneumatiques, on élimine l'angle de dérive β du véhicule entre les équations (8.33) et (8.35).

$$\boxed{\delta = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r} \quad (8.36)$$

8.4.4 Angle de braquage en fonction de la vitesse et du rayon de courbure

En remplaçant α_f et α_r par leur valeur (8.24) et (8.25) dans (8.36), il vient :

$$\delta = \frac{L}{R} + \left(\frac{m c}{C_{\alpha_f} L} - \frac{m b}{C_{\alpha_r} L} \right) \frac{V^2}{R} \quad (8.37)$$

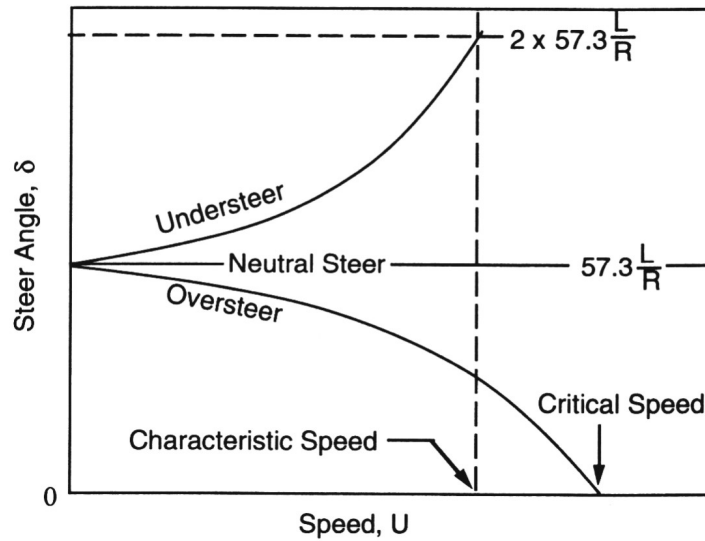


FIGURE 8.11 – Changement d’angle de braquage en fonction de la vitesse [5]

Certains auteurs anglosaxons aiment également faire apparaître le poids $W = mg$ par essieu :

$$\delta = \frac{L}{R} + \left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right) \frac{V^2}{gR} \quad (8.38)$$

L’angle de braquage des roues s’écrit sous la forme :

$$\delta = \frac{L}{R} + K \frac{V^2}{R} \quad (8.39)$$

où K est le *gradient sous-vireur* du véhicule.

$$K = \frac{m c}{C_{\alpha f} L} - \frac{m b}{C_{\alpha r} L} \quad (8.40)$$

8.4.5 Véhicule neutre, sous-vireur, sur-vireur

Les équations (8.37)-(8.39) donnant l’angle de braquage en fonction de la vitesse laissent apparaître trois types de comportement du véhicule bien distincts.

Pour certains véhicules, l’angle de braquage des roues doit être progressivement augmenté en fonction de la vitesse. Ce type de véhicule est dit *sous-vireur*, car il a tendance à réduire le rayon de courbure du virage.

Au contraire, un autre type de véhicule demande de réduire progressivement le braquage des roues avec la vitesse d'avance. Ce sont des véhicules *sur-vireurs*, car ils ont tendance à augmenter le rayon de courbure du virage.

Enfin pour le troisième type de machine, l'angle de braquage reste constant quel que soit la vitesse. Il s'agit de machines dites *neutres*. Ces trois comportements, illustrés à la Figure 8.11, sont intimement liés au signe du gradient sous-vireur donné par (8.40).

En examinant l'expression du gradient sous-vireur, on voit qu'il fait intervenir pour chaque essieu le rapport entre le poids sur l'essieu et le coefficient de raideur d'envirage de l'essieu. Ce ratio est appelé pouvoir directeur de l'essieu. Le gradient sous-vireur K (8.40) s'interprète donc comme la différence entre le pouvoir directeur des essieux avant et arrière.

En résumé, on peut donc établir la classification suivante :

— *Véhicule neutre* :

$$K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c C_{\alpha r} = b C_{\alpha f} \quad (8.41)$$

Pour les véhicules neutres on a égalité des pouvoirs directeurs des essieux avant et arrière. Par l'égalité de Graztmüller, on a $\alpha_f = \alpha_r$. Les angles de dérives sous les roues avant et arrière sont identiques.

— *Véhicule sous-vireur* :

$$K > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c C_{\alpha r} > b C_{\alpha f} \quad (8.42)$$

Le véhicule sous-vireur se caractérise par un pouvoir directeur de l'essieu arrière plus grand que celui de l'essieu avant. Par l'égalité de Graztmüller, on a $\alpha_f > \alpha_r$ et la dérive sous le train avant est plus grande que sous le train arrière.

— *Véhicule sur-vireur* :

$$K < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c C_{\alpha r} < b C_{\alpha f} \quad (8.43)$$

Dans les véhicules sur-vireurs, le pouvoir directeur de l'essieu avant plus grand que celui de l'essieu arrière et $\alpha_f < \alpha_r$. La dérivée la plus grande se trouve sous les roues arrière.

Vitesse caractéristique d'un véhicule sous-vireur

Pour un véhicule sous-vireur, on définit sa *vitesse caractéristique* comme celle qui demande un angle de braquage double du braquage à $V=0$, i.e.

l'angle d'Ackerman $\delta = L/R$. La vitesse pour laquelle on a $\delta = 2L/R$ est :

$$V_{\text{caractéristique}} = \sqrt{\frac{L}{K}} \quad (8.44)$$

Vitesse critique d'un véhicule sur-vireur

Pour un véhicule sur-vireur, on définit la *vitesse critique* comme étant celle pour laquelle on a un angle de braquage nul $\delta = 0$:

$$V_{\text{critique}} = \sqrt{\frac{L}{|K|}} \quad (8.45)$$

Il s'agit d'une vitesse instable comme on le verra par la suite, parce qu'à cette vitesse, toute perturbation conduit à un virage de rayon de courbure de plus en plus grand. C'est donc une vitesse de perte de contrôle du véhicule.

Gain d'accélération latérale

On définit également le gain en accélération latérale, rapport entre l'accélération latérale $a_y = V^2/R$ et l'angle de braquage qui lui donne naissance. En reprenant l'expression de l'angle de braquage,

$$\delta = \frac{L}{R} + K a_y \quad (8.46)$$

on obtient :

$$\frac{a_y}{\delta} = \frac{\frac{V^2}{L}}{1 + \frac{KV^2}{L}} \quad (8.47)$$

Gain de vitesse de rotation en lacet

On définit aussi le gain en vitesse de rotation en lacet r (rotation autour de l'axe vertical). C'est le rapport entre la vitesse de rotation r et l'angle de braquage δ qui lui donne naissance. En tenant compte que

$$r = \frac{V}{R} \quad (8.48)$$

il vient

$$\frac{r}{\delta} = \frac{\frac{V}{L}}{1 + \frac{KV^2}{L}} \quad (8.49)$$

Pour un véhicule sur-vireur, on voit clairement qu'à la vitesse critique, ce gain devient infini rendant le contrôle du véhicule impossible puisque toute

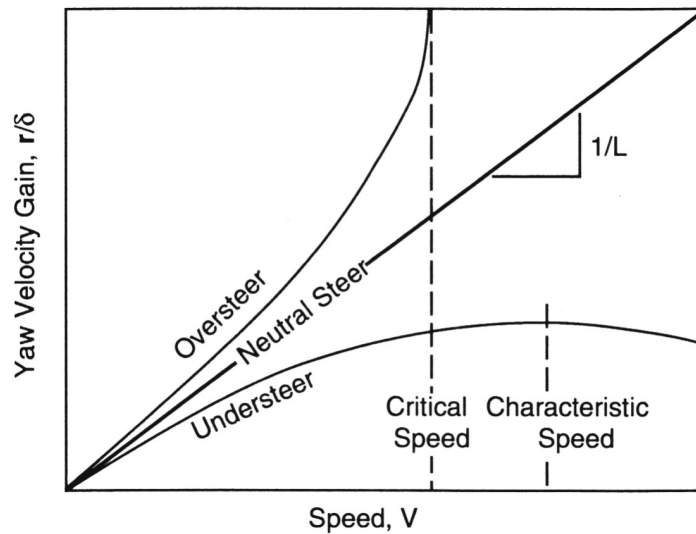


FIGURE 8.12 – Gain de vitesse angulaire de lacet en fonction de la vitesse d’avance du véhicule [5]

perturbation de l’angle de braquage donne lieu à une vitesse de rotation infinie autour de l’axe z . Le véhicule part donc en tête-à-queue. La Figure 8.12 illustre la variation du gain de vitesse angulaire de lacet en fonction de la vitesse d’avance du véhicule pour les trois types de véhicules décrits ci-dessus.

Angle de dérive du véhicule

L’angle de dérive du véhicule est l’angle de dérive observé au centre de gravité. Il est donné par le rapport entre la vitesse latérale et la vitesse longitudinale :

$$\beta = \frac{v_{cg}}{u_{cg}} \quad (8.50)$$

Sa valeur peut être calculée à partir des angles de dérive sous les roues au moyen des relations de compatibilité (8.33) ou (8.35) :

$$\beta = \frac{c r}{V} - \alpha_r = \delta - \alpha_f - \frac{b r}{V} \quad (8.51)$$

Il vient :

$$\beta = \frac{c}{R} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \frac{V^2}{gR} \quad (8.52)$$

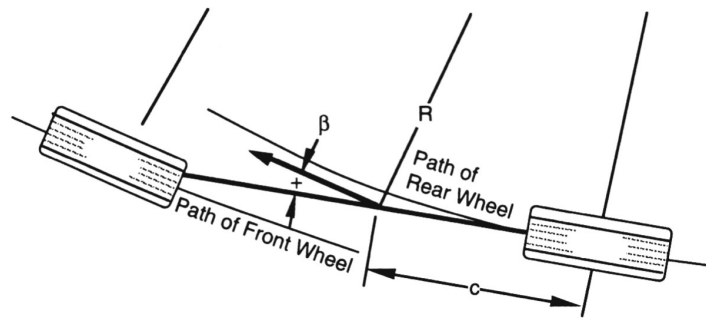


FIGURE 8.13 – Angle de dérive ($\beta > 0$) du véhicule pour un virage à faible vitesse [5]

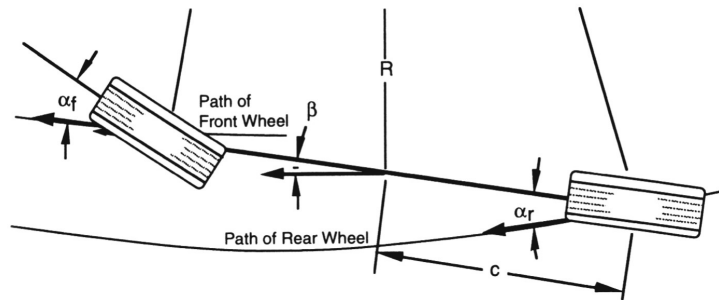


FIGURE 8.14 – Angle de dérive ($\beta < 0$) du véhicule pour un virage à haute vitesse [5]

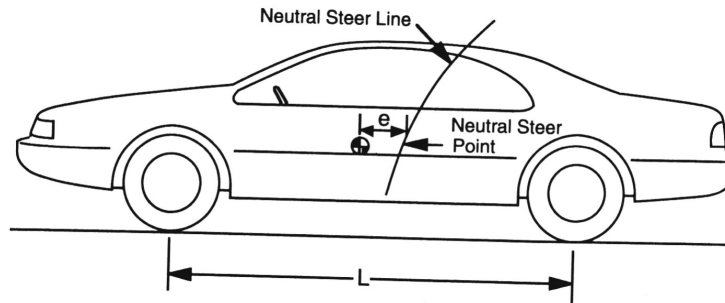


FIGURE 8.15 – Ligne neutre de manoeuvre sur un véhicule. La distance e est notée positivement i.e. $e > 0$ si elle est en avant du centre de gravité [5]

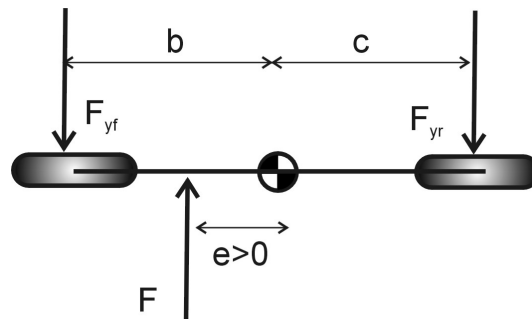


FIGURE 8.16 – Equilibre du véhicule sous l'effet d'une perturbation F appliquée en un point situé à une distance e en avant du centre de gravité

Cette expression donne la valeur de la dérive β en fonction de la vitesse d'avance V .

Contrairement à la croyance populaire, tout véhicule glisse toujours de l'arrière lors d'un virage à haute vitesse qu'il soit sous-vireur ou sur-vireur. En effet en examinant l'expression (8.52), on voit que l'angle de dérive β est d'abord positif (voir Figure 8.13), puis avec l'augmentation de la vitesse V , il diminue pour devenir négatif (voir Figure 8.14). La dérive β s'annule pour la vitesse :

$$V_{\beta=0} = \sqrt{cg \frac{C_{\alpha r}}{W_r}} = \sqrt{\frac{c L C_{\alpha r}}{b m}} \quad (8.53)$$

Cette vitesse est indépendante du rayon du virage.

8.4.6 Point neutre de manoeuvre et marge statique

Soit un véhicule en ligne droite. Étudions l'effet d'une force de perturbation latérale F sur le comportement du véhicule.

Soit e la distance où s'applique la force de perturbation par rapport au centre de gravité (e est compté positif si elle est située à l'avant du centre de gravité). L'équilibre du véhicule s'écrit :

$$F_{yf} + F_{yr} = F \quad (8.54)$$

$$F_{yf} b - F_{yr} c = F e \quad (8.55)$$

Soit

$$F_{yf}(b - e) - F_{yr}(c + e) = 0 \quad (8.56)$$

Le *point neutre de manoeuvre* se définit comme le point où l'application de la force ne produit pas de vitesse de lacet permanente.

Comme $\delta = 0$ (mouvement en ligne droite) et que $r = 0$, il vient successivement :

$$R = \infty$$

et

$$\delta = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r \Leftrightarrow \alpha_f = \alpha_r \quad (8.57)$$

On a donc :

$$C_{\alpha_f}(b - e) - C_{\alpha_r}(c + e) = 0 \quad (8.58)$$

La *marge statique* e est donc donnée par :

$$e = \frac{b C_{\alpha_f} - c C_{\alpha_r}}{C_{\alpha_f} + C_{\alpha_r}} \quad (8.59)$$

La notion de marge statique a servi initialement à Maurice Olley, pionnier de la dynamique du véhicule, pour définir la notion de véhicule sur et sous-vireur. En effet on a :

- pour un véhicule neutre : $e = 0$ (point neutre de manoeuvre au CG)
- pour un véhicule sous-vireur : $e < 0$ (point neutre de manoeuvre derrière le CG)
- pour un véhicule sur-vireur : $e > 0$ (point neutre de manoeuvre devant le CG)

Ainsi pour un véhicule sur-vireur, le point neutre de manoeuvre étant localisé devant le CG, une perturbation qui vient s'appliquer au centre de gravité, exerce un moment qui tend à infléchir la trajectoire dans un sens tel que le véhicule fait face à la direction de la perturbation. A l'inverse un véhicule sous-vireur est tel que la force perturbatrice crée un moment autour du point neutre de manoeuvre qui emporte le véhicule dans la direction d'application de la force. Le comportement est esquissé à la Figure 8.17.

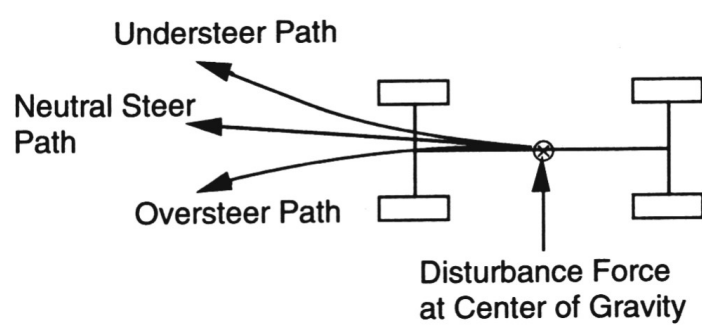


FIGURE 8.17 – Définition de Maurice Olley pour le sous et le sur-virage [5]

Chapitre 9

STABILITÉ LATÉRALE

9.1 Equations de la dynamique du véhicule

9.1.1 Le modèle bicyclette

Afin d'étudier le comportement dynamique et la stabilité latérale du véhicule, on recourt au modèle bicyclette illustré à la Figure 9.1. Rappelons les hypothèses qui sont sous-jacentes à ce modèle :

- Le véhicule est considéré comme *rigide*. Il est caractérisé par sa masse m et son tenseur d'inertie en axes matériels J ;
- Le plan $y = 0$ du véhicule est un plan de symétrie : soit $J_{yx} = 0$ et $J_{yz} = 0$;
- Le véhicule est infiniment rigide en tangage ($q=0$) et en pompage ($w=0$) ;
- Le véhicule n'a pas non plus de mouvement de roulis : $p=0$;
- On peut ignorer le phénomène de transfert de charge latéral qui conduit à une réduction de la raideur d'envirage de l'essieu. Selon les études expérimentales menées par Segel [24], cette hypothèse est réaliste lorsque les accélérations latérales restent inférieures à $0.5 g$;
- Le mouvement s'effectue à vitesse constante V ;
- On étudie une théorie linéarisée autour du mouvement à vitesse d'avance V . On admet des petits angles de braquage δ et de dérive β .

Étant donné que quatre des six degrés de liberté du véhicule sont fixés par les hypothèses ($u = V$, $w = 0$, $p = 0$ et $q = 0$), le modèle bicyclette ne possède plus que deux degrés de liberté v et r . Le choix de la vitesse latérale

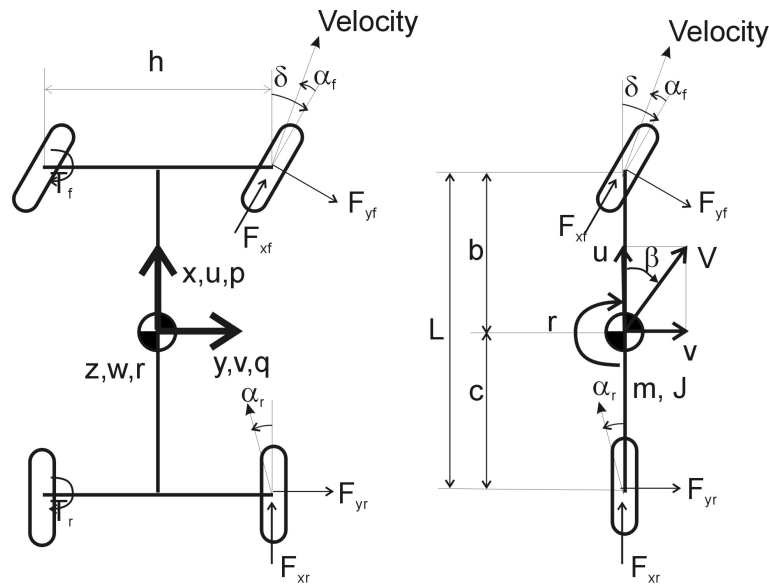


FIGURE 9.1 – Le modèle bicyclette du véhicule

v peut être remplacé par le choix de la variable β , l'angle de dérive.

$$\tan \beta = \frac{v}{u} \simeq \frac{v}{V} \quad (9.1)$$

9.1.2 Équilibre du véhicule dans ses propres axes

Pour l'étude des véhicules, la coutume est d'écrire les équations du mouvement dans les axes propres du véhicule. Cette approche est cohérente avec et l'expérience ressentie du conducteur mais aussi l'approche expérimentale, où l'on mesure les accélérations et les vitesses au sein du véhicule au moyen d'instruments de mesure installés à bord.

Equations de Newton-Euler

Pour dériver les équations du mouvement du véhicule, les équations de Newton-Euler de la dynamique du corps rigides

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m \vec{V}) \quad (9.2)$$

$$\sum \vec{T} = \frac{d}{dt}(J \vec{\omega}) \quad (9.3)$$

doivent être écrites dans le repère dynamique du véhicule. Dans ce repère mobile, les dérivées de la vitesse dans un repère en mouvement sont données

par la formule de Poisson :

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{V} \right|_{\text{absolu}} = \left. \frac{d}{dt} \vec{V} \right|_{\text{relatif}} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (9.4)$$

Il vient alors :

$$\sum \vec{F} = m \frac{d}{dt} \vec{V} + m \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (9.5)$$

$$\sum \vec{T} = \frac{d}{dt} (J \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (J \vec{\omega}) \quad (9.6)$$

Étant donné les hypothèses sur les vitesses $u = V$, $w = 0$, $p = 0$ et $q = 0$, le vecteur vitesse et le vecteur vitesse angulaire se réduisent à

$$\vec{V} = [u \ v \ 0]^T \quad (9.7)$$

$$\vec{\omega} = [0 \ 0 \ r]^T \quad (9.8)$$

Les deux seules équations du mouvement non triviales sont :

$$F_y = m(\dot{v} + ru) \quad (9.9)$$

$$N = J_{zz} \dot{r} \quad (9.10)$$

Les quatre autres équations du mouvement donnent les "réactions" nécessaires au blocage des degrés de liberté fixés, soit respectivement $u = V$, $w = 0$, $p = 0$ et $q = 0$.

$$F_x = -m r v \quad (9.11)$$

$$F_z = 0 \quad (9.12)$$

$$L = J_{xz} \dot{r} \quad (9.13)$$

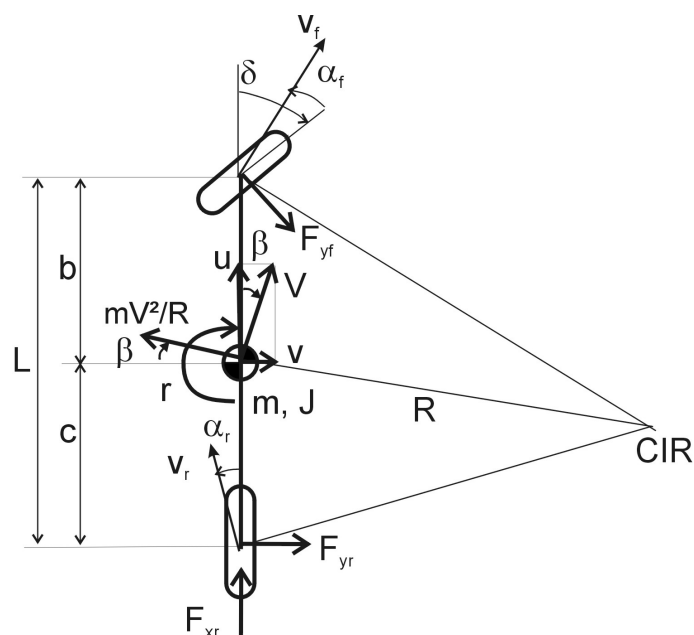
$$M = J_{xz} r^2 \quad (9.14)$$

Explication de $F_x = -m r v$

La première équation des réactions peut s'interpréter comme la force F_x (de propulsion ou de freinage suivant les cas) nécessaire pour maintenir constante la vitesse d'avance V malgré la composante de résistance additionnelle provenant de la dérive du véhicule.

Examinons la situation de la Figure 9.2. Pour un mouvement circulaire de rayon R , on a :

$$r = \frac{V}{R}$$

FIGURE 9.2 – Explication de la force de réaction $F_x = -m r v$

et

$$\begin{aligned}
 F_x &= -m \frac{V^2}{R} \sin \beta \\
 &= -m \frac{V}{R} V \sin \beta = -m r v
 \end{aligned}$$

9.1.3 Forces agissant sur le modèle

Les forces qui agissent sur le véhicule sont de deux natures : d'une part les forces développées par les pneumatiques (forces de propulsion et de dérive) et, d'autre part, les autres forces, principalement les forces aérodynamiques. On peut montrer (voir Ref. [4]) que l'effet prédominant provient des forces créées par les pneumatiques. Aussi dans cette étude simplifiée, on ne retient que les forces dues aux pneus tandis que les autres forces telles que les forces aérodynamiques seront considérées comme des perturbations extérieures du mouvement. Il ne s'agit évidemment que d'une hypothèse simplificatrice puisque la dérive du véhicule modifie l'angle au vent du véhicule et introduit des moments aérodynamique de lacet qui sont ignorés ici.

Les pneumatiques prenant de la dérive, ils introduisent des forces latérales F_y et des moments d'auto-alignement T_z . En examinant la Figure 9.3, les

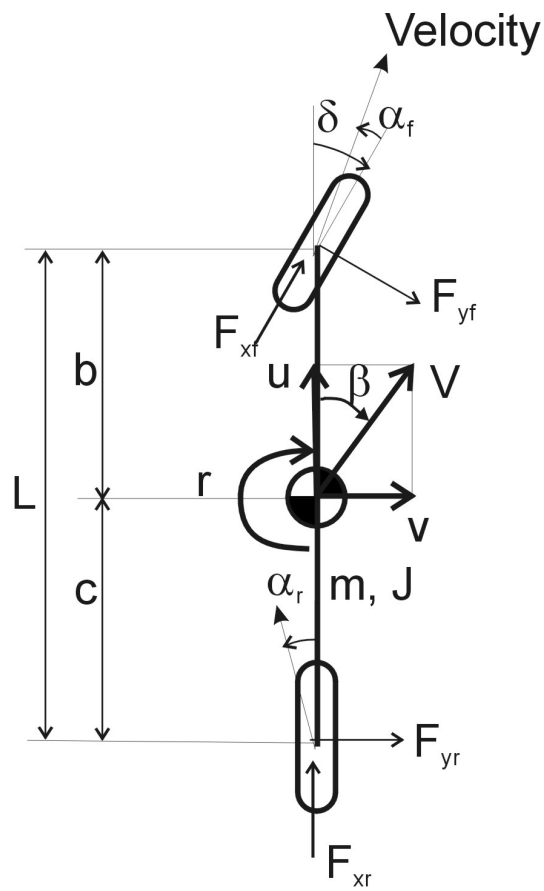


FIGURE 9.3 – Le modèle bicyclette du véhicule

forces agissant sur la voiture s'écrivent :

$$m(\dot{v} + ru) = F_{yr} + F_{xf} \sin \delta + F_{yf} \cos \delta \quad (9.15)$$

$$J_{zz} \dot{r} = -F_{yr} c + F_{xf} \sin \delta b + F_{yf} \cos \delta b + T_{zf} + T_{zr} \quad (9.16)$$

Étudions également la stabilité dans une approche de petites perturbations par rapport à un mouvement à vitesse donnée. Dans ce cadre, il est légitime de faire l'hypothèse que la dérive du véhicule reste petite, c'est-à-dire :

$$\beta \in [0^\circ, 15^\circ]$$

Cela revient à admettre que l'on a une évolution normale sans dérive importante. Il vient alors :

$$u = V \cos \beta \simeq V \quad (9.17)$$

$$v = V \sin \beta \simeq V \beta \quad (9.18)$$

L'angle de braquage δ est également considéré comme faible, de sorte que

$$\cos \delta \simeq 1 \quad \text{et} \quad \sin \delta \simeq \delta$$

On en déduit alors les équations d'équilibre linéarisées

$$mV(\dot{\beta} + r) = F_{yr} + F_{yf} + F_{xf} \delta \quad (9.19)$$

$$J_{zz} \dot{r} = -F_{yr} c + F_{yf} b + F_{xf} \delta b + T_{zf} + T_{zr} \quad (9.20)$$

Pour la simplicité, on néglige pour l'instant les forces de traction ou de freinage F_{xf} de même que les moments d'auto-alignement T_{zf} et T_{zr} sous les pneumatiques. En effet ceux-ci correspondent au déplacement du point d'application de F_y dans la surface de contact (chasse). Ce couple a un effet peu important comparativement aux couples $-F_{yr} c$ et $F_{yf} b$ qui mettent en jeu les mêmes forces latérales multipliées par des bras de levier (b et c) bien plus grands (de l'ordre de grandeur de la longueur de la voiture). On obtient finalement :

$$mV(\dot{\beta} + r) = F_{yr} + F_{yf} \quad (9.21)$$

$$J_{zz} \dot{r} = -F_{yr} c + F_{yf} b \quad (9.22)$$

9.1.4 Equations de compatibilité

Soit δ l'angle de braquage des roues directrices. C'est évidemment l'excitation du système (ou la variable de commande en terme de contrôle). Soient

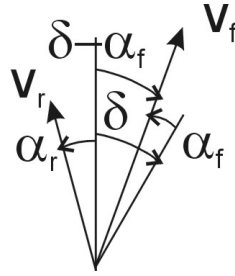


FIGURE 9.4 – Vecteurs vitesses et angles sous les roues du véhicule

α_f et α_r les angles de dérive respectivement des roues du train avant et du train arrière. Rappelons qu'ils sont définis comme étant les angles entre la direction du plan moyen de la roue et la direction du vecteur vitesse au point de contact de la roue.

On calcule d'abord l'expression des vitesses sous les roues à partir de la vitesse linéaire et en rotation au centre de gravité :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CG} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/CG}$$

Soient le vecteur vitesse et vitesse angulaire au centre de masse :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CG} &= [u \ v \ 0]^T \\ \vec{\omega} &= [0 \ 0 \ r]^T \end{aligned}$$

et les positions relatives des roues avant et arrière par rapport au centre de masse

$$\begin{aligned} \vec{r}_f &= [b \ 0 \ 0]^T \\ \vec{r}_r &= [-c \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

Après calcul du produit vectoriel et il vient

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{r}_f &= [0 \ b.r \ 0]^T \\ \vec{\omega} \times \vec{r}_r &= [0 \ -c.r \ 0]^T \end{aligned}$$

Au final, composantes de la vitesse sous la roue avant dans les axes liés au véhicule sont données par :

$$u_f = u \simeq V \quad (9.23)$$

$$v_f = v + b r \quad (9.24)$$

De même sous la roue arrière on a :

$$u_r = u \simeq V \quad (9.25)$$

$$v_r = v - cr \quad (9.26)$$

En examinant la Figure 9.4, la compatibilité entre les vitesses et les angles de dérive s'écrit :

$$\tan(\delta - \alpha_f) = \frac{br + v}{u} \quad (9.27)$$

$$\tan \alpha_r = \frac{cr - v}{u} \quad (9.28)$$

Soit

$$\alpha_f = \delta - \arctan\left(\frac{br + v}{u}\right) \quad (9.29)$$

$$\alpha_r = \arctan\left(\frac{cr - v}{u}\right) \quad (9.30)$$

Si les angles de dérive sous les roues restent petits, on peut écrire :

$$\alpha_f \simeq \delta - \frac{br + v}{u} \quad (9.31)$$

$$\alpha_r \simeq \frac{cr - v}{u} \quad (9.32)$$

En outre, en utilisant la définition de l'angle de dérive global du véhicule au centre de gravité

$$\beta \simeq v/u \quad (9.33)$$

et en tenant compte du fait que $u = V$ reste constant, il vient :

$$\alpha_f \simeq \delta - \frac{br}{V} - \beta \quad (9.34)$$

$$\alpha_r \simeq \frac{cr}{V} - \beta \quad (9.35)$$

9.1.5 Equations constitutives

Pour des faibles angles de dérive, la force d'envirage F_y peut être également linéarisée et s'écrire en fonction du coefficient de raideur d'envirage C_α (voir Figure 9.5) :

$$F_{yf} = C_{\alpha f} \alpha_f \quad F_{yr} = C_{\alpha r} \alpha_r \quad (9.36)$$

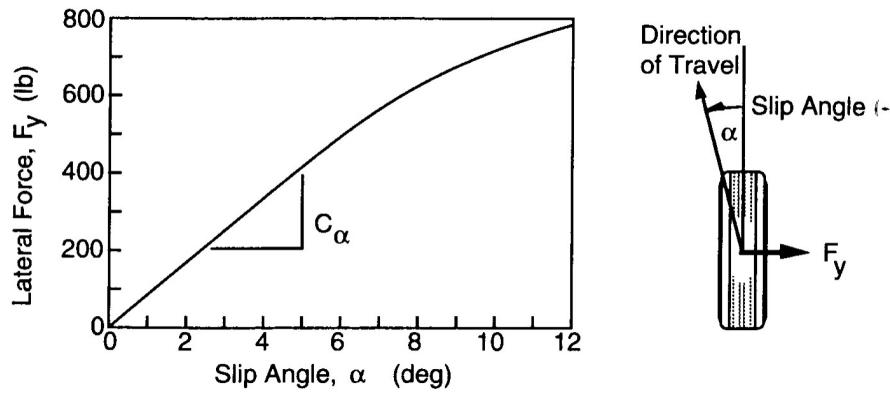


FIGURE 9.5 – Equations linéarisées du comportement des pneumatiques en dérive [5]

avec $C_{\alpha f}$ et $C_{\alpha r}$ les raideurs d'envirage des essieux. Étant donné que l'on adopte une approche basée sur la physique du problème, on a tenu compte dans la formulation du problème, résumée à la Figure 9.3, que les angles de dérives doivent être négatifs pour créer des forces latérales positives selon le sens conventionnel ($y > 0$). Les raideurs d'envirage sont donc positives : $C_{\alpha f} > 0$ et $C_{\alpha r} > 0$.

9.1.6 Equations du mouvement transitoire en virage

Les équations du mouvement du véhicule s'obtiennent à partir des équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} mV(\dot{\beta} + r) &= F_{yr} + F_{yf} \\ J_{zz}\dot{r} &= -F_{yr}c + F_{yf}b \end{aligned}$$

dans lesquelles on introduit les équations constitutives des forces d'envirage (9.36).

$$\begin{aligned} mV(\dot{\beta} + r) &= C_{\alpha r}\alpha_r + C_{\alpha f}\alpha_f \\ J_{zz}\dot{r} &= -C_{\alpha r}\alpha_r c + C_{\alpha f}\alpha_f b \end{aligned}$$

En exploitant ensuite les équations de compatibilité (9.34) et (9.35), on remplace maintenant les valeurs des angles de glissement α_f et α_r par leurs expressions en fonction de l'angle de dérive β , de la vitesse de lacet r et de

la vitesse d'avance V .

$$\begin{aligned} mV(\dot{\beta} + r) &= C_{\alpha r}\left(\frac{cr}{V} - \beta\right) + C_{\alpha f}\left(\delta - \frac{br}{V} - \beta\right) \\ J_{zz}\dot{r} &= -C_{\alpha r}\left(\frac{cr}{V} - \beta\right)c + C_{\alpha f}\left(\delta - \frac{br}{V} - \beta\right)b \end{aligned}$$

On peut regrouper les termes relatifs aux variables β , r et δ :

$$\begin{aligned} mV(\dot{\beta} + r) &= -(C_{\alpha f} + C_{\alpha r})\beta - (bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\frac{1}{V}r + C_{\alpha f}\delta \\ J_{zz}\dot{r} &= -(bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\beta - (b^2C_{\alpha f} + c^2C_{\alpha r})\frac{1}{V}r + bC_{\alpha f}\delta \end{aligned}$$

L'équation peut s'écrire de manière équivalente :

$$mV(\dot{\beta} + r) + (C_{\alpha f} + C_{\alpha r})\beta + (bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\frac{1}{V}r = C_{\alpha f}\delta \quad (9.37)$$

$$J_{zz}\dot{r} + (bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\beta + (b^2C_{\alpha f} + c^2C_{\alpha r})\frac{1}{V}r = bC_{\alpha f}\delta \quad (9.38)$$

L'expression obtenue est tout à fait équivalente à celle que l'on obtiendrait en développant en série F_y et N par rapport aux variables β , r et δ .

$$F_y = \frac{\partial F_y}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial F_y}{\partial r}r + \frac{\partial F_y}{\partial \delta}\delta \dots \quad (9.39)$$

$$N = \frac{\partial N}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial N}{\partial r}r + \frac{\partial N}{\partial \delta}\delta \dots \quad (9.40)$$

Cette approche s'inspire de la méthode développée pour étudier la stabilité des avions (voir par exemple Mc Cormick [12]). On note ces dérivées de la manière usuelle suivante :

$$Y_\beta = \frac{\partial F_y}{\partial \beta} \quad Y_r = \frac{\partial F_y}{\partial r} \quad Y_\delta = \frac{\partial F_y}{\partial \delta} \quad (9.41)$$

$$N_\beta = \frac{\partial N}{\partial \beta} \quad N_r = \frac{\partial N}{\partial r} \quad N_\delta = \frac{\partial N}{\partial \delta} \quad (9.42)$$

Elles sont appelées *dérivées de stabilité*. Avec les hypothèses utilisées, elles ont pour valeur :

$$Y_\beta = -(C_{\alpha f} + C_{\alpha r}) \quad (< 0) \quad (9.43)$$

$$Y_r = -(bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\frac{1}{V} \quad (9.44)$$

$$Y_\delta = C_{\alpha f} \quad (> 0) \quad (9.45)$$

et

$$N_\beta = -(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) \quad (9.46)$$

$$N_r = -(b^2 C_{\alpha f} + c^2 C_{\alpha r}) \frac{1}{V} \quad (< 0) \quad (9.47)$$

$$N_\delta = b C_{\alpha f} \quad (> 0) \quad (9.48)$$

Avec ces notations, les équations de la dynamique du système véhicule prennent la forme finale :

$$mV(\dot{\beta} + r) = Y_\beta \beta + Y_r r + Y_\delta \delta \quad (9.49)$$

$$J_{zz} \dot{r} = N_\beta \beta + N_r r + N_\delta \delta \quad (9.50)$$

9.1.7 Expression des équations du mouvement sous forme canonique

Les équations de la dynamique du modèle bicyclette constituent un modèle linéaire du premier ordre. Les variables d'état du modèle sont :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} \quad (9.51)$$

Le vecteur de commande est simplement

$$\mathbf{u} = (\delta) \quad (9.52)$$

On transforme facilement les équations du système (9.49) et (9.50) pour arriver à la forme canonique :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (9.53)$$

Il vient successivement :

$$mV \dot{\beta} = Y_\beta \beta + (Y_r - mV)r + Y_\delta \delta \quad (9.54)$$

$$J_{zz} \dot{r} = N_\beta \beta + N_r r + N_\delta \delta \quad (9.55)$$

Soient

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{mV} & \frac{Y_r}{mV} - 1 \\ \frac{N_\beta}{J_{zz}} & \frac{N_r}{J_{zz}} \end{bmatrix} \quad (9.56)$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\delta}{mV} \\ \frac{N_\delta}{J_{zz}} \end{bmatrix} \quad (9.57)$$

9.2 Étude de la stabilité dans le plan complexe

9.2.1 Stabilité

Le système linéarisé (9.49)-(9.50) décrivant la dynamique du modèle bicyclette est un système linéaire, invariant au cours du temps (LTI). Étudions la stabilité de ce système en variable de Laplace s .

$$\beta(t) \rightarrow \beta(s) \quad r(t) \rightarrow r(s) \quad \delta(t) \rightarrow \delta(s) \quad (9.58)$$

Il vient :

$$(s mV - Y_\beta) \beta(s) + (mV - Y_r) r(s) = Y_\delta \delta(s) \quad (9.59)$$

$$-N_\beta \beta(s) + (s J_{zz} - N_r) r(s) = N_\delta \delta(s) \quad (9.60)$$

Le second membre est constitué par les variables de commande du système ici réduite à la seule variable de braquage de la direction δ . Le système est dit à commandes bloquées, car elles sont fixées arbitrairement sans se soucier des forces qu'il faudrait mettre en oeuvre pour réaliser cette contrainte.

L'étude de la stabilité résulte de l'examen des racines de l'équation caractéristique du système homogène.

$$\Delta = (smV - Y_\beta) (sJ_{zz} - N_r) + (mV - Y_r) N_\beta = 0 \quad (9.61)$$

Soit

$$mV J_{zz} s^2 - (Y_\beta J_{zz} + mV N_r) s + (Y_\beta N_r - Y_r N_\beta + N_\beta mV) = 0 \quad (9.62)$$

ou encore si $V \neq 0$,

$$s^2 - \left(\frac{Y_\beta}{mV} + \frac{N_r}{J_{zz}} \right) s + \left(\frac{Y_\beta N_r}{mV J_{zz}} - \frac{Y_r N_\beta}{mV J_{zz}} + \frac{N_\beta}{J_{zz}} \right) = 0 \quad (9.63)$$

Cette équation est semblable à celle d'un oscillateur à 1 degré de liberté, illustré à la Figure 9.6 : une masse oscillante ' m ' reliée par un ressort de raideur ' k ' et un amortisseur visqueux de constante ' c ' :

$$m s^2 + c s + k = 0 \quad (9.64)$$

Le comportement donne un amortissement réduit $\xi = c/m$ et une fréquence propre $\Omega^2 = k/m$:

$$s^2 + \xi s + \Omega^2 = 0 \quad (9.65)$$

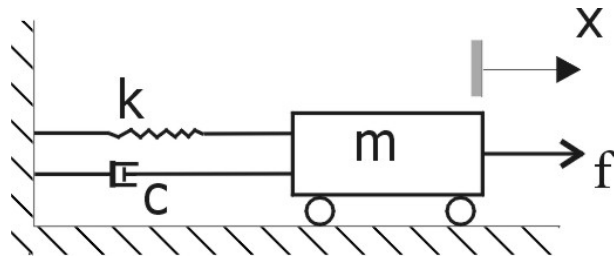


FIGURE 9.6 – Oscillateur à un degré de liberté : système masse ressort

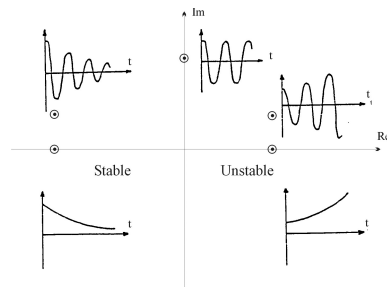


FIGURE 9.7 – Stabilité de l’oscillateur à un degré de liberté en fonction de la position des pôles de l’équation caractéristique

Les racines de l’équation caractéristique sont :

$$s_{1,2} = -\xi/2 \pm 1/2\sqrt{\xi^2 - 4\Omega^2} \tag{9.66}$$

La stabilité de l’oscillateur à un degré de liberté dépend de la position des racines de l’équation caractéristique. La situation est rappelée à la Figure 9.7. La condition pour que le système soit stable est que la partie réelle de toutes les racines soit négative. Si les racines sont complexes conjuguées, la somme des racines doit être négative. Si les racines sont réelles, leur somme doit être négative et leur produit positif. En résumé, la condition de stabilité requiert que la somme des racines soit négative et que leur produit soit positif. Soient s_1 et s_2 les racines de cette équation, le critère de stabilité s’écrit

$$s_1 + s_2 = -b/a < 0 \quad s_1 \cdot s_2 = c/a > 0 \tag{9.67}$$

Notons que ce critère est identique à celui qui pourrait être dérivé du critère de Routh-Hurwitz.

En se référant aux valeurs des coefficients de l’équation caractéristique, il vient :

$$s_1 + s_2 = -b/a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad mVN_r + J_{zz}Y_\beta < 0 \tag{9.68}$$

et

$$s_1 \cdot s_2 = c/a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad mV N_\beta + Y_\beta N_r - Y_r N_\beta > 0 \quad (9.69)$$

La première condition portant sur la somme des racines s'écrit :

$$mV N_r = -m(b^2 C_{\alpha f} + c^2 C_{\alpha r}) < 0 \quad (9.70)$$

$$J_{zz} Y_\beta = -J_{zz}(C_{\alpha f} + C_{\alpha r}) < 0 \quad (9.71)$$

Étant donné le signe des coefficients de raideur d'environnement $C_\alpha > 0$, elle est toujours satisfaite.

Pour évaluer la seconde condition sur le produit des racines, on calcule les termes suivants :

$$\begin{aligned} mV N_\beta &= -mV(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) \\ N_r Y_\beta &= (C_{\alpha f} + C_{\alpha r}) \frac{b^2 C_{\alpha f} + c^2 C_{\alpha r}}{V} \\ N_\beta Y_r &= (b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) \frac{b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}}{V} \end{aligned}$$

soit

$$N_r Y_\beta - N_\beta Y_r = \frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L^2}{V}$$

Le produit des racines est négatif et la stabilité est assurée si la condition suivante est satisfaite :

$$-mV(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) + \frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L^2}{V} > 0 \quad (9.72)$$

Cette condition n'est pas automatiquement satisfaite. Tout dépend de la dérivée de stabilité $N_\beta = -(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r})$. Le signe de N_β permet de classer les véhicules en deux catégories :

- Pour *un véhicule sous-vireur*, i.e. $N_\beta = -(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) > 0$, le comportement est toujours stable.
- Pour *un véhicule neutre*, i.e. $N_\beta = -(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) = 0$, le comportement est toujours stable sauf pour une vitesse infinie.
- Pour *un véhicule sur-vireur*, i.e. $N_\beta = -(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r}) < 0$, le comportement devient instable à partir de la vitesse critique :

$$V_{crit}^2 = \frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L^2}{m(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r})} = -\frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L^2}{m N_\beta} \quad (9.73)$$

On peut vérifier que cette classification est identique à celle introduite dans le cadre de l'analyse des conditions de virage stationnaire.

9.2.2 Caractérisation du mouvement

Outre la stabilité du mouvement, il est intéressant de connaître la nature du mouvement. Poursuivant l'analogie avec l'oscillateur mécanique à 1 degré de liberté

$$\ddot{x} + \xi \dot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (9.74)$$

on définit l'amortissement

$$\xi = -\left(\frac{Y_\beta}{mV} + \frac{N_r}{J_{zz}}\right) \quad (9.75)$$

et le rappel en lacet

$$\Omega^2 = \left(\frac{Y_\beta}{mV} \frac{N_r}{J_{zz}} - \frac{Y_r}{mV} \frac{N_\beta}{J_{zz}} + \frac{N_\beta}{J_{zz}}\right) \quad (9.76)$$

du modèle bicyclette.

L'étude du déterminant de l'équation caractéristique a permis de déduire le caractère stable ou instable du comportement. Afin de caractériser le type de comportement, on regarde maintenant le radicant de l'équation :

$$\begin{aligned} \rho &= \xi^2 - 4\Omega^2 \\ &= \left(\frac{Y_\beta}{mV} + \frac{N_r}{J_{zz}}\right)^2 - 4\left(\frac{Y_\beta}{mV} \frac{N_r}{J_{zz}} - \frac{Y_r}{mV} \frac{N_\beta}{J_{zz}} + \frac{N_\beta}{J_{zz}}\right) \end{aligned} \quad (9.77)$$

Selon le signe de ρ , on aura :

- si $\rho > 0$, deux racines réelles et un amortissement plus que critique ;
- si $\rho < 0$, deux racines complexes conjuguées et un amortissement moins que critique ;
- si $\rho = 0$, deux racines réelles confondues et un amortissement critique.

Développons l'expression du radicant (9.77) :

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{Y_\beta}{mV} + \frac{N_r}{J_{zz}}\right)^2 - 4\left(\frac{Y_\beta}{mV} \frac{N_r}{J_{zz}} - \frac{Y_r}{mV} \frac{N_\beta}{J_{zz}} + \frac{N_\beta}{J_{zz}}\right) \\ &= \left(\frac{Y_\beta}{mV} - \frac{N_r}{J_{zz}}\right)^2 + 4\frac{Y_r}{mV} \frac{N_\beta}{J_{zz}} - 4\frac{N_\beta}{J_{zz}} \\ &= \left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha r}}{mV} - \frac{b^2 C_{\alpha f} + c^2 C_{\alpha r}}{J_{zz} V}\right)^2 + 4\frac{N_\beta^2}{mV^2 J_{zz}} - 4\frac{N_\beta}{J_{zz}} \end{aligned}$$

il vient

$$\rho = \left[\left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha r}}{m} - \frac{b^2 C_{\alpha f} + c^2 C_{\alpha r}}{J_{zz}} \right)^2 + 4 \frac{(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r})^2}{m J_{zz}} \right] \frac{1}{V^2} - 4 \frac{N_\beta}{J_{zz}} \quad (9.78)$$

Le premier terme étant positif (somme de termes tous positifs), le signe du radicant est à nouveau dépendant du paramètre N_β .

- Lorsque $N_\beta < 0$ (machine sur-vireuse), on a $\rho > 0$ et la réponse est toujours apériodique. Elle ne reste stable que pour $V < V_{critique}$.
- Lorsque $N_\beta > 0$ (machine sous-vireuse), le terme positif décroît en $1/V^2$, de sorte que la réponse devient oscillante (même si elle reste bornée) à partir de la *vitesse d'oscillation* :

$$V_{osc.}^2 = \frac{J}{N_\beta} \left[\left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha r}}{m} - \frac{b^2 C_{\alpha f} + c^2 C_{\alpha r}}{J_{zz}} \right)^2 + 4 \frac{(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r})^2}{m J_{zz}} \right] \quad (9.79)$$

9.3 Réponse à un braquage donné

9.3.1 Régime établi

Pour calculer la réponse en régime établi, cherchons d'abord la solution particulière correspondant à

$$\dot{\beta} = \dot{r} = 0 \quad (9.80)$$

On a le système réduit :

$$\begin{cases} -Y_\beta \beta + (mV - Y_r) r = Y_\delta \delta \\ -N_\beta \beta - N_r r = N_\delta \delta \end{cases} \quad (9.81)$$

On en déduit :

$$\beta = -\frac{N_\delta \delta + N_r r}{N_\beta} \quad (9.82)$$

On élimine β entre les deux équations et on obtient :

$$(-mV N_\beta + N_\beta Y_r - N_r Y_\beta) r = (N_\delta Y_\beta - N_\beta Y_\delta) \delta \quad (9.83)$$

On en tire le gain de vitesse de lacet :

$$\frac{r}{\delta} = \frac{N_\beta Y_\delta - N_\delta Y_\beta}{N_r Y_\beta - N_\beta Y_r + mV N_\beta} \quad (9.84)$$

Sachant que

$$N_r Y_\beta - N_\beta Y_r = \frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L^2}{V} \quad (9.85)$$

on calcule également :

$$N_\beta Y_\delta = C_{\alpha f} (c C_{\alpha r} - b C_{\alpha f}) \quad (9.86)$$

$$-N_\delta Y_\beta = b C_{\alpha f} (C_{\alpha r} + C_{\alpha f}) \quad (9.87)$$

Ce qui fournit :

$$N_\beta Y_\delta - N_\delta Y_\beta = C_{\alpha f} C_{\alpha r} L \quad (9.88)$$

On obtient ainsi l'angle de braquage à donner en fonction de la vitesse de rotation autour de l'axe vertical :

$$\frac{\delta}{r} = \frac{L}{V} + N_\beta \frac{mV}{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L} \quad (9.89)$$

Pour un mouvement circulaire de rayon R en régime établi $\beta = \text{cste}$ en régime établi, on a $\dot{\beta} = 0$ et

$$r = \dot{\vartheta} = \frac{V}{R} \quad (9.90)$$

et

$$a_y = V^2/R \quad (9.91)$$

En outre, on rappelle la valeur de l'angle d'Ackerman

$$\delta = L/R \quad (9.92)$$

La valeur de l'angle de braquage s'écrit donc :

$$\delta = \frac{L r}{V} + N_\beta \frac{mV r}{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L}$$

soit en tenant compte des remarques précédentes, on a

$$\delta = \frac{L}{R} + \frac{m N_\beta}{C_{\alpha f} C_{\alpha r} L} \frac{V^2}{R}$$

En introduisant la valeur de $N_\beta = -(b C_{\alpha f} - c C_{\alpha r})$, on retrouve l'expression obtenue lors de l'analyse du virage stationnaire :

$$\delta = \frac{L}{R} + \left(m \frac{c}{L C_{\alpha f}} - m \frac{b}{L C_{\alpha r}} \right) \frac{V^2}{R} \quad (9.93)$$

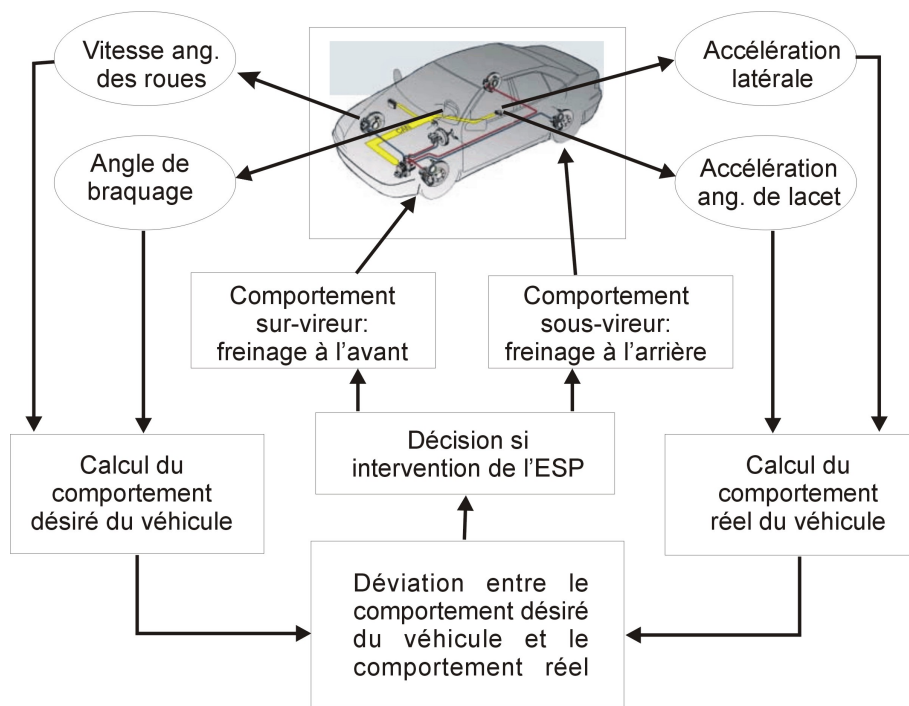


FIGURE 9.8 – Principe de fonctionnement du système de contrôle de stabilité ESP

9.4 Le système ESP

9.4.1 Fonctionnement d'un système de contrôle de stabilité

Le système un système de contrôle de stabilité tel que l'ESP de Bosch consiste à appliquer individuellement des freinages sur les quatre roues. L'application de forces de freinage non symétriques conduit à l'apparition d'un moment de lacet permettant contrôler la dynamique latérale du véhicule.

Le principe d'un système de contrôle de stabilité est esquissé à la Figure 9.8. L'ESP doit tout d'abord déterminer le statut actuel du véhicule basé sur la mesure de la vitesse de lacet, de l'accélération latérale et de la vitesse de rotation des roues. Ces valeurs permettent en outre d'estimer la vitesse d'avance du véhicule et l'angle dérive. Le système doit également déterminer la trajectoire souhaitée par le conducteur. A cette fin, le système mesure l'angle de rotation du volant δ ainsi que les pressions sur les pédales de frein et d'accélération. Ces valeurs lui permettent de comparer la trajectoire réelle à la trajectoire idéale souhaitée par le conducteur. L'ESP essaie alors de réaliser la meilleure convergence possible entre la réponse du véhicule et les valeurs souhaitées par le conducteur. Si le système enregistre une différence significative entre le comportement réel et idéal du véhicule, le système de contrôle de stabilité intervient. Sur la base d'un algorithme, l'ESP décide de moduler la force de freinage des roues de manière asymétrique afin de créer un moment de lacet autour de l'axe vertical de manière à modifier la dérive β et la vitesse de lacet $\dot{\psi}$. L'ESP vise à conserver à tout moment les caractéristiques de tenue de route voulues par le conducteur pour servir de base à un contrôle fiable du véhicule.

La question est de savoir sur quelle roue le freinage doit être actionné afin de corriger une trajectoire sur ou sous-vireuse du véhicule. Ce fait peut être déduit de l'examen des équations de la dynamique du véhicule.

9.4.2 Equations de la dynamique avec des couples de freinage

Un modèle de véhicule rigide avec un freinage individuel sur les quatre roues est proposé à la Figure 9.9. L'application d'une force de freinage $F_x = -F_b$ sur une roue produit un moment de lacet de valeur $M_z = F_b t/2$ pour une roue droite et $M_z = -F_b t/2$ pour une roue gauche où t est la largeur de voie.

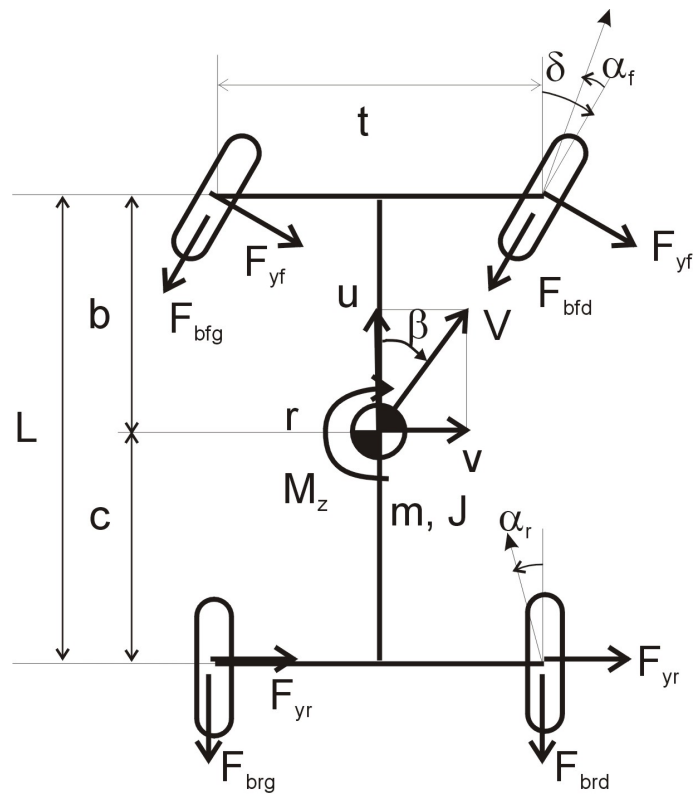


FIGURE 9.9 – Un modèle de véhicule rigide avec un freinage individuel sur les quatre roues

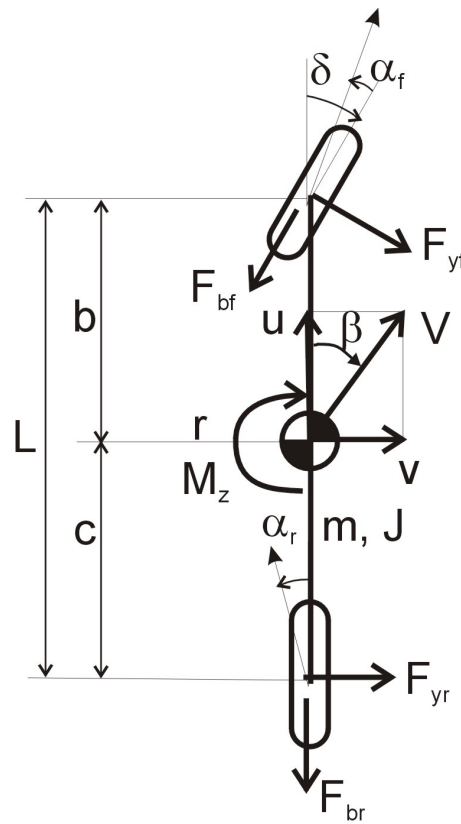


FIGURE 9.10 – Modèle bicyclette équivalent du véhicule muni d'un système de contrôle de stabilité ESP

En outre, l'application du freinage sur les roues directrices conduit à des effets annexes si l'angle de braquage des roues est non nul. Il induit :

- une force latérale $F_y = -F_b \sin \delta \simeq F_b \delta$
- un moment de lacet $M_z = -(F_{b,f,d} + F_{b,f,g}) b \delta$.

Adoptons les notations suivantes :

$$F_{xf} = -(F_{b,f,d} + F_{b,f,g}) \quad (9.94)$$

$$M_z = +F_{b,f,d} t/2 - F_{b,f,g} t/2 + F_{b,r,d} t/2 - F_{b,r,g} t/2 \quad (9.95)$$

En insérant les forces et moments créés par les forces de freinage au sein du modèle bicyclette développé dans ce chapitre, les équations de la dynamique du véhicule s'écrivent :

$$mV(\dot{\beta} + r) = F_{yr} + F_{yf} + F_{xf} \delta \quad (9.96)$$

$$J_{zz} \dot{r} = -F_{yr} c + F_{yf} b + F_{xf} \delta b + M_z \quad (9.97)$$

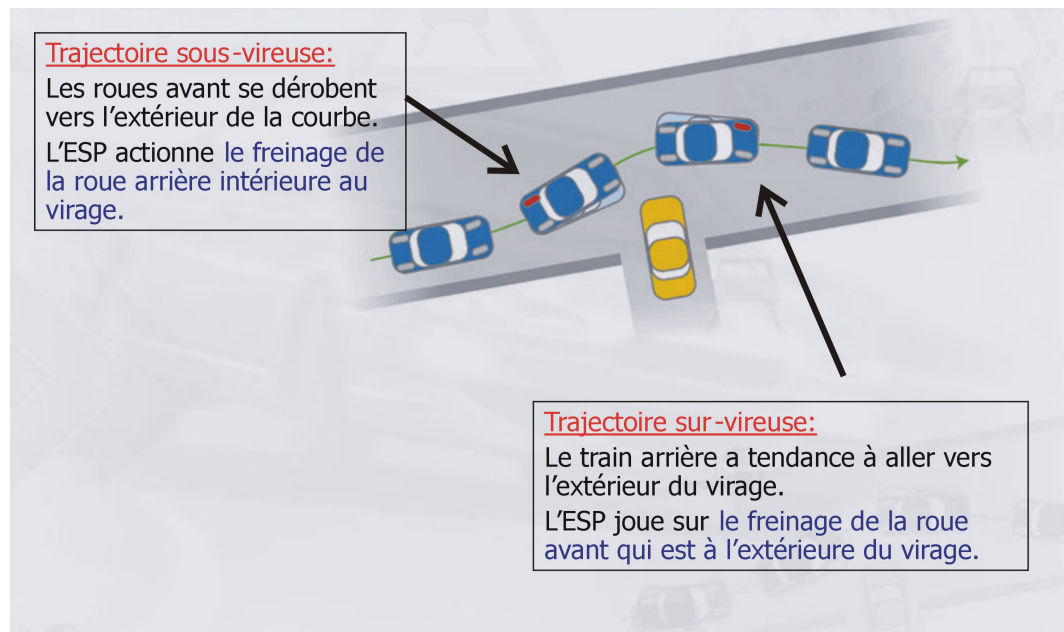


FIGURE 9.11 – Principe d'action du système de contrôle de stabilité ESP

et

$$mV(\dot{\beta} + r) + (C_{\alpha f} + C_{\alpha r})\beta + (bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\frac{1}{V}r = C_{\alpha f}\delta - (F_{b,f,d} + F_{b,f,g})\delta \quad (9.98)$$

$$J_{zz}\dot{r} + (bC_{\alpha f} - cC_{\alpha r})\beta + (b^2C_{\alpha f} + c^2C_{\alpha r})\frac{1}{V}r = bC_{\alpha f}\delta + M_z - (F_{b,f,d} + F_{b,f,g})b\delta \quad (9.99)$$

Il ressort de l'examen des équations que :

- *Freiner une roue avant* produit
 - un couple de réalignement
 - un couple tendant à réduire la dérive
 - un effort latéral tendant à déporter le véhicule
- *Freiner une roue arrière* produit un couple de réalignement pur.

En examinant la Figure 9.11, on en déduit donc le principe d'action le plus efficace d'un contrôle de stabilité basé sur un freinage individuel des quatre roues.

Lorsque la trajectoire est sous-vireuse, les roues avants du véhicule ont tendance à se dérober vers l'extérieur de la courbe. Les roues du train avant ont une dérive supérieure à celui des roues à l'arrière. L'ESP actionne le

freinage d'une roue arrière, soit dans ce cas, la roue arrière intérieure au virage pour produire un couple de réalignement avec la trajectoire désirée.

Lorsque la trajectoire est sur-vireuse, le train arrière a tendance à aller vers l'extérieur du virage. Les roues du train arrière prennent un angle de dérive supérieur à celui des roues à l'avant. L'ESP joue sur le freinage des roues avant, dans ce cas de figure sur le freinage de la roue avant extérieure au virage en vue de ramener le véhicule dans la trajectoire idéale.

Exercice numérique proposé

En utilisant MATLAB-SIMULINK on demande de simuler l'exemple suivant :

- Phase I ($t < 0$) : Mouvement circulaire à vitesse constante. Le véhicule a une adhérence uniforme sur ses quatre roues. Données du mouvement : $V=30$ m/s, $R=100$ m, $m = 1000$ Kg, $J=1000$ kg/m², $g=9.81$ m/s², $L=3$ m, $b=c=1.5$ m, $C_{\alpha f}$ et $C_{\alpha r} = 100.000$ N/rad.
- Phase II ($t = 0$) : Le véhicule subit une perte de la moitié de l'adhérence sur une roue avant $C_{\alpha f} = 75.000$ N/rad.
- Phase III ($t > 0$) : On demande de trouver le couple de freinage permettant de rétablir la courbure désirée. Il s'agit de trouver une loi de freinage réaliste tenant compte de l'adhérence maximale des pneumatiques.

9.5 Description de la trajectoire

La trajectoire peut être décrite comme une loi paramétrique (mapping) entre le temps et la position absolue :

$$t \mapsto (\bar{X}(t), \bar{Y}(t)) \quad (9.100)$$

Suivant la situation illustrée à la Figure 9.12, on définit :

- ϑ , l'angle entre la tangente à la trajectoire avec l'axe des X ;
- ψ , l'angle compris entre l'axe des X du repère fixe et l'axe des x du véhicule ;
- β , l'angle de dérive du véhicule, c'est-à-dire l'angle entre le vecteur vitesse (parallèle à la tangente à la trajectoire) et l'axe des x du véhicule.

Les trois angles sont liés par la relation :

$$\vartheta = \psi + \beta \quad (9.101)$$

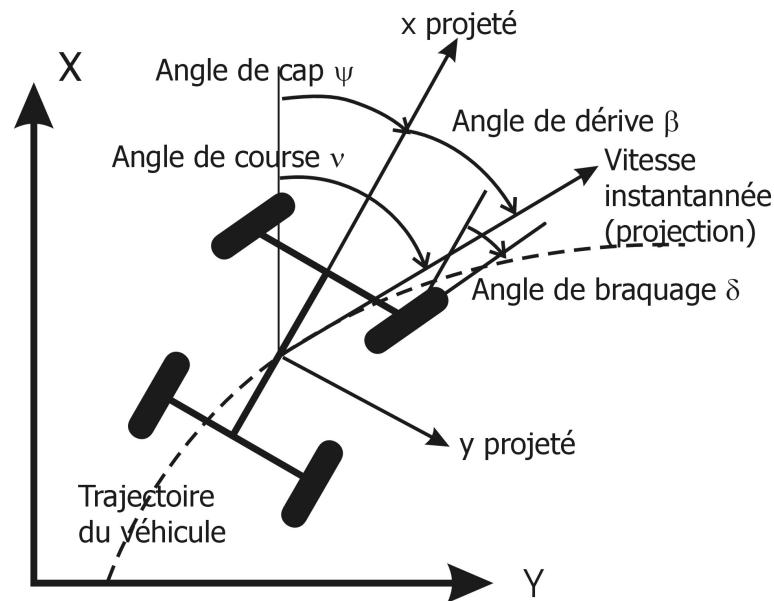


FIGURE 9.12 – Définition de la trajectoire d'un véhicule

Après différentiation, cette dernière relation peut s'exprimer en terme des vitesses :

$$\dot{\vartheta} = r + \dot{\beta} \quad (9.102)$$

Quant aux vitesses linéaires, elles s'obtiennent par changement de repère entre les axes propres du corps et les axes d'inertie :

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \vartheta \quad (9.103)$$

$$\frac{dY}{dt} = V \sin \vartheta \quad (9.104)$$

ou alternativement

$$\frac{dX}{dt} = u \cos \psi - v \sin \psi \quad (9.105)$$

$$\frac{dY}{dt} = u \sin \psi + v \cos \psi \quad (9.106)$$

Quatrième partie

**CONFORT ET TENUE DE
ROUTE**

Chapitre 10

TENUE DE ROUTE ET CONFORT

10.1 Introduction

La dynamique verticale régit la capacité du véhicule à filter les sollicitations extérieures et à assurer le confort du conducteur et des passagers. La suspension est un des éléments clés de la dynamique verticale. Le mécanisme de suspension a au moins trois fonctions. La première est implicitement de soutenir le poids du véhicule. La deuxième est filtrer les vibrations venant de la route et d'assurer le confort des passagers. La troisième, moins connue mais néanmoins importante, est de garantir une pression de contact aussi grande que possible entre la roue et le sol pour développer une adhérence maximale et maximaliser la tenue de route.

En se mouvant à une certaine vitesse, l'automobile est soumise à des sollicitations vibratoires caractérisées par un très large spectre. Les vibrations affectent les passagers de manière visuelle, tactile ou auditive. Le terme de confort de conduite (*ride* en anglais) se réfère communément aux sensations tactiles ou visuelles consécutives à la conduite du véhicule. Il concerne principalement des basses fréquences entre 0 et 25 Hz. Le bruit caractérise les sensations auditives dont les fréquences sont plus élevées situées entre 25 et 20.000 Hz. Il est toutefois arbitraire de distinguer les deux types de fréquences, car elles sont souvent reliées intrinsèquement par leurs origines.

L'environnement vibratoire du véhicule est un des critères majeurs pour qualifier le confort d'une voiture. Toutefois sa caractérisation précise est rendu très difficile à cause de la nature subjective du critère et de la difficulté d'élaborer des méthodes objectives de mesure de cette performance.

Le comportement vibratoire des véhicules sur pneumatiques est caractérisé

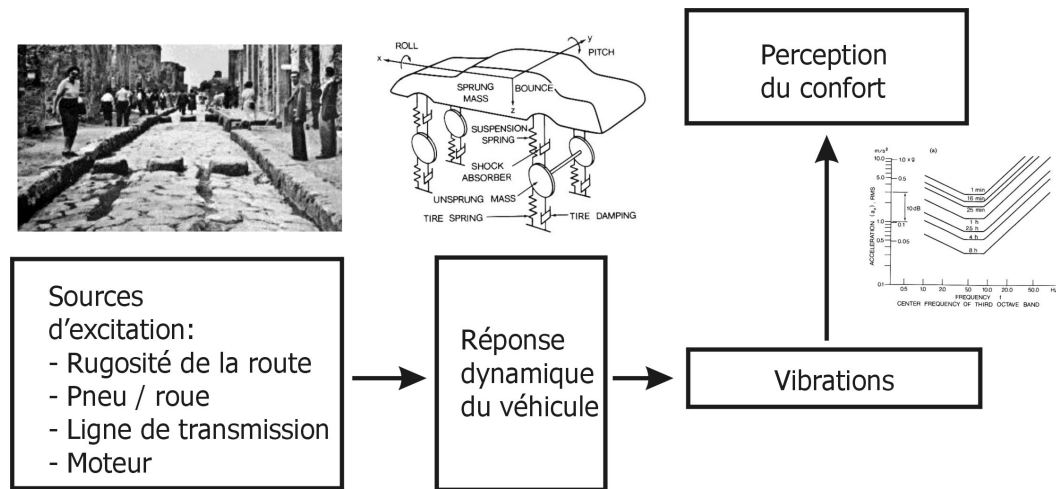


FIGURE 10.1 – Étude du confort des véhicules

par un contenu fréquentiel à basse fréquence compte tenu de la souplesse des boudins en caoutchouc. Le confort dépend d'une part de la nature de l'excitation, mais est également des caractéristiques de la fonction de transfert du système dynamique représentant le véhicule. Une fois les sollicitations affectant les passagers connues, on peut estimer la sensibilité des êtres humains aux sollicitations vibratoires afin de déterminer une mesure du confort. La Figure 10.1 résume l'étude du confort (ride) qui se décline en trois points :

1. La compréhension des sources d'excitations ;
2. La compréhension des mécanismes de perception et de tolérance aux vibrations par le corps humain ;
3. L'analyse de la réponse vibratoire et le filtrage réalisé par le véhicule sur roues.

10.2 Sources des vibrations

On distingue deux sources de vibrations. Les sources *externes* sont principalement liées à la rugosité de la route, mais aussi aux bruits aérodynamiques. Les sources *internes* sont liées aux pièces tournantes ou en mouvement : les roues et les pneus, la ligne de transmission, la motorisation.

Étant donné l'importance de l'excitation vibratoire pour les rugosités de la route, nous étudierons cette source en priorité.

10.2.1 Rugosités de la route

Les rugosités de la route recouvrent aussi bien les trous (nids de poule, etc.) que les déviations aléatoires du profil de la route résultant des imperfections inhérentes à la fabrication et la réparation de la surface de la chaussée. La rugosité est décrite par le profil en élévation le long de la trajectoire des roues. La rugosité est caractérisée par un signal aléatoires à large bande. Elle peut être décrite soit par le profil lui-même, soit par ses données statistiques. Une représentation habituelle utilise la notion de la *distribution de densité de puissance spectrale* (PSD). La fréquence spatiale est donnée en termes de cycles/mètres, c'est-à-dire l'inverse de la longueur d'onde spatiale des ondulations.

La distribution de densité de puissance spectrale peut être obtenue expérimentalement par transformée de Fourier rapide (FFT) du relevé de profil en fonction de la distance. Le relevé s'effectue expérimentalement au moyen d'un profilomètre à grande vitesse. On constate que pour toutes les routes, la courbe de PSD en fonction de la fréquence diminue. En effet les déviations de l'ordre des dizaines de mètres ont des amplitudes de l'ordre du cm tandis que les déviations de l'ordre du mm ont des déviations de l'ordre du mm.

10.3 Réponse humaine aux vibrations

En général, les limites du confort (ou d'inconfort) des humains soumis à des vibrations sont difficiles à déterminer à cause de la variabilité des individus, mais aussi en raison de l'absence d'une méthodologie acceptée unanimement pour la déterminer. Des recherches considérables ont toutefois été dévouées à la question. Une grande variété de méthodes a été utilisée :

- *Des mesures subjectives de la tenue de route.* Historiquement la méthode traditionnelle pour comparer et juger du confort est d'utiliser un jury d'experts entraînés pour évaluer le confort sur la base d'essais de conduite sur différentes surfaces. Avec un grand échantillon d'experts et une bon protocole d'évaluation, cette méthode permet une évaluation et une comparaison assez pertinente des qualités routières de véhicules. Toutefois, l'inconvénient majeur est que l'on ne dispose pas de *mesure quantitative* de l'évaluation.
- *Des tests sur tables vibrantes.* En vue d'établir la réponse humaine aux vibrations, on a réalisé des tests sur des tables vibrantes. La plupart des recherches effectuées sont relatives aux réponses à des excitations sinusoïdales. Au cours de ces tests, on a comme objectif de déterminer les zones de confort ou plus exactement d'inconfort des êtres humains



FIGURE 10.2 – Étude du confort en utilisant des plates formes

par rapport à l'amplitude, à la vitesse ou à l'accélération des vibrations dans une direction donnée (des pied à la tête, sur le côté ou d'avant en arrière) dans une gamme de fréquences données.

- *Des tests en simulateur de conduite.* En vue de déterminer de manière plus réaliste la tolérance aux vibrations, on a utilisé des simulateurs de conduite de véhicule afin de soumettre des individus aux mouvements d'un véhicule sur différentes surfaces. Le véhicule monté sur une plateforme de Gough-Stewart (voir Fig. 10.2) est soumis à des sollicitations via les vérins placés dans les jambes de support pour reproduire le tangage, le roulis et le lacet. L'usage du simulateur a permis d'établir la tolérance humaine par rapport à différents paramètres de vibration.
- *Des mesures sur véhicule.* Les tests sur tables vibrantes et en simulateurs ne pouvant reproduire complètement les conditions d'environnement du passager en voiture, des tests sur route ont été également effectués afin de corréler quantitativement le notion de confort par rapport aux paramètres des vibrations en mesurant précisément les vibrations reçues par le sujet dans les conditions réelles.

Avec les années, plusieurs critères de confort ont été proposés. L'exposé en brosse quelques uns.

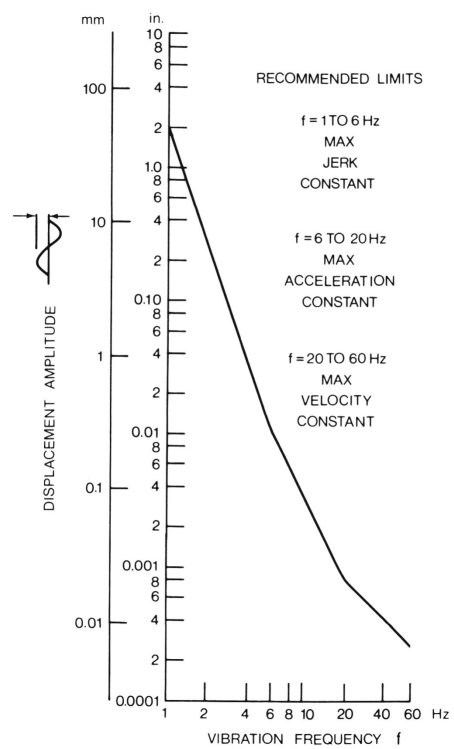


FIGURE 10.3 – Limitation de l'amplitude des vibrations verticales pour le confort des passagers selon le critère proposé par Janeway [26]

10.3.1 Critère de Janeway

Le premier critère est le critère du *Ride and Vibration Data Manual J6a* de la SAE, aussi connu sous le nom de *critère Janeway*. Ce critère donne l'amplitude admissible des vibrations verticales en fonction de leur fréquence. Lorsque la fréquence augmente, l'amplitude admissible diminue fortement comme le montre la Figure 10.3. Le critère de Janeway est en réalité constitué de trois relations simples (linéaires) valables dans trois plages de fréquence. Dans la première plage (1-6 Hz), on limite la valeur de pic du jerk, la dérivée troisième de la position verticale. Dans la seconde plage (6-20 Hz), on borne la valeur de pic de l'accélération (dérivée seconde) verticale. Enfin dans la dernière plage (20-60 Hz), c'est la vitesse, dérivée première de la position verticale qui est limitée :

- Zone 1 - 6 Hz : limitation du jerk $d^3z/dt^3 = Z \omega^3 < 12.6 \text{ m/s}^3$
- Zone 6 - 20 Hz : limitation de l'accélération $d^2z/dt^2 = Z \omega^2 < 0,33 \text{ m/s}^2$
- Zone 20 - 60 Hz : limitation de la vitesse $dz/dt = Z \omega < 2.710 - 3 \text{ m/s}$

Prenons un exemple numérique. L'amplitude maximale tolérable à 1Hz est de $12,6/(2\pi * 1\text{Hz})^3 = 0.0508 \text{ m}$.

On remarque que le critère de Janeway est basé sur un signal sinusoïdal vertical mono fréquence. On se pose la question du traitement à réaliser lorsque l'on a plusieurs fréquences appliquées simultanées. La réponse probable est que c'est la composante qui représente la plus grande sensibilité qui gouverne le sentiment d'inconfort.

On observe également que ce critère a été établi avec des sièges rigides, alors qu'en général les véhicules sont équipés de sièges qui possèdent une certaine souplesse procurant un certain amortissement.

10.3.2 Critère ISO 2631

Le guide général édité par l'ISO (règlement ISO 2631) définit la tolérance humaine face à des vibrations d'ensemble du corps. Cette réglementation s'applique aussi bien aux systèmes de transport qu'à l'industrie. Le guide définit 3 limites distinctes pour les vibrations dans la gamme 1-80 Hz.

- *Les limites d'exposition*. Elle sont reliées à la sécurité ou à la préservation de la santé. Elles ne doivent être dépassées qu'avec des justifications très spéciales.
- *Les limites de fatigue ou de capacité décroissante*, sont liées à la

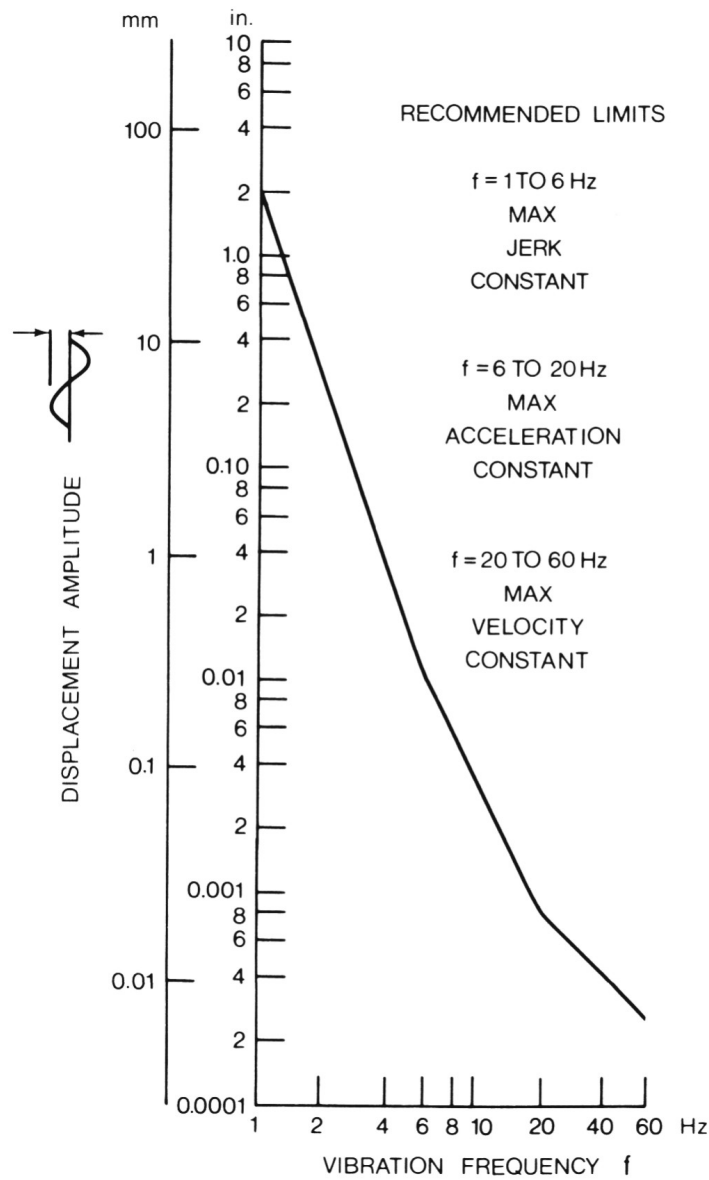


FIGURE 10.4 – Limitation des vibrations verticales auxquelles sont soumises le corps afin d'éviter la fatigue selon la réglementation ISO 2631 d'après [26]

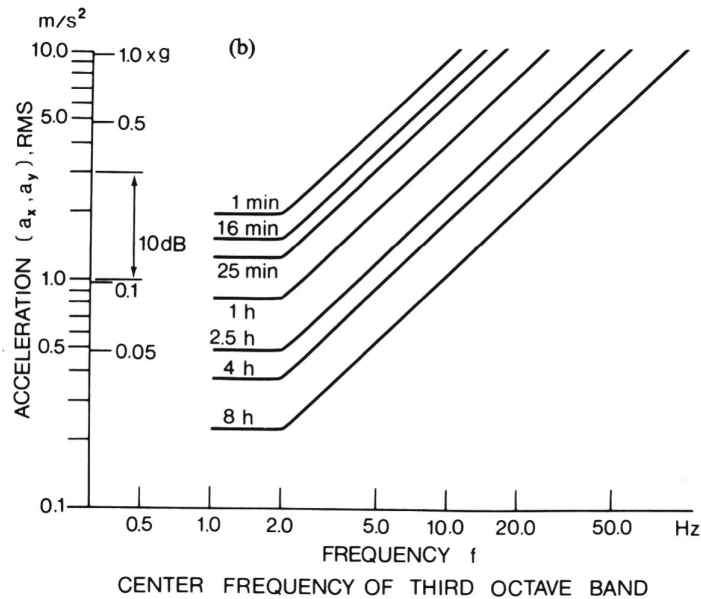


FIGURE 10.5 – Limitation des vibrations horizontales auxquelles sont soumises le corps afin d'éviter la fatigue selon la réglementation ISO 2631 d'après [26]

préservation de l'aptitude au travail. Elles s'appliquent aux tâches telles que la conduite de véhicules ou de tracteurs.

- *Les limites de confort réduit* sont les plus sévères. Elles concernent la préservation du confort, ce qui dans les moyens de transport correspond à la capacité de lire, écrire ou manger à bord des véhicules.

Les limites de sécurité sont obtenues à partir des limites de fatigue en augmentant celles-ci de 6dB (facteur 2). Quant aux limites de confort réduit, elles s'obtiennent à partir de limites de fatigue en retirant 10 dB (facteur 3.15). Les fréquences en dessous de 1 Hz sont un problème important, car elles impliquent des mouvements qui rendent malade. Une limite très sévère est proposée par l'ISO pour les fréquences entre 0.1 et 1 Hz.

En outre les critères donnent l'accélération RMS en fonction de la fréquence. Lorsque l'accélération a lieu selon plusieurs directions, le critère s'applique à chaque composante.

10.3.3 Limitation de la puissance absorbée

La puissance absorbée est le produit de la force de vibration par la vitesse transmise au corps humain. Une limitation de la puissance absorbée a été

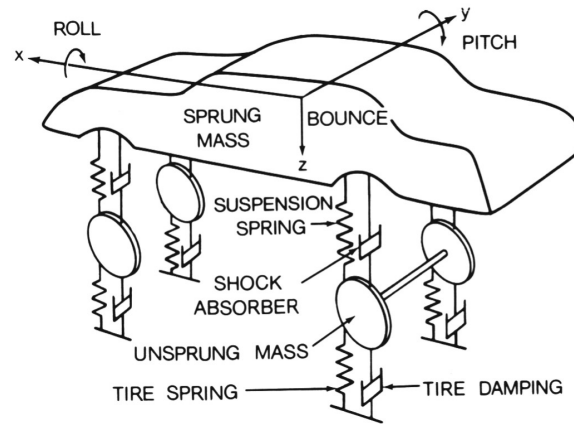


FIGURE 10.6 – Un modèle à 7 degrés de liberté d'une voiture de tourisme d'après [26]

aussi proposé comme un paramètre significatif de la réponse du corps aux vibrations. La puissance absorbée traduit une mesure du taux avec lequel le corps absorbe les vibrations. Ce critère est utilisé pour définir la tolérance aux vibrations dans les véhicules militaires tout-terrain. Le critère est à la base de la norme AMM-75 Ground Mobility Model de l'US Army. Cette norme a été adoptée ultérieurement par l'OTAN (NATA Reference Mobility Model) pour évaluer la qualité des véhicules militaires. La limite de tolérance actuelle est de 6W absorbée à la position du conducteur. La vitesse maximale du véhicule est celle limitant le confort. Elle est déterminée par la vitesse d'avance correspondant à une puissance moyenne absorbée par le conducteur atteignant le niveau de 6W.

10.4 Modèles de tenue de route

En vue d'étudier les qualités de confort et de tenue de route des véhicules, différents modèles ont été développés. Certains sont très simples et se prêtent à des solutions analytiques. D'autres, beaucoup plus complexes, nécessitent une résolution numérique.

La Figure 10.6 montre un modèle à 7 degrés de liberté d'une voiture de tourisme avec 4 suspensions indépendantes. Chaque débattement de roue est caractérisé par un degré de liberté tandis que la masse suspendue possède trois degrés de liberté : le tangage, le roulis et le pompage. A la Figure 10.7, on présente un modèle à 15 degrés de liberté destiné à l'étude du confort et de la tenue de route d'un char d'assaut.

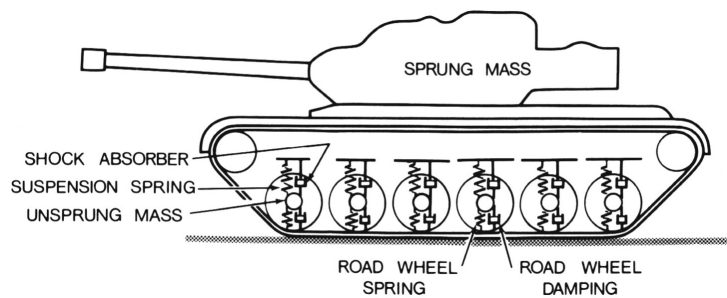


FIGURE 10.7 – Un modèle à 15 degrés de liberté pour la tenue de route d'un véhicule blindé d'après [26]

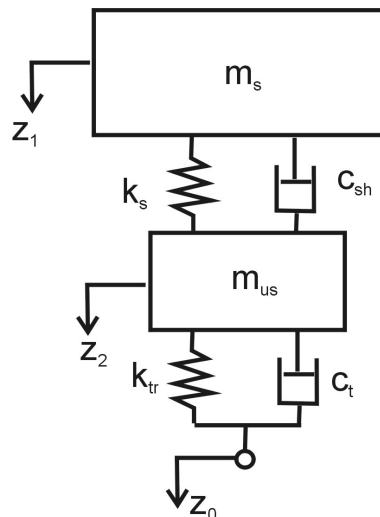


FIGURE 10.8 – Un modèle à deux degrés de liberté pour l'étude des mouvements caisse et de roue

L'étude des mouvements vibratoires d'un véhicule est un problème complexe. Il est toutefois possible d'obtenir une analyse de bonne qualité des propriétés principales du confort et de la tenue de route sur deux modèles très simples à deux degrés de liberté : le modèle dit du quart de voiture (présenté à la Figure 10.8) et le modèle de la poutre pour le tangage/ pompage (présenté à la Figure 10.9). Ces deux modèles permettent d'avoir un aperçu de l'influence des paramètres principaux suivants : les masses de la masse suspendue et la masse non-suspendue, la raideur des ressorts, la valeur de l'amortissement. Ces deux modèles font l'objet de la suite du chapitre.

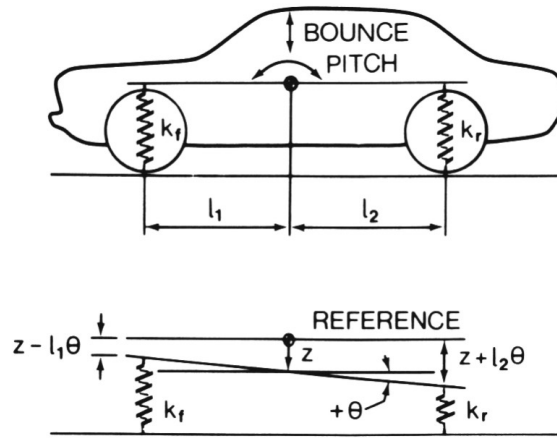


FIGURE 10.9 – Un modèle à deux degrés de liberté pour l'étude du pompage et du tangage d'après [26]

10.4.1 Quart de modèle à 2 ddl

L'étude du modèle de quart de voiture représenté à la Figure 10.8 permet de quantifier les mouvements de la caisse et de la roue. Ce modèle fait l'hypothèse que le mouvement de chaque quart de la voiture est indépendant des autres. On affecte donc un quart de la masse de la caisse à la masse suspendue (masse m_s) tandis que la masse du train roulant et de la roue est reprise sous la masse suspendue m_{us} . La raideur du ressort de suspension est k_s et l'amortissement des amortisseurs est c_s . Le pneumatique interposé entre la route et le train roulant possède également une raideur k_{tr} et un amortissement que l'on va supposer indépendant de la fréquence c_{tr} .

Les équations de la dynamique du système sont assez faciles à déterminer. Elles conduisent au système d'équations linéaires :

$$m_s \ddot{z}_1 + c_{sh} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s (z_1 - z_2) = 0 \quad (10.1)$$

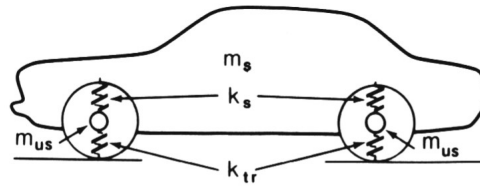
$$m_{us} \ddot{z}_2 + c_{sh} (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_s (z_2 - z_1) + c_t \dot{z}_2 + k_{tr} z_2 = F(t) = c_t \dot{z}_0 + k_{tr} z_0 \quad (10.2)$$

Vibrations libres non amorties

Il est de coutume d'étudier les fréquences naturelles et les modes propres de vibration du système non amorti :

$$m_s \ddot{z}_1 + k_s z_1 - k_s z_2 = 0 \quad (10.3)$$

$$m_{us} \ddot{z}_2 + (k_s + k_{tr}) z_2 - k_s z_1 = 0 \quad (10.4)$$



$$\begin{aligned}
 m_s &= 1814 \text{ kg, } 4000 \text{ lb} \\
 m_{us} &= 181 \text{ kg, } 400 \text{ lb, COMBINED} \\
 k_s &= 88 \text{ kN/m, } 500 \text{ lb/in., COMBINED} \\
 k_{tr} &= 704 \text{ kN/m, } 4000 \text{ lb/in., COMBINED}
 \end{aligned}$$

FIGURE 10.10 – Un modèle à deux degrés de liberté d'après [26]

Si on postule que les solutions sont de type harmonique :

$$z_1 = Z_1 \cos \omega_n t \quad (10.5)$$

$$z_2 = Z_2 \cos \omega_n t \quad (10.6)$$

le système devient :

$$(-m_s \omega_n^2 + k_s) Z_1 - k_s Z_2 = 0 \quad (10.7)$$

$$-k_s Z_1 + (-m_{us} \omega_n^2 + (k_s + k_{tr})) Z_2 = 0 \quad (10.8)$$

Les fréquences naturelles sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\omega_n^4 (m_s m_{us}) - \omega_n^2 (m_s k_s + m_s k_{tr} + m_{us} k_s) + k_s k_{tr} = 0 \quad (10.9)$$

Les solutions de cette équation bi carrée s'obtiennent aisément :

$$\omega_{n1}^2 = \frac{B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1} \quad (10.10)$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1} \quad (10.11)$$

avec

$$A_1 = m_s m_{us} \quad (10.12)$$

$$B_1 = m_s k_s + m_s k_{tr} + m_{us} k_s \quad (10.13)$$

$$C_1 = k_s k_{tr} \quad (10.14)$$

Il est intéressant d'évaluer l'ordre de grandeur de ces deux fréquences naturelles. Pour cela prenons l'exemple de la voiture renseigné à la Figure 10.10. Tous calculs faits, on trouve :

$$f_{n1} = 1,04 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{n2} = 10,5 \text{ Hz}$$

La première fréquence propre correspond à un mode propre où seule la caisse est en mouvement tandis que la seconde fréquence est celle d'un mode propre où la roue est principalement en vibration. Le premier mode est souvent appelé *mode de caisse* alors que le second mode est appelé *mode de roue* (ou wheel hop).

Remarquons que ces fréquences sont relativement distinctes à cause des raideurs assez différentes de la suspension et des pneumatiques. On peut souvent calculer les fréquences propres approximatives qui donnent une bonne estimation de leur valeur exacte :

$$f_{n,s} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_s k_{tr}/(k_s + k_{tr})}{m_s}} \quad (10.15)$$

$$f_{n,us} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_s + k_{tr}}{m_{us}}} \quad (10.16)$$

Réponse à un profil de route sinusoïdal

Examinons à présent les réponses de la caisse et de la roue à des excitations provenant du sol.

$$z_0 = Z_0 \cos \omega t \quad (10.17)$$

avec

$$\omega = 2\pi V/l_w \quad (10.18)$$

V la vitesse, et l_w la longueur d'onde des irrégularités du profil de route.

La réponse fréquentielle de la masse suspendue Z_1 en fonction de de la sollicitation Z_0 , s'obtient en résolvant la solution du système d'équations

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{B_2 + C_2}} \quad (10.19)$$

avec

$$A_2 = (k_s k_{tr})^2 + (c_{sh} k_{tr} \omega)^2 \quad (10.20)$$

$$B_2 = [(k_s - m_s \omega^2)(k_{tr} - m_{us} \omega^2) - m_s k_s \omega^2]^2 \quad (10.21)$$

$$C_2 = (c_{sh} \omega)^2 [m_s \omega^2 + m_{us} \omega^2 - k_{tr}]^2 \quad (10.22)$$

Le ratio d'amplitude de vibration de la masse non-suspendue Z_2 par rapport à la sollicitation Z_0 :

$$\frac{Z_2}{Z_0} = \frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{B_2 + C_2}} \quad (10.23)$$

avec

$$A_3 = [k_{tr} (k_s - m_s \omega^2)]^2 + (c_{sh} k_{tr} \omega)^2 \quad (10.24)$$

Dans le cas où on n'a pas d'amortissement,

$$c_{sh} = 0$$

la solution s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_0} &= \frac{k_s k_{tr}}{(k_s - m_s \omega^2)(k_{tr} - m_{us} \omega^2) - m_s k_s \omega^2} \\ &= \frac{k_s k_{tr}}{m_s m_{us} (\omega_{n1}^2 - \omega^2) (\omega_{n2}^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{Z_2}{Z_0} &= \frac{k_{tr} (k_s - m_s \omega^2)}{(k_s - m_s \omega^2)(k_{tr} - m_{us} \omega^2) - m_s k_s \omega^2} \\ &= \frac{k_{tr} (k_s - m_s \omega^2)}{m_s m_{us} (\omega_{n1}^2 - \omega^2) (\omega_{n2}^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Étude des paramètres

Pour évaluer les performances d'une suspension, on doit considérer trois aspects :

- *L'isolation des vibrations* : il s'agit de la réponse de la masse suspendue à des excitations du sol. Ceci peut être jugé à partir de la fonction de transfert du système linéaire Z_1/Z_0 .
- *Le débattement de suspension* : mesuré par la déflexion des ressorts de suspension ou par la distance relative entre les masses suspendue et non suspendue : $z_2 - z_1$. Il conditionne l'espace requis pour les mouvements du ressort de suspension.
- *L'adhérence à la route* : quand le véhicule vibre, la force normale de contact entre le pneu et le sol fluctue. Les forces développées par le pneu s'en trouvent modifiées aussi ce qui affecte la tenue de route. On étudie la variation de la force normale au travers de la déflexion dynamique du pneu ou par le déplacement de la masse non-suspendue par rapport au sol : $z_2 - z_0$.

Habituellement, on considère trois paramètres d'influence :

- La raideur k_s du ressort de suspension. Celle-ci est mesurée relativement à la raideur du pneumatique k_s/k_{tr} ;

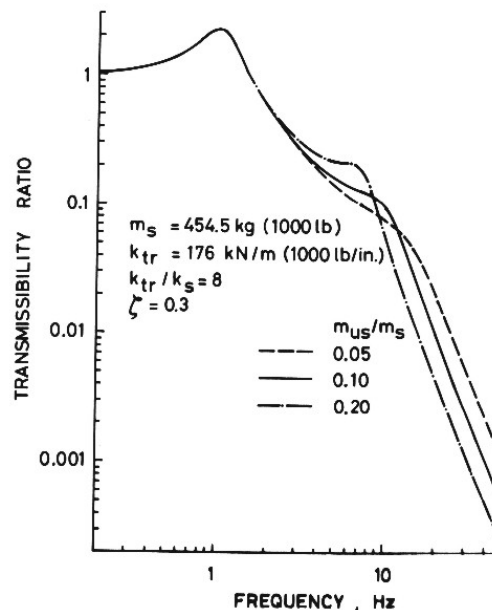


FIGURE 10.11 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de la masse non suspendue d'après [26]

- L'amortissement c_{sh} de l'amortisseur. On la mesure traditionnellement par rapport à l'amortissement critique du système masse ressort ;
- La valeur de la masse non suspendue m_{us} reprenant la masse de la roue et celle de la masse équivalente de la suspension. Celle-ci est mesurée relativement à la masse de la caisse ou masse suspendue m_s .

Critère d'isolation des vibrations de la masse suspendue

Le critère d'isolation de la masse suspendue vis-à-vis de vibrations provenant de la route concerne principalement le filtrage des vibrations de fréquences au voisinage de 1 Hz et surtout l'atténuation des fréquences dans l'intervalle 4 et 10 Hz fortement pénalisantes selon le critère ISO2631.

Examinons d'abord l'effet de la masse non-suspendue dont l'influence est mise en évidence par l'étude paramétrique de la Figure 10.11. On constate que sous la fréquence propre de résonance de la masse non-suspendue, la transmission est d'autant meilleure que la masse non-suspendue est plus faible. Par contre au-dessus de la fréquence de roue, c'est l'inverse. Conclusion : accordant la plus grande importance aux propriétés d'atténuation des fréquences inférieures à 10 Hz, il est important d'avoir une masse de train roulant (masse

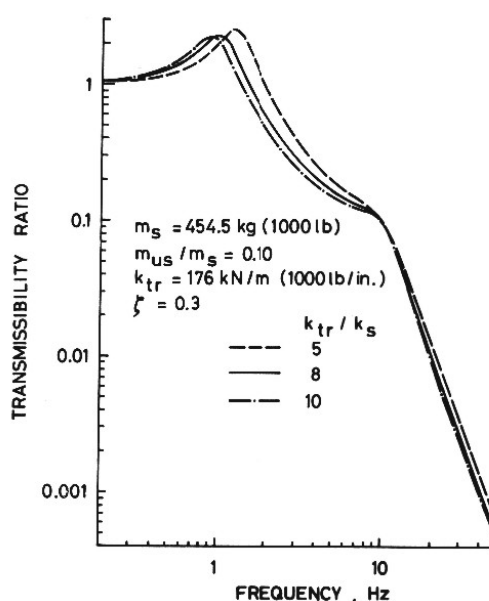


FIGURE 10.12 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de la raideur de la suspension d'après [26]

non-suspendue) aussi petite que possible pour avoir une meilleure isolation des vibrations de la caisse (masse suspendue), même s'il y a une pénalité dans les haute fréquences.

L'analyse paramétrique de la Figure 10.12 permet de saisir l'effet de la raideur de la suspension sur la transmission des sollicitations dynamiques depuis la route vers la masse suspendue. La raideur de pneu étant donnée, il apparaît qu'une suspension souple permet de réduire la transmission des vibrations entre les deux fréquences naturelles, malgré une pénalité aux basses fréquences.

Enfin l'effet de l'amortissement de la suspension est mis en évidence à la Figure 10.13. Un amortissement trop faible conduit à une amplitude inacceptable aux fréquences de résonance, par contre un amortissement trop important dégrade les performances dans la plage entre les deux fréquences naturelles dans l'intervalle particulièrement sensible pour le critère de fatigue (intervalle 4 - 10 Hz). En outre notons également qu'un amortissement trop important nous prive d'une atténuation de -40 dB / décade au-delà de la fréquence de roue, le réduisant à -20 dB / décade. En conclusion un amortissement ni trop grand ni trop faible (entre 0.3 et 0.7) est souhaitable.

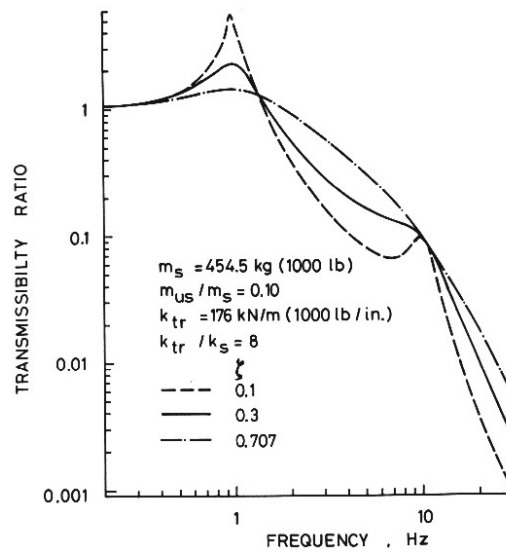


FIGURE 10.13 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

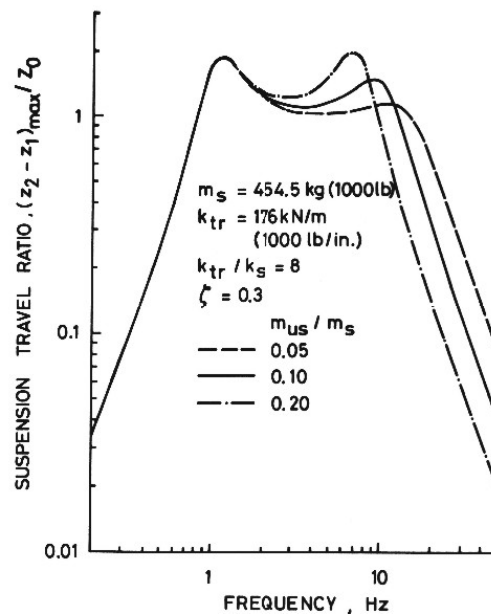


FIGURE 10.14 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

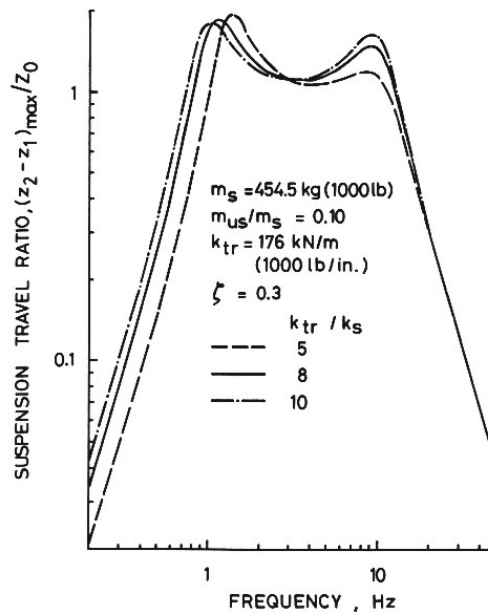


FIGURE 10.15 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

Critère de minimisation du débattement de la suspension

Étudions maintenant le débattement de la suspension. Le débattement de suspension est calculé comme le rapport entre la maximum temporel de la distance $(z_2 - z_1)_{\max}$, distance entre la roue et la caisse, et l'amplitude de l'excitation sous la roue. Le débattement doit être contrôlé dans toute la gamme de fréquences.

L'effet de la masse non-suspendue sur le débattement de suspension est illustré par l'étude de la Figure 10.14. Il y a apparaît qu'une petite masse de train roulant (masse non-suspendue) est meilleure pour réduire les débattements de la suspension autour de la fréquence de roue, même s'il y a une pénalité pour l'atténuation dans les hautes fréquences.

La Figure 10.14 montre l'effet de la raideur de la suspension sur le débattement de suspension. On y voit que sous la fréquence naturelle de la masse suspendue, une suspension raide diminue les débattements. Pour les fréquences intermédiaires, il existe une fréquence de croisement : en dessous, il est meilleur d'avoir une suspension souple, tandis que au-dessus il est meilleur de durcir la suspension. A hautes fréquences, la raideur a relativement peu d'effet. Le choix de la raideur n'est donc pas clair. Un compromis entre raideur

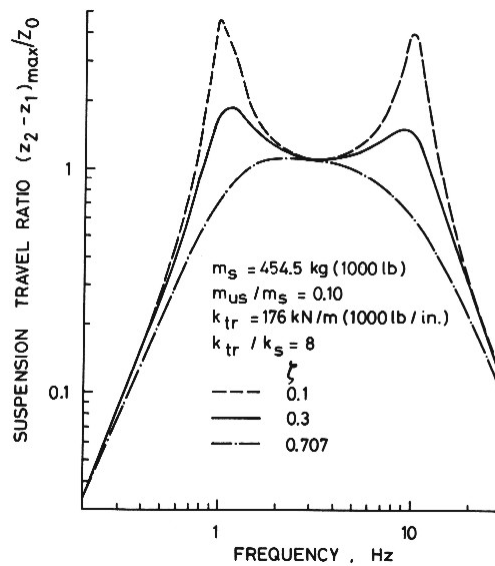


FIGURE 10.16 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

faible et forte semble indiqué.

L'influence de l'amortissement sur le débattement de suspension est clairement visible à la Figure 10.16. L'amortissement est important pour réduire les pics de résonance. Il est toujours favorable d'augmenter l'amortissement pour réduire l'amplitude des débattements de la suspension.

Critère de perte d'adhérence et de déflexion dynamique du pneu

La déflexion dynamique du pneumatique entraîne une perte de pression de contact entre le pneu et le sol et donc une perte de contrôle du véhicule. En effet les forces longitudinales et latérales développées par la pneumatique sont directement fonction de la force verticale sur le pneu. Il faut donc minimiser la déflexion du pneumatique. La déflexion dynamique se mesure par le rapport entre maximum temporel entre la distance $(z_2 - z_0)_{\max}$ et l'amplitude de l'excitation sous la roue z_0 . La déflexion dynamique concernant le contact roue sol, il est clair que la gamme de fréquence critique se situe au environ de la fréquence de résonance de la roue soit 10 Hz.

L'influence du paramètre de masse non-suspendue sur la déflexion dynamique du pneu est représenté à la Figure 10.17. Le maximum de la déflexion dynamique a lieu aux alentours de la fréquence de roue. C'est la zone critique

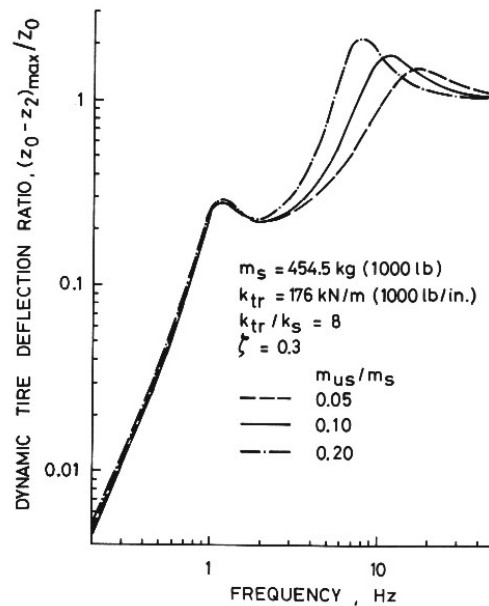


FIGURE 10.17 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

qui doit guider notre choix. On y voit qu'une faible masse non-suspendue réduit la déflexion dynamique du pneu. On peut même prédire que le pneu décolle du sol si la déflexion dynamique dépasse l'écrasement statique de la suspension.

On étudie maintenant le choix de la raideur de la suspension sur la déflexion dynamique du pneu (voir Figure 10.18). Entre la fréquence propre de la masse suspendue et la fréquence de croisement, une suspension souple réduit les déflexions du pneu. Au delà de la fréquence de croisement et autour de la fréquence propre de la masse non suspendue, une suspension raide diminue la déflexion du pneu et améliore la tenue de route. Une forte raideur est donc meilleure pour la tenue de route, alors que l'isolation des vibration demande le choix inverse.

La Figure 10.19 permet de constater l'effet de l'amortissement sur la déflexion dynamique du pneu. On y observe la réduction de la déflexion dynamique autour des fréquences naturelles de caisse et de roue avec l'augmentation de l'amortissement. Cela pénalise cependant les performances dans les fréquences intermédiaires.

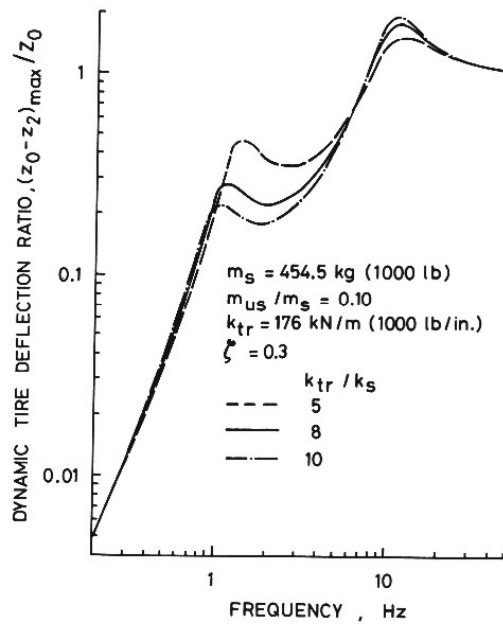


FIGURE 10.18 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

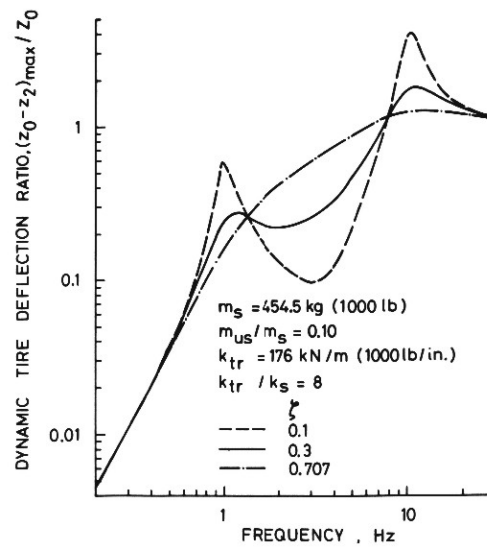


FIGURE 10.19 – Rapport de transmissibilité des vibrations à la masse suspendue en fonction de la fréquence pour un quart de modèle. Effet de l'amortissement d'après [26]

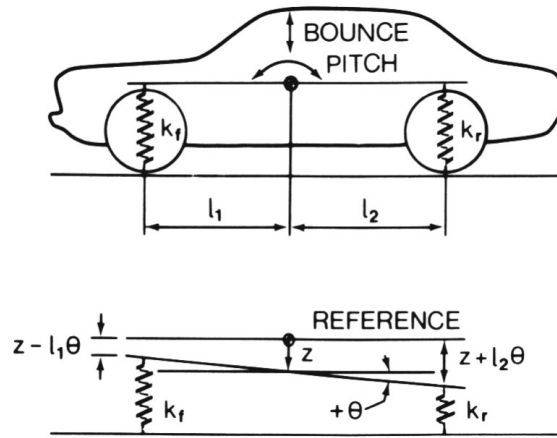


FIGURE 10.20 – Un modèle à deux degrés de liberté pour l'étude du pompage et du tangage d'après [26]

Conclusions récapitulatives

- Masse non suspendue / masse suspendue : Dans tous les cas, il est préférable que la masse non suspendue soit faible ($m_{us} < m_s/10$).
- Raideur des ressorts de suspension. Pour l'isolation des vibrations, il est recommandé d'adopter une suspension souple. Pour la réduire le débattement de suspension, il faudrait une suspension souple à basses fréquences et une suspension raide à hautes fréquences. Pour augmenter la tenue de route : le meilleur choix est une suspension raide. Conclusion : une suspension souple privilégie le confort, tandis qu'une suspension raide favorise la tenue de route.
- Amortissement : Il ne doit être ni trop grand ni trop faible pour avoir un bon confort et une bonne tenue de route à toutes fréquences (ζ entre 0.3 et 0.7) et ne pas perdre l'atténuation de -40 dB/décade aux hautes fréquences.

10.4.2 Étude du tangage et du pompage

Le pompage et le tangage sont deux modes de caisse. L'étude du quart de modèle nous apprend que ces modes ont de fréquences situées autour de 1 Hz. Les deux modes étant très proches, ils interagissent l'un avec l'autre. L'étude d'un modèle très simple à 2 ddl va nous apprendre que les modes sont le plus généralement couplés. Étant donné que les modes de roues et de

caisse sont largement découplés, aux environs de 1 Hz, les roues évoluent de manière quasi rigide en suivant la caisse. Il est donc toute à fait licite d'ignorer les débattements de la roue et de considérer le mouvement d'ensemble de la caisse et de la roue sur des suspensions de raideur équivalente à la mise en série de la raideur de suspension et des pneus. Dans une première étude l'amortissement des pneus et même de la suspension peuvent être négligés dans un premier temps.

L'ajustement des fréquences de pompage et de tangage a un effet direct sur l'acceptabilité des vibrations et du confort. Sur la plupart des véhicules, les mouvements de tangage et de pompage sont couplés. Il n'y a pas de mouvement de pompage pur ni de tangage pur. Le comportement en termes de fréquences de pompage / tangage et de centre de mouvement peut être facilement extrait d'un modèle simple à 2 degrés de liberté.

Les équations de la dynamique du système s'écrivent

$$m_s \ddot{z} + k_f (z - l_f \theta - z_f) + k_r (z + l_r \theta - z_r) = 0 \quad (10.27)$$

$$I_y \ddot{\theta} - k_f l_f (z - l_f \theta - z_f) + k_r l_r (z + l_r \theta - z_r) = 0 \quad (10.28)$$

Il est habituel d'exprimer le moment d'inertie I_y au moyen du rayon de giration r_y :

$$I_y = m_s r_y^2 \quad (10.29)$$

On pose également

$$D_1 = \frac{1}{m_s} (k_f + k_r) \quad (10.30)$$

$$D_2 = \frac{1}{m_s} (k_r l_r - k_f l_f) \quad (10.31)$$

$$D_3 = \frac{1}{I_y} (k_f l_f^2 + k_r l_r^2) = \frac{1}{m_s r_y^2} (k_f l_f^2 + k_r l_r^2) \quad (10.32)$$

Le système d'équations décrivant la dynamique du système devient :

$$\ddot{z} + D_1 z + D_2 \theta = 0 \quad (10.33)$$

$$\ddot{\theta} + D_3 \theta + \frac{D_2}{r_y^2} z = 0 \quad (10.34)$$

On obtient la condition de découplage :

$$D_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_f l_f = k_r l_r \quad (10.35)$$

Dans ce cas particulier, les fréquences propres sont simplement :

$$\omega_{n,z} = \sqrt{D_1} = \sqrt{\frac{k_f + k_r}{m_s}} \quad (10.36)$$

$$\omega_{n,\theta} = \sqrt{D_3} = \sqrt{\frac{k_f l_f^2 + k_r l_r^2}{I_y}} \quad (10.37)$$

Ce cas est rarement rencontré en pratique. En général les 2 fréquences sont couplées et une impulsion sur une roue avant ou arrière produit du tangage et du pompage.

$$z = Z \cos \omega_n t \quad (10.38)$$

$$\theta = \Theta \cos \omega_n t \quad (10.39)$$

$$(10.40)$$

Les équations dynamiques deviennent :

$$(D_1 - \omega_n^2) Z + D_2 \Theta = 0 \quad (10.41)$$

$$\left(\frac{D_2}{r_y^2}\right) Z + (D_3 - \omega_n^2) \Theta = 0 \quad (10.42)$$

Les fréquences naturelles sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\omega_n^4 - (D_1 + D_3) \omega_n^2 + \left(D_1 D_3 - \frac{D_2^2}{r_y^2}\right) = 0 \quad (10.43)$$

Les deux fréquences naturelles sont :

$$\omega_{n1}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \quad (10.44)$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) + \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \quad (10.45)$$

Ces deux fréquences sont toujours *en dehors* de l'intervalle défini par les deux fréquences non couplées $\omega_{n,z}$ et $\omega_{n,\theta}$.

Le rapport entre les amplitudes de pompage et de tangage peut être calculé pour chaque mode propre :

$$\frac{Z}{\Theta} \Big|_{\omega_{n1}} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} \quad (10.46)$$

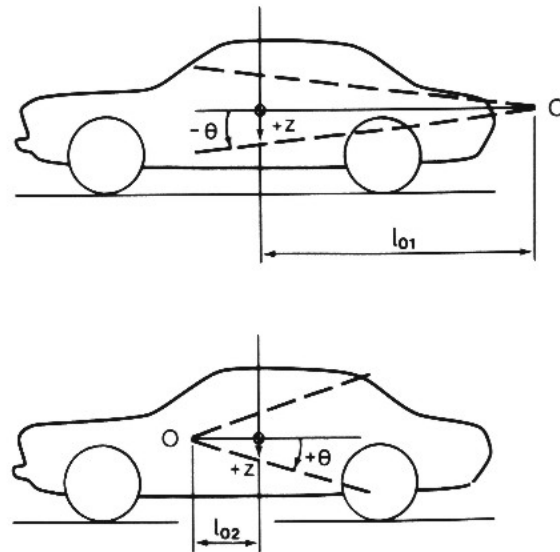


FIGURE 10.21 – Centres d’oscillation de la caisse en tangage et en pompage d’après [26]

$$\frac{Z}{\Theta} \Big|_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} \quad (10.47)$$

On peut montrer que les deux rapports ont des signes opposés. Pour illustrer encore d’avantage les caractéristiques des deux modes d’oscillation, on introduit le concept de *centre d’oscillation*. La localisation du centre d’oscillation est dénotée l_0 et elle est mesurée à partir du centre de gravité. Elle peut être déterminée à partir du rapport des amplitudes de vibrations en pompage et en tangage. Le centre d’oscillation s’interprète facilement comme le noeud du mode de vibration. Il y en a un pour chaque fréquence propre.

$$l_{01} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} < 0 \quad (10.48)$$

$$l_{02} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} > 0 \quad (10.49)$$

Les longueurs des centres d’oscillations sont signées. La valeur négative indique que le centre d’oscillation se trouve en arrière du centre de masse qui est le centre du repère. A contrario la valeur positive indique que le second mode est située en avant du centre de masse. Lorsque le centre d’oscillation se situe loin du centre de masse, on en déduit que le mode est de pompage dominant tandis que lorsque le centre d’oscillation est proche du centre de masse, il s’agit d’une mode de tangage dominant.

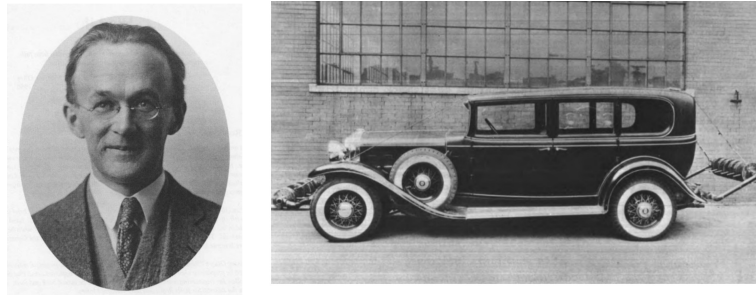


FIGURE 10.22 – Maurice Oley, pionnier de l'étude de la dynamique du véhicule et du confort a conduit des expériences avec une voiture dont le moment d'inertie en tangage pouvait être modifié

Exercice

Soient les données du véhicule :

$$\begin{aligned} m_s &= 2120\text{kg} & r_y &= 1.33\text{m} \\ l_f &= 1.267\text{m} & l_r &= 1.548\text{m} \\ k_f &= 35\text{kN/m} & k_r &= 38\text{kN/m} \end{aligned}$$

Déterminer les fréquences de pompage et de tangage ainsi que les centres d'oscillation.

On obtient :

$$D_1 = 34.43\text{s}^{-2} \quad D_2 = 6.83\text{ms}^{-2} \quad D_3 = 39.26\text{s}^{-2}$$

Soient

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= 31,17\text{s}^{-1} & \omega_{n2} &= 42.52\text{s}^{-1} \\ f_{n1} &= 0,89\text{Hz} & f_{n2} &= 1,04\text{Hz} \\ l_{01} &= -2.09\text{m} & l_{02} &= +0.84\text{m} \end{aligned}$$

Le premier mode est un mode de pompage principalement tandis que le second est dominé par le tangage.

10.4.3 Règles de bonne pratique dans la conception des véhicules

Dès 1930, Maurice Olley, un pionnier de la dynamique des véhicules automobiles modernes, a émis 4 recommandations pour concevoir des voitures

avec un bon confort et une bonne tenue de route (tout au moins pour les basses fréquences). Celles-ci proviennent de l'expérimentation sur une voiture à inertie giratoire variable. Elles restent aujourd'hui des règles de bonne pratique pour concevoir des voitures modernes.

Règle 1

La suspension avant doit avoir une raideur (taux de tenue de route) 30% plus faible que la suspension arrière, autrement dit le centre de raideur doit être au moins à 6,5% de l'empattement derrière le CG. La règle ne donne pas les fréquences propres des suspensions, car la distribution des masses entre l'avant et l'arrière est proche de 50-50, mais elle nous dit que la suspension arrière doit être plus raide que l'avant

Règle 2

Les fréquences de pompage et de tangage doivent être proches l'une de l'autre. La fréquence de pompage doit être inférieure à 1.2 fois la fréquence de tangage. Pour des plus hauts rapports, il y a des saccades liées à l'interférences des mouvements oscillatoires résultant de la superposition des modes de pompage et de tangage. Généralement cette condition est réalisée sur les voitures modernes.

Règle 3

Aucune fréquence ne doit être plus grande que 1.3 Hz, ce qui signifie que la déflexion statique effective du véhicule ne doit pas dépasser 6 pouces.

Règle 4

La fréquence de roulis devrait être approximativement égale aux fréquences de tangage et de pompage. Généralement, la condition est réalisée sur les voitures modernes.

Cinquième partie

**DYNAMIQUE DES
COLLISIONS ET SECURITE
PASSIVE**

Chapitre 11

INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES COLLISIONS

11.1 Introduction

Les accidents de la route sont aussi vieux que l'automobile elle-même. Le premier véhicule, le fardier de Cugnot, termina ainsi une de sa première course dans le mur de la ferme voisine (voir Fig. 11.1). La sécurité routière est une des préoccupations majeures des utilisateurs, des constructeurs et des pouvoirs publics. Sans parler du coût émotionnel lié aux blessures et aux décès de proches, les accidents de la route ont un coût externe énorme que l'on peut estimer à 2 % du PIB. Depuis les années 1950 la sécurité a été au centre de nombreux développements technologiques. L'amélioration de la sécurité des véhicules a connu une accélération remarquable depuis les années 1980 avec l'action combinée de compagnes de crash-tests et de moyens de simulations numériques de plus en plus fidèles (voir Fig. 11.2).



FIGURE 11.1 – Le premier accident de la route avec le fardier de Cugnot

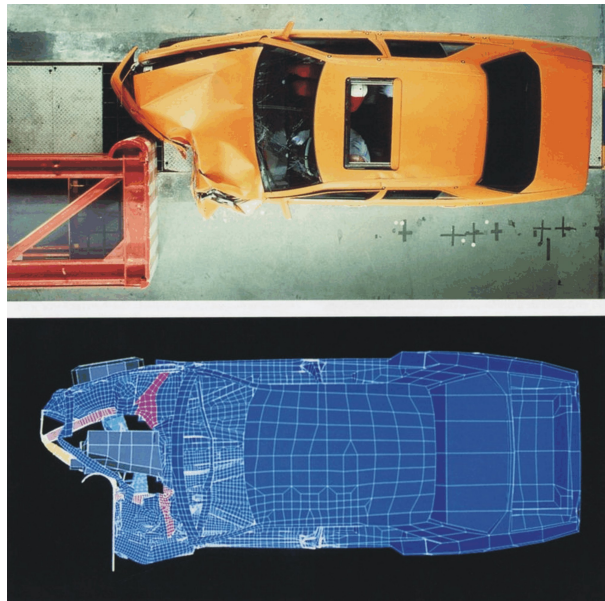


FIGURE 11.2 – Amélioration de la résistance au crash grâce à l'action combinée de crash-tests et de campagne de simulations numériques de plus en plus fidèles

Le problème de la sécurité passive consiste à déterminer dans quelle mesure une collision du véhicule sur un obstacle sera susceptible de provoquer des lésions aux occupants.

Les chocs provoquent :

- des accélérations très violentes ;
- des déformations du véhicule.

Les accélérations sont dangereuses, car elles peuvent provoquer des efforts violents entre les passagers et des organes fixes du véhicule, souvent accompagnés de chocs. C'est pour éviter ceux-ci que l'on préconise le port de la ceinture de sécurité ou l'adjonction d'airbags. En cette matière, l'existence d'objets saillants constitue un danger. En particulier, la colonne de direction a été responsable de bien des dommages corporels. Une première amélioration a donc consisté à reconsidérer le dessin des volants et des colonnes de direction et de proposer des formes douces et des colonnes retractables en cas de choc.

Les déformations du véhicule sont tout aussi dangereuses, car elles risquent d'écraser les passagers. C'est pourquoi, la tendance actuelle est de concevoir des habitacles renforcés voire indéformables et des extrémités plus déformables, de manière à absorber de manière maximale l'énergie des chocs (et à diminuer

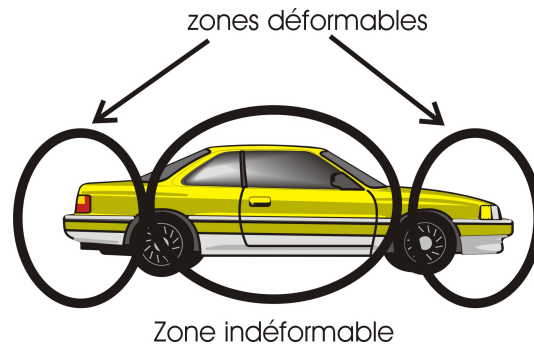


FIGURE 11.3 – Zones déformables et indéformables d'un véhicule

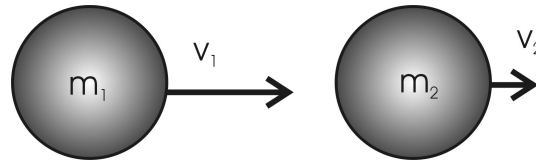


FIGURE 11.4 – Choc entre deux corps

les accélérations). Néanmoins, lorsqu'une portion importante de la carrosserie est déformée, les organes mécaniques, toujours rigides sont repoussés dans l'habitacle. Il convient donc de limiter à la fois la déformation et l'accélération ce qui, comme nous le verrons est contradictoire. Il faudra donc s'en tenir à un compromis (voir Fig. 11.3).

L'objet du chapitre est de brosser une introduction à la mécanique des chocs afin de pouvoir appréhender les ordres de grandeurs de phénomènes à l'oeuvre lors des collisions. Après un rappel de la théorie des collisions, nous appliquerons les équations à l'étude du choc frontal d'un véhicule contre un mur rigide et ensuite à l'étude de la collision frontale entre deux véhicules se dirigeant en sens adverses.

11.2 Théorie élémentaire du choc

11.2.1 Impulsion

Considérons deux corps de masses m_1 et m_2 ayant les vitesses v_1 et v_2 avant choc, dans la même direction (voir Fig. 11.4). Le corps 1 est supposé se trouver derrière le corps 2, avec $v_1 > v_2$.

Juste avant le choc, l'impulsion totale du système vaut :

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (11.1)$$

Les masses ont une vitesse moyenne :

$$\bar{u} = \frac{p}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (11.2)$$

Il s'agit évidemment de la vitesse du centre de masse du système. On peut définir les vitesses relatives par rapport au centre de masse du système :

$$w_1 = v_1 - \bar{u} \quad w_2 = v_2 - \bar{u} \quad (11.3)$$

ainsi que l'impulsion relative p_r

$$p_r = m_1 w_1 + m_2 w_2 \quad (11.4)$$

Elle est nécessairement nulle. En effet, on voit aisément que :

$$\begin{aligned} p_r &= m_1 (v_1 - \bar{u}) + m_2 (v_2 - \bar{u}) \\ &= m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) \bar{u} \\ &= p - p = 0 \end{aligned}$$

Après le choc, celui-ci ne résultant pas de forces extérieures, l'impulsion se conserve, ce qui s'écrit en notant v'_1 et v'_2 les vitesses après le choc :

$$p' = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = p \quad (11.5)$$

ou encore

$$p_r = m_1 w'_1 + m_2 w'_2 = 0 \quad (11.6)$$

11.2.2 Énergie cinétique

Avant le choc, l'énergie cinétique du système s'écrit

$$\begin{aligned} 2T &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 (\bar{u} + w_1)^2 + m_2 (\bar{u} + w_2)^2 \\ &= (m_1 + m_2) \bar{u}^2 + 2\bar{u} (m_1 w_1 + m_2 w_2) + m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 \\ &= \frac{p^2}{m_1 + m_2} + m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 = 2T_0 + 2T_r \end{aligned} \quad (11.7)$$

où T_0 est l'énergie cinétique d'ensemble et T_r est l'énergie cinétique relative.

L'énergie cinétique d'ensemble se conserve nécessairement, mais pas T_r , l'énergie cinétique relative. Dans cette optique, on distingue :

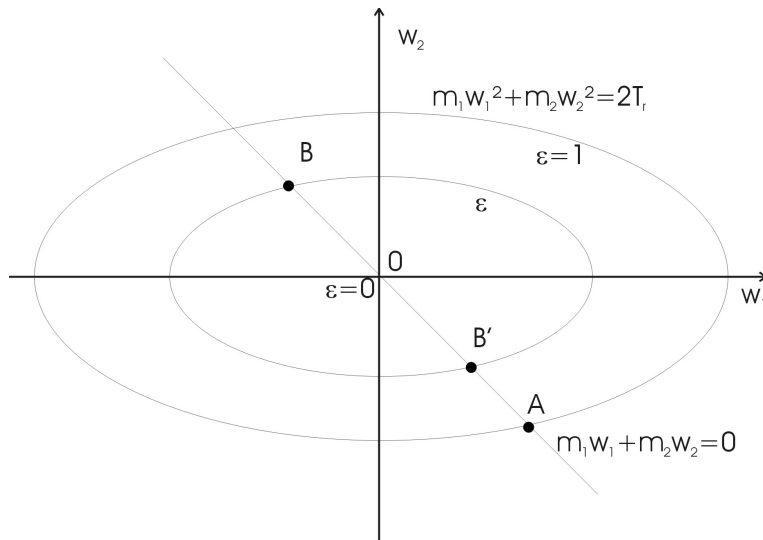


FIGURE 11.5 – Diagramme des vitesses relatives avant et après un choc

- *Choc élastique* dans lequel l'énergie cinétique relative se conserve :

$$T_r = T'_r \quad (11.8)$$

Ce cas est une idéalisation des petits chocs (expérience des billes).

- *Choc parfaitement mou*, où toute l'énergie relative est dissipée en chaleur et en vibration :

$$T'_r = 0 \quad (11.9)$$

- *Choc mous*, où une partie de l'énergie cinétique est perdue en chaleur et en bruit. On écrit alors :

$$T'_r = \epsilon^2 T_r \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (11.10)$$

où ϵ est appelé *coefficient de restitution*.

11.2.3 Solution des équations

Ces circonstances sont représentées à la Fig. 11.5. La courbe d'équation

$$m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 = 2T_r$$

est une ellipse dont les demi-axes ont pour longueur $\sqrt{\frac{2T_r}{m_1}}$ et $\sqrt{\frac{2T_r}{m_2}}$ respectivement. La condition

$$m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 = 0$$

est une droite. Le point de rencontre entre l'ellipse et la droite est le point A. Il s'agit du point de fonctionnement avant le choc. Après le choc, l'énergie cinétique relative devient $\epsilon^2 T_r$, ce qui réduit les demi-axes d'un facteur ϵ . On obtient une seconde ellipse dont les petits et grands axes sont $\epsilon \sqrt{\frac{2T_r}{m_1}}$ et $\epsilon \sqrt{\frac{2T_r}{m_2}}$. La solution après choc pourrait donc être représentée par le point B ou le point B'. Mais le point B' suppose que le corps 1 passe à travers le corps 2, ce qui est impossible. La solution est donc le point B qui est caractérisé par des vitesses relatives qui ont changé de signe. Le rapport des segments OB et OA est d'ailleurs égal au coefficient de restitution, c'est-à-dire que

$$w'_1 = -\epsilon w_1 \quad (11.11)$$

$$w'_2 = -\epsilon w_2 \quad (11.12)$$

Il convient de remarquer que, de toute manière, la perte maximale d'énergie cinétique est T_r . En pratique, la perte d'énergie vaut :

$$\Delta T = (1 - \epsilon^2) T_r \quad (11.13)$$

Dans le cas particulier d'un corps heurtant un mur parfaitement rigide et immobile, on a $v_2 = 0$ et $m_2 \gg m_1$. Il vient :

$$2T_0 = \frac{p_1^2}{m_1 + m_2} \approx 0$$

$$u = \frac{m_1 w_1}{m_1 + m_2} \approx 0$$

$$T_r = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 \approx \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

et la perte d'énergie :

$$\Delta T = (1 - \epsilon^2) T_r = (1 - \epsilon^2) \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

11.3 Modélisation du choc frontal d'un véhicule contre un mur

11.3.1 Modélisation

Le véhicule sera modélisé par une masse m , représentant la partie indéformable du véhicule, précédé d'une zone d'absorption d'énergie (voir Fig.

11.3. MODÉLISATION DU CHOC FRONTAL D'UN VÉHICULE CONTRE UN MUR 385



FIGURE 11.6 – Modélisation d'un véhicule entrant en collision avec un mur

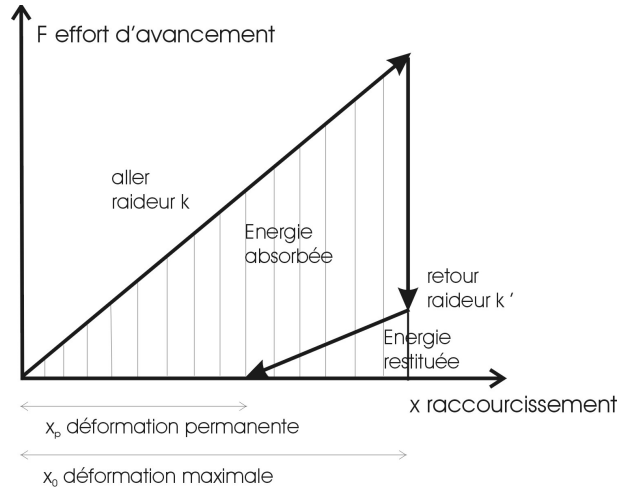


FIGURE 11.7 – Modélisation d'un véhicule entrant en collision avec un mur

11.6). L'expé/-rience nous apprend que celle-ci peut admettre une caractéristique linéaire par morceaux illustrée à la Figure 11.7.

Lors de la course aller, l'effort d'avancement a une croissance linéaire, jusqu'à la déformation maximale. Cet effort d'avancement comprend la résistance élastique et l'effort nécessaire à continuer la déformation en dissipant de l'énergie. Plus on avance, plus il faut déformer de la matière. Après la déformation maximale, le véhicule se détend élastiquement. La partie inélastique de l'énergie emmagasinée n'est pas récupérée et est dissipée.

11.3.2 Bilan énergétique

Le bilan des énergies s'établit comme suit :

- énergie avant le choc : $T = 1/2 m v_0^2$
- énergie emmagasinée jusqu'à l'arrêt : $W = 1/2 k x_0^2$
- énergie restituée : $V = 1/2 k' (x_0 - x_p)^2$

L'arrêt se produit lorsque le corps aura emmagasiné toute l'énergie cinétique,

soit $W = T$, ce qui donne la condition :

$$x_0^2 = \frac{m v_0^2}{k} \quad (11.14)$$

soit

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} \quad (11.15)$$

en introduisant la pulsation :

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (11.16)$$

Par ailleurs l'énergie restituée V se transforme en énergie cinétique, c'est-à-dire que

$$V = T' = \epsilon^2 T$$

soit

$$\frac{1}{2} m v_o'^2 = \frac{\epsilon^2}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} k'(x_0 - x_p)^2 \quad (11.17)$$

Tenant compte de la relation sur x_0 , il vient :

$$\frac{\epsilon^2}{2} m \omega^2 x_o^2 = \frac{1}{2} k'(x_0 - x_p)^2$$

soit

$$\frac{\epsilon^2}{2} k x_o^2 = \frac{1}{2} k'(x_0 - x_p)^2$$

ou encore

$$\epsilon \sqrt{k} x_o = \sqrt{k'}(x_0 - x_p)$$

Au final, on trouve :

$$x_p = (1 - \epsilon \sqrt{k/k'}) x_0 = (1 - \epsilon \sqrt{k/k'}) v_0/\omega \quad (11.18)$$

11.3.3 Equation du mouvement du véhicule

Première partie du choc

Pendant la première partie du choc, i.e. tant que $\dot{x} > 0$, l'équation s'écrit :

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (11.19)$$

Si $x(0) = 0$, on a pour solution :

$$x = x_0 \sin \omega t \quad (11.20)$$

11.3. MODÉLISATION DU CHOC FRONTAL D'UN VÉHICULE CONTRE UN MUR387

La vitesse vaut donc :

$$\dot{x} = x_0 \omega \cos \omega t \quad (11.21)$$

ce qui confirme la valeur :

$$v_0 = \omega x_0 \quad (11.22)$$

Enfin l'accélération vaut :

$$\ddot{x} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x \quad (11.23)$$

Son maximum vaut :

$$\gamma_0 = \omega^2 x_0 = \omega v_0 \quad (11.24)$$

Cette phase s'arrête un temps :

$$t_c = \pi/2\omega \quad (11.25)$$

Seconde partie du choc

La seconde phase du choc est celle pour laquelle $\dot{x} < 0$. L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \ddot{x} + k' (x - x_p) = 0 \quad (11.26)$$

ce qui est équivalent à :

$$m (\ddot{x} - \ddot{x}_p) + k' (x - x_p) = 0 \quad (11.27)$$

La solution du problème s'écrit :

$$(x - x_p) = (x_0 - x_p) \cos \omega' (t - t_c) \quad (11.28)$$

avec

$$\omega' = \sqrt{k'/m} = \omega \sqrt{k'/k} \quad (11.29)$$

Compte tenu de la valeur de x_p , il vient :

$$(x - x_p) = \epsilon \sqrt{\frac{k}{k'}} x_0 \cos \omega' (t - t_c) = \epsilon \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{v_0}{\omega} \cos \omega' (t - t_c) \quad (11.30)$$

Il vient donc pour la second partie du mouvement :

$$(x - x_p) = \epsilon \frac{v_0}{\omega'} \cos \omega' (t - t_c) \quad (11.31)$$

$$v = \epsilon v_0 \sin \omega' (t - t_c) \quad (11.32)$$

$$\gamma = -\epsilon \omega' v_0 \cos \omega' (t - t_c) \quad (11.33)$$

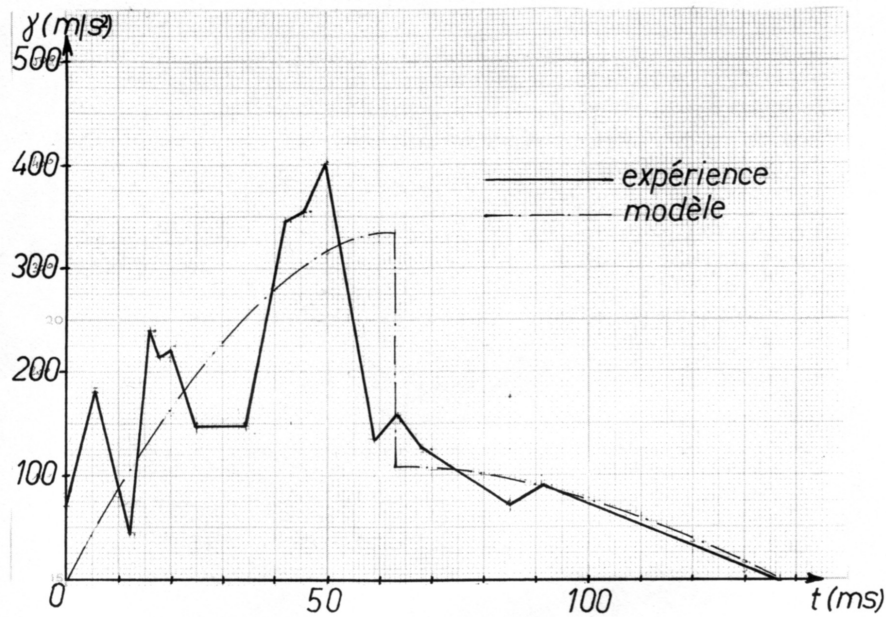


FIGURE 11.8 – Crash test d’un véhicule contre un mur : accélération en fonction du temps

11.3.4 Identification des paramètres

Avant même de discuter des résultats du modèle, voyons comment on peut en identifier les paramètres. Pour cela, il faut faire un essai malheureusement destructif, consistant à envoyer contre un mur un véhicule muni d’accéléromètres. Nous empruntons les résultats d’un tel essai à RAPIN [20].

Il s’agit d’un véhicule de 2000 kg lancé 48,31 km/h, soit 13,42 m/s. On remarquera d’emblée l’importance des accélérations, puisque le maximum se situe au-delà de 400 m/s^2 .

A partir des accélérations, on peut procéder à l’intégration numérique en utilisant par exemple la méthode des trapèzes. On trouve la variation de vitesse

$$\Delta v = \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \quad (11.34)$$

Cette variation doit être soustraite à v_0 , ce qui donne

$$v = v_0 - \Delta v \quad (11.35)$$

Une nouvelle intégration numérique fournit l’enfoncement

$$x = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (11.36)$$

11.3. MODÉLISATION DU CHOC FRONTAL D'UN VÉHICULE CONTRE UN MUR 389

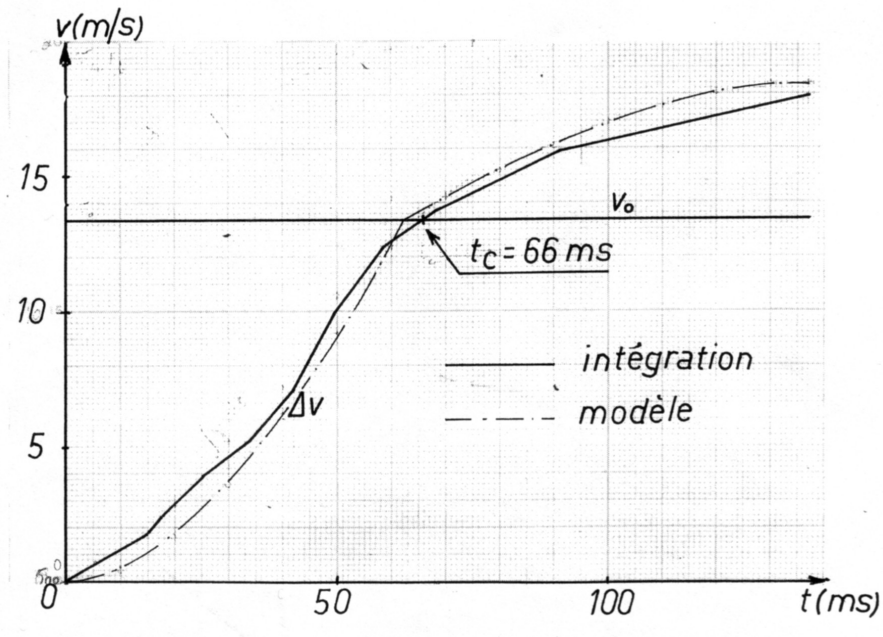


FIGURE 11.9 – Crash test d'un véhicule contre un mur : vitesse en fonction du temps

Les résultats des calculs sont synthétisés dans le tableau 11.1

Le diagramme des vitesses est représenté à la figure 11.9 et les déplacements à la Figure 11.10.

On peut alors établir le diagramme accélération déplacement (voir Fig. 11.11). Sa forme en dents de scie est due à des phénomènes de rupture en cascade. C'est ce diagramme que l'on va approcher à l'aide de deux droites, par la méthode des moindres carrés, en fixant l'origine de la droite. Pour ω^2 , on a donc la formule :

$$\omega^2 = \frac{\sum_{v>0} \gamma x}{\sum_{v>0} x^2} \quad (11.37)$$

et pour ω'^2 , il faut écrire

$$\omega'^2 = \frac{\sum_{v<0} \gamma (x - x_p)}{\sum_{v<0} (x - x_p)^2} \quad (11.38)$$

On obtient ainsi

$$\omega^2 = 621,5 \quad \omega'^2 = 449,3$$

Il en découle

$$\omega = 24,93 \text{ s}^{-1} \quad \omega' = 21,20 \text{ s}^{-1}$$

| t (ms) | Δt (ms) | γ (m/s ²) | Δv (m/s) | v (m/s) | x (mm) |
|-----------|--------------------|---------------------------------|---------------------|------------|-----------|
| 0,0 | 0,0 | 70,7 | 0,0 | 13,42 | 0,0 |
| 5,5 | 5,5 | 182,0 | 0,695 | 12,7 | 71,8 |
| 12,1 | 6,6 | 45,7 | 1,45 | 12,0 | 153,0 |
| 15,4 | 3,3 | 239,0 | 1,92 | 11,5 | 192,0 |
| 17,6 | 2,2 | 217,0 | 2,42 | 11,0 | 217,0 |
| 19,9 | 2,3 | 221,0 | 2,92 | 10,5 | 242,0 |
| 25,3 | 5,4 | 147,0 | 3,91 | 90,51 | 296,0 |
| 34,3 | 9,0 | 147,0 | 5,24 | 8,18 | 375,0 |
| 41,9 | 7,6 | 346,0 | 7,11 | 6,31 | 430,0 |
| 45,7 | 3,8 | 353,0 | 8,44 | 4,98 | 452,0 |
| 49,6 | 3,9 | 400,0 | 9,91 | 3,51 | 468,0 |
| 58,5 | 8,9 | 136,0 | 12,3 | 1,12 | 489,0 |
| 63,3 | 4,8 | 157,0 | 13,0 | 0,42 | 493,0 |
| 68,2 | 4,9 | 125,0 | 13,7 | -0,28 | 493,0 |
| 84,9 | 16,7 | 70,7 | 15,3 | -1,88 | 475,0 |
| 91,5 | 6,6 | 31,3 | 15,9 | -2,48 | 460,0 |
| 137,0 | 45,5 | 0,0 | 17,9 | -4,48 | 302 |

TABLE 11.1 – Tableau des accélérations, vitesses et déplacements en fonction du temps

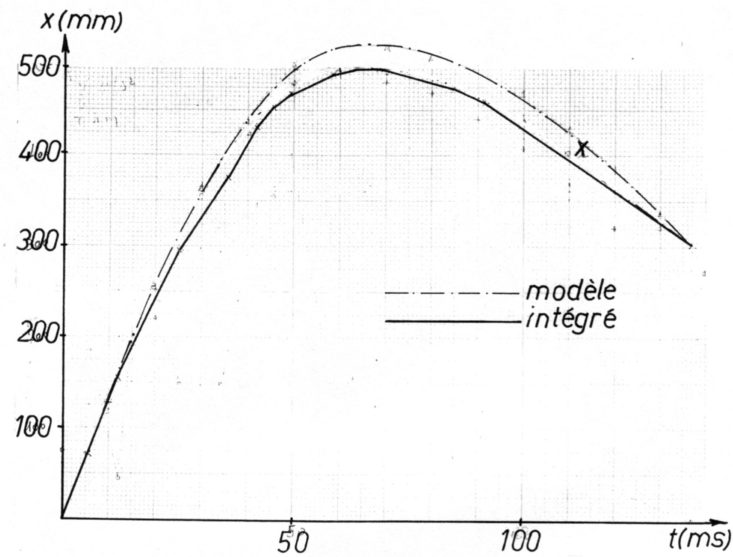


FIGURE 11.10 – Crash test d'un véhicule contre un mur : déplacement en fonction du temps

11.3. MODÉLISATION DU CHOC FRONTAL D'UN VÉHICULE CONTRE UN MUR 391

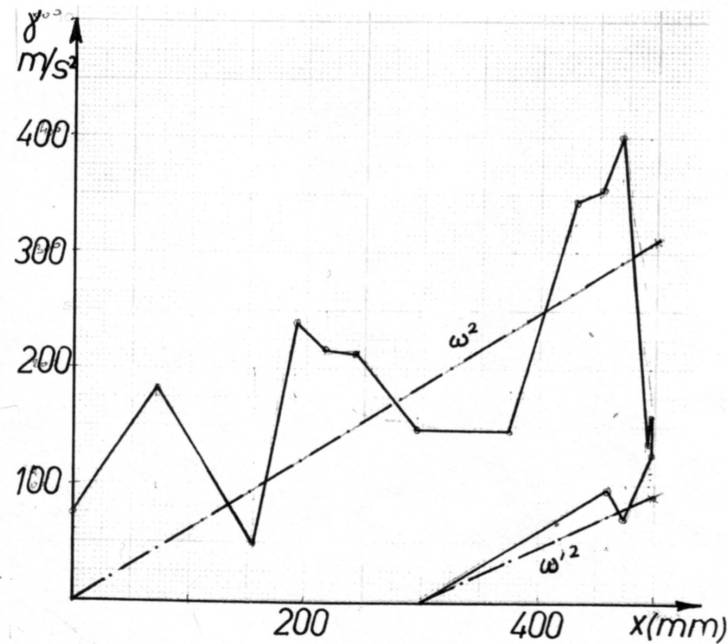


FIGURE 11.11 – Crash test d'un véhicule contre un mur : accélération en fonction de l'écrasement

et

$$t_c = \frac{\pi}{2\omega} = 63,01 \text{ ms} \quad t'_d = \frac{\pi}{2\omega'} = 74,09 \text{ ms}$$

Le temps total de choc est donc

$$t_{tot} = t_c + t'_d = 137,1 \text{ ms}$$

ce qui cadre très bien avec les résultats. On calcule en outre

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{13,42}{24,93} = 0,5383 \text{ m}$$

légèrement plus grand que la valeur intégrée, et

$$v'_0 = \omega' (x_0 - x_p) = 21,20 (0,5383 - 0,302) = 5,101 \text{ m/s}$$

également un peu supérieure à la valeur intégrée. Le coefficient de restitution vaut donc

$$\epsilon = \frac{v'_0}{v_0} = \frac{5,01}{13,42} = 0,3733$$

Quant à l'accélération maximale, elle vaut

$$\gamma_{max} = \omega^2 x_0 = 621,5 \cdot 0,5383 = 334,6 \text{ m/s}^2$$

On a enfin

$$\begin{aligned}k &= 2000 \omega^2 = 1,243 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \\k' &= 2000 \omega'^2 = 896,6 \cdot 10^3 \text{ N/m}\end{aligned}$$

11.3.5 Discussion

Il découle du modèle que :

$$x_0 = v_0/\omega \quad \gamma_{max} = \omega v_0 \quad (11.39)$$

Dès lors en diminuant ω , on diminue l'accélération maximale γ_{max} . Si on veut réduire la décelération, doit augmenter la déformation x_0 , au prix d'un allongement de la voiture, ce qui ne peut se faire réaliser que de manière limitée. Une augmentation de ω a l'effet contraire. Il y a donc un compromis à trouver.

On cite souvent une règle :

$$1 \text{ km/h} = 1 \text{ cm} = 1 \text{ g} \quad (11.40)$$

Elle est cependant incompatible avec le résultat du modèle, en effet :

$$v_0 = 0,2778 \text{ m/s} \quad (11.41)$$

$$x_0 = 0,01 \text{ m} \quad (11.42)$$

$$\gamma = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (11.43)$$

soit

$$\omega = \gamma/v_0 = 35,51 \quad (11.44)$$

$$\omega = v_0/x_0 = 27,78 \quad (11.45)$$

En réalité on doit avoir :

$$\gamma_{max} = \frac{v_0^2}{x_0} \quad (11.46)$$

Il est important de noter que la formule signifie que l'accélération maximale varie comme

- le carré de la vitesse
- l'inverse de la déformation maximale

Ceci montre l'utilité de zones déformables suffisamment longues. La règle correcte devient donc :

$$\boxed{1 \text{ km/h} = 1 \text{ cm} = 0.8 \text{ g}} \quad (11.47)$$

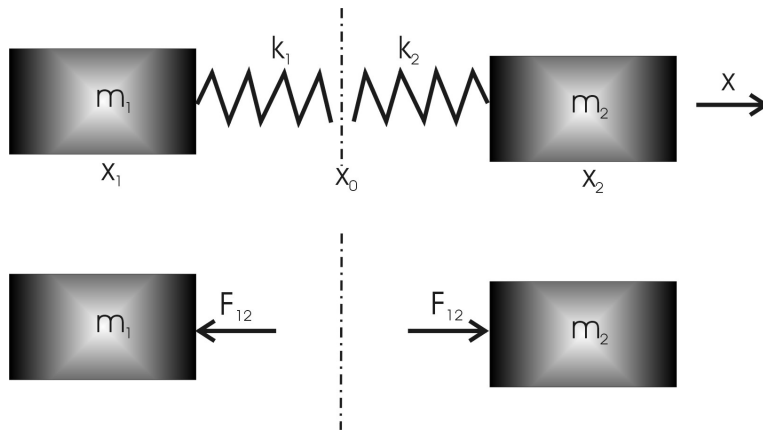


FIGURE 11.12 – Modélisation du choc frontal entre deux véhicules

11.4 Choc frontal entre deux véhicules

11.4.1 Loi du mouvement

Dans ce cas si on note par x_0 la coordonnée du point de contact entre les deux véhicules, et par x_1 et x_2 la position de leurs centres de gravité, la force d'interaction entre les deux corps a pour expression :

$$F_{12} = k_1 (x_1 - x_0) = k_2 (x_0 - x_2) \quad (11.48)$$

donc

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{F_{12}}{k_1} \\ x_0 - x_2 = \frac{F_{21}}{k_2} \end{cases} \quad (11.49)$$

ce qui donne

$$x_1 - x_2 = F_{12} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = F_{12} \frac{k_1 + k_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{F_{12}}{k_e} \quad (11.50)$$

avec

$$k_e = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \quad (11.51)$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_e (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_e (x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (11.52)$$

Cherchant une solution de la forme

$$x_1 = X_1 e^{st} \quad x_2 = X_2 e^{st} \quad (11.53)$$

on obtient les conditions :

$$\begin{cases} (m_1 s^2 + k_e)X_1 + k_e X_2 = 0 \\ -k_e X_1 + (m_2 s^2 + k_e)X_2 = 0 \end{cases} \quad (11.54)$$

et

$$(m_1 s^2 + k_e)X_1 - k_e X_2 = 0 \quad (11.55)$$

$$-k_e X_1 + (m_2 s^2 + k_e)X_2 = 0 \quad (11.56)$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène. Sa compatibilité en dehors de la solution triviale exige la nullité du déterminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (m_1 s^2 + k_e).(m_2 s^2 + k_e) - k_e^2 \\ &= m_1 m_2 s^4 + k_e(m_1 + m_2)s^2 \\ &= m_1 m_2 s^2 \left(s^2 + \frac{k_e(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right) \end{aligned} \quad (11.57)$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont :

$$s = 0 \quad (\text{deux fois})$$

$$s = \pm i \omega \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{k_e}{m_e} \quad (11.58)$$

en définissant :

$$m_e = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (11.59)$$

A ces racines correspondent les modes suivants :

— $s = 0$:

$$X_1 = X_2 \quad (11.60)$$

— $s = \pm i \omega$

$$\begin{aligned} (k_e - m_1 \omega^2)X_1 &= k_e X_2 \\ -k_e X_1 &= (k_e - m_2 \omega^2)X_2 \end{aligned}$$

En prenant la somme on trouve

$$-m_1 \omega^2 X_1 = -m_2 \omega^2 X_2$$

soit

$$X_2 = -\frac{m_1}{m_2} X_1 \quad (11.61)$$

On obtient en définitive :

$$x_1 = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + A_3 t + A_4 \quad (11.62)$$

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} A_1 \sin \omega t - \frac{m_1}{m_2} A_2 \cos \omega t + A_3 t + A_4 \quad (11.63)$$

Remarquons que les expressions (11.62) et (11.63) entraînent :

$$m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) = (m_1 + m_2)(A_3 t + A_4) \quad (11.64)$$

Ce résultat signifie que A_3 et A_4 gouvernent le mouvement du centre de masse du système. Ceci suggère de se placer dans le *système d'axes du centre de masse*, on a alors $A_3 = 0$ et $A_4 = 0$.

Il en découle :

$$\dot{x}_1 = A_1 \omega \cos \omega t + A_2 \omega \sin \omega t \quad (11.65)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} A_1 \omega \cos \omega t + \frac{m_1}{m_2} A_2 \omega \sin \omega t \quad (11.66)$$

En $t = 0$, on pose

$$\dot{x}_1(t = 0) = w_1 \quad \text{et} \quad \dot{x}_2(t = 0) = w_2 \quad (11.67)$$

en désignant par w_1 et w_2 les vitesses des corps relativement au centre de gravité, les vitesses sont liées par la condition :

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = 0 \quad (11.68)$$

Il vient donc

$$\dot{x}_1(t = 0) = A_1 \omega = w_1 \quad (11.69)$$

et

$$\dot{x}_2(t = 0) = -\frac{m_1}{m_2} A_1 \omega = -\frac{m_1}{m_2} w_1 \quad (11.70)$$

On pourrait par ailleurs encore simplifier la description du mouvement en prenant le choix du repère sur le véhicule de manière telle que :

$$x_i(0) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (11.71)$$

Il vient

$$A_2 = 0 \quad (11.72)$$

et

$$x_1 = \frac{w_1}{\omega} \sin \omega t \quad x_2 = -\frac{m_1 w_1}{m_2 \omega} \sin \omega t \quad (11.73)$$

$$\dot{x}_1 = w_1 \cos \omega t \quad \dot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} w_1 \cos \omega t \quad (11.74)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega w_1 \sin \omega t \quad \ddot{x}_2 = +\omega \frac{m_1}{m_2} w_1 \sin \omega t \quad (11.75)$$

Comme on le voit, l'étude se ramène à celle du choc contre un mur qui suivrait le centre de masse du système à deux corps.

11.4.2 Exemple

Considérons deux voitures comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} k &= 1,243 \cdot 10^6 \text{ N/m} & k' &= 898,6 \cdot 10^3 \text{ N/m} \\ m &= 2000 \text{ kg} & \epsilon &= 0,2 \\ v_{10} &= 40 \text{ km/h} = 11,11 \text{ m/s} & v_{20} &= 20 \text{ km/h} = 5,55 \text{ m/s} \end{aligned}$$

On a dans ce cas-ci

$$\begin{aligned} k_e &= k/2 = 621,5 \cdot 10^5 \text{ N/m} & k'_e &= 449,3 \cdot 10^3 \text{ N/m} \\ m_e &= m/2 = 1000 \text{ kg} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k_e}{m_e} = \frac{621,5 \cdot 10^5}{1000} = 621,5 & \omega &= 24,93 \text{ s}^{-1} \\ \omega'^2 &= \frac{k'_e}{m_e} = \frac{449,3 \cdot 10^3}{1000} = 449,3 & \omega' &= 21,20 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Pour la vitesse du centre de masse et les vitesses relatives, on trouve :

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} = 30 \text{ km/h} = 8,33 \text{ m/s} \\ w_1 &= v_{10} - v_g = 10 \text{ km/h} = 2,778 \text{ m/s} \\ w_2 &= v_{20} - v_g = -10 \text{ km/h} = -2,778 \text{ m/s} \end{aligned}$$

On obtient l'énergie cinétique relative avant le choc :

$$T_r = 1/2(m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2) = m_1 w_1^2 = 2000 \cdot 2,778^2 = 15430 \text{ J}$$

On peut également également la déformation maximale :

$$x_{01} = \frac{w_1}{\omega} = \frac{2,778}{24,93} = 0,1114 \text{ m}$$

$$|x_{02}| = \frac{|w_2|}{\omega} = \frac{2,778}{24,93} = 0,1114 \text{ m}$$

et l'accélération maximale à la compression :

$$\gamma_{max} = \omega w_{01} = 24,93 \cdot 2,778 = 69,26 \text{ m/s}^2$$

ainsi que le temps de compression

$$t_c = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2 \cdot 24,93} = 63,01 \text{ ms}$$

L'énergie cinétique relative restituée est donnée par :

$$T'_r = \epsilon^2 T_r = 0,04 \cdot 15430 = 617,2 \text{ J}$$

On en tire la vitesse relative après le choc :

$$w_1 = \sqrt{\frac{T'_r}{m_1}} = \sqrt{\frac{617,2}{2000}} = 0,5555 \text{ m/s}$$

ainsi que la déformation permanente :

$$(x_0 - x_p) = \frac{w'_1}{\omega} = \frac{0,5555}{24,93} = 22,28 \text{ m/s}$$

$$x_p = 111,4 - 22,28 = 89,12 \text{ mm}$$

Enfin l'accélération maximale à la détente vaut :

$$\gamma_{max} = \omega' w'_1 = 21,20 \cdot 0,5555 = 11,78 \text{ m/s}^2$$

Bibliographie

- [1] M. Artomonov, V. Ilarionov, and M. Morin. *Motor Vehicles, Fundamentals and Design*. MIR, Moscow, 1976.
- [2] R. Bosch. *Automotive Handbook*. Society of Automotive Engineers, SAE, Warrendale, USA, 5th edition, 2000.
- [3] J. Dixon. *Tires, Suspension, and Handling*. Society of Automotive Engineers, SAE, Warrendale, USA, 1996.
- [4] G. Genta. *Motor Vehicle Dynamics - Modeling and Simulation*. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences - volume 43. World Scientific, Westport, USA, 1997.
- [5] W. Gillespie. *Fundamental of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, SAE, Westport, USA, 1992.
- [6] A. Golverk. The method for development of a diesel engine universal performance map. Technical Report 941928, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, USA, 1994.
- [7] M. Géradin and A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 2001.
- [8] H. Heisler. *Advanced Vehicle Technology*. Elsevier Butterworth Heineemann, Oxford, 2nd edition, 2002.
- [9] G. Henriot. *Traité théorique et pratique des engrenages*, volume 1. Dunod Technique, Paris, 5ème edition, 1975.
- [10] W. Hucho, editor. *Aerodynamics of Road Vehicles*. Society of Automotive Engineers, SAE, Warrendale, USA, 4th edition edition, 1998.
- [11] R. Kaller and J.-M. Allenbach. *Traction Electrique. Volume 1*. Collection Electricité. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1995.
- [12] B. McCormick. *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. Wiley, 2nd edition, 1994.
- [13] W. Milliken and D. Milliken. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, SAE, Warrendale, USA, 1995.

- [14] P. Mock, J. German, A. Bandivadekar, and I. Riemersma. Discrepancies between type-approval and real-world fuel-consumption and co2 values. Assessment for 2001-2011 European passenger cars. Working Paper 2012-2, International Council for Clean Transportation (ICCT), 2012.
- [15] H. B. Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2002.
- [16] H. B. Pacejka and E. Bakker. The magic formula tyre model. *Vehicle System Dynamics*, 21 :1–18, 1993.
- [17] H. B. Pacejka and I. J. M. Besselink. Magic formula tyre model with transient properties. *Vehicle System Dynamics*, 27 :234–249, 1997.
- [18] P. Pescarou. Transmissions dans l'automobile - Influence sur la consommation du véhicule. Technical report, Dossier Techniques de l'Ingénieur, 2013.
- [19] A. A. Popov, D. J. Cole, C. D., and C. Winkler. Laboratory measurement of rolling resistance in truck tyres under dynamic vertical load. *Proceedings of the IMechE, part D, Journal of Automobile Engineering*, 217(12), 2003.
- [20] P. Rapin. La mécanique du choc. Technical report, Conférence du C.E.S.I.A., 1966.
- [21] J. Reimpel, H. Stoll, and J. Betzler. *The Automotive Chassis - Engineering Principles*. Butterworth Heinemann, Oxford, UK, 2001.
- [22] SAE. Vehicle Dynamics Terminology. Technical Report SAEJ670e, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, USA, 1976.
- [23] SAMCEF. www.samcef.com. SAMTECH S.A., 2004. Web Site.
- [24] L. Segel. Theoretical prediction and experimental substantiation of the reponse of the automobile steering control. Technical report, The Institute of Mechanical Engineers, London, 1956.
- [25] J. Taborek. *Mechanics of Vehicles*. Machine Design, 1957.
- [26] J. Wong. *Theory of Ground Vehicles*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 2001.