

Université de Liège  
Année Académique 2000-2001

**OPTIMISATION  
DES  
STRUCTURES**

Exercices

M. BRUYNEEL  
Assistant

C. FLEURY  
Professeur Ordinaire

**SOMMAIRE**

CHAPITRE 1.	Rappels de langage FORTRAN	1
	Déclarations	1
	Les sous routines et les fonctions	3
	Le passage des variables dans les sous routines et les fonctions	4
	Les structures de contrôle	5
	Les entrées et sorties	6
CHAPITRE 2.	Fonctions lagrangiennes et conditions d'optimalité	8
	Fonctions lagrangiennes	8
	Conditions d'optimalité	19
CHAPITRE 3.	Minimisation unidimensionnelle. Recherche linéaire	28
	Introduction	28
	Méthodes à un point	29
	Méthodes à deux points	32
	Exercice 1	36
	Exercice 2	43
	Cas particulier des fonctions quadratiques	46
	Recherches linéaires inexacts	47
CHAPITRE 4.	Minimisation non contrainte	52
	Méthodes d'ordre zéro	52
	Méthodes d'ordre un	54
	Méthodes d'ordre deux	57
	Remarques	57
	Exercice 1	57
	Exercice 2	65
CHAPITRE 5.	Minimisation avec contraintes linéaires. Gradient projeté	69
	Position du problème	69
	Mise à jour des variables de conception	69
	Direction de recherche	70
	Pas de progression	71
	Exercice 1	74
	Exercice 2	79
CHAPITRE 6.	Programmation linéaire. Algorithme du SIMPLEXE	86
	Définition du problème de programmation linéaire	86
	Propriétés fondamentales de la programmation linéaire	88
	L'algorithme du SIMPLEXE	93

	Exercices	103
CHAPITRE 7.	Théorie de la dualité	109
	Conditions de Karush-Kuhn-Tucker	109
	Dualité	109
	Cas particuliers	114
	Exercice 1	118
	Exercice 2	119
	Exercice 3	120
	Exercice 4	121
	Exercice 5	124
	Exercice 6	126
	Exercice 7	129
	Exercice 8	132
CHAPITRE 8.	Méthodes générales de programmation non linéaire	134
	Méthode à fonction de pénalité extérieure	134
	Méthode à fonction de pénalité intérieure	137
	Méthode du lagrangien augmenté	140
CHAPITRE 9.	Programmation séquentielle convexe	143
	Introduction	143
	Approximations of the MMA family	146
	Approximations of the GMMA family	149
	Diagonal quadratic approximations	150
	Examples	150
	Exercice	155
	References	160
CHAPITRE 10.	Applications de l'optimisation de structures	161
	Introduction	161
	Optimisation de forme	163
	Optimisation topologique	168
	Références	182
CHAPITRE 11.	Enoncé du travail d'optimisation de structures	185
	Minimisation non contrainte	185
	Minimisation quasi non contrainte	185
	La dualité	186
	Optimisation d'un treillis isostatique	187
REFERENCES		188

# RAPPELS DE LANGAGE FORTRAN

## 1 DECLARATIONS

En FORTRAN, les déclarations ne sont pas strictement obligatoires comme en PASCAL ou en C. Néanmoins, on fait preuve d'une programmation structurée en déclarant explicitement les variables que l'on utilise. Cela évite aussi beaucoup d'erreurs.

### 1.1 Types

On emploie fréquemment les types suivants :

<i>entier</i>	<b>INTEGER</b> ou <b>INTEGER*4</b>
<i>réel</i>	<b>REAL</b> ou <b>REAL*4</b>
<i>double précision</i>	<b>DOUBLE PRECISION</b> ou <b>REAL*8</b>
<i>complexe</i>	<b>COMPLEX</b>
<i>caractère</i>	<b>CHARACTER</b> ou <b>CHARACTER*1</b>

### Remarques

- 1) On remarque la convention suivante : le type suivi de l'étoile \* permet de définir explicitement le nombre de bytes sur lesquels sera codé le nombre.

Ex. **REAL\*8** indique un réel codé sur 8 bytes soit 64 bits

- 2) Pour les chaînes de caractères, on définit la longueur via le paramètre \* suivi de la longueur désirée. La sous chaîne peut être obtenue par les numéros du premier et du dernier caractères de la sous-chaîne placés entre parenthèses et séparés par deux points ':'.  
  
Ex.: **CHARACTER\*4** NOM(100)  
**CHARACTER\*80** LIGNE  
NOM(52)(1:4) = LIGNE(11:14)

### 1.2 Déclarations implicites

De nombreux compilateurs adoptent cependant la convention suivante :

**Les variables commençant par I,J,K,L,M,N sont considérées comme entières, tandis que les autres sont réelles.**

On peut aussi utiliser l'instruction **IMPLICIT** pour définir implicitement les types voulus :

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

déclare implicitement toute variable commençant par une lettre allant de A jusque H et de O jusque Z comme un réel double précision.

### **1.3 Déclaration des tableaux et des vecteurs**

Il existe plusieurs manières de déclarer un tableau:

Soit on déclare le nom pour faire connaître son type puis on déclare ses dimensions avec l'instruction **DIMENSION**.

Ex.: DOUBLE PRECISION A  
DIMENSION A(5,5)

Soit on déclare directement la dimension du tableau en même temps que le type.

Ex.: DOUBLE PRECISION A(5,5)

On peut aussi déclarer un tableau ou un vecteur dont les indices ne varient pas nécessairement entre 1 et la borne supérieure déclarée.

Ex.: INTEGER TAB(0:4)  
COMPLEX MAT(3:9,1:7,8)

On se souviendra aussi que le code passe toujours les tableaux, les matrices ou les tenseurs comme une adresse mémoire de départ, une longueur réservée et une partition. De la sorte, tout tableau carré est passé *colonne par colonne*.

### **1.4 Pseudo allocation dynamique de mémoire**

En FORTRAN 77, la longueur des tableaux doit toujours être déclarée explicitement. Pour contourner cette difficulté lors de la réalisation de programmes pour lesquels la dimension du problème reste à fixer au moment de l'exécution, on procède par pseudo allocation dynamique de mémoire. La méthode consiste à déclarer un grand vecteur de travail avec une dimension connue et ensuite à fragmenter la mémoire allouée. On passe alors pour chaque sous tableau le début de la partie de la mémoire qui lui est allouée par l'indice qui lui correspond dans le vecteur de travail.

#### **Description de la procédure**

- 1) Déclarer un vecteur de travail de grande dimension (entendez de dimension suffisante par rapport à la mémoire que l'on utilise pour un problème habituel).

Ex. REAL\*8 S(1000)

- 2) Réaliser une partition de ce vecteur en comptabilisant quels sont vos besoins.

Ex.  $I0 = 1$   
 $I1 = I0 + N$   
 $I2 = I1 + 2*N$   
 $I3 = I2 + (N+1)/2$   
 $IA = I3 + N*M$   
 $IFIN = IA + N*(N+1)/2$   
 $LS = LONG - IFIN$

- 3) Travailler sur les portions ainsi définies. Pour plus de facilité, il est habituel de passer la partition à une sous routine.

Ex.  $S(I0+I1-1), S(IA-1+I1+(JJ-1)*JJ), \dots$

```
CALL TEST(S(I0),S(I1),S(I2),S(I3),S(IA),N,M,LS)
```

```
SUBROUTINE TEST(G,V,INDIC,TAB,A,N,M,LS)
INTEGER LS,N,INDIC(N)
DOUBLE PRECISION G(N),V(2*N),TAB(N,M),A(N,N)
```

- 4) Vérifier si le vecteur de travail n'est pas trop petit....

La norme FORTRAN 90 apporte un meilleur remède avec les nouvelles commandes **ALLOCATE** et **ALLOCATABLE** permettant d'allouer dynamiquement, au sens propre du terme, de la mémoire.

## 2 LES SOUS ROUTINES ET LES FONCTIONS

### 2.1 Le programme principal

Il est déclaré par le nom **PROGRAM**. Il se termine par le mot **END**. Il fait appel à toutes les sous routines et fonctions.

### 2.2 Les sous-routines

Elles sont déclarées par le mot **SUBROUTINE** et se terminent par les instructions **RETURN** et **END**.

L'appel est réalisé par l' instruction **CALL**, suivie du nom de la routine.

Les déclarations et toutes les règles procédurales en vigueur dans les programmes principaux sont aussi en vigueur pour les sous routines.

Les variables déclarées localement ne sont pas conservées après lors du retour (**RETURN**) au programme appelant. Néanmoins, on se méfiera de certains compilateurs qui ne réinitialisent pas à zéro les variables auxiliaires lors de l'entrée dans la sous routine. Pour éviter les effets de bord, on doit toujours remettre les variables à zéro en entrant (sauf si cela n'est pas nécessaire).

### 2.3 Les fonctions

Elles sont déclarées par le mot **FUNCTION** et se terminent par les instructions **RETURN** et **END**. Il est à noter que le nom de la fonction et son type doivent être impérativement déclarés dans la routine appelante. Au nom de la fonction est en effet attaché une variable portant la valeur de la fonction. L'appel est réalisé par citation du nom déclaré.

Ex. P = PRODSCAL(V1,V2,L)

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION PRODSCAL(V1,V2,L)
C
      INTEGER L,I
      DOUBLE PRECISION V1(*),V2(*),PRO
      PRO = 0.D0
      DO 10 I=1,L
      PRO = V1(I)*V2(I)
10  CONTINUE
      PRODSCAL = PRO
      RETURN
      END
```

#### 2.4 Les fonctions intrinsèques

Il s'agit de toutes les fonctions qui sont définies en standard dans le codes. Elles sont introduites lors du LINK avec la librairie.

Ex. COS,DCOS,SQRT,DSQRT,.....

### 3 LE PASSAGE DES VARIABLES DANS LES SOUS ROUTINES ET LES FONCTIONS

#### 3.1 Les arguments

En FORTRAN 77, le passage des variables se fait toujours par variable, car on transmet l'adresse mémoire de la variable ou du premier élément du tableau. Pour transmettre une variable par valeur, il faut donc la recopier immédiatement dans une variable auxiliaire locale et ne travailler que sur celle-ci.

Pour les tableaux, on passe l'adresse du premier élément et on remplit le tableau déclaré dans la sous routine en parcourant le tableau original colonne par colonne. Il faut donc faire attention lorsque l'on veut déclarer une sous matrice dans une sous routine.

Il est aussi conseillé de déclarer de dimension non connue les tableaux de dimension variable. On place alors une \* dans la dimension de l'indice le plus à droite. La norme FORTRAN 66 permettait de déclarer un tableau de dimension 1; aujourd'hui il vaut mieux ne plus adopter cette méthode.

Ex. DOUBLE PRECISION A(N,\*),V(\*)

serait préférable dans l'exemple donné en 1.

### 3.2 Les common

Au lieu de passer les variables par arguments, on peut toujours utiliser l'instruction **COMMON** qui permet de réserver une place mémoire commune à toutes les unités de programme qui déclarent le **COMMON**. La syntaxe est la suivante :

```
COMMON /NOM/ X,Y,Z(10),IV
```

L'ordre dans lequel les variables communes sont relues est fondamental. La même règle de remplissage des variables et des tableaux régissant les passages par argument est en vigueur dans les **COMMON**.

Il est formellement interdit de passer la même variable par **COMMON** et par argument.

Il est aussi fortement conseillé d'utiliser les mêmes noms pour les variables pour toutes les entités.

On n'oubliera pas non plus de déclarer (nom, type et dimension) les variables et tableaux introduits par le **COMMON**.

Il est conseillé de déclarer le **COMMON** dans toute la filière des sous-routines appelantes.

## 4 LES STRUCTURES DE CONTROLE

1) *IF (condition) (action)*

2) *GO TO étiquette*

3) *IF (condition) THEN*  
          *(action1)*  
*ELSE*  
          *(action2)*  
*ENDIF.*

4)       *DO étiquette IVAR = IMIN , IMAX, ISTEP*  
          *(action)*  
*étiquette CONTINUE*

## 5 LES ENTREES ET SORTIES

### 5.1 Lire

**READ ( UNIT=Id.Unité , FORMAT=Id.Format )**

En pratique, on omet l'écriture de UNIT et FORMAT. On notera néanmoins que d'autres spécifications existent tels que REC, END, ERR, IOSTAT mais que pour celles-ci il n'existe aucune option par défaut.

**5.2 Ecrire.****WRITE ( UNIT=Id.Unité , FORMAT=Id.Format )**

Pour faire une écriture (lecture) non formatée mettre une \* à la place de l'étiquette de format ou omettre le format.

```
WRITE (6,*) 'INDICE',I  
WRITE (IU6) VAL,RES
```

**5.3 Ouverture d'un fichier.****OPEN ( UNIT= , ERR= , FILE= , STATUS= , ACCESS= , FORM= )**

UNIT = numéro d'unité  
ERR = étiquette où se brancher en cas d'erreur  
FILE = nom du fichier  
STATUS = état: 'OLD', 'NEW', 'SCRATCH', 'UNKNOWN'  
ACCESS = type d'accès: 'SEQUENTIAL' ou 'DIRECT'  
FORM = formatage: 'FORMATTED' ou 'UNFORMATTED'

**5.4 Fermeture d'un fichier****CLOSE ( UNIT= , ERR= , STATUS= , IOSTAT= )**

UNIT = numéro d'unité  
ERR = étiquette où se brancher en cas d'erreur  
STATUS = action à réaliser: 'KEEP' ou 'DELETE'  
IOSTAT = message d'erreur

**5.5 Déclaration de format****étiquette FORMAT ( facteur de répétition & spécification de format)**

Pour plus de détails voir la feuille annexe.

Nota : Ne pas oublier de séparer chaque instruction par une virgule.

**5.6 Boucles implicites en lecture et écriture**

Pour imprimer ou lire tout un tableau :

DOUBLE PRECISION TAB(200)

WRITE (IU15) TAB

Pour écrire ou lire une partie d'un tableau:

READ (IU15) (TAB(I),I=1,100)

# FONCTIONS LAGRANGIENNES

## 1 PRINCIPE DE LAGRANGE

Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être maximum ou minimum et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée (multiplicateurs de Lagrange) et de chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes. Les équations que l'on trouvera, combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues.

LAGRANGE

## 2 POSITION DU PROBLEME

$$f_0(X) \rightarrow \text{extremum}$$

$$\text{avec } \begin{cases} f_1(X) = 0 \\ \dots \\ f_m(X) = 0 \end{cases}$$

$$X = (X_1, \dots, X_n) \quad n > m$$

$$\text{Hypothèse: } f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

## 3 DEMARCHE A SUIVRE

1) Former la fonction de Lagrange :

$$L(X, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(X)$$

( $\lambda_i$  = multiplicateurs de Lagrange)

2) Exprimer les conditions nécessaires d'optimum :

$$L_X(X, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \quad j = 1, \dots, n$$

$$L_\lambda(X, \lambda) = f_k(X) = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

Théorème de FERMAT

3) Trouver les points stationnaires :

où  $\lambda_i \quad i = 0, \dots, m$  non tous nuls

cas où  $\lambda_0 = 0$  et  $\lambda_0 \neq 0$

normation :  $\lambda_0 = \pm 1$  et  $\lambda_0 = 0$

4) Recherche du min/max absolu parmi ces solutions.

## 4 REMARQUES

1) Le principe de Lagrange n'est pas toujours applicable

□ Solution du problème = solution de Lagrange ?

2) Le domaine d'application du principe est suffisamment vaste

- ≠ théorème
- le principe appliqué sans fondement théorique permet de déceler certains points susceptibles de fournir les extremum du problème

3) Signe des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$

Pour des contraintes d'égalité, ce signe est indéfini:  $\lambda \in \mathbb{R}$

## 5 EXEMPLES

1) 
$$\min_{X \in \mathbb{R}} f(X) = \sqrt{a^2 + X^2} + \sqrt{b^2 + (d - X)^2}$$

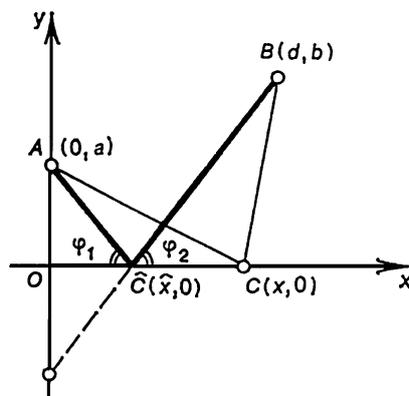


Figure 2.1. Représentation du problème 5.1

$$2) \max_{X \in \mathbb{R}} f_0(X, Y) = 4XY$$

$$\text{avec } \begin{cases} f_1(X, Y) = X^2 + Y^2 - r^2 = 0 \\ f_2(X, Y) = X \geq 0 \\ f_3(X, Y) = Y \geq 0 \end{cases}$$

- Former la fonction lagrangienne

$$L(X, Y, \lambda_0, \lambda_1) = 4\lambda_0 XY + \lambda_1(X^2 + Y^2 - r^2)$$

- Conditions de stationnarité

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} &= 4\lambda_0 Y + \lambda_1 2X = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Y} &= 4\lambda_0 X + \lambda_1 2Y = 0 \end{aligned}$$

- Points critiques

$$1) \quad \begin{aligned} \lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad X = Y = 0 \\ X^2 + Y^2 \neq r^2 &\quad (r \neq 0) \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{1}{4} \\ Y &= \lambda_1 2X \\ X &= \lambda_1 2Y \quad \Rightarrow \quad Y = 4\lambda_1^2 Y \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dans la contrainte :

$$\begin{aligned} X^2 + (2\lambda_1 X)^2 &= r^2 \\ (1 + 4\lambda_1^2)X^2 &= r^2 \\ 2X^2 &= r^2 \\ X &= \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \quad Y = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Points stationnaires

$$(X, Y) = \left( \pm \frac{r}{\sqrt{2}}, \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Maximum :} \quad \left( \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

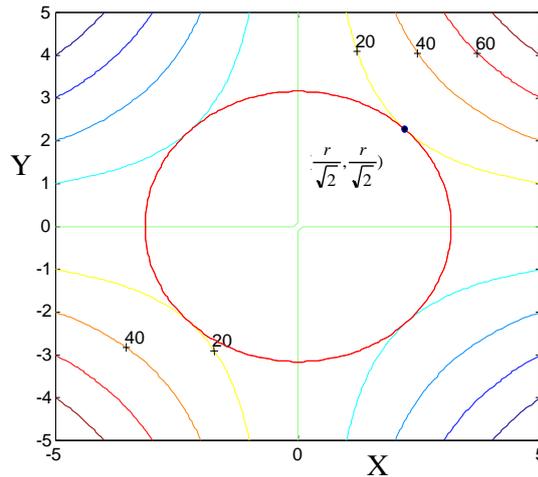


Figure 2.2. Représentation du problème 5.2.  
 $r^2 = 10$

3)  $\min f(X) = X^3(X^2 - 1)$   
 avec  $-1 \leq X \leq 2$

4) En appliquant Lagrange, il n'est pas toujours possible de poser  $\lambda_0 = 1$

$$\min f_0(X_1, X_2) = X_1$$

$$\text{avec } f_1(X_1, X_2) = X_1^3 - X_2^2 = 0$$

Pour avoir  $\lambda_i$  fini (différent de  $\infty$ ), l'optimum se détecte parfois avec  $\lambda_0 = 0$ . Dans ce cas, l'optimum est déterminé par les contraintes.

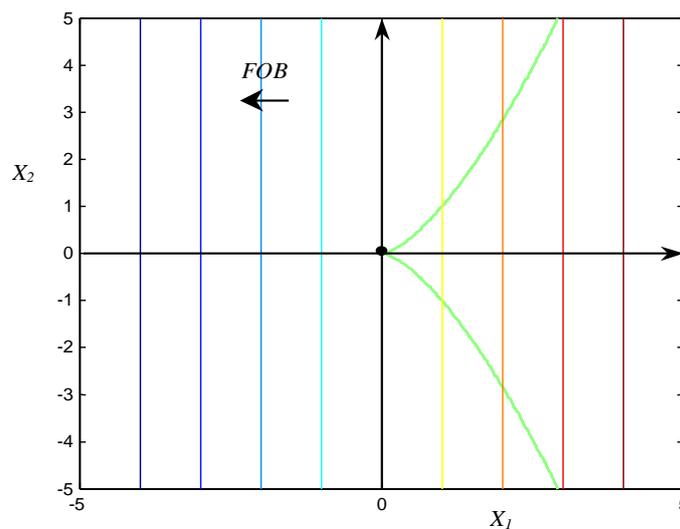


Figure 2.3. Représentation du problème 5.4.

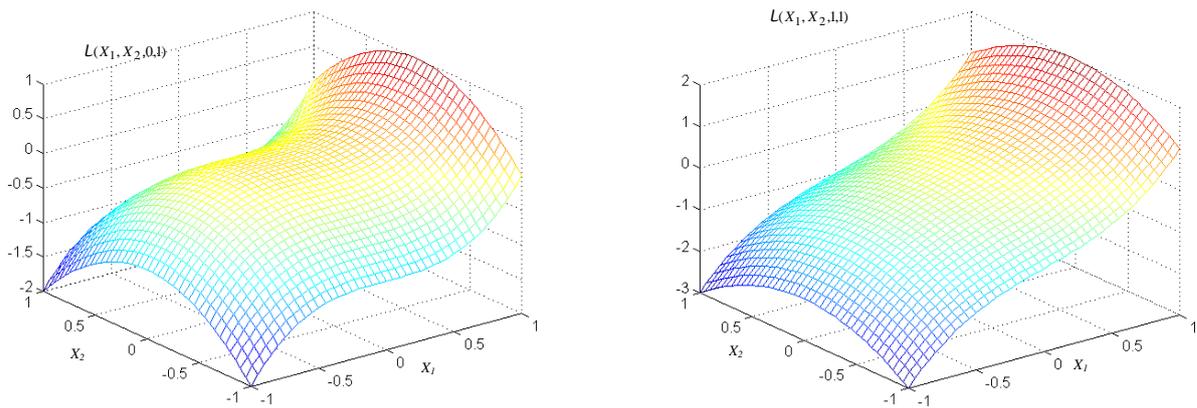


Figure 2.4. La fonction lagrangienne ne présente pas de point stationnaire lorsque  $\lambda_0$  est différent de zéro.

- 5) L'extremum de la fonction de Lagrange considérée en tant que problème sans contrainte peut ne pas coïncider avec l'extremum du problème initial avec contraintes,

$$\min f_0(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1$$

$$\text{avec } f_1(X_1) = X_1 + X_1^3 = 0$$

ce qui signifie que ce ne sont pas les MINIMA de  $L(X, \lambda)$  qui sont les MINIMA du problème contraint. Ce sont au contraire les POINTS STATIONNAIRES de la fonction lagrangienne  $L(X, \lambda)$  qui donnent les optima possibles du problème contraint.

- Former la fonction lagrangienne

$$L(X_1, X_2, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0(X_2^2 - X_1) + \lambda_1(X_1 + X_1^3)$$

- Conditions de stationnarité

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -\lambda_0 + \lambda_1(1 + 3X_1^2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2\lambda_0 X_2 = 0$$

- Points critiques

$$1) \quad \lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3X_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow X_1^2 = -\frac{1}{3} \text{ impossible}$$

$$2) \quad \lambda_0 = 1 \quad \lambda_1 \neq 0$$

$$1 + 3X_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1}}$$

Dans la contrainte :

$$\sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1}} \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_1 = -0.5$$

$$\lambda_1 = -0.5 \quad \Rightarrow \quad X_1^2 = -1 \text{ impossible}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad X_1^2 = 0$$

Mais le point  $(X_1, X_2) = (0,0)$  n'est pas un minimum de la fonction lagrangienne, mais bien un de ses points stationnaires.

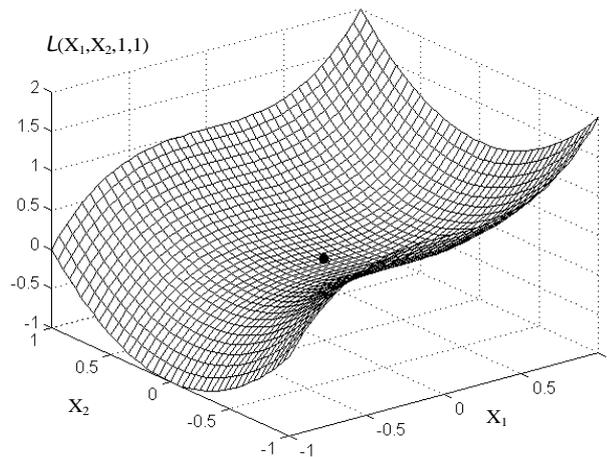


Figure 2.5. Représentation de la fonction lagrangienne et du point stationnaire

## 6 GENERALISATION DANS LE CAS DE CONTRAINTES D'INEGALITE

$$\begin{aligned} & \min f_0(X) \\ \text{avec } & \begin{cases} F_k(X) = 0 & k = 1, \dots, l \\ f_i(X) \leq 0 & i = 1, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

1) Former la fonction de Lagrange :

$$L(X, \mu, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(X) + \sum_{k=1}^l \mu_k F_k(X)$$

2) Exprimer les conditions nécessaires d'optimum :

a) Stationnarité :

$$L_X(X, \mu, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\hat{X}) + \sum_{k=1}^l \mu_k F_k'(\hat{X}) = 0$$

b) Non rigidité complémentaire :

$$\lambda_i f_i(\hat{X}) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

rem :

$$f_i(\hat{X}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \text{contrainte active}$$

$$f_i(\hat{X}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \text{contrainte inactive}$$

(il peut cependant y avoir dégénérescence entraînant une valeur nulle pour un multiplicateur de Lagrange caractérisant une contrainte active à l'optimum)

c) Non négativité :

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, m$$

rem :

$\mu_k$  non contraints à être positifs à l'optimum :  $\mu_k > 0$  ou  $\mu_k < 0$

(il peut cependant y avoir dégénérescence entraînant une valeur nulle pour un multiplicateur de Lagrange caractérisant une contrainte d'égalité)

3) Trouver les points critiques

4) Rechercher la solution parmi les points critiques.

## 7 EXERCICE 1

$$\min X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

$$\text{avec} \begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 \leq 5 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 3 \end{cases}$$

1) Former la fonction lagrangienne

$$L = \lambda_0(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + \lambda_1(2X_1 - X_2 + X_3 - 5) + \lambda_2(X_1 + X_2 + X_3 - 3)$$

$$\text{avec } \lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \text{ ou } \leq 0$$

2) Conditions de stationnarité

$$2X_1\lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$2X_2\lambda_0 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0$$

$$2X_3\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_1 = 0$$

Condition de non rigidité complémentaire

$$\lambda_1(2X_1 - X_2 + X_3 - 5) = 0$$

Non négativité

$$\lambda_1 \geq 0$$

3) Points critiques

$$\text{a) } \lambda_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$$

$$\text{b) } \lambda_0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ X_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ X_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -(2\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$X_2 = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$X_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

On détermine  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en les introduisant dans l'équation des contraintes, en saturant l'inégalité:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -6\lambda_1 - 2\lambda_2 = 5 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{14} < 0$$

L'inégalité ne peut pas être saturée car  $\lambda_1$  devient alors négatif, ce qui est contradiction avec la condition de non négativité. On prend donc  $\lambda_1 = 0$  et on trouve :

$$X_1 = -\lambda_2 \quad X_2 = -\lambda_2 \quad X_3 = -\lambda_2$$

En réinjectant dans la seconde contrainte, on trouve :

$$-3\lambda_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -1$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = 1$$

La fonction objectif prend une valeur de 3 et la première contrainte est vérifiée comme une inégalité à l'optimum ( $\lambda_1 = 0$ ).

On désire maintenant traiter le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ \text{avec} \quad & \begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 \leq 5 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

1) Former la fonction lagrangienne

$$L = \lambda_0(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + \lambda_1(2X_1 - X_2 + X_3 - 5) + \lambda_2(X_1 + X_2 + X_3 - 3)$$

$$\text{avec } \lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \text{ ou } \leq 0$$

2) Conditions de stationnarité

$$2X_1\lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$2X_2\lambda_0 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0$$

$$2X_3\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_1 = 0$$

Condition de non rigidité complémentaire

$$\lambda_1(2X_1 - X_2 + X_3 - 5) = 0$$

Non négativité

$$\lambda_1 \geq 0$$

3) Points critiques

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ X_2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ X_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

On détermine  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en les introduisant dans l'équation des contraintes, en saturant l'inégalité:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 = 5 \end{cases} \\ & \quad \quad \quad \updownarrow \\ & \begin{cases} 6\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3 \end{cases} \\ & \quad \quad \quad \updownarrow \\ & \lambda_1 = \frac{9}{14} > 0 \quad \lambda_2 = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

La contrainte d'inégalité est donc vérifiée comme une égalité à l'optimum puisque son multiplicateur de Lagrange est positif.

En réinjectant les valeurs des  $\lambda_i$  dans les contraintes, on trouve :

$$X_1 = \frac{13}{7} \quad X_2 = -\frac{1}{14} \quad X_3 = \frac{17}{14}$$

La fonction objectif prend la valeur de  $\frac{483}{98}$  et la contrainte d'inégalité est vérifiée comme une égalité à l'optimum.

## 8 EXERCICE 2

$$\min F = X^2 + 1$$

$$g = (X - 2)(X - 4) \leq 0$$

$$L(X, \lambda) = X^2 + 1 + \lambda(X^2 - 6X + 8)$$

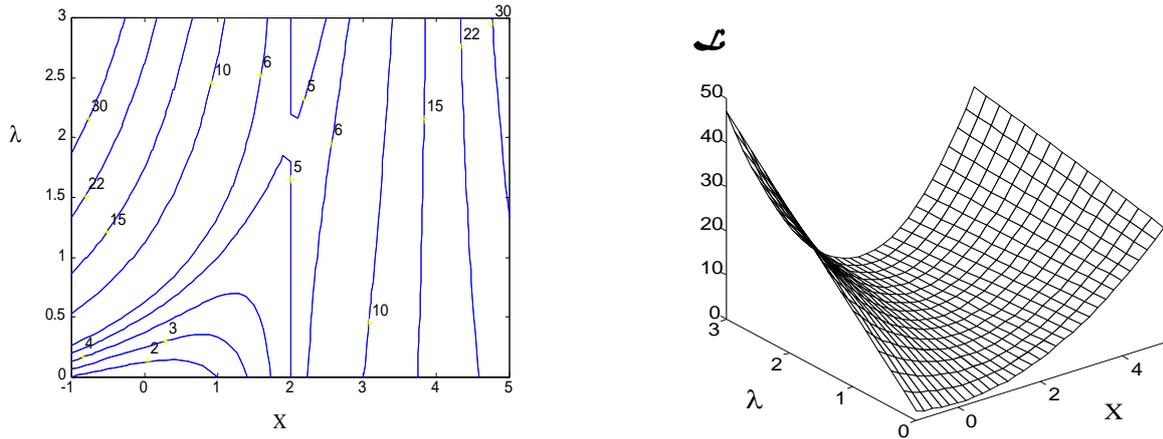


Figure 2.6. Représentation de la fonction lagrangienne  $\mathcal{L}(X, \lambda)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 2X + 2\lambda X - 6\lambda = 0$$

$$X(\lambda) = \frac{3\lambda}{1 + \lambda}$$

$$g(\lambda) = -\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 > 0$$

$$X = 2 \quad \lambda = 2 \quad F = 5$$

$$\text{rem : } \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda) = -\frac{9\lambda^2}{1 + \lambda} + 8\lambda + 1$$

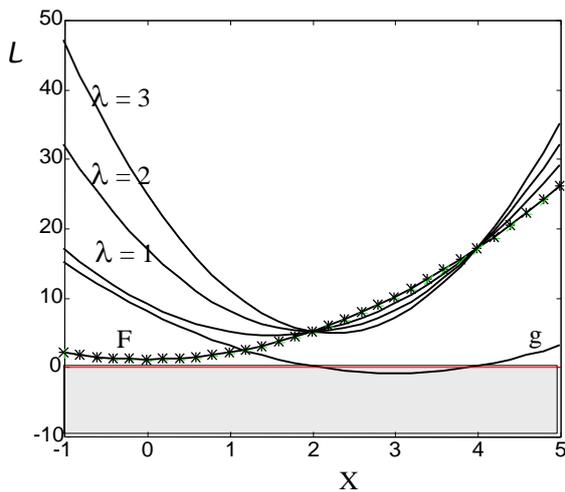


Figure 2.7. Représentation de  $\mathcal{L}(X, \lambda)$  dans le plan  $(L, X)$

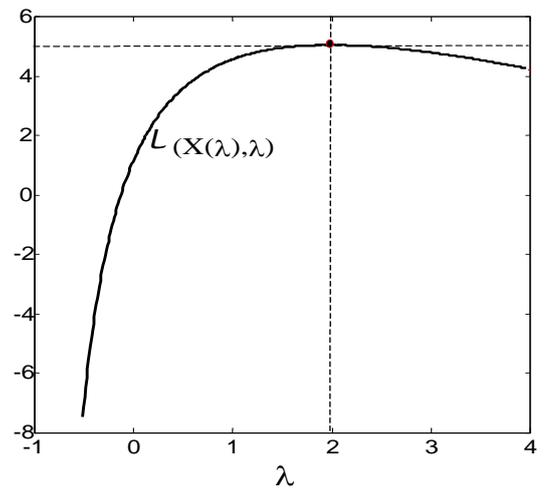


Figure 2.8. Représentation de  $\mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)$

# CONDITIONS D'OPTIMALITE

## 1 PROBLEMES NON CONTRAINTS

### Théorème de FERMAT

- Soit  $f$ , une fonction d'une variable définie dans un certain intervalle contenant  $\hat{X}$  et dérivable en  $\hat{X}$ .

Si  $\hat{X}$  est extremum local de  $f$ , alors

$$\boxed{f'(\hat{X}) = 0}$$

- Soit une fonction de  $n$  variables  $f(X_1, \dots, X_n) \in D^1(\hat{X})$ .

Si  $\hat{X}$  est extremum local de  $f$ , alors

$$\boxed{\frac{\partial f(\hat{X})}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n}$$

Exemple :  $f(X) = aX^2 + bX + c \quad (a \neq 0)$

### Conditions nécessaires d'ordres supérieurs; conditions suffisantes

Théorème 1  $F \in D^2(\hat{X})$

- Conditions nécessaires d'extremum

Si  $\hat{X}$  est minimum local de  $F$ , alors

$$F'(\hat{X}) = 0 \quad F''(\hat{X}) \geq 0$$

- Conditions suffisantes d'extremum

Si

$$F'(\hat{X}) = 0 \quad \text{et} \quad F''(\hat{X}) > 0$$

alors  $\hat{X}$  est minimum local de  $F$ .

*Théorème 2*  $F$  définie dans un intervalle  $\chi$  contenant  $\hat{X}$  et  $n$  fois dérivable au point  $\hat{X}$ .

- Conditions nécessaires d'extremum

Si  $\hat{X}$  est minimum local de  $F$ , alors

$$\text{Soit} \quad F'(\hat{X}) = 0 \quad \dots \quad F^{(n)}(\hat{X}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad F'(\hat{X}) = 0 \quad \dots \quad F^{(2m-1)}(\hat{X}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{et} \quad F^{(2m)}(\hat{X}) > 0$$

pour  $m \geq 1 \quad 2m \leq n$

- Conditions suffisantes d'extremum

Si (2) est vérifié, alors  $\hat{X}$  est un minimum local de la fonction  $F$ .

Exemple :  $f(X) = X^4$ ,  $f(X) = X^3$

*A n dimensions*  $F \in D^2(X)$

- Conditions nécessaires d'extremum

Si  $\hat{X}$  est minimum local de  $F$ , alors

$$F'(\hat{X}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla F(\hat{X}) = 0$$

et

$$X^T \left[ \nabla_{xx}^2 F(\hat{X}) \right] X \geq 0 \quad \forall X \in \chi$$

- Conditions suffisantes d'extremum

Si

$$F'(\hat{X}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla F(\hat{X}) = 0$$

et

$$X^T \left[ \nabla_{xx}^2 F(\hat{X}) \right] X \geq \alpha \|X\|^2 \quad \alpha > 0 \quad \forall X \in \chi$$

alors  $\hat{X}$  est minimum local de  $F$ .

## 2 PROBLEMES DIFFERENTIABLES AVEC CONTRAINTES DU TYPE EGALITE

$$f_i \in D^2(\hat{X}) \quad i = 0, 1, \dots, m$$

$$\nabla f_i \text{ sont linéairement indépendants}$$

- Conditions nécessaires d'extremum

Si  $\hat{X}$  est minimum local dans le problème

$$\min f_0$$

$$\text{avec } f_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

alors, pour  $\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(X)$ , on peut exhiber un vecteur  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  tel que

$$\nabla_x \mathcal{L}(\hat{X}, \lambda) = 0$$

$$\delta X^T \left[ \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\hat{X}, \lambda) \right] \delta X \geq 0$$

$$\forall \delta X \in L = \{ \delta X \in \mathcal{X} \text{ tq } \nabla f_i \cdot \delta X = 0 \quad i = 1, \dots, m \}$$

- Conditions suffisantes d'extremum

S'il existe  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  tel que

$$\nabla_x \mathcal{L}(\hat{X}, \lambda) = 0$$

et

$$\delta X^T \left[ \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\hat{X}, \lambda) \right] \delta X \geq \alpha \|\delta X\|^2 \quad \alpha > 0 \quad \forall \delta X \in L \quad \delta X \neq 0$$

alors  $\hat{X}$  est minimum local du problème.

### Exercices

1)  $f(X_1, X_2) = X_1^4 + X_2^4 - (X_1 + X_2)^2$  > minimum

- Conditions des stationnarité (théorème de Fermat)

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = 4X_1^3 - 2(X_1 + X_2) = 0 \Rightarrow 2X_1^3 = X_1 + X_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = 4X_2^3 - 2(X_1 + X_2) = 0 \Rightarrow 2X_2^3 = X_1 + X_2$$

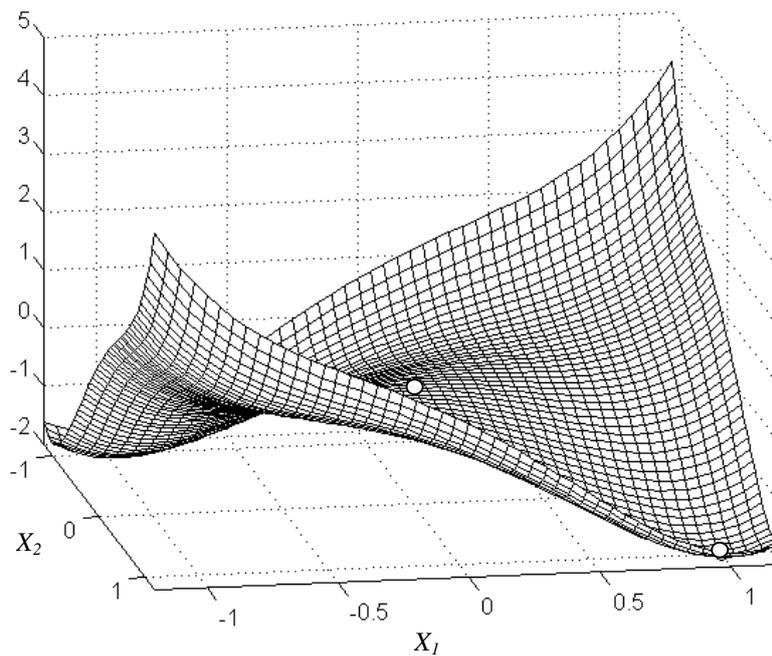
$$X_1^3 = X_2^3 \Rightarrow X_1 = X_2$$

On trouve

$$2X_1^3 = 2X_1$$

Ce qui conduit aux points critiques suivants :

$$(X_1, X_2) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1)$$



• Calcul du Hessien :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12X_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12X_2^2 - 2 \end{bmatrix}$$

Si on considère les différents points critiques déterminés précédemment, on trouve :

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{pas définie positive}$$

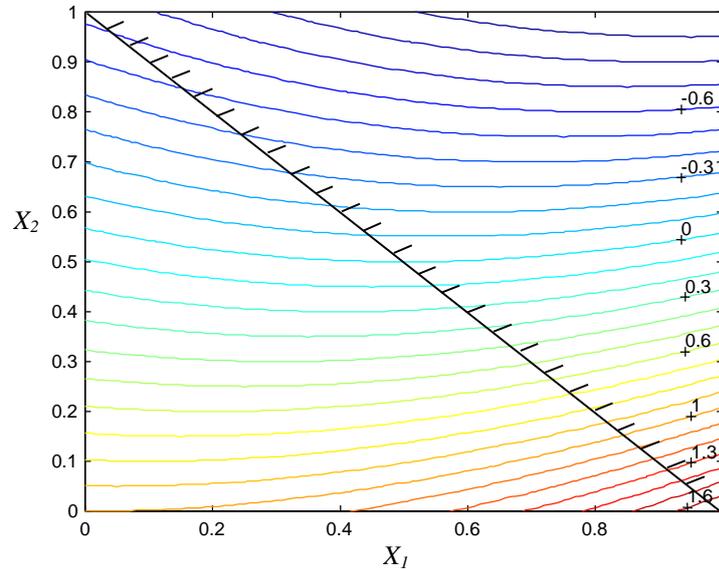
$$A(1,1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{définie positive}$$

$$A(-1,-1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{définie positive}$$

Le minimum est trouvé en  $(X_1, X_2) = (1, 1), (-1, -1)$

2)  $f_0(X_1, X_2) = e^{X_1 - X_2} - X_1 - X_2$        $\rangle$     extremum

avec  $\begin{cases} f_1 = X_1 + X_2 \leq 1 \\ f_2 = X_1 \geq 0 \\ f_3 = X_2 \geq 0 \end{cases}$



- On forme la fonction lagrangienne :

$$\mathcal{L} = e^{X_1 - X_2} - (X_1 + X_2) + \lambda_1(X_1 + X_2 - 1) - \lambda_2 X_1 - \lambda_3 X_2$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

- Stationnarité du lagrangien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1} &= e^{X_1 - X_2} - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} &= -e^{X_1 - X_2} - 1 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

- Premier essai de contraintes actives :  $X_1 + X_2 = 1, X_1 = 0$

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$$

$$e^{X_1 - X_2} = 1 - \lambda_1 + \lambda_2$$

$$-e^{X_1 - X_2} = 1 - \lambda_1$$

$$1 - \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2$$

$$X_1 - X_2 = 0 - 1 = \ln(-1 + \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1 = 1 + \frac{1}{e}, \lambda_2 = \frac{2}{e}$$

$$f = \frac{1}{e} - 1$$

- Deuxième essai de contraintes actives :  $X_2 = 0, X_1 = 0$

$$\lambda_2, \lambda_3 > 0, \lambda_1 = 0$$

$$\begin{aligned} e^0 - 1 - \lambda_2 &= 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ -e^0 - 1 - \lambda_3 &= 0 \Rightarrow \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

impossible

- Troisième essai de contraintes actives :  $X_1 + X_2 = 1, X_2 = 0$

$$\lambda_3, \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$$

$$\begin{aligned} e^1 - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + e \\ -e^1 - 1 + \lambda_1 &= 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2e \end{aligned}$$

$$f = e - 1$$

- Caractérisation des extremum

$$\nabla^2 \mathcal{L} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} e^{(X_1 - X_2)} & -e^{(X_1 - X_2)} \\ -e^{(X_1 - X_2)} & e^{(X_1 - X_2)} \end{bmatrix}$$

On calcule les valeurs propres du Hessien :

$$\det \begin{bmatrix} e^{(X_1 - X_2)} - \mu & -e^{(X_1 - X_2)} \\ -e^{(X_1 - X_2)} & e^{(X_1 - X_2)} - \mu \end{bmatrix} = 0$$

Ce qui nous conduit aux valeurs propres suivantes :

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 2e^{(X_1 - X_2)}$$

On remarque que le Hessien est singulier : une de ses valeurs propres est nulle.

On caractérise dès lors les extremum en comparant les valeurs prises par la fonction objectif en différents points :

$$\begin{aligned} X_1 = 1, X_2 = 0 &\Rightarrow f = e - 1 \Rightarrow \text{maximum} \\ X_1 = 0, X_2 = 1 &\Rightarrow f = 1/e - 1 \Rightarrow \text{minimum} \end{aligned}$$

### 3 PROBLEMES AVEC CONTRAINTES D'EGALITE ET D'INEGALITE

$$\begin{aligned} \min F(X) \\ g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ h_k(X) = 0 \quad k = 1, \dots, l \\ X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \end{aligned}$$

#### Conditions de Kuhn-Tucker

Conditions nécessaires mais pas suffisantes

1)  $\hat{X}$  doit être admissible :

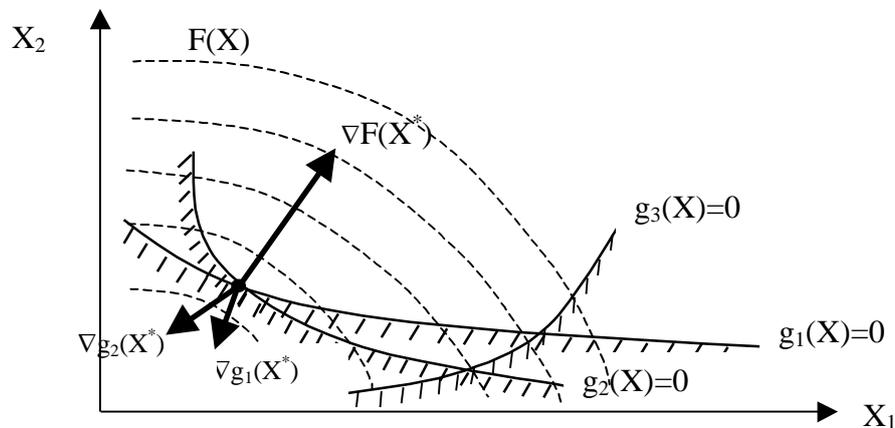
$$\begin{aligned} g_j(\hat{X}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ h_k(\hat{X}) = 0 \quad k = 1, \dots, l \end{aligned}$$

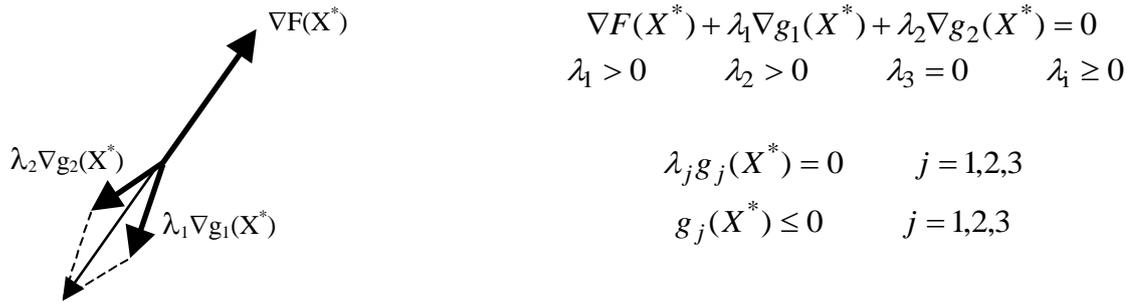
$$2) \quad \lambda_j g_j(\hat{X}) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \lambda_j \geq 0$$

$$3) \quad \nabla F(\hat{X}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\hat{X}) + \sum_{k=1}^l \lambda_{k+m} \nabla h_k(\hat{X}) = 0$$

$$4) \quad \lambda_j \geq 0 \quad \lambda_{k+m} \geq \text{ou} \leq 0$$

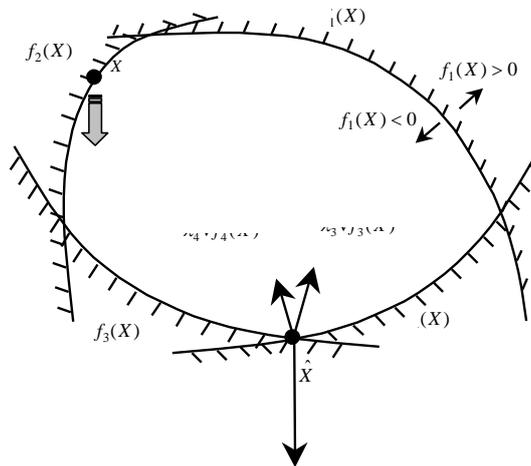
**Conditions suffisantes si le problème est convexe.**





### Interprétation physique des conditions de Kuhn-Tucker

Soit une particule dans un champ de forces conservatives.  $X$  représente la position de cette particule.  $f_0(X)$  représente le potentiel que la nature veut minimiser. Les contraintes sont représentées par les inégalités  $f_i(X) \leq 0, i = 1, 2, 3, 4$ .



La particule s'arrête en  $X = \hat{X}$  car en ce point elle est en équilibre et la somme des forces doit être nulle :

$$-\lambda_3 \nabla f_3(\hat{X}) - \lambda_4 \nabla f_4(\hat{X}) - \nabla f_0(\hat{X}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f_0(\hat{X}) + \lambda_4 \nabla f_4(\hat{X}) + \lambda_3 \nabla f_3(\hat{X}) = 0 \tag{3}$$

expression dans laquelle  $-\nabla f_0(\hat{X})$  représente le poids de la particule, les forces de réaction au niveau des parois étant données par  $-\lambda_3 \nabla f_3(\hat{X})$  et  $-\lambda_4 \nabla f_4(\hat{X})$ .

De plus

$$\lambda_3 > 0 \text{ et } \lambda_4 > 0 \tag{4}$$

pour assurer l'équilibre des forces.

En  $X = \hat{X}$ , nous pouvons qualifier les contraintes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f_i(\hat{X}) &\leq 0 \quad i = 1,2,3,4 & (5) \\ f_3(\hat{X}) &= 0 \quad f_4(\hat{X}) = 0 \\ f_1(\hat{X}) &< 0 \quad f_2(\hat{X}) < 0 \end{aligned}$$

L'activité des contraintes peut être caractérisée par la relation :

$$\lambda_i f_i(\hat{X}) = 0 \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(\hat{X}) = 0 &\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } f_1(\hat{X}) < 0 && \text{contrainte inactive à l'optimum} \\ \lambda_2 f_2(\hat{X}) = 0 &\Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ et } f_2(\hat{X}) < 0 && \text{contrainte inactive à l'optimum} \\ \lambda_3 f_3(\hat{X}) = 0 &\Rightarrow \lambda_3 > 0 \text{ et } f_3(\hat{X}) = 0 && \text{contrainte active à l'optimum} \\ \lambda_4 f_4(\hat{X}) = 0 &\Rightarrow \lambda_4 > 0 \text{ et } f_4(\hat{X}) = 0 && \text{contrainte active à l'optimum} \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (4), nous pouvons écrire :

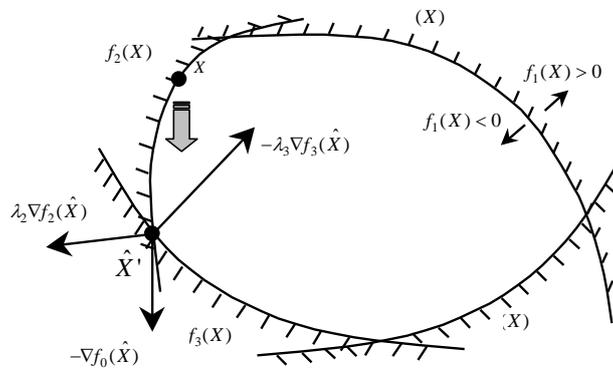
$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad (7)$$

De là, nous pouvons réécrire l'équilibre des forces (3) de la manière suivante :

$$\nabla f_0(\hat{X}) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \nabla f_i(\hat{X}) = 0 \quad (8)$$

Les relations (5), (6), (7) et (8) sont les conditions de Khun-Tucker.

Dans le cas particulier où la contrainte  $f_2(X)$  est une contrainte d'égalité, la situation suivante se produit :



L'optimum est trouvé à l'intersection des contraintes  $f_2(X)$  et  $f_3(X)$ . L'équilibre en ce point est donné par :

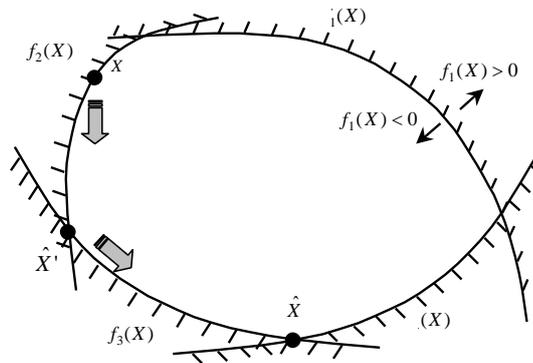
$$\begin{aligned}
 -\lambda_3 \nabla f_3(\hat{X}') + \lambda_2 \nabla f_2(\hat{X}') - \nabla f_0(\hat{X}') &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \nabla f_0(\hat{X}') + \lambda_3 \nabla f_3(\hat{X}') - \lambda_2 \nabla f_2(\hat{X}') &= 0
 \end{aligned}$$

et les multiplicateurs de Lagrange valent :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = \lambda_4 &= 0 \\
 \lambda_3 > 0 \quad \lambda_2 < 0
 \end{aligned}$$

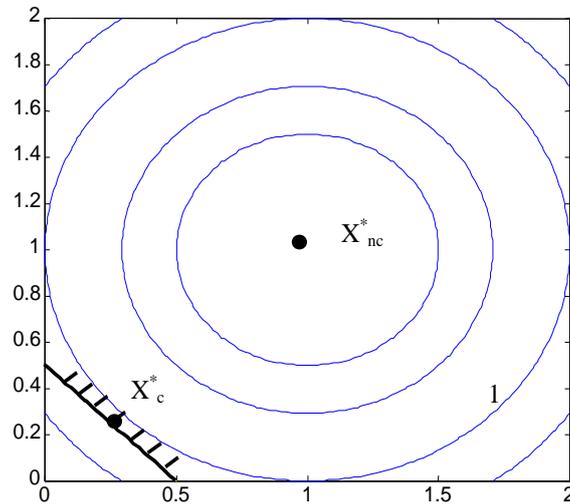
pour assurer l'équilibre au point  $X = \hat{X}'$  et pour vérifier la relation (6). On remarque donc qu'à l'optimum d'un problème de minimisation avec contrainte d'égalité, le signe du multiplicateur de Lagrange relatif à cette contrainte d'égalité n'a pas d'importance (compte tenu du fait qu'à l'optimum, cette contrainte doit être active, c'est à dire dans notre cas  $f_2(\hat{X}') = 0$ ).

Il est intéressant de remarquer ici que si la contrainte  $f_2(X)$  avait été une contrainte d'inégalité, étant caractérisée en  $X = \hat{X}'$  par un multiplicateur de Lagrange négatif, ce point n'aurait pas constitué l'optimum. Il aurait fallu poursuivre l'optimisation en quittant la contrainte  $f_2(X)$  pour trouver le point qui vérifie les 4 conditions de Khun-Tucker (5), (6), (7) et (8).



## 4 EXERCICE

$$\begin{aligned}
 F &= (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\
 g_1 &= X_1 + X_2 - 0.5 \leq 0 \\
 g_2 &= X_1 \geq 0
 \end{aligned}$$



1) Minimum non contraint :

$$F^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_{nc}^* = (1,1)$$

2) Minimum contraint :

$$X_c^* = (0.25; 0.25)$$

$$g_1 = 0 \quad g_2 < 0$$

$$\nabla F = \begin{Bmatrix} 2(X_1 - 1) \\ 2(X_2 - 1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ défini positif}$$

$$\nabla F + \lambda_1 \nabla g_1 = 0$$

$\Updownarrow$

$$\lambda_1 = 1.5 \quad \lambda_2 = 0 \quad (g_2 > 0)$$

# MINIMISATION UNIDIMENSIONNELLE RECHERCHE LINEAIRE

## 1 INTRODUCTION

La remise à jour des variables de conception dans le processus d'optimisation est donnée par :

$$X^+ = X^0 + \alpha S$$

où  $S$  est la direction de recherche (descente dans le cas d'une minimisation de la fonction objectif),  $X^0$  est le point actuel et  $\alpha$  est le pas de progression dans la direction  $S$  qui nous mène à trouver le minimum de la fonction objectif le long de cette direction (Figure 3.1a).

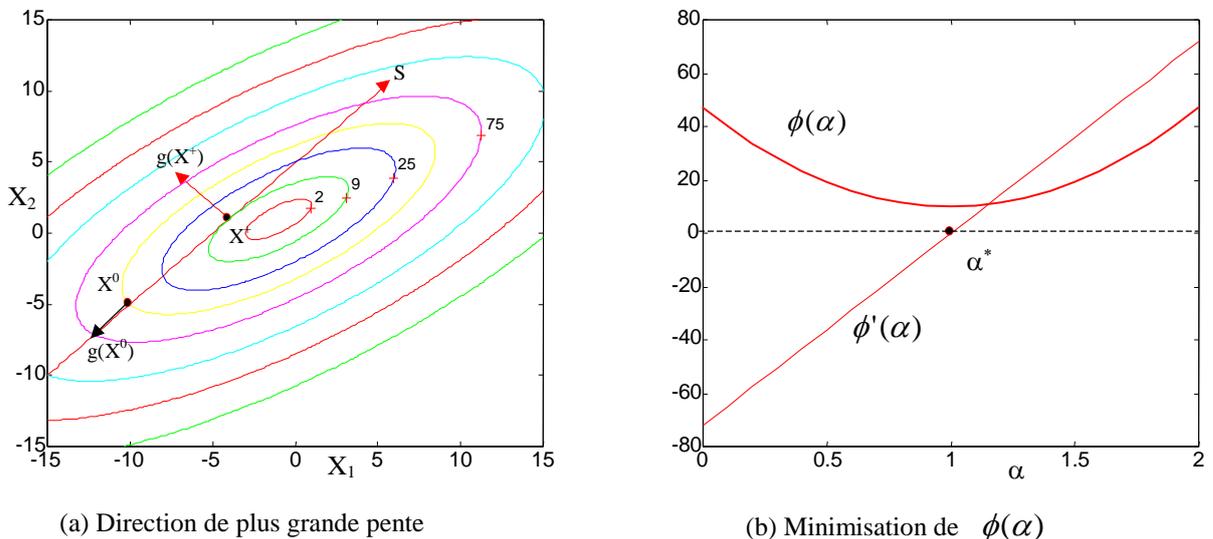


Figure 3.1. Fonction à minimiser :  $X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_1X_2 + 4X_1 - 6X_2 + 5$   
Point de départ  $(-10, -5)$

Le problème de recherche linéaire est de trouver ce pas de progression  $\alpha$ . Il s'agit donc d'un problème de minimisation unidimensionnelle en la variable  $\alpha$  :

$$f(X^+) = f(X^0 + \alpha S) = \phi(\alpha)$$

$$\min_{\alpha} \phi(\alpha) \Leftrightarrow \phi'(\alpha^*) = 0 \quad (\text{Figure 3.1b})$$

On peut montrer qu'assurer  $\phi'(\alpha^*) = 0$  revient à réaliser (Figure 3.1) :

$$g(X^+)^T \cdot S = 0$$

La minimisation de  $\phi(\alpha)$  est réalisée de manière itérative selon :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \rho(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \tag{3.1}$$

sur base d'informations d'ordre 0, 1 et 2 au point courant ou en deux points successifs, selon la technique utilisée : si n est égal à 2, nous avons :

$$\left. \begin{array}{cccc} \alpha_0 & \phi(\alpha_0) & \phi'(\alpha_0) & \dots \\ \alpha_1 & \phi(\alpha_1) & \phi'(\alpha_1) & \dots \\ \alpha_2 & \phi(\alpha_2) & \phi'(\alpha_2) & \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_{new} = \alpha_3 = ?$$

$$\rho = FCT(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi'(\alpha_1), \phi'(\alpha_2), \dots)$$

## 2 METHODES A UN POINT

La connaissance de certaines grandeurs en un point permet de déterminer le point suivant qui minimise la fonction  $\phi(\alpha)$ .

### 2.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à approximer la fonction  $\phi(\alpha)$  par une quadratique

$$\tilde{\phi}(\alpha) = C_1 + C_2\alpha + C_3\alpha^2$$

et à en chercher le minimum (Figure 3.2).

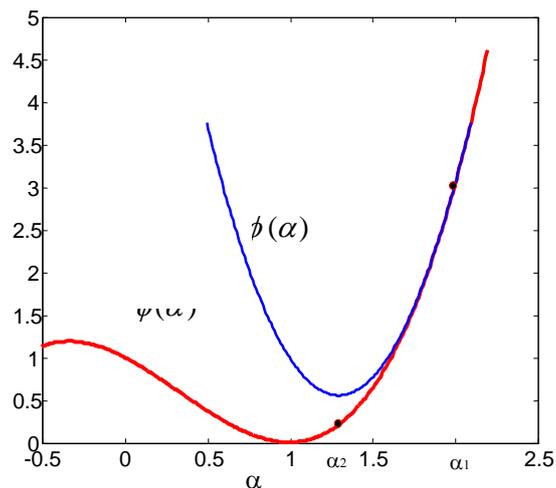


Figure 3.2. Approximation de  $\phi(\alpha)$  par une quadratique  
Minimisation d'une fonction à une variable par Newton

Au point courant  $\alpha_1$ , nous assurons l'égalité des dérivées première et seconde, ainsi que la valeur de la fonction :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\alpha_1) &= \phi(\alpha_1) = C_1 + C_2\alpha_1 + C_3\alpha_1^2 \\ \tilde{\phi}'(\alpha_1) &= \phi'(\alpha_1) = C_2 + 2C_3\alpha_1 \\ \tilde{\phi}''(\alpha_1) &= \phi''(\alpha_1) = 2C_3\end{aligned}$$

Le minimum de l'approximation quadratique en  $\alpha = \alpha_2$  conduit à :

$$\tilde{\phi}'(\alpha_2) = 0 = C_2 + 2C_3\alpha_2$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\phi'(\alpha_1)}{\phi''(\alpha_1)}$$

Le nouveau point  $\alpha_2$  est le point de départ pour une nouvelle approximation. Le processus se poursuit jusqu'à convergence.

Cette méthode revient aussi à approcher la fonction  $\phi'(\alpha)$  par sa tangente et à rechercher la valeur  $\alpha = \alpha_2$  qui est telle que  $\tilde{\phi}'(\alpha_2) = 0$  (Figure 3.3).

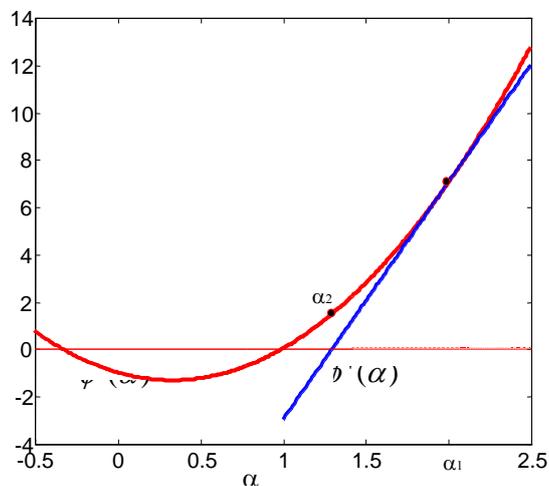


Figure 3.3. Approximation de  $\phi'(\alpha)$  par sa tangente  
Minimisation d'une fonction à une variable par Newton

Le nouveau point  $\alpha_2$  est le point de départ pour une nouvelle approximation. Le processus se poursuit jusqu'à convergence (Figure 3.4).

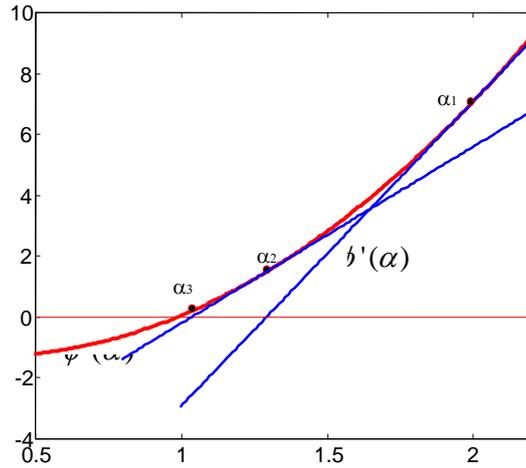


Figure 3.4. Minimisation d'une fonction à une variable par Newton

### Caractéristiques

- Approximation de  $\phi'(\alpha)$  par sa tangente
- Pas d'intervalle d'incertitude, donc pas d'assurance de la convergence
- La convergence globale n'est pas assurée
- Convergence asymptotique d'ordre 2
- Nécessité d'évaluer la dérivée seconde de la fonction  $\phi(\alpha)$

### 2.2 Méthode de la corde

Dans cette méthode, le nouveau point  $\alpha_{n+1}$  est calculé à partir de la valeur précédente et de la dérivée première selon :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - m\phi'(\alpha_n)$$

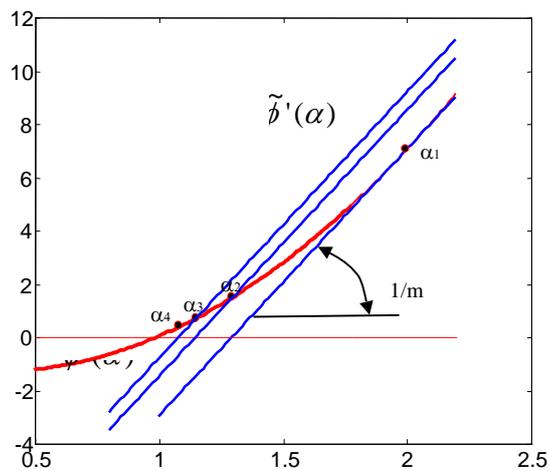


Figure 3.5. Minimisation d'une fonction à une variable par la méthode de la corde

**Caractéristiques**

- a)  $\alpha_{n+1}$  est l'intersection de l'axe  $\phi'(\alpha) = 0$  avec la droite de pente  $1/m$  passant par le point  $(\alpha_n, \phi'(\alpha_n))$ .
- b) Condition de convergence

$$0 < m\phi''(\alpha) < 2$$

$\phi''(\alpha)$  ne peut changer de signe près de la racine  
m du même signe que  $\phi''(\alpha^*)$

$$\phi'(\alpha^*) = 0 \Rightarrow \text{convergence pas assurée}$$

- c) Méthode du premier ordre  $p = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |1 - m\phi'(\alpha^*)| \neq 0$$

**3 METHODES A DEUX POINTS**

La connaissance de certaines grandeurs en deux points successifs permet de déterminer le point suivant qui minimise la fonction  $\phi(\alpha)$ . Ces méthodes peuvent être avec ou sans intervalle d'incertitude.

**3.1 Méthode sans intervalle d'incertitude: la corde classique**

Cette méthode est basée sur la méthode de la corde (section 2.2) dans laquelle le paramètre  $m$  varie d'une itération à l'autre. Ce facteur est calculé sur base des informations de deux itérations successives.

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - m_n \phi'(\alpha_n)$$

avec

$$\frac{1}{m_n} = \frac{\phi'(\alpha_n) - \phi'(\alpha_{n-1})}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}$$

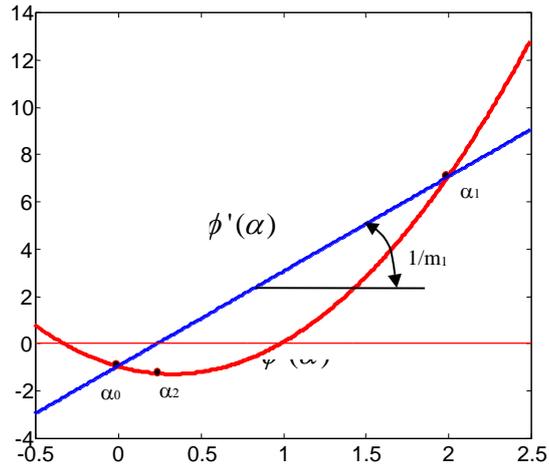


Figure 3.6. Approximation de  $\phi'(\alpha)$  par une droite  
Minimisation d'une fonction à une variable par la corde classique

La remise à jour est donnée par :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\phi'(\alpha_n) - \phi'(\alpha_{n-1})} \phi'(\alpha_n)$$

Le nouveau point  $\alpha_2$  et le point précédent  $\alpha_1$  sont les points de départ pour une nouvelle approximation. Le processus se poursuit jusqu'à convergence (Figure 3.7).

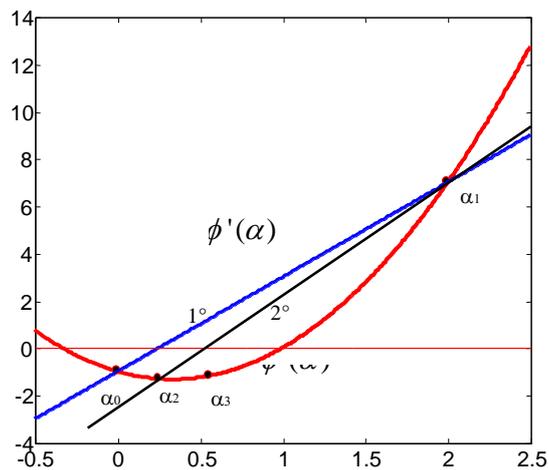


Figure 3.7. Minimisation d'une fonction à une variable par la méthode de la corde classique

### Caractéristiques

- a) Cette technique revient à approximer la fonction  $\phi(\alpha)$  par une quadratique passant par le point  $\alpha_n$  et ayant mêmes gradients aux points  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n-1}$ .

b) Ordre de convergence  $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$

c) Pas d'intervalle d'incertitude; divergence possible

### 3.2 Méthodes avec intervalle d'incertitude

Pour assurer la convergence de la méthode, on encadre le minimum dans un intervalle où la dérivée change de signe (Figure 3.8).

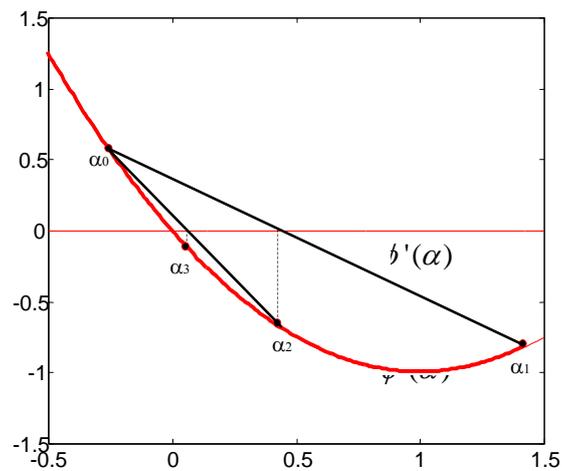


Figure 3.8. Méthode avec intervalle d'incertitude

Les points successifs  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n-1}$  sont tels que :

$$\phi'(\alpha_n) \times \phi'(\alpha_{n-1}) < 0$$

#### Propriétés

La méthode converge toujours lorsque  $\phi'(\alpha)$  est continue.

#### Désavantage

La convergence est ralentie par rapport à une méthode sans intervalle d'incertitude. En effet, si la fonction est convexe ou concave, un des deux points est "gelé" (Figure 3.8).

#### Méthode de la bisection

Le nouveau point est choisi au centre de l'intervalle  $[\alpha_0, \alpha_1]$  :

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$$

et le paramètre  $\rho$  de (3.1) est donné par :

$$\rho = \frac{1}{2}$$

### **Méthode de la regula falsi**

Comme dans la méthode de la corde classique (section 3.1), la fonction  $\phi(\alpha)$  est interpolée par une quadratique construite sur les informations

$$\phi(\alpha_1) \quad \phi'(\alpha_1) \quad \phi'(\alpha_2)$$

et le paramètre  $\rho$  de (3.1) est donné par :

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_2)}{\phi'(\alpha_2) - \phi'(\alpha_1)}$$

L'ordre de convergence vaut  $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$

### **Approximation quadratique**

On approxime la fonction  $\phi(\alpha)$  par une quadratique construite à partir des informations suivantes :

$$\phi(\alpha_1) \quad \phi'(\alpha_1) \quad \phi(\alpha_2)$$

et le paramètre  $\rho$  de (3.1) est donné par :

$$\rho = \frac{\frac{\phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\phi'(\alpha_1)}{2}}{\frac{\phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \phi'(\alpha_1)}$$

### **Interpolation cubique**

Interpolation cubique de la fonction  $\phi(\alpha)$  basée sur les informations suivantes :

$$\phi(\alpha_1) \quad \phi(\alpha_2) \quad \phi'(\alpha_1) \quad \phi'(\alpha_2)$$

Le paramètre  $\rho$  de (3.1) est donné par :

$$S = \frac{3(\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2))}{\alpha_2 - \alpha_1} + \phi'(\alpha_1) + \phi'(\alpha_2)$$

$$R = \sqrt{S^2 - \phi'(\alpha_1)\phi'(\alpha_2)}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_2) + R - S}{\phi'(\alpha_2) - \phi'(\alpha_1) + 2R}$$

L'ordre de convergence est égal à 2, même si l'interpolation est exacte pour des fonctions cubique.

#### 4 EXERCICE 1

On demande de trouver le minimum de la fonction

$$\phi(\alpha) = (\alpha + 1)(\alpha - 1)^2$$

en utilisant les méthodes suivantes :

- a) Regula falsi
- b) Corde classique
- c) Interpolation cubique
- d) Newton

- 
- Heuristique pour la détermination du premier point  $\alpha_0$

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$\phi'(\alpha) = 0 = a\alpha + b \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = -\frac{b}{a}$$

On a donc :

$$\phi(\alpha^*) = -\frac{b^2}{2a} + c$$

Or

$$\phi'(0) = b \quad \phi(0) = c$$

On a donc

$$\phi(\alpha^*) = -\frac{b^2}{2a} + c$$

Sur base de ce résultat, on choisit

$$\alpha_{init} = h = \frac{-2\phi(0)}{\phi'(0)}$$

Les dérivées première et seconde de la fonction à minimiser sont égales à :

$$\phi'(\alpha) = (\alpha - 1)(3\alpha + 1)$$

$$\phi''(\alpha) = 6\alpha - 2$$

Si on choisit  $\alpha_0 = 0$ ,  $\phi(0) = 1$  et  $\phi'(0) = -1$

$$\alpha = \alpha_{init} = \frac{-2 \times 1}{-1} = 2$$

Si dès lors  $\alpha_1 = 2$ ,  $\phi(2) = 3$  et  $\phi'(2) = 7$

Nous sommes donc dans les conditions d'intervalle d'incertitude :

$$\phi'(\alpha_0) \times \phi'(\alpha_1) < 0$$

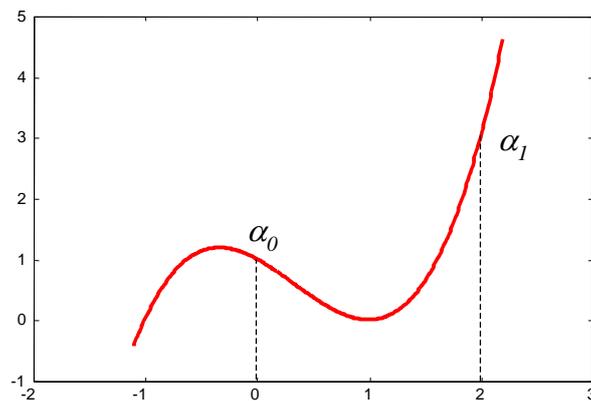


Figure 3.9. Visualisation de la fonction à minimiser

- Regula falsi

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = 0 & \phi(0) = 1 & \phi'(0) = -1 \\ \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \end{array}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_1)}{\phi'(\alpha_1) - \phi'(\alpha_0)} = 0.875$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \rho(\alpha_1 - \alpha_0) = 0.25$$

$$\alpha_2 = 0.25 \quad \phi(0.25) = 0.7031 \quad \phi'(0.25) = -1.3125$$

Pour vérifier la condition  $\phi'(\alpha_{n-1}) \times \phi'(\alpha_n) < 0$ , nous conservons les points  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

$$\alpha_1 = 2 \quad \phi(2) = 3 \quad \phi'(2) = 7$$

$$\alpha_2 = 0.25 \quad \phi(0.25) = 0.7031 \quad \phi'(0.25) = -1.3125$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_2)}{\phi'(\alpha_2) - \phi'(\alpha_1)} = 0.1579$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \rho(\alpha_2 - \alpha_1) = 0.5263$$

$$\alpha_3 = 0.5263 \quad \phi(0.5263) = 0.3424 \quad \phi'(0.5263) = -1.2216$$

Pour vérifier la condition  $\phi'(\alpha_{n-1}) \times \phi'(\alpha_n) < 0$ , nous conservons les points  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$ .

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \\ \alpha_3 = 0.5263 & \phi(0.5263) = 0.3424 & \phi'(0.5263) = -1.2216 \end{array}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_3)}{\phi'(\alpha_3) - \phi'(\alpha_1)} = 0.1485$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \rho(\alpha_3 - \alpha_1) = 0.7452$$

$$\alpha_4 = 0.7452 \quad \phi(0.7452) = 0.1132 \quad \phi'(0.7452) = -0.8244$$

Pour vérifier la condition  $\phi'(\alpha_{n-1}) \times \phi'(\alpha_n) < 0$ , nous conservons les points  $\alpha_1$  et  $\alpha_4$ .

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \\ \alpha_4 = 0.7452 & \phi(0.7452) = 0.1132 & \phi'(0.7452) = -0.8244 \end{array}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_4)}{\phi'(\alpha_4) - \phi'(\alpha_1)} = 0.1053$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 - \rho(\alpha_4 - \alpha_1) = 0.8774$$

$$\alpha_5 = 0.8774 \quad \phi(0.8774) = 0.0282 \quad \phi'(0.8774) = -0.4453$$

Pour vérifier la condition  $\phi'(\alpha_{n-1}) \times \phi'(\alpha_n) < 0$ , nous conservons les points  $\alpha_1$  et  $\alpha_5$ .

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \\ \alpha_5 = 0.8774 & \phi(0.8774) = 0.0282 & \phi'(0.8774) = -0.4453 \end{array}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_5)}{\phi'(\alpha_5) - \phi'(\alpha_1)} = 0.0598$$

$$\alpha_6 = \alpha_5 - \rho(\alpha_5 - \alpha_1) = 0.9445$$

$$\alpha_6 = 0.9445 \quad \phi(0.9445) = 0.0059 \quad \phi'(0.9445) = -0.2126$$

Pour vérifier la condition  $\phi'(\alpha_{n-1}) \times \phi'(\alpha_n) < 0$ , nous conservons les points  $\alpha_1$  et  $\alpha_6$ .

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \\ \alpha_6 = 0.9445 & \phi(0.9445) = 0.0059 & \phi'(0.9445) = -0.2126 \end{array}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_6)}{\phi'(\alpha_6) - \phi'(\alpha_1)} = 0.0294$$

$$\alpha_7 = \alpha_6 - \rho(\alpha_6 - \alpha_1) = 0.9756$$

Le processus de minimisation est illustré à la Figure 3.10. On remarque la présence d'un point gelé qui ralentit la convergence.

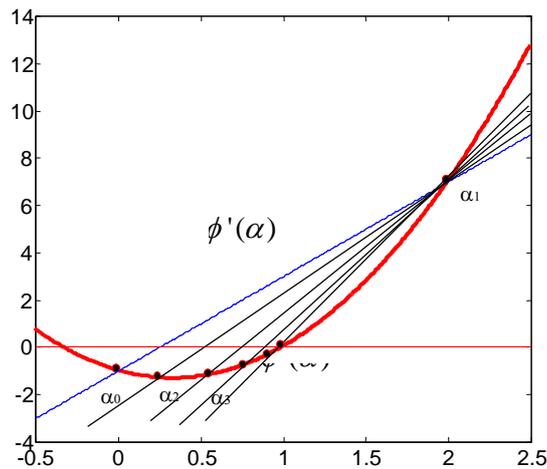


Figure 3.10. Minimisation de la fonction par la regula falsi

- Interpolation cubique

$$S = \frac{3(\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2))}{\alpha_2 - \alpha_1} + \phi'(\alpha_1) + \phi'(\alpha_2)$$

$$R = \sqrt{S^2 - \phi'(\alpha_1)\phi'(\alpha_2)}$$

$$\rho = \frac{\phi'(\alpha_2) + R - S}{\phi'(\alpha_2) - \phi'(\alpha_1) + 2R}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = 0 & \phi(0) = 1 & \phi'(0) = -1 \\ \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \end{array}$$

$$S = 3 \quad R = 4 \quad \rho = 0.5$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \rho(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$$

$$\alpha_2 = 1 \qquad \phi(1) = 0 \qquad \phi'(1) = 0$$

Comme la fonction à minimiser est cubique, la solution est trouvée en une seule itération.

- Newton

Si  $\alpha_0 = 0 \qquad \phi(0) = 1 \qquad \phi'(0) = -1 \qquad \phi''(0) = -2$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\phi'(\alpha_0)}{\phi''(\alpha_0)} = 0 - \frac{-1}{-2} = -0.5$$

On se dirige dans ce cas-ci vers le maximum de la fonction situé en  $-1/3$ . On n'est pas dans le domaine d'attraction du bon optimum (Figure 3.11).

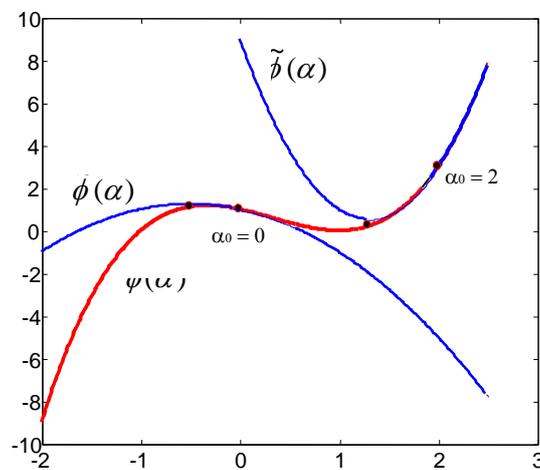


Figure 3.11. Approximation quadratique de la fonction en  $\alpha_0 = 0$  et  $\alpha_0 = 2$

Si  $\alpha_0 = 2 \qquad \phi(2) = 3 \qquad \phi'(2) = 7 \qquad \phi''(2) = 10$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\phi'(\alpha_0)}{\phi''(\alpha_0)} = 2 - \frac{7}{10} = 1.3$$

$\alpha_1 = 1.3 \qquad \phi(1.3) = 0.207 \qquad \phi'(1.3) = 1.47 \qquad \phi''(1.3) = 5.8$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\phi'(\alpha_1)}{\phi''(\alpha_1)} = 1.3 - \frac{1.47}{5.8} = 1.0465$$

$\alpha_2 = 1.0465 \qquad \phi(1.0465) = 0.0044 \qquad \phi'(1.0465) = 0.1927 \qquad \phi''(1.0465) = 4.279$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{\phi'(\alpha_2)}{\phi''(\alpha_2)} = 1.0465 - \frac{0.1927}{4.279} = 1.0015$$

$$\alpha_3 = 1.0015 \quad \phi(1.0015) = 4.9 \times 10^{-6} \quad \phi'(1.0015) = 6.08 \times 10^{-3} \quad \phi''(1.0015) = 4.0091$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \frac{\phi'(\alpha_3)}{\phi''(\alpha_3)} = 1.0015 - \frac{6.08 \times 10^{-3}}{4.0091} = 1.0000017$$

Le processus de minimisation est illustré à la Figure 3.12.

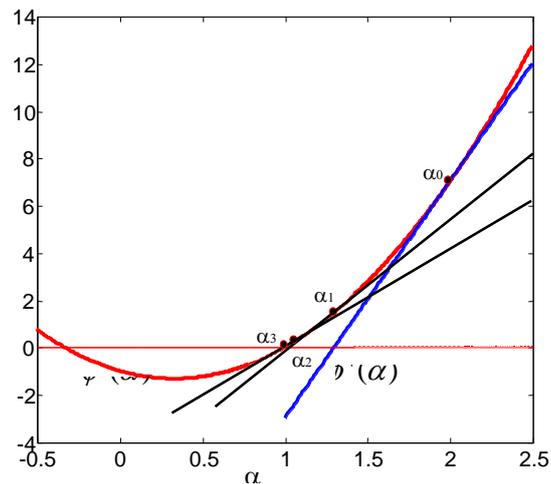


Figure 3.12. Minimisation de la fonction par la méthode de Newton

- Corde classique

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\phi'(\alpha_n) - \phi'(\alpha_{n-1})} \phi'(\alpha_n)$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = 0 & \phi(0) = 1 & \phi'(0) = -1 \\ \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \end{array}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_1) = 2 - \frac{2}{8} 7 = 0.25$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2 & \phi(2) = 3 & \phi'(2) = 7 \\ \alpha_2 = 0.25 & \phi(0.25) = 0.7031 & \phi'(0.25) = -1.3125 \end{array}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_2) = 0.25 - \frac{-1.75}{-8.3125} (-1.3125) = 0.5263$$

$$\alpha_2 = 0.25 \quad \phi(0.25) = 0.7031 \quad \phi'(0.25) = -1.3125$$

$$\alpha_3 = 0.5263 \quad \phi(0.5263) = 0.3424 \quad \phi'(0.5263) = -1.2216$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_3) = 0.5263 - \frac{0.2763}{0.0909} (-1.2216) = 4.24$$

$$\alpha_3 = 0.5263 \quad \phi(0.5263) = 0.3424 \quad \phi'(0.5263) = -1.2216$$

$$\alpha_4 = 4.24 \quad \phi(4.24) = 55.007 \quad \phi'(4.24) = 44.452$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_4) = 4.24 - \frac{3.7136}{45.6744} (44.452) = 0.6256$$

$$\alpha_4 = 4.24 \quad \phi(4.24) = 55.007 \quad \phi'(4.24) = 44.452$$

$$\alpha_5 = 0.6256 \quad \phi(0.6256) = 0.2278 \quad \phi'(0.6256) = -1.077$$

$$\alpha_6 = \alpha_5 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_5) = 0.6256 - \frac{-3.6143}{-45.5298} (-1.077) = 0.711139$$

$$\alpha_5 = 0.6256 \quad \phi(0.6256) = 0.2278 \quad \phi'(0.6256) = -1.077$$

$$\alpha_6 = 0.7113 \quad \phi(0.7113) = 0.1228 \quad \phi'(0.7113) = -0.9051$$

$$\alpha_7 = \alpha_6 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_6) = 0.7113 - \frac{0.08549}{0.1718} (-0.9051) = 1.1617$$

$$\alpha_6 = 0.7113 \quad \phi(0.7113) = 0.1228 \quad \phi'(0.7113) = -0.9051$$

$$\alpha_7 = 1.1617 \quad \phi(1.1617) = 0.0565 \quad \phi'(1.1617) = 0.7252$$

$$\alpha_8 = \alpha_7 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_7) = 1.1617 - \frac{0.4503}{1.6302} (0.7252) = 0.9613$$

$$\alpha_7 = 1.1617 \quad \phi(1.1617) = 0.0565 \quad \phi'(1.1617) = 0.7252$$

$$\alpha_8 = 0.9613 \quad \phi(0.9613) = 2.9 \times 10^{-3} \quad \phi'(0.9613) = -0.1501$$

$$\alpha_9 = \alpha_8 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_8) = 0.9613 - \frac{-0.2}{-0.8753} (-0.1501) = 0.9957$$

$$\alpha_8 = 0.9613 \quad \phi(0.9613) = 2.9 \times 10^{-3} \quad \phi'(0.9613) = -0.1501$$

$$\alpha_9 = 0.9957 \quad \phi(0.9957) = 3.7 \times 10^{-5} \quad \phi'(0.9957) = -0.0172$$

$$\alpha_{10} = \alpha_9 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi'} \phi'(\alpha_9) = 0.9957 - \frac{0.0343}{0.1328} (-0.0172) = 0.999$$

On peut remarquer une convergence non monotone du processus d'optimisation.

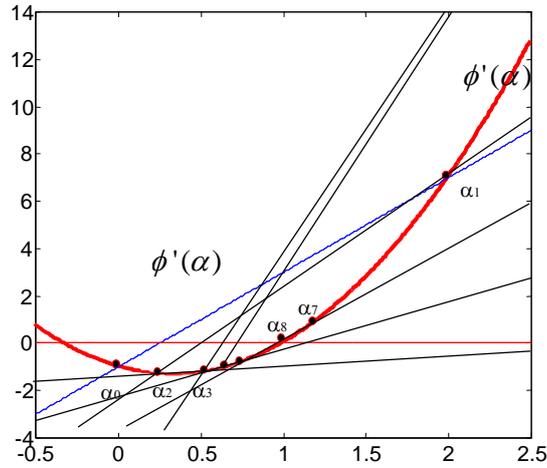


Figure 3.13. Minimisation de la fonction par la méthode de la corde classique

## 5 EXERCICE 2

$$\min F = 5 - 2X_1 + X_1^4 + X_1X_2 + 2X_2^2$$

$$G = -X_1^3 - X_2^2 \leq 0 \quad X^0 = (1,1)$$

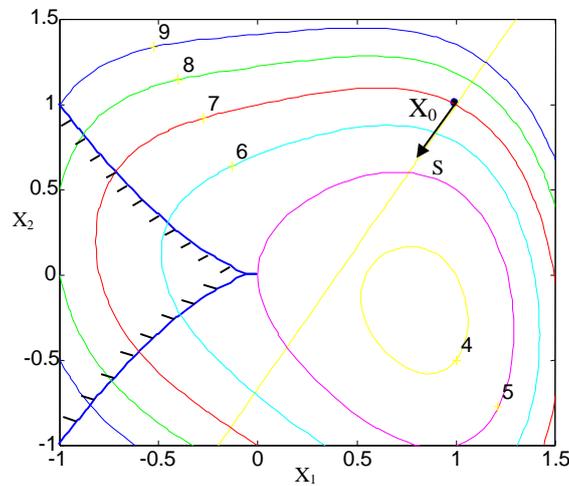


Figure 3.14. Représentation du problème de l'exercice 2

- Evaluation de la fonction objectif et de la contrainte, ainsi que leurs gradients au point initial

$$F_1 = 7 \quad G_1 = -2$$

$$\nabla F = \begin{Bmatrix} -2 + 4X_1^3 + X_2 \\ X_1 + 4X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad \nabla G = \begin{Bmatrix} -3X_1^2 \\ -2X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

- Evaluation de la direction de la plus grande pente

$$S = -\nabla F = \begin{Bmatrix} -3 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

- Le long de cette direction, calculer la dérivée directionnelle

$$\frac{dF}{d\alpha} = \nabla F \cdot S = F_1' = -34$$

$$\frac{dG}{d\alpha} = \nabla G \cdot S = G_1' = 19$$

- Pour  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = 0.5$ , on utilise une interpolation quadratique pour repérer le minimum de F et le zéro de G le long de la direction S

$$X_i^{k+1} = X_i^k + \alpha^k S_i^k$$

$$X^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + 0 \begin{Bmatrix} -3 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad X^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + 0.5 \begin{Bmatrix} -3 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \end{Bmatrix}$$

Au point  $X^2$ , nous avons :

$$F_2 = 11.3125 \quad G_2 = -2.125$$

$$\nabla F = \begin{Bmatrix} -2 + 4X_1^3 + X_2 \\ X_1 + 4X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -6.5 \end{Bmatrix} \quad \nabla G = \begin{Bmatrix} -3X_1^2 \\ -2X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

On utilise l'approximation quadratique (section 3.2) pour repérer le minimum de F le long de la direction de recherche :

$$\rho = \frac{\frac{\phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\phi'(\alpha_1)}{2}}{\frac{\phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \phi'(\alpha_1)} = \frac{\frac{F_2 - F_1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{F_1'}{2}}{\frac{F_2 - F_1}{\alpha_2 - \alpha_1} - F_1'} = \frac{\frac{11.3125 - 7}{0.5 - 0} - \frac{-34}{2}}{\frac{11.3125 - 7}{0.5 - 0} - (-34)} = 0.6011$$

$$\alpha_f^* = \alpha_3 = \alpha_2 - \rho(\alpha_2 - \alpha_1) = 0.5 - 0.6011(0.5 - 0) = 0.1994$$

Ce résultat pouvait s'obtenir en considérant :

$$\tilde{F} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$$

$$a_2 = \frac{F_2 - F_1 - F_1'}{\alpha_2 - \alpha_1} = 85.25$$

$$a_1 = F_1' - 2a_2\alpha_1 = -34$$

$$a_0 = F_1 - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_1^2 = 7$$

$$\alpha_f^* = \alpha_3 = \frac{-a_1}{2a_2} = 0.1994$$

et le nouveau point se trouverait en :

$$X_f^* = \begin{Bmatrix} 1 - 3\alpha_f^* \\ 1 - 5\alpha_f^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4018 \\ 0.003 \end{Bmatrix}$$

De même, pour la contrainte G, on crée une approximation quadratique dont on recherche

le zéro: on calcule donc le pas de progression tel que l'on se retrouve sur la contrainte approximée :

$$\tilde{G} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$$

$$a_2 = \frac{G_2 - G_1 - G_1'}{\alpha_2 - \alpha_1} = -38.5$$

$$a_1 = G_1' - 2a_2\alpha_1 = 19$$

$$a_0 = G_1 - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_1^2 = -2$$

Le zéro se trouve en :

$$\alpha_g^* = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = 0.1522$$

l'autre racine entraînant une progression de 0.341 trop importante:

$$X_g^* = \begin{Bmatrix} 1 - 3\alpha_g^* \\ 1 - 5\alpha_g^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5433 \\ 0.2389 \end{Bmatrix}$$

- Choisir  $\alpha$  et évaluer F et G

Puisque  $\alpha_g^* < \alpha_f^*$ , on choisit d'utiliser  $\alpha_g^*$  pour éviter de violer la contrainte (approximée) :

$$X^* = X_g^* = \begin{Bmatrix} 0.5433 \\ 0.2389 \end{Bmatrix} \quad F(X^*) = 4.2445 \quad G(X^*) = -0.2175$$

Les Figures 3.15 et 3.16 illustrent ces résultats.

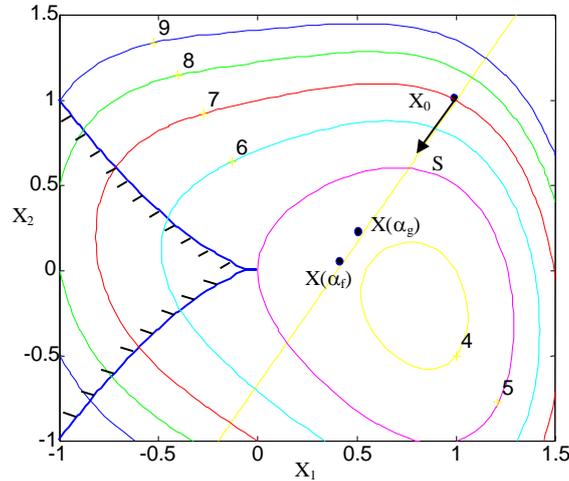


Figure 3.15. Progression le long de la direction de recherche

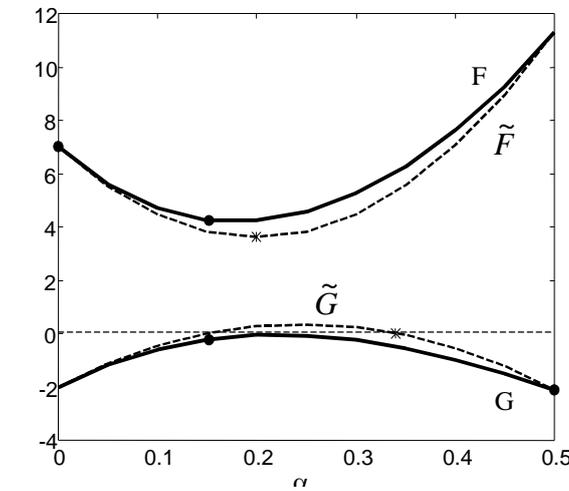


Figure 3.16. Evolution des fonctions réelles et approchées en fonction de  $\alpha$   
 □ : valeurs calculées   \* : valeurs estimées

## 6 CAS PARTICULIER DES FONCTIONS QUADRATIQUES

Dans le cas d'une fonction quadratique (Figure 3.1b), la recherche linéaire est directe et calculée de la manière suivante :

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - b^T X + c$$

$$\phi(\alpha) = f(X + \alpha S) = \frac{1}{2}(X + \alpha S)^T A(X + \alpha S) - b^T (X + \alpha S) + c$$

$$\min_{\alpha} \phi(\alpha) \Leftrightarrow \phi'(\alpha^*) = 0 \quad (\text{Figure 3.1b})$$

et comme assurer  $\phi'(\alpha^*) = 0$  revient à réaliser :

$$S(X)^T . g(X + \alpha S) = 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} g(X + \alpha S) &= A(X + \alpha S) - b \\ S(X)^T . g(X + \alpha S) &= S(X)^T . (AX + \alpha AS - b) = 0 \end{aligned}$$

et finalement

$$\alpha = \frac{-S(X)^T (AX - b)}{S(X)^T AS(X)} = -\frac{S^T g}{S^T AS}$$

## 7 RECHERCHES LINÉAIRES INEXACTES

### 7.1 Introduction

Dans les méthodes de descente, on recherche une direction  $d_c$  de progression telle que:

$$g(X_c)^T d_c < 0$$

Ensuite, on calcule le pas de progression  $t_c$  le long de cette direction de manière à satisfaire :

$$\begin{aligned} f(X^+) &< f(X_c) \\ X^+ &= X_c + t_c d_c \\ t_c &> 0 \end{aligned}$$

#### Commentaires

- 1)  $d_c$  est souvent choisi comme étant la direction de Newton ou une direction de quasi Newton (chapitre 4)
- 2)  $t_c$  est choisi par une procédure de recherche qui demande moins de travail qu'une minimisation exacte (recherche linéaire approchée)

- 3)  $t_c = 1$  doit être utilisée aussi souvent que possible (la méthode dégénère en méthode de Newton ou BFGS au voisinage d'un minimum local)

### 7.2 Conditions de convergence globale d'Armijo-Goldstein

La recherche linéaire sera globalement convergente si chaque pas satisfait deux conditions simples :

- 1) la décroissance de  $f(X)$  est suffisamment importante en regard de la longueur du pas :

$$S_c = t_c d_c$$

$$\boxed{f(X^+) \leq f(X_c) + \alpha \nabla f(X_c)^T S_c} \quad (3.2)$$

$$\alpha \in ]0,1[ \quad \text{en pratique, } \alpha = 10^{-4}$$

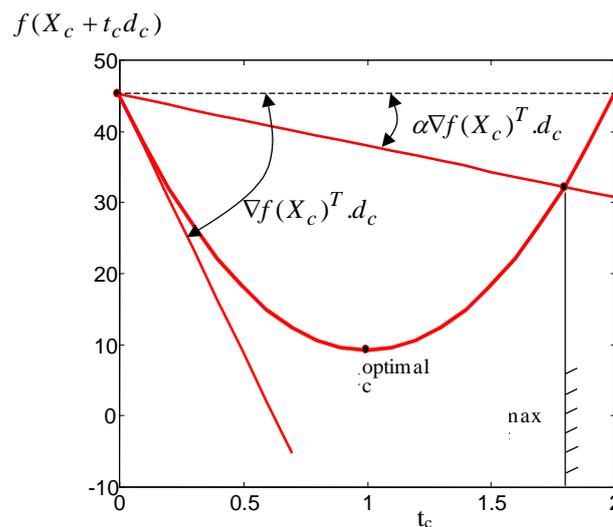


Figure 3.17. Illustration de la première condition d'Armijo-Goldstein (3.2)

$$\text{Fonction à minimiser : } X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_1X_2 + 4X_1 - 6X_2 + 5$$

$$X_c = (-10, -5) \quad \phi(t_c) = 36t_c^2 - 72t_c + 45 \quad \nabla f(X_c)^T . d_c = -72$$

$$\text{Pour } \alpha = 0.1, \text{ la relation (3.2) devient : } f(X^+) \leq 45 - 0.1 \times 72t_c$$

$$\text{Point de borne supérieure } (X_1, X_2) = (0.8; 5.8) \text{ correspondant à } t_c = 1.8$$

- 2) la longueur du pas n'est pas trop courte :

$$\boxed{\nabla f(X^+)^T d_c > \beta \nabla f(X_c)^T d_c} \quad (3.3)$$

$$\beta \in ]\alpha,1[ \quad \text{en pratique, } \beta \in [0.7; 0.9]$$

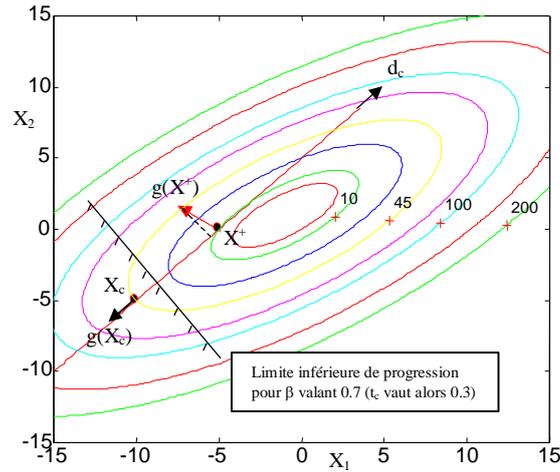


Figure 3.18. Illustration de la seconde condition d'Armijo-Goldstein (3.3)

Fonction à minimiser :  $X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_1X_2 + 4X_1 + 6X_2 + 5$

Pour  $\beta = 0.7$ , la relation (3.3) devient  $72t_c - 72 > -50.4$

En  $X^+ = (-5,0)$  :  $-12 > -50.4$  et point de borne inférieur  $(-8.2; -3.2)$

$$t_c^{\min} = 0.3 \quad t_c^{\text{optimal}} = 1$$

Remarque :  $0 < \alpha < \beta < 1$

Une telle recherche linéaire est possible à mettre en œuvre.

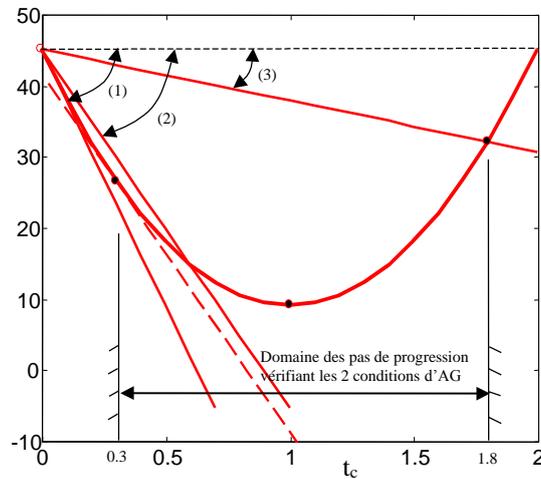


Figure 3.18. Illustration des deux conditions d'Armijo-Goldstein (3.2) et (3.3)

Fonction à minimiser :  $X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_1X_2 + 4X_1 + 6X_2 + 5$

$$t_c^{\min} = 0.3 \quad t_c^{\text{optimal}} = 1 \quad t_c^{\max} = 1.8$$

(1)  $\nabla f(X_c)^T d_c$  (2)  $\beta \nabla f(X_c)^T d_c$  (3)  $\alpha \nabla f(X_c)^T d_c$

### 7.3 Implications pratiques

Si la direction de descente est celle de Newton ou de quasi Newton, alors il faut toujours essayer en premier lieu  $t_c = 1$  (si cette valeur est admissible).

L'expérience montre qu'une procédure efficace de sélection de  $t_c$  pour satisfaire les conditions d'Armijo-Goldstein doit viser à :

- 1) choisir  $\alpha$  et  $\beta$  de manière à avoir une plage aussi large que possible de points satisfaisant les conditions (3.2) et (3.3);
- 2) utiliser le premier point que l'on trouve dans cet intervalle admissible (plutôt que d'essayer de trouver un minimum de  $f(X)$  le long de la ligne  $X_c + t_c d_c$ ).

Dans beaucoup de routines, on commence avec  $t_c = 1$  et on fait du "backtraking" pour réduire  $t_c$  jusqu'à satisfaire (3.2) et (3.3). En général, on se contente de vérifier la violation de (3.2)

#### 7.4 Structure typique d'une recherche linéaire inexacte

Etant donnés

$f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $X_c$ ,  $f(X_c)$ ,  $\nabla f(X_c)$   
une direction de descente  $d_c$

**Initialisation**

$t_L = 0$     $t_R = \infty$     $OK = false$     $t_c = 1$

**Algorithme**

*Repeat*

*Evaluer*  $f(X_c + t_c d_c)$

*if* ( $X_c + t_c d_c$ ) *satisfait* (3.2) *then*

*évaluer*  $\nabla f(X_c + t_c d_c)$

*if* ( $X_c + t_c d_c$ ) *satisfait* (3.3) *then*

$OK = true$

*else*

$t_L = t_c$

*if*  $t_R = \infty$  *then*

$t_c = \text{accroissement}(t_c)$

*else*

$t_c = \text{raffinement}(t_c, t_L, t_R)$

*endif*

*endif*

*else*

$t_R = t_c$

*if*  $t_L = 0$  *then*

$t_c = \text{décroissance}(t_c)$

*else*

$t_c = \text{raffinement}(t_c, t_L, t_R)$

*endif*

*endif*

*Until*  $OK = true$

**7.5** *Remarques*

$$\begin{aligned}\nabla f(X^+)^T d_c &> \beta \nabla f(X_c)^T d_c \\ \nabla f(X_c)^T d_c &< 0 \\ \Updownarrow \\ [\nabla f(X^+) - \nabla f(X_c)]^T d_c &> (\beta - 1) \nabla f(X_c)^T d_c > 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

(3.4) est la condition nécessaire et suffisante pour avoir l'existence de matrices symétriques et définies positives au cours des mises à jour de type quasi Newton.

Si on s'assure de cette condition dans la méthode BFGS ou DFP (chapitre 4), on s'assure de la possibilité de créer un update défini positif à chaque itération.

# MINIMISATION NON CONTRAINTE

## 1 METHODES D'ORDRE ZERO

### Méthode de POWELL

Directions conjuguées :

$$s_i^T H s_j = 0 \quad j \neq i$$

- 1) Soit  $n$ , le nombre de variables de conception. On réalise  $n$  recherches linéaires selon  $n$  directions orthogonales.
- 2) Avec ces  $n$  directions, on construit un nouvel itéré.

### Algorithme

- 1) Démarrage : on choisit des directions de recherche initiales

$$s_i = E_i \quad (\text{axes de coordonnées})$$

- 2) On forme l'ensemble  $X$

$$X = \{\alpha_1^* s_1, \dots, \alpha_n^* s_n\}$$

où  $\alpha_i^*$  représente le pas de progression qui minimise la fonction objectif le long de la direction  $i$ . Les  $\alpha_i^*$  sont déterminés par recherche linéaire.

- 3) On recherche le minimum selon la direction conjuguée

$$s_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* s_i$$

et on recherche le minimum le long de cette direction :  $\alpha_{n+1}^*$

- 4) On élimine  $\alpha_1^* s_1$  de l'ensemble  $X$  en décalant les éléments vers la gauche, et y on ajoute  $\alpha_{n+1}^* s_{n+1}$  dans cet ensemble :

$$X = \{\alpha_2^* s_2, \dots, \alpha_{n+1}^* s_{n+1}\}$$

- 5) On obtient  $n$  nouvelles directions de recherche et on va en 2).

Le processus est répété jusqu'à la convergence.

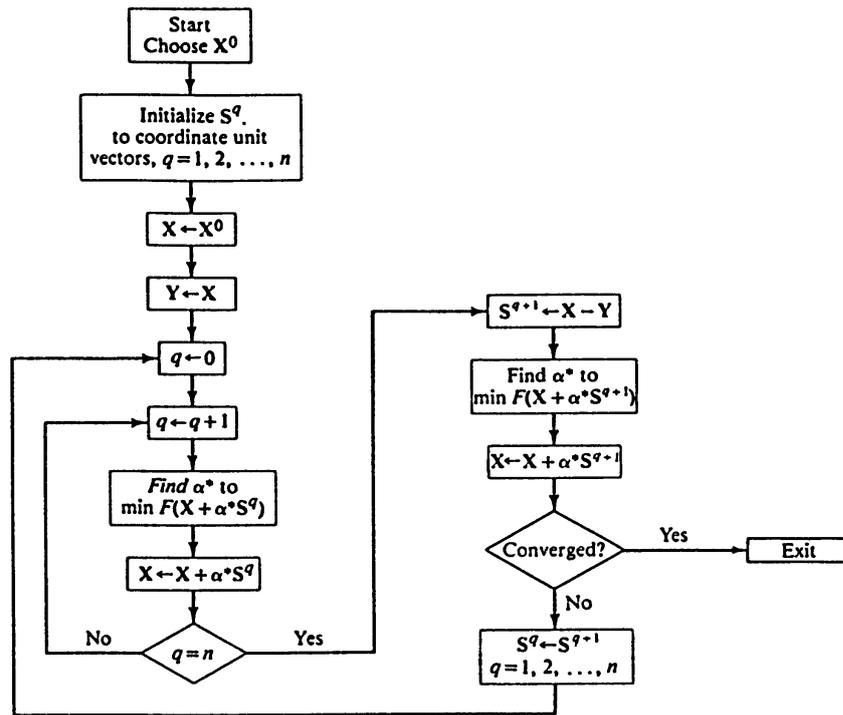


Figure 4.1. Algorithme de la méthode de Powell

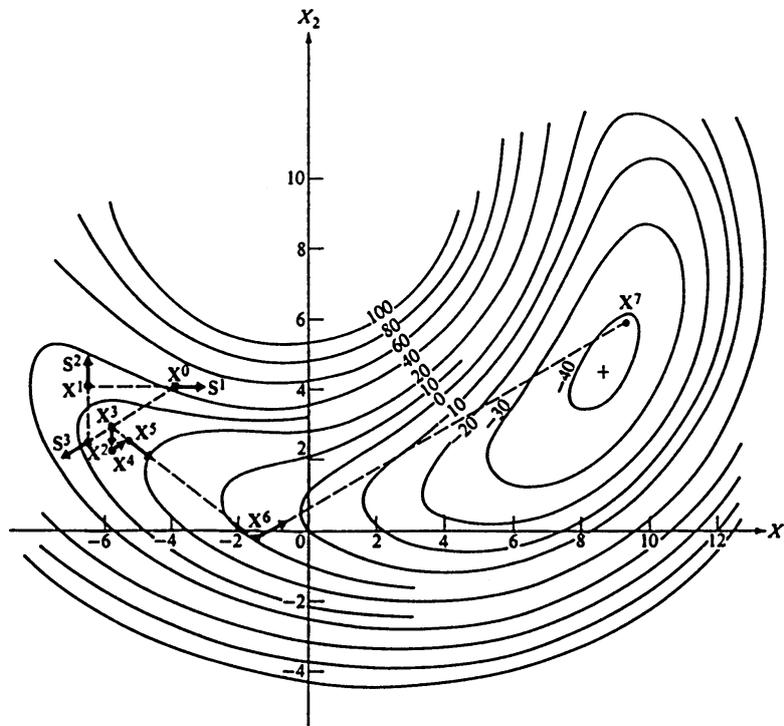


Figure 4.2. Interprétation géométrique de la méthode de Powell

## 2 METHODES D'ORDRE UN

### 2.1 Méthode de la plus grande pente

La direction de recherche à l'itération k est donnée par :

$$s^k = -g^k$$

Pour une fonction quadratique : convergence linéaire

$$\rho = \left( \frac{E - e}{E + e} \right)^2 = \left( \frac{r - 1}{r + 1} \right)^2 \quad r = \frac{E}{e}$$

où E et e sont les valeurs propres max et min du Hessien.

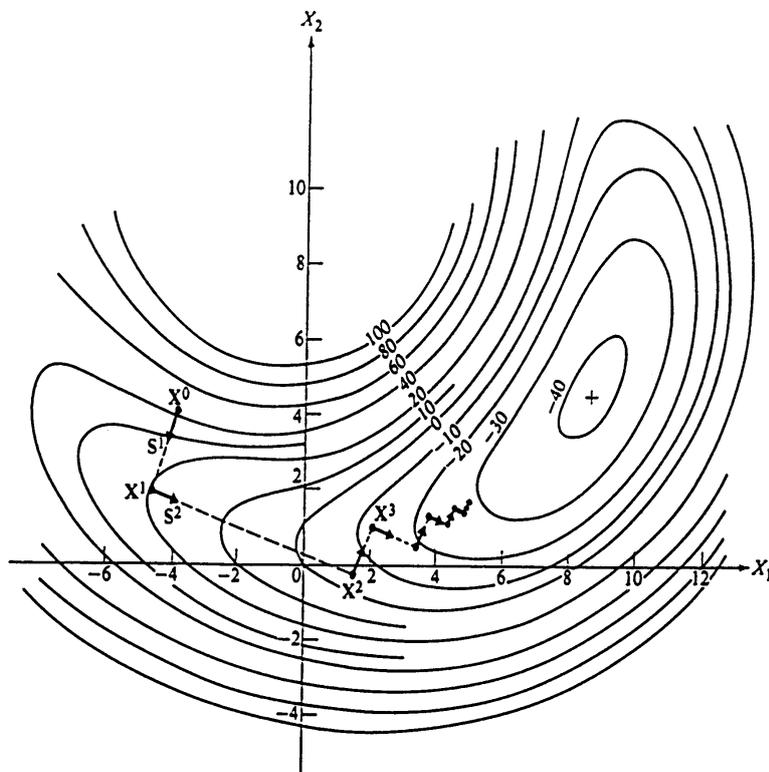


Figure 4.3. Interprétation géométrique de la méthode de la plus grande pente

### 2.2 Méthode des directions conjuguées : $s_i^T H s_j = 0 \quad j \neq i$

La direction de recherche à l'itération k est donnée par :

$$s^{k+1} = -g^{k+1} + \sum_i^k \beta^i s^i$$

Gradients conjugués :  $\beta^i = 0 \quad i = 0,1,\dots,k-1$

$$s^{k+1} = -g^{k+1} + \beta^k s^k$$

$$\beta^k = \frac{(g^{k+1})^T (g^{k+1} - g^k)}{(s^k)^T (g^{k+1} - g^k)}$$

Hypothèses simplificatrices possibles :

- 1)  $(s^k)^T g^{k+1} = 0$  recherche linéaire exacte selon  $s^k$
- 2)  $(g^k)^T g^{k+1} = 0$  fonction quadratique
- 3)  $(s^k)^T g^k = -(g^k)^T g^k$  recherche linéaire exacte selon  $s^{k-1}$

1) + 2) + 3)  $\square$  FLETCHER - REEVES

$$\beta^k = \frac{(g^{k+1})^T g^{k+1}}{(g^k)^T g^k}$$

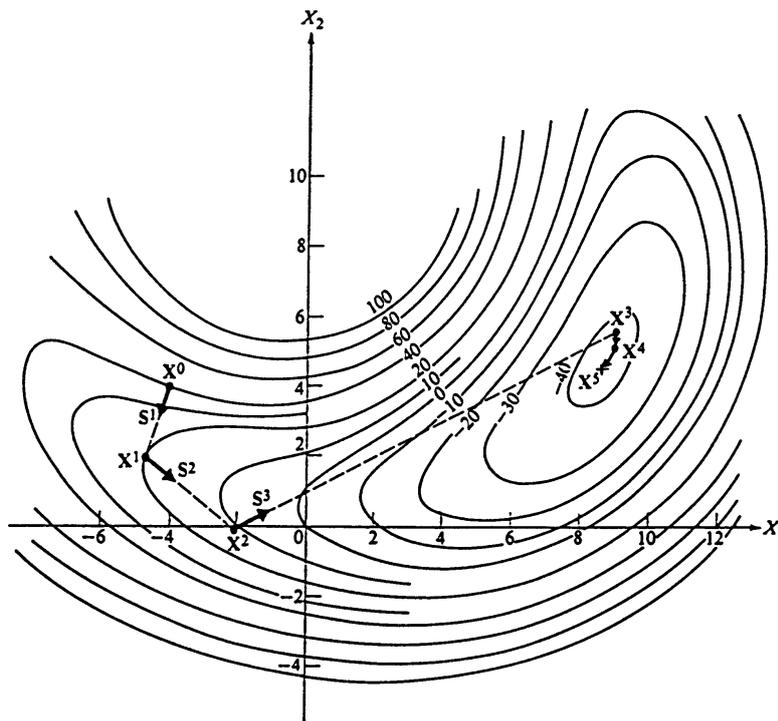


Figure 4.4. Interprétation géométrique de la méthode de Fletcher-Reeves

1) + 3) POLAK - RIBIERE

$$\beta^k = \frac{(g^{k+1})^T (g^{k+1} - g^k)}{(g^k)^T g^k}$$

1) + 2) MYERS

$$\beta^k = \frac{(g^{k+1})^T g^{k+1}}{(s^k)^T (g^{k+1} - g^k)}$$

Ordre de convergence linéaire.

Si la fonction est quadratique, on a une convergence superlinéaire en n itérations.

### 2.3 Méthodes quasi-Newton

Construire  $[S^k]$ , approximation de  $[H^k]^{-1}$ , à partir d'information d'ordre un.

$$\begin{aligned} y^k &= g^{k+1} - g^k \\ s^k &= X^{k+1} - X^k \end{aligned}$$

Remise à jour de rang un

BROYDEN

$$S^{k+1} = S^k + \frac{(s^k - S^k y^k)(s^k - S^k y^k)^T}{(y^k)^T (s^k - S^k y^k)}$$

Convergence quadratique  
Pas de recherche linéaire exacte

Remises à jour de rang deux

DAVIDON - FLETCHER - POWELL (**DFP**)

$$S^{k+1} = S^k + \frac{s^k (s^k)^T}{(s^k)^T y^k} - \frac{(S^k y^k)(S^k y^k)^T}{(y^k)^T S^k y^k}$$

Convergence quadratique :  $S^n = A^{-1}$   
Si recherche linéaire A.G. : définie positive  
Génération de directions conjuguées de A

Remise à jour inverse DFP (sur  $S^{-1} = R$ )

$$R^{k+1} = \left(I - \frac{y^k (s^k)^T}{(y^k)^T s^k}\right) R^k \left(I - \frac{s^k (y^k)^T}{(y^k)^T s^k}\right) + \frac{y^k (y^k)^T}{(y^k)^T s^k}$$

BROYDEN - FLETCHER - GOLDFARD - SHANNO (**BFGS**)

$$S^{k+1} = \left(I - \frac{s^k (y^k)^T}{(s^k)^T y^k}\right) S^k \left(I - \frac{y^k (s^k)^T}{(s^k)^T y^k}\right) + \frac{s^k (s^k)^T}{(s^k)^T y^k}$$

$$R^{k+1} = R^k + \frac{y^k (y^k)^T}{(s^k)^T y^k} - \frac{(R^k s^k)(R^k s^k)^T}{(s^k)^T S^k s^k}$$

### 3 METHODES D'ORDRE DEUX

Méthode de Newton

On utilise l'information d'ordre deux

$$s^k = -[H^k]^{-1} g^k$$

Convergence quadratique

$$|X^{k+1} - X^*| \leq C |X^k - X^*|^2$$

### 4 REMARQUES

Pour une fonction quadratique :

Newton	1 itération 1 inversion	# n <sup>3</sup>
BFGS	n inversions produit matriciel □	# n # n <sup>2</sup> # n <sup>3</sup>
Gradients conjugués	n itérations recherches linéaire exactes	# n # n <sup>2</sup>

### 5 EXERCICE 1

$$\min F(X_1, X_2) = X_1^2 - 3X_1X_2 + 4X_2^2 + X_1 - X_2$$

$$\nabla F = \begin{Bmatrix} 2X_1 - 3X_2 + 1 \\ -3X_1 + 8X_2 - 1 \end{Bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X^q = X^{q-1} + \alpha S^q \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1429 & 0.4286 \\ 0.4286 & 0.2857 \end{bmatrix}$$

$$F(\alpha) = (S_1^2 - 3S_1S_2 + 4S_2^2)\alpha^2 + (2X_1S_1 - 3X_1S_2 - 3X_2S_1 + 8X_2S_2 + S_1 - S_2)\alpha + X_1^2 - 3X_1X_2 + 4X_2^2 + X_1 - X_2$$

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha^* = \frac{3X_1S_2 - 2X_1S_1 + 3X_2S_1 - 8X_2S_2 - S_1 + S_2}{2(S_1^2 - 3S_1S_2 + 4S_2^2)}$$

Notations :

$$H^{q+1} = H^q + D^q$$

$$D^q = \frac{\sigma + \theta\tau}{\sigma^2} pp^T + \frac{\theta - 1}{\tau} H^q y (H^q y)^T - \frac{\theta}{\sigma} [H^q y p^T + p (H^q y)^T]$$

avec

$$p = X^q - X^{q-1}$$

$$y = \nabla F(X^q) - \nabla F(X^{q-1})$$

$$\sigma = py \quad \tau = y^T H^q y$$

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{si DFP} \\ \theta = 1 & \text{si BFGS} \end{cases}$$

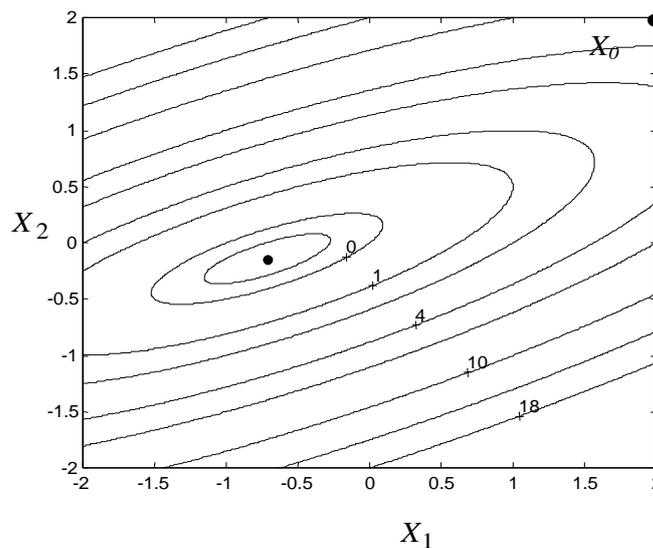


Figure 4.5. Représentation du problème de l'exercice 1  
Point de départ et minimum

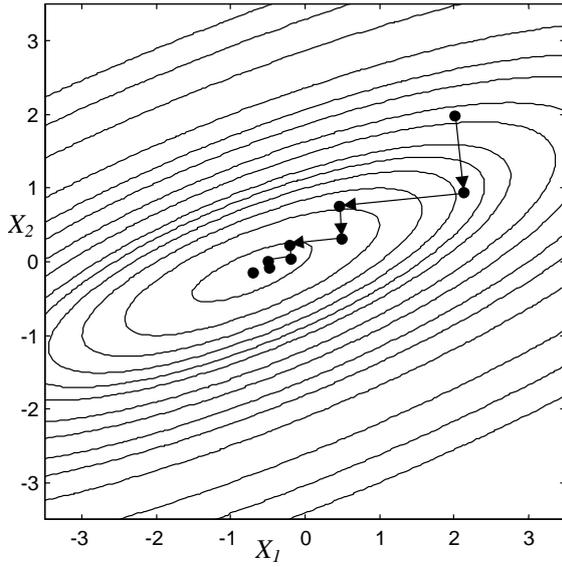


Figure 4.5a. Solution du problème par la méthode de la plus grande pente

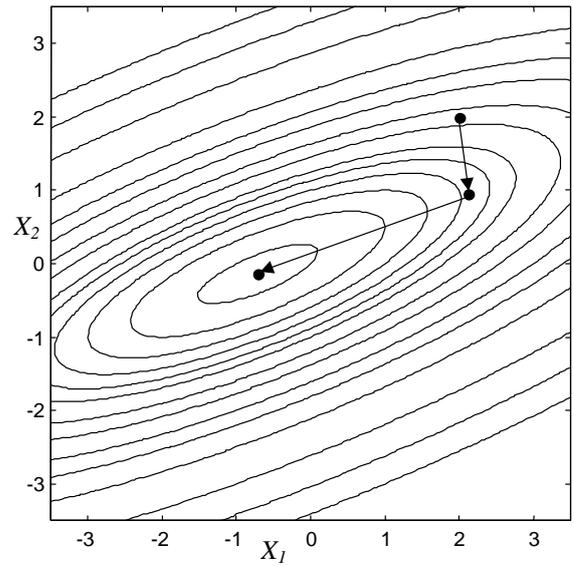


Figure 4.5b. Solution du problème par la méthode du gradient conjugué (Fletcher Reeves) et par quasi Newton (DFP, BFGS)

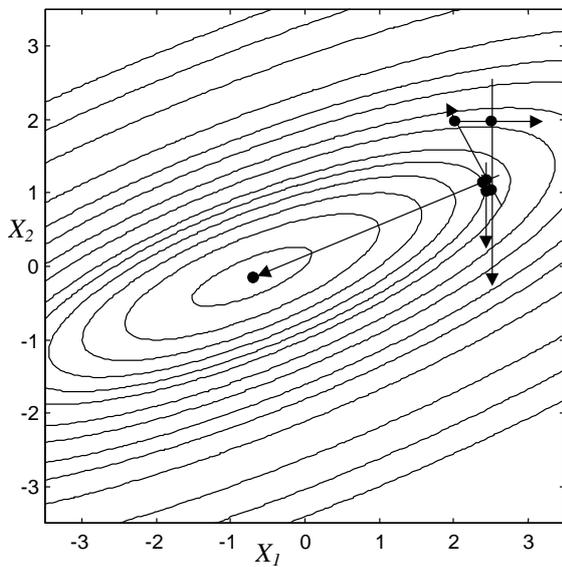
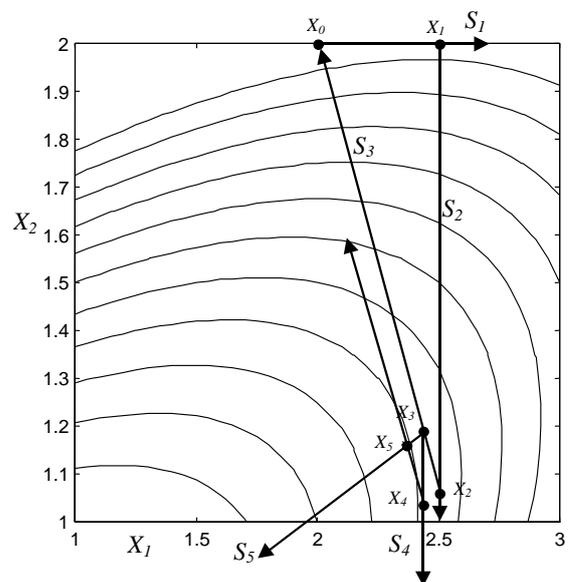


Figure 4.5c. Solution du problème par la méthode de Powell



## 2 Steepest descent

q	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	$\alpha^*$	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	F
0	-	-	-	2.000	2.000	8.000
1	1.000	-9.000	0.116	2.116	0.952	3.224
2	-2.378	-0.264	0.707	0.436	0.765	1.201
3	0.424	-3.813	0.116	0.485	0.321	0.344
4	-1.007	-0.112	0.707	-0.227	0.242	-0.019
5	0.179	-1.615	0.116	-0.206	0.054	-0.173
6	-0.427	-0.047	0.707	-0.508	0.020	-0.238
7	0.076	-0.684	0.116	-0.499	-0.060	-0.265
8	-0.181	-0.020	0.707	-0.627	-0.074	-0.277
9	0.032	-0.290	0.116	-0.623	-0.108	-0.282
10	-0.077	-0.009	0.707	-0.677	-0.114	-0.284

## 3 Fletcher-Reeves

q	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	$\alpha^*$	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	F
0	-	-	-	2.000	2.000	8.000
1	1.000	-9.000	0.116	2.116	0.952	3.224
2	-2.308	-0.892	1.227	-0.714	-0.143	-0.286
3	0.000	0.000	0.000	-0.714	-0.143	-0.286

At the 2nd iteration,  $\beta=0.0698$

4 Davidon-Fletcher-Powell

q	$S_1$	$S_2$	$\alpha^*$	$X_1$	$X_2$	F
0	-	-	-	2.000	2.000	8.000
1	1.000	-9.000	0.116	2.116	0.952	3.224
2	-2.157	-0.834	1.312	-0.714	-0.143	-0.286
3	0.000	0.000	0.000	-0.714	-0.143	-0.286

Information at the end of each iteration.

q	$\nabla F_1$	$\nabla F_2$	$p_1$	$p_2$	$y_1$	$y_2$
0	-1.000	-9.000	-	-	-	-
1	2.378	0.264	0.116	-1.048	3.378	-8.736
2	0.000	0.000	-2.831	-1.094	-2.378	-0.264

q	$D_{11}$	$D_{12}$	$D_{22}$	$H_{11}$	$H_{12}$	$H_{22}$
0	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
1	-0.129	0.324	-0.755	0.871	0.324	0.245
2	0.272	0.105	0.041	1.143	0.429	0.286

Note: The values of  $H_{11}$ ,  $H_{12}$  and  $H_{22}$  are precise after two iterations because the function is quadratic.

q	$\sigma$	$\tau$
1	9.551	87.824
2	7.020	5.724

5 Broydon-Fletcher-Shanno-Goldfarb

q	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	$\alpha^*$	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	F
0	-	-	-	2.000	2.000	8.000
1	1.000	-0.900	0.116	2.117	0.952	3.224
2	-2.308	-0.892	1.227	-0.714	-0.143	-0.286
3	0.000	0.000	0.000	-0.714	-0.143	-0.286

Information at the end of each iteration.

q	$\nabla F_1$	$\nabla F_2$	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>
0	-1.000	-9.000	-	-	-	-
1	2.378	0.264	0.116	-1.048	3.378	-0.736
2	0.000	0.000	-2.831	-1.094	-2.378	-0.264

q	D <sub>11</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>22</sub>	H <sub>11</sub>	H <sub>12</sub>	H <sub>22</sub>
0	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
1	-0.679	0.347	-0.746	0.932	0.347	0.254
2	0.211	0.082	0.032	1.143	0.429	0.286

Note: The values of H<sub>11</sub>, H<sub>12</sub> and H<sub>22</sub> are precise after two iterations because the function is quadratic.

q	$\sigma$	$\tau$
1	9.551	87.724
2	7.020	5.724

6 Powell's Method

q	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	$\alpha^*$	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	F
0	-	-	-	2.000	2.000	8.000
1	1.000	0.000	0.500	2.500	2.000	7.750
2	0.000	1.000	-0.938	2.500	1.062	4.234
3	0.500	-0.938	-0.136	2.432	1.900	4.139
4	0.000	-0.938	0.163	2.432	1.037	4.045
5	-0.068	0.127	0.979	2.365	1.162	3.954
6	-0.067	-0.028	46.286	-0.714	-0.142	-0.286
7	No improvement. Solution complete.					

Information at the beginning of each iteration.

q	H <sub>11</sub>	H <sub>12</sub>	H <sub>21</sub>	H <sub>22</sub>
1	1.000	0.000	0.000	1.000
2	0.500	0.000	0.000	1.000
3	0.500	0.000	0.000	-0.938
4	0.000	-0.068	-0.938	0.127
5	0.000	-0.068	-0.153	0.127
6	0.000	-0.067	-0.153	0.125
7	-0.067	-3.080	0.125	-1.305

## 7 Newton's Method

$$F \cong F(\mathbf{x}^0) + \nabla F(\mathbf{x}^0) \cdot \delta \mathbf{x} + (1/2) \delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^0) \cdot \delta \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \nabla F(\mathbf{x}^0) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 8/7 & 3/7 \\ 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F = 0 \cong \nabla F(\mathbf{x}^0) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^0) \delta \mathbf{x}$$

$$\delta \mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1} \nabla F = - \begin{bmatrix} 8/7 & 3/7 \\ 3/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} -19/7 \\ -15/7 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \delta \mathbf{x}$$

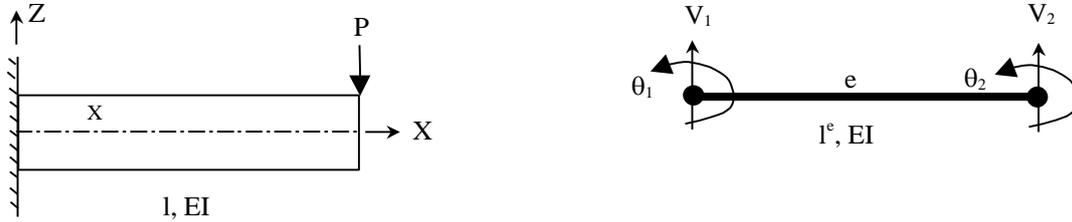
$$\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} -5/7 \\ -1/7 \end{Bmatrix} \quad F(\mathbf{x}^1) = -0.28571$$

$$\nabla F(\mathbf{x}^1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Therefore the solution is complete.}$$

Note:  $F(\mathbf{x})$  is quadratic so Newton's method converges in one iteration.

## 6 EXERCICE 2

On demande de déterminer le déplacement et la rotation à l'extrémité de la poutre encastree présentée à la figure suivante.



Elément de poutre de Bernoulli-Euler :

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) l^e & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l^e(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \frac{x}{l^e}$$

Conditions aux limites :  $\theta_1 = V_1 = 0$

Energie potentielle :

$$\pi = \frac{EI}{2l^3} \int_0^1 \left( \frac{d^2 v}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + PV_2$$

$$\pi = \frac{EI}{2l^3} (12V_2^2 + 4\theta_2^2 l^2 - 12V_2 l \theta_2) + PV_2$$

Si l'on pose :

$$f = \frac{2\pi^3}{EI} \quad X_1 = V_2 \quad X_2 = \theta_2 l^e \quad \frac{Pl^3}{EI} = 1$$

le problème de minimisation de l'énergie potentielle s'écrit de la manière suivante :

$$\min f = 12X_1^2 + 4X_2^2 - 12X_1 X_2 + 2X_1$$

et la solution est donnée par :

$$V_2 = \frac{-Pl^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\theta_2 = \frac{-Pl^2}{2EI} \quad \Rightarrow \quad X_2 = -\frac{1}{2}$$

1) Plus grande pente

La direction de descente est donnée par :

$$s_k = -\nabla f(X^k)$$

$$\nabla f = \begin{Bmatrix} 24X_1 - 12X_2 + 2 \\ -12X_1 + 8X_2 \end{Bmatrix}$$

$$\square X_0^T = (-1, -2) \quad -\nabla f^T(X_0) = (-2, 4) \quad f(X_0) = 2$$

$$\alpha_0 = -\frac{\nabla f \cdot s}{s^T A s} = 4.807692 \cdot 10^{-2}$$

$$\square X_1^T = (-1.09615, -1.80769) \quad -\nabla f^T(X_1) = (2.61536, 1.3077) \quad f(X_1) = 1.51922$$

$$\alpha_1 = -\frac{\nabla f \cdot s}{s^T A s} = 8.928677 \cdot 10^{-2}$$

$$\square X_2^T = (-0.86263, -1.69093) \quad \dots$$

Pour avoir :  $|f(X_k) - f(X_{\min})| < \frac{1}{1000} = \varepsilon$

$$f(X_{\min}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$|f(X_k) - f(X_{\min})| \cong \rho^k |f(X_0) - f(X_{\min})| \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \rho^k |f(X_0) - f(X_{\min})|$$

$$k = \frac{\ln \frac{\varepsilon}{|f(X_0) - f(X_{\min})|}}{\ln \rho} = 37.3 \quad \Rightarrow \quad 38 \text{ itérations}$$

$$\rho = \left| \frac{\frac{E}{e} - 1}{\frac{E}{e} + 1} \right|^2 = 0.812499$$

$$E = 30.4222 \quad e = 1.577794 \quad r = 19.28$$

2) Gradient conjugué

La première itération s'effectue en plus grande pente.

$$X_0^T = (-1, -2)$$

⇕

$$\square X_1^T = (-1.09615, -1.80769) \quad -\nabla f^T(X_1) = (2.61536, 1.3077) \quad f(X_1) = 1.51922$$

$$s_1 = -\nabla f(X_1) + \beta_1 s_0$$

$$\beta_1 = \frac{\|\nabla f(X_1)\|^2}{\|\nabla f(X_0)\|^2} = \frac{(2.6154)^2 + (1.3077)^2}{2^2 + 4^2} = 0.4275$$

$$s_1 = -\begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix} + 0.4275 \begin{Bmatrix} -2 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.76036 \\ 3.0178 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1.76036 \\ 3.0178 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 0.4334 \quad \Leftarrow \quad \frac{df(\alpha_2)}{d\alpha_2} = 0$$

$$\square X_2^T = (-0.3333, -0.5) \quad -\nabla f^T(X_2) = (0,0) \quad f(X_2) = -0.3333$$

On peut vérifier que les directions  $s_1$  et  $s_2$  sont conjuguées dans la métrique du Hessien :

$$H = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$s_0^T H s_1 = (-2, 4) \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.76036 \\ 3.0178 \end{Bmatrix} \cong 0$$

### 3) Quasi Newton : remise à jour de type BFGS

$$\square X_0^T = (-1, -2) \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le premier pas s'effectue en plus grande pente

$$s_0 = -B_0 \nabla f(X_0) \quad \Rightarrow \quad X_1^T = (-1.0961, -1.8077) \quad \nabla f^T(X_1) = (-2.6154, -1.3077)$$

□ on applique la formule de remise à jour :

$$B_{k+1} = \left( I - \frac{P_k Y_k^T}{P_k^T Y_k} \right) B_k \left( I - \frac{Y_k P_k^T}{P_k^T Y_k} \right) + \frac{P_k P_k^T}{P_k^T Y_k}$$

$$P_0 = X_1 - X_0 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0961 \\ 0.1923 \end{Bmatrix}$$

$$Y_0 = \nabla f(X_1) - \nabla f(X_0) = \begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.6154 \\ 2.6923 \end{Bmatrix}$$

$$Y_0^T P_0 = (-4.6154)(-0.0961) + (2.6923)(0.1923) = 0.96127$$

$$Y_0 P_0^T = \begin{Bmatrix} -4.6154 \\ 2.6923 \end{Bmatrix} (-0.0961, 0.1923) = \begin{bmatrix} 0.44354 & -0.88754 \\ -0.88754 & 0.51773 \end{bmatrix}$$

$$\square B_1 = \begin{bmatrix} 0.372125 & 0.60225 \\ 0.60225 & 1.10385 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = -B_1 \nabla f(X_1) = - \begin{bmatrix} 0.372125 & 0.60225 \\ 0.60225 & 1.10385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7608 \\ 3.0186 \end{Bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{Bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1.7608 \\ 3.0186 \end{Bmatrix} \quad \alpha_2 = 0.4332055$$

$$\square X_2^T = (-0.3333, -0.5) \quad -\nabla f^T(X_2) = (0, 0) \quad f(X_2) = -0.3333$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} = H^{-1}$$

#### 4) Méthode de Newton

La direction de recherche est donnée par :

$$s_k = -[\nabla^2 f(X_k)]^{-1} \nabla f(X_k)$$

$$\nabla^2 f(X_k) = H = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$s = - \begin{bmatrix} 0.1666 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6666 \\ 1.5 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6666 \\ 1.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.3333 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

# MINIMISATION AVEC CONTRAINTES LINEAIRES GRADIENT PROJETE

## 1 POSITION DU PROBLEME

La figure suivante représente un problème de minimisation contrainte à deux variables. Le domaine de conception est limité par 5 contraintes linéaires. Les isovaleurs de la fonction objectif, dont le minimum non contraint est représenté par un point noir, sont dessinées en traits fins.

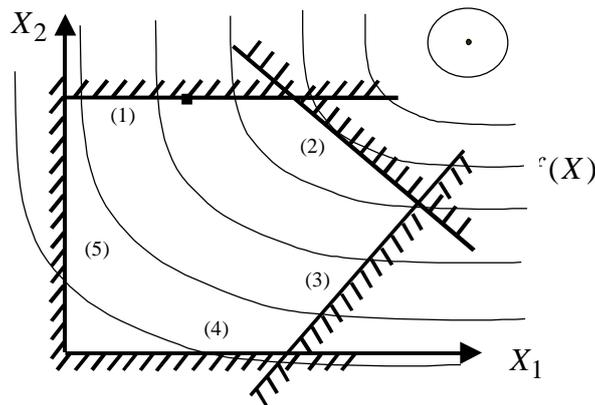


Figure 5.1. Minimisation avec contraintes linéaires

Le problème d'optimisation se pose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ \sum_i c_{ij} X_i \geq b_j \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

On désire trouver le minimum de la fonction objectif  $f(X)$  tout en restant à l'intérieur du domaine admissible délimité par les contraintes.

## 2 MISE A JOUR DES VARIABLES DE CONCEPTION

Le nouveau point  $X^+$  est donné par :

$$X^+ = X + \alpha s$$

tout en satisfaisant :

$$\begin{aligned} s^T g < 0 \\ \text{rester admissible} \end{aligned}$$

Caractérisation des contraintes du problème :

$$\begin{aligned}
 & q \text{ contraintes actives : } c_j^T X - b_j = 0 \\
 & m - q \text{ contraintes inactives : } c_j^T X - b_j > 0 \\
 & N_q = [c_1, \dots, c_q] = \text{gradients des contraintes actives}
 \end{aligned}$$

Si l'on se trouve sur la contrainte (1) au point désigné par  $v$ , nous avons :

$$N_q = [c_1]$$

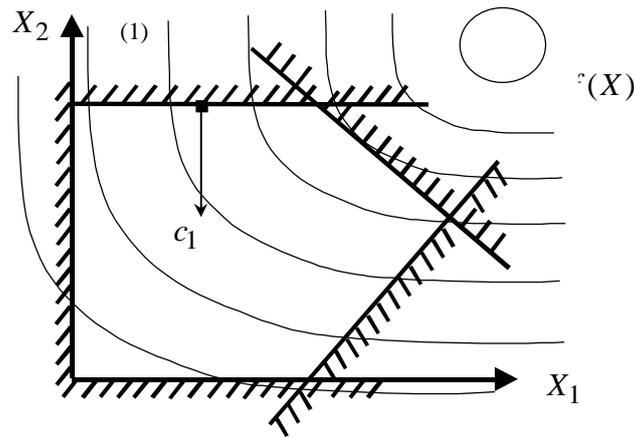


Figure 5.2. Point de départ de l'optimisation

où  $c_1$  représente le gradient de la seule contrainte active (1).

### 3 DIRECTION DE RECHERCHE

Projection de la direction de descente en plus grande pente sur l'intersection des contraintes actives. Dans notre cas de figure, nous obtenons :

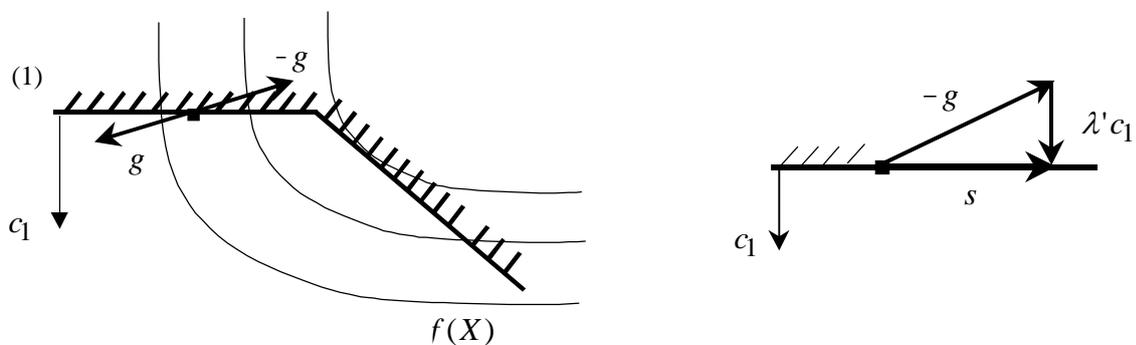


Figure 5.3. Détermination de la direction de recherche

$$s = -g + \lambda' c_1 = -g + N_q \lambda$$

où  $\lambda$  est calculé selon

$$\lambda = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g$$

Si  $s = 0$ , nous avons :

$$g - N_q \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial X_i} = 0$$

avec  $\frac{\partial h_j}{\partial X_i} = N_q = [c_1, \dots, c_q]$

Dès lors, si  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j=1, q$ , on a atteint l'optimum (conditions de Khun-Tucker vérifiées).  
 S'il existe un  $\lambda_r < 0$ , alors on relâche la contrainte correspondante, comme représenté aux figures suivantes où on quitte la contrainte (1) :

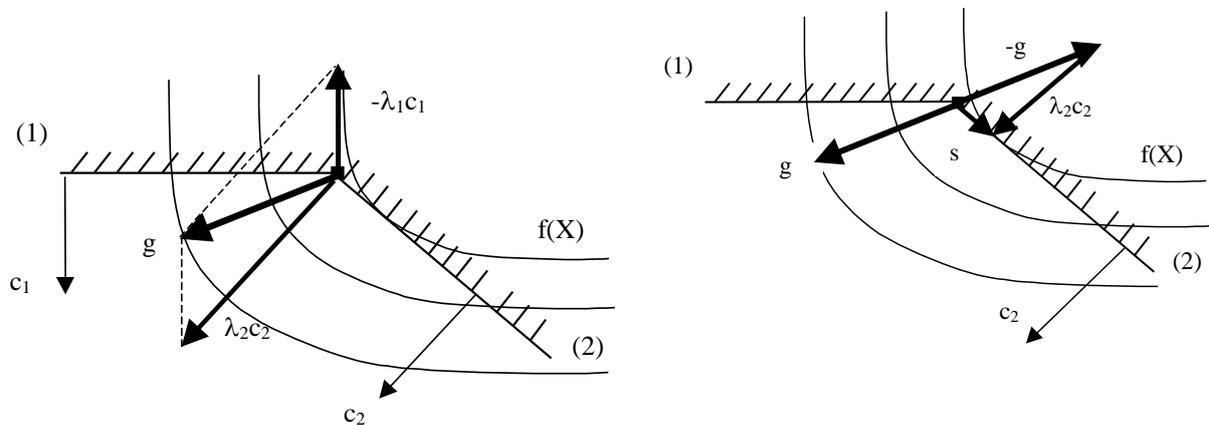


Figure 5.4. Abandon d'une contrainte

La nouvelle direction de recherche est la projection de  $-g$  sur la contrainte (2) et vaut  $s = -g + \lambda_2 c_2$

#### 4 PAS DE PROGRESSION

Il doit être tel qu'on ne viole pas les contraintes :

$$\bar{\alpha} = \min_{j=q+1, m} \{ \alpha_j > 0 \text{ tq } X + \alpha_j s \text{ feasible} \}$$

Le long de la direction de recherche  $s$  déterminée précédemment, on doit calculer les différents pas de progression qui nous amènent sur les contraintes :

$$c_j^T X^+ - b_j = 0$$

$$c_j^T (X + \alpha_j s) - b_j = 0, \quad j=q+1, \dots, m$$

$$\alpha_j = -\frac{c_j^T X - b_j}{c_j^T s}$$

Le pas de progression est positif lorsque l'on rencontre une contrainte caractérisée par :

$$c_j^T s < 0$$

Le dessin suivant illustre cette situation :

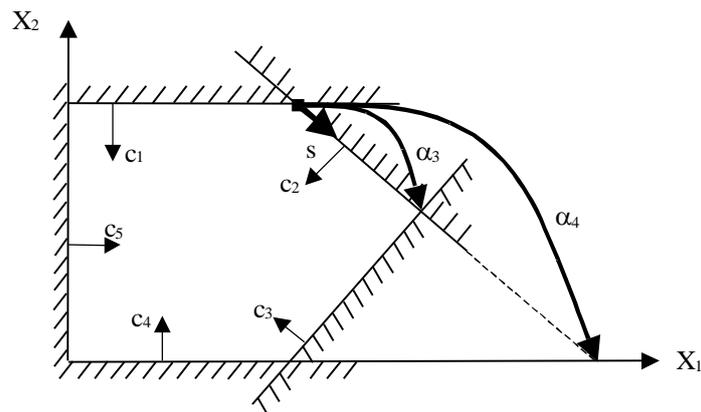


Figure 5.5. Calcul du pas de progression

- (1)  $c_1^T s > 0$
- (2)  $c_2^T s = 0$
- (3)  $c_3^T s < 0 \rightarrow \alpha_3$
- (4)  $c_4^T s < 0 \rightarrow \alpha_4$
- (5)  $c_5^T s > 0$

Le  $\bar{\alpha}$  nous donne le pas de progression maximum dans la direction  $s$  tel que l'on reste à l'intérieur du domaine admissible.

$$\min(\alpha_3, \alpha_4) = \alpha_3$$

On trouve un nouveau point en utilisant la formule de remise à jour des variables de conception. Ce point correspond au premier sommet du domaine rencontré le long de la direction  $s$ .

Il faut cependant se demander maintenant si on n'a pas dépassé le minimum le long de la direction de recherche  $s$ . Pour ce faire, on calcule la dérivée directionnelle :

$$s^T (X)g(X^+)$$

Selon le signe de cette expression, soit une nouvelle contrainte est activée, soit il faut effectuer une recherche linéaire le long de  $s$  pour détecter le minimum.

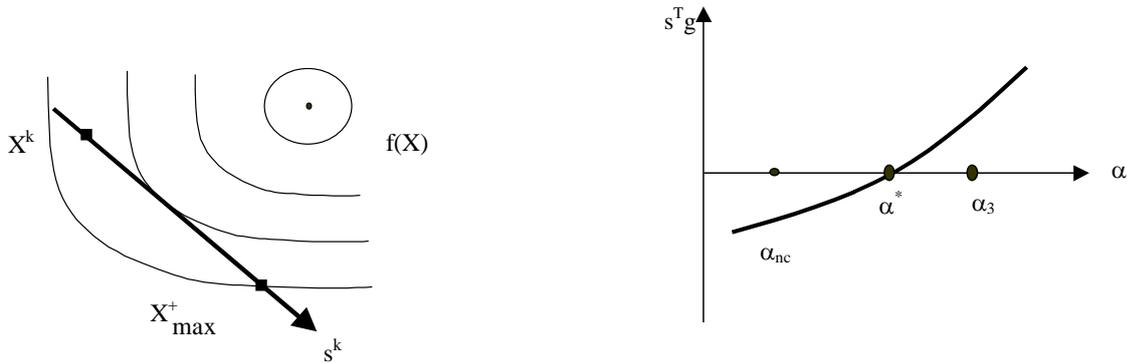
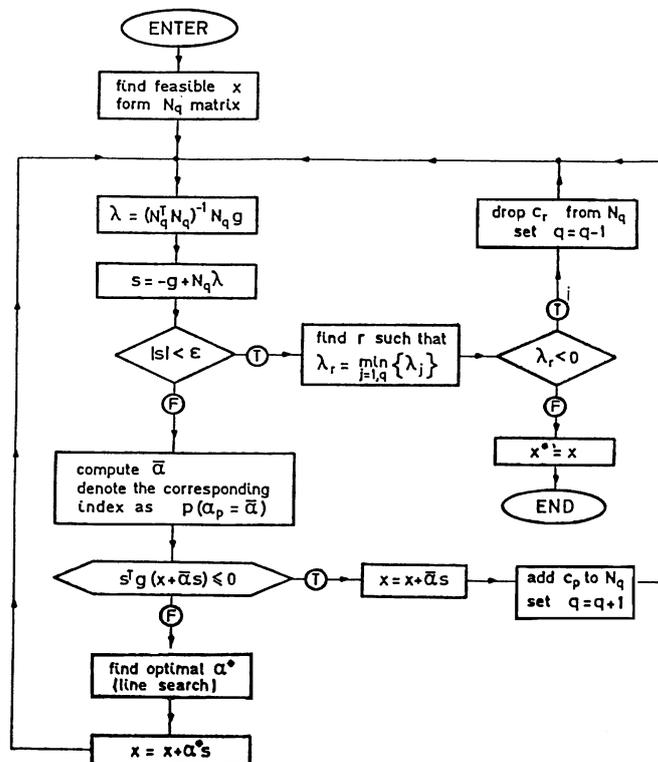


Figure 5.6. Sélection du pas de progression

Si  $s^T g > 0$ , on a dépassé le minimum en allant jusqu'à la contrainte (3) et le pas de progression à utiliser est le  $\alpha^*$ .

Si  $s^T g < 0$  (ce qui est le cas pour le pas de progression  $\alpha_{nc}$ ), le minimum de la fonction objectif se trouve de l'autre côté de la contrainte correspondante et bien que l'on puisse diminuer l'objectif en choisissant le pas optimum  $\alpha^*$ , on conserve le pas  $\alpha_{nc}$  qui nous conduit sur la contrainte et nous empêche ainsi de sortir du domaine admissible. Une nouvelle contrainte (ici, la contrainte (3)) devient active.

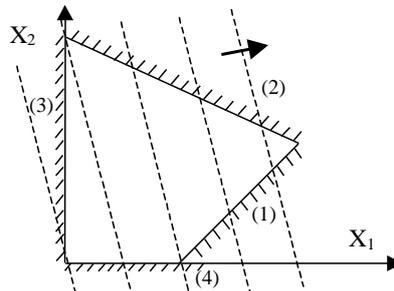


## 5 EXERCICE 1

On demande de trouver la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \min f &= -4X_1 - X_2 + 50 \\ \begin{cases} X_1 - X_2 \leq 2 & (1) \\ X_1 + 2X_2 \leq 8 & (2) \\ X_1 \geq 0 & (3) \\ X_2 \geq 0 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

dans lequel toutes les fonctions sont linéaires.



- Détermination de la matrice des gradients des contraintes

$$CX \geq b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -2 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

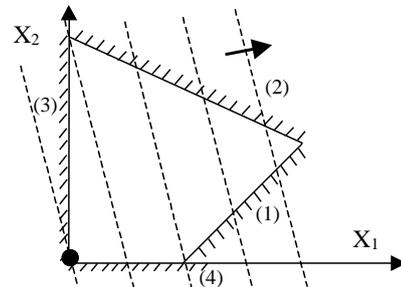
- Itération 1

$$X_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad g_0 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la direction de recherche :

Contraintes actives : (3) et (4)

$$N_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_0 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_0 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

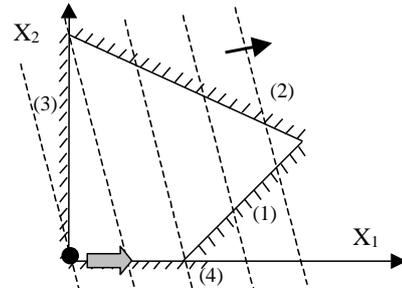
$$s_0 = -g_0 + N_q^T \lambda_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = \lambda_{(3)} = -4$$

On quitte la contrainte (3)

Contraintes actives : (4)

$$N_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_0 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_0 = -1$$

$$s_0 = -g_0 + N_q^T \lambda_0 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul du pas de progression :

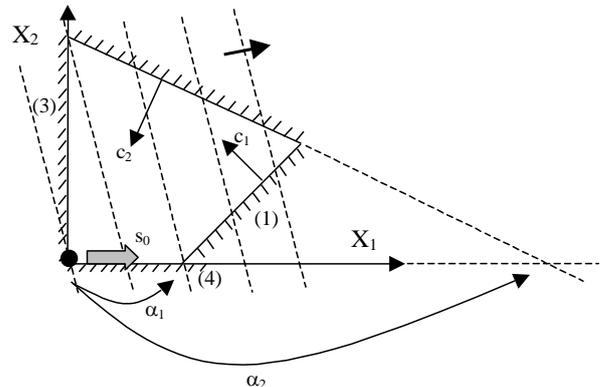
$$\alpha_j = -\frac{c_j^T X - b_j}{c_j^T s} \quad \text{avec } j \text{ tel que } c_j^T s < 0$$

$$c_1^T s_0 = (-1 \ 1) \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} = -4 < 0$$

$$c_2^T s_0 = (-1 \ -2) \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} = -4 < 0$$

$$c_3^T s_0 = (1 \ 0) \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 4 > 0$$

$$c_4^T s_0 = (0 \ 1) \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$



On trouve des intersections possibles avec les contraintes (1) et (2) :

$$\alpha_1 = -\frac{c_1^T X - b_1}{c_1^T s_0} = -\frac{(-1 \ 1) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - (-2)}{-4} = \frac{1}{2} \text{ } \rangle \text{ ok}$$

$$\alpha_2 = -\frac{c_2^T X - b_2}{c_2^T s_0} = -\frac{(-1 \quad -2) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - (-8)}{-4} = 2$$

Remise à jour des variables de conception :

$$X_1 = X_0 + \alpha_1 s_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la dérivée directionnelle :

$$s_0^T g_1 = (4 \quad 0) \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix} = -16 < 0 \quad \text{) l'optimum non contraint est de l'autre côté de la contrainte}$$

Une nouvelle contrainte est activée : c'est la contrainte (1)

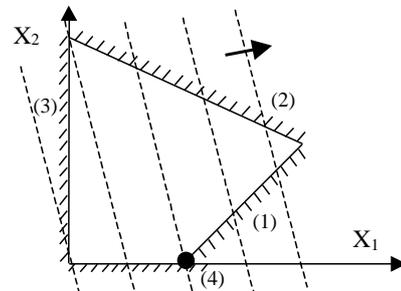
- Itération 2

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad g_1 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la direction de recherche :

Contraintes actives : (1) et (4)

$$N_q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_1 = \begin{Bmatrix} -5 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

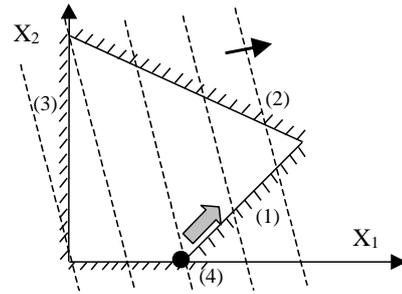
$$s_1 = -g_1 + N_q^T \lambda_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = \lambda_{(4)} = -5$$

On quitte la contrainte (4)

Contraintes actives : (4)

$$N_q = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_1 = \frac{3}{2}$$

$$s_1 = -g_1 + N_q^T \lambda_1 = \frac{5}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Calcul du pas de progression :

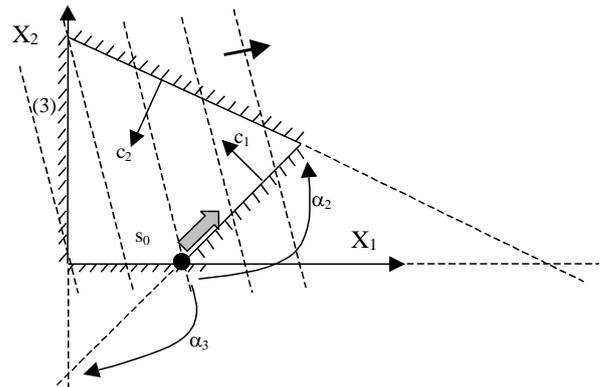
$$\alpha_j = -\frac{c_j^T X - b_j}{c_j^T s} \quad \text{avec } j \text{ tel que } c_j^T s < 0$$

$$c_1^T s_1 = (-1 \ 1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{5}{2} = 0$$

$$c_2^T s_1 = (-1 \ -2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{5}{2} = -\frac{15}{2} < 0$$

$$c_3^T s_1 = (1 \ 0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} > 0$$

$$c_4^T s_1 = (0 \ 1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} > 0$$



On trouve une intersection possible (et admissible) avec la contrainte (2) :

$$\alpha_2 = -\frac{c_2^T X - b_2}{c_2^T s_1} = -\frac{(-1 \ -2) \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} - (-8)}{-15/2} = \frac{4}{5}$$

Remise à jour des variables de conception :

$$X_2 = X_1 + \alpha_2 s_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{5}{2} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la dérivée directionnelle :

$$s_1^T g_2 = (1 \ 1) \frac{5}{2} \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix} < 0 \Rightarrow \text{l'optimum non contraint est de l'autre côté de la contrainte}$$

Une nouvelle contrainte est activée : c'est la contrainte (2)

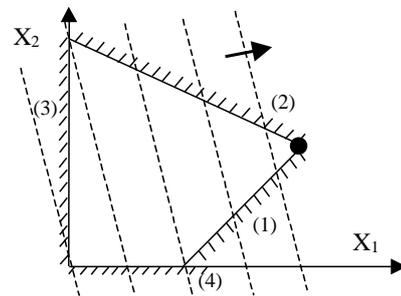
- Itération 3

$$X_2 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad g_2 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la direction de recherche :

Contraintes actives : (1) et (4)

$$N_q = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$



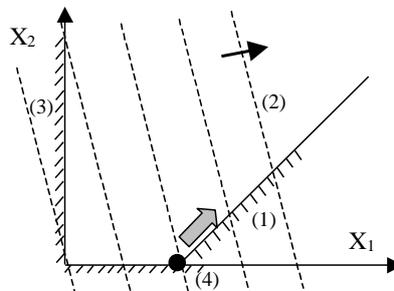
$$\lambda_2 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_2 = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$s_2 = -g_2 + N_q^T \lambda_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = \lambda_{(3)} = \frac{5}{3} > 0$$

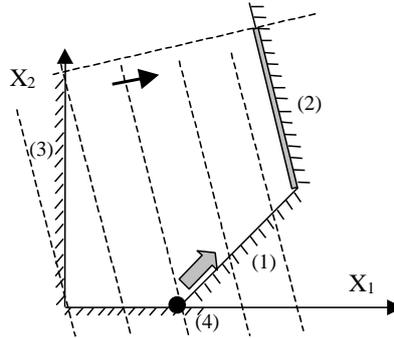
On a trouvé la solution

- Si la contrainte (2) n'existe pas, la solution se trouve à l'infini :



- Si la contrainte (2) est parallèle aux iso-valeurs de la fonction objectif, on a plusieurs solutions :

$$-4X_1 - X_2 + 18 \geq 0$$



$$X_2 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad g_2 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad N_q = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$s_2 = -g_2 + N_q^T \lambda_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = \lambda_{(2)} = 0$$

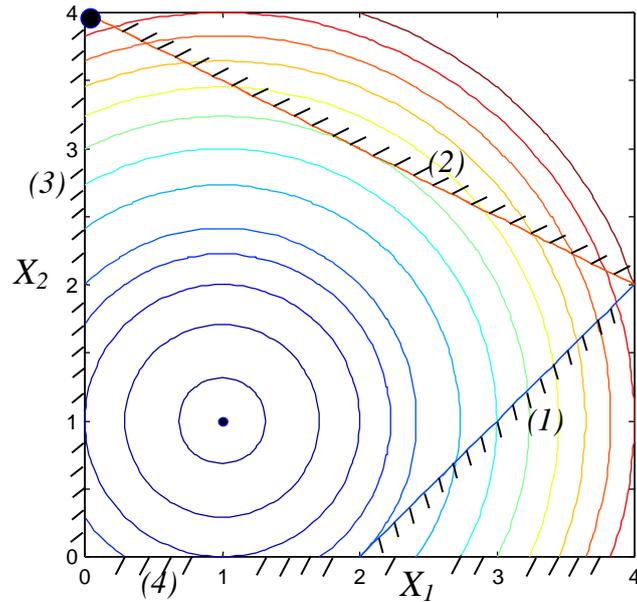
On a trouvé la solution : l'ensemble des points situés sur l'arête (2)

## 6 EXERCICE 2

On demande de trouver la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \min f &= (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ \left\{ \begin{array}{ll} X_1 - X_2 \leq 2 & (1) \\ X_1 + 2X_2 \leq 8 & (2) \\ X_1 \geq 0 & (3) \\ X_2 \geq 0 & (4) \end{array} \right. \end{aligned}$$

dans lequel toutes les contraintes sont linéaires.



- Gradients et Hessien de la fonction objectif

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2(X - 1) \qquad \frac{\partial f}{\partial Y} = 2(Y - 1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Détermination de la matrice des gradients des contraintes

$$CX \geq b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \geq [-2 \quad -8 \quad 0 \quad 0]^T$$

- Itération 1

$$X_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \qquad g_0 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la direction de recherche :

Contraintes actives : (2) et (3)

$$N_q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_0 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_0 = \begin{Bmatrix} -3 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$s_0 = -g_0 + N_q^T \lambda_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

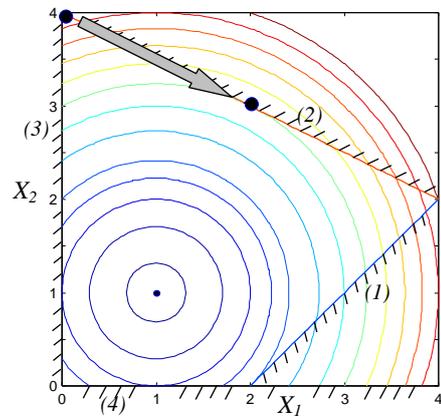
$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = \lambda_{(3)} = -5$$

On quitte la contrainte (3)  $\Rightarrow$  Contraintes actives : (2)

$$N_q = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_0 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_0 = -2$$

$$s_0 = -g_0 + N_q^T \lambda_0 = \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix}$$



Calcul du pas de progression :

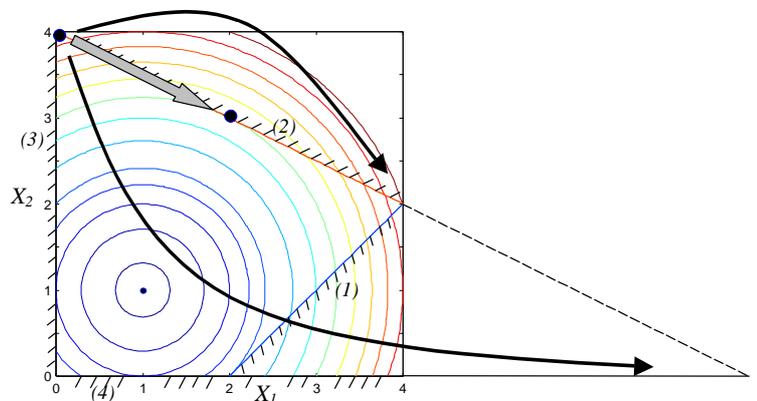
$$\alpha_j = -\frac{c_j^T X - b_j}{c_j^T s} \quad \text{avec } j \text{ tel que } c_j^T s < 0$$

$$c_1^T s_0 = (-1 \ 1) \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = -6 < 0$$

$$c_2^T s_0 = (-1 \ -2) \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$c_3^T s_0 = (1 \ 0) \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = 4 > 0$$

$$c_4^T s_0 = (0 \ 1) \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = -2 < 0$$



On trouve des intersections possibles avec les contraintes (1) et (4) :

$$\alpha_1 = -\frac{c_1^T X - b_1}{c_1^T s_0} = -\frac{(-1 \ 1) \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} - (-2)}{-6} = 1 \text{ } \rangle \text{ ok}$$

$$\alpha_4 = -\frac{c_4^T X - b_4}{c_4^T s_0} = -\frac{(0 \ 1) \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} - (0)}{-2} = 2$$

Remise à jour des variables de conception :

$$X_1 = X_0 + \alpha_1 s_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} + 1 \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la dérivée directionnelle :

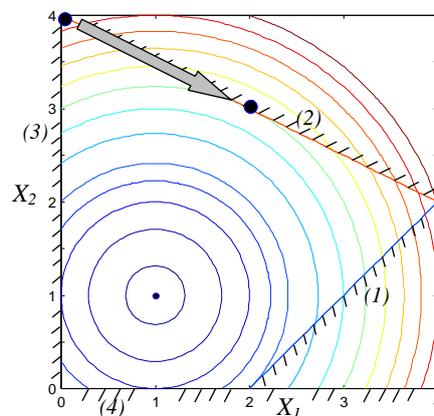
$$s_0^T g_1 = (4 \ -2) \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} = 20 > 0 \text{ } \rangle \text{ on a dépassé l'optimum non contraint}$$

Calcul du pas de progression non contraint :

$$\alpha_{nc} = -\frac{s_0^T g_0}{s_0^T A s_0} = \frac{1}{2}$$

Remise à jour des variables de conception :

$$X_1 = X_0 + \alpha_1 s_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$



- Itération 2

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad g_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

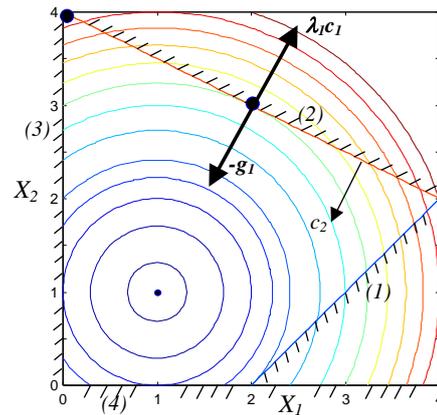
Calcul de la direction de recherche :

Contrainte active : (2)

$$N_q = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_1 = -2$$

$$s_1 = -g_1 + N_q^T \lambda_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

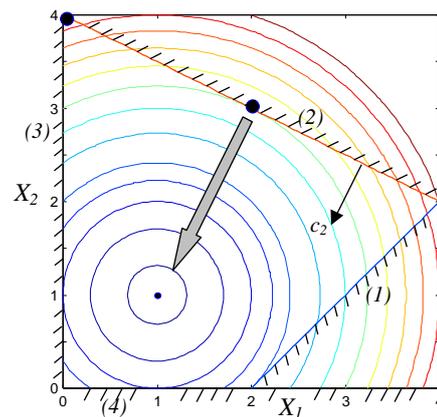


$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = \lambda_{(2)} = -2$$

On quitte la contrainte (2)

Contraintes actives : **aucune !**

$$s_1 = -g_1 + 0 = \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix}$$



Calcul du pas de progression :

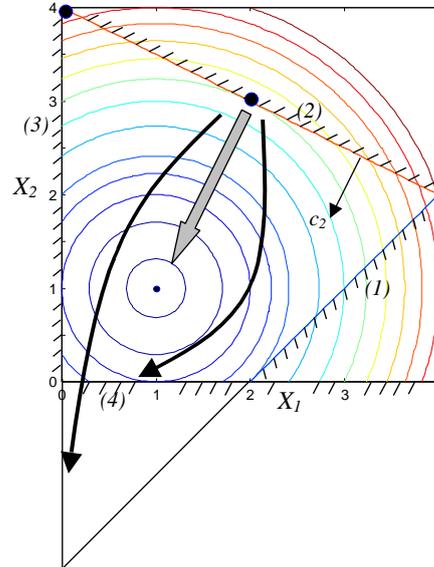
$$\alpha_j = -\frac{c_j^T X - b_j}{c_j^T s} \quad \text{avec } j \text{ tel que } c_j^T s < 0$$

$$c_1^T s_1 = (-1 \ 1) \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix} = -2 < 0$$

$$c_2^T s_1 = (-1 \ -2) \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix} = 10 > 0$$

$$c_3^T s_1 = (1 \ 0) \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix} = -2 < 0$$

$$c_4^T s_1 = (0 \ 1) \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix} = -4 < 0$$



On trouve une intersection possible (et admissible) avec les contraintes (1), (3) et (4) :

$$\alpha_1 = -\frac{c_1^T X - b_1}{c_1^T s_1} = -\frac{(-1 \ 1) \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} - (-2)}{-2} = 1.5$$

$$\alpha_3 = -\frac{c_3^T X - b_3}{c_3^T s_3} = -\frac{(1 \ 0) \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} - (0)}{-2} = 1$$

$$\alpha_4 = -\frac{c_4^T X - b_4}{c_4^T s_4} = -\frac{(0 \ 1) \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} - (0)}{-4} = 0.75$$

Remise à jour des variables de conception :

$$X_2 = X_1 + \alpha_4 s_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} + 0.75 \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la dérivée directionnelle :

$$s_1^T g_2 = (-2 \ -4) \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} > 0 \quad \text{on a dépassé l'optimum non contraint}$$

Calcul du pas de progression non contraint :

$$\alpha_{nc} = -\frac{s_1^T g_1}{s_1^T A s_1} = \frac{1}{2}$$

Remise à jour des variables de conception :

$$X_1 = X_0 + \alpha_1 s_0 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Itération 3

$$X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad g_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul de la direction de recherche :

Contraintes actives : aucune

$$N_q = 0$$

$$\lambda_2 = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T g_2 = 0$$

$$s_2 = -g_2 + N_q^T \lambda_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{point stationnaire}$$

$$\text{Recherche de } \lambda_r = \min_{j=1,q} \{\lambda_j\} = 0$$

On a trouvé la solution

# PROGRAMMATION LINEAIRE ALGORITHME DU SIMPLEXE

## 1 DEFINITION DU PROBLEME DE PROGRAMMATION LINEAIRE

### 1.1 Forme standard d'un problème de programmation linéaire

$$\begin{aligned} \min f(X) &= \sum_{i=1}^n c_i X_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ji} X_i &= b_j \quad j = 1, \dots, m \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Problème dans lequel

$$\begin{aligned} m &< n \\ b_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \min Z &= C^T X \\ AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

### 1.2 Variables d'écart. Traitement des contraintes d'inégalité

Lorsque des contraintes d'inégalité apparaissent dans le problème, on les transforme en contraintes d'égalité par l'intermédiaire de variables d'écart  $X_k$ , de manière à obtenir la forme standard présentée à la section 1.1.

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ji} X_i \leq b_j & \quad \Pi & \begin{cases} \sum_i a_{ji} X_i + X_k = b_j \\ X_k \geq 0 \end{cases} \\ \sum_i a_{ji} X_i \geq b_j & \quad \Pi & \begin{cases} \sum_i a_{ji} X_i - X_k = b_j \\ X_k \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

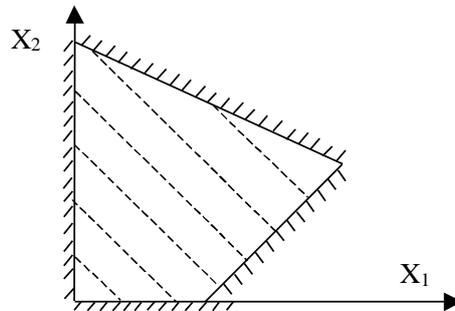
Les variables d'écart doivent être non négatives de manière à respecter la condition  $X_i \geq 0$  de la forme standard.

### 1.3 Représentation graphique du problème

Le système d'équations ou d'inéquations définissant le problème de programmation linéaire détermine un ensemble convexe qui est soit :

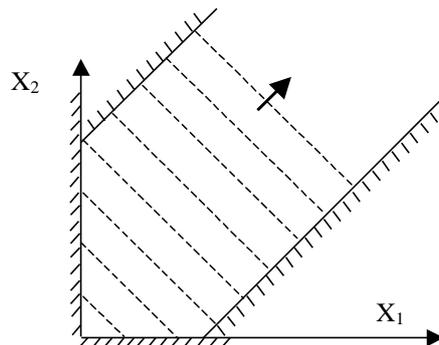
( les isovaleurs de la fonction objectif linéaire sont représentées en traits pointillés)

- 1) un polyèdre convexe borné



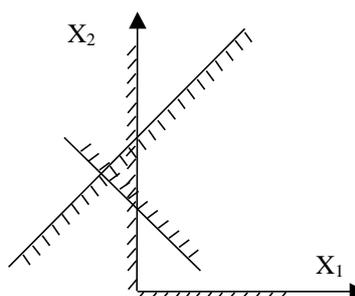
Dans ce cas, l'espace admissible est borné et la solution existe soit en un sommet du polyèdre soit en une arête de celui-ci.

- 2) un polyèdre convexe ouvert (polytope convexe)



Si la fonction objectif diminue dans le sens indiqué par la flèche, la solution est non bornée. Dans le cas contraire, la solution correspond à des valeurs nulles des variables de conception.

- 3) un ensemble vide



L'ensemble est vide et il n'y a pas de solution au problème.

## 2 PROPRIETES FONDAMENTALES DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

### 2.1 Solution de base

La terminologie suivante s'applique uniquement aux problèmes mis sous forme standard. Les contraintes d'inégalité ont donc été remplacées par des contraintes d'égalité par l'intermédiaire des variables d'écart :

$$\begin{aligned} \min Z &= C^T X \\ AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

Soit  $B$ , une sous matrice de  $A$  qui est carrée et régulière d'ordre  $m$ .

$$\begin{aligned} AX = b &\Leftrightarrow [B : N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b \\ X_B \in R^m &\quad X_N \in R^{n-m} \\ B(m \times m) &\quad N(m \times n - m) \quad A(m, n) \end{aligned}$$

Les  $m$  composantes de  $X_B$  sont appelées *variables de base*.

Les  $n-m$  composantes de  $X_N$  sont appelées *variables hors base*.

La solution du système  $AX = b$  obtenue en posant  $X_N = 0$  est appelée *solution de base* associée à la base  $B$ . Cette solution de base est donnée par :

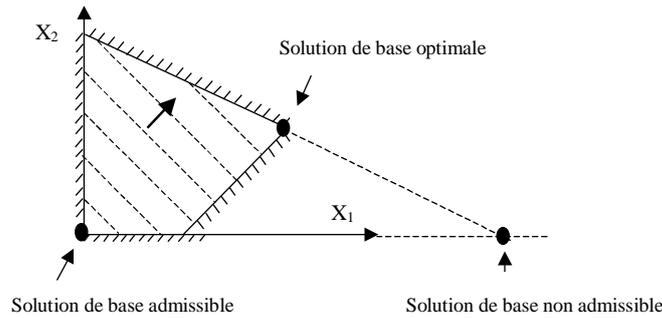
$$\begin{cases} X_B = B^{-1}b \\ X_N = 0 \end{cases}$$

Lorsque les variables de base sont non négatives, la solution de base est admissible.

Lorsqu'au moins une variable de base est nulle, la solution de base est dite dégénérée.

### Théorème 1

Dans un problème sous forme standard, et lorsque le polyèdre des solutions admissibles est non vide, chaque sommet du polyèdre correspond à une et une seule solution de base admissible, et inversement.

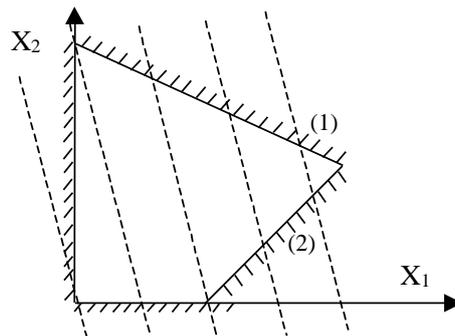


## 2.2 Exemple et interprétation des variables

On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \min f \\ & \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 8 & (1) \\ X_1 - X_2 \leq 2 & (2) \end{cases} \\ & X_i \geq 0 \end{aligned}$$

représenté ci-dessous.



Le problème mis sous forme standard devient :

$$\begin{aligned} & \min f \\ & \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 8 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 2 \end{cases} \\ & X_i \geq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

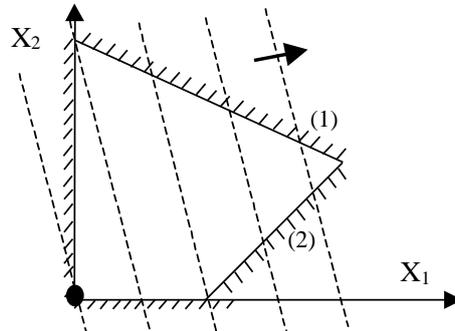
où on a introduit deux variables d'écart  $X_3$  et  $X_4$ . La relation  $m < n$  est bien vérifiée.

Si le problème avait été le suivant :

$$\begin{aligned} & \min f \\ & \begin{cases} X_1 + 2X_2 = 8 & (1) \\ X_1 - X_2 = 2 & (2) \end{cases} \\ & X_i \geq 0 \end{aligned}$$

la solution est directement donnée par la résolution du système  $AX = b$ .

Comme nous le verrons par la suite, le point de départ du problème (6.1) correspond au point  $(0,0)$  représenté par un point noir sur le dessin suivant.



Nous avons ici 4 variables et deux contraintes. Nous savons dès lors que nous devons avoir deux variables de base et deux variables hors base.

Nous pouvons voir sur le dessin que

$$X_1 = X_2 = 0$$

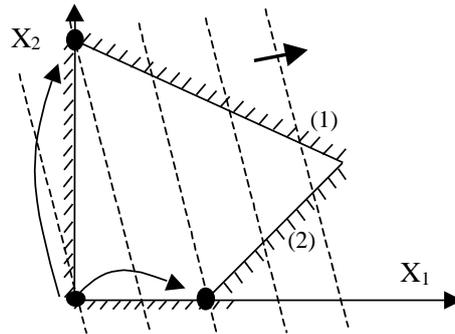
Comme nous sommes en présence d'une solution de base admissible (théorème 1), ces deux variables sont des variables hors base et  $X_3$  et  $X_4$  sont les variables de base et nous avons :

$$X_3 \quad \text{et} \quad X_4 > 0$$

Comme la fonction objectif diminue dans le sens indiqué par la flèche sur la figure, la solution optimale ne se trouve pas sur le sommet représenté par le point noir. L'algorithme du simplexe, comme nous le détaillerons par la suite, va détecter la possibilité de diminuer la fonction objectif et va se déplacer vers le sommet voisin. Il est à remarquer que si la fonction objectif diminue dans l'autre sens, nous avons trouvé la solution caractérisée par  $X_1 = X_2 = 0$ .

Deux possibilités s'offrent à l'algorithme. Soit un déplacement horizontal, au quel cas nous pouvons mettre en évidence une nouvelle solution de base admissible :

$$\begin{array}{ll}
 & X_1 > 0 \\
 & X_2 = 0 \\
 \text{et soit} & X_3 > 0 & \text{soit} & X_3 = 0 \\
 & X_4 = 0 & & X_4 > 0
 \end{array}$$



Soit l'algorithme se déplace verticalement et met en évidence une solution de base caractérisée par :

$$\begin{array}{l}
 X_2 > 0 \\
 X_1 = 0 \\
 \text{et soit} \quad X_3 > 0 \quad \text{soit} \quad X_3 = 0 \\
 \quad \quad \quad X_4 = 0 \quad \quad \quad \quad X_4 > 0
 \end{array}$$

Dans le premier cas de figure,  $X_1$  rentre dans la nouvelle base et prend donc une valeur positive. Une variable, précédemment dans la base, en sort et prend la valeur nulle qui caractérise les variables hors base.

Dans le second cas de figure,  $X_2$  rentre dans la nouvelle base et prend donc une valeur positive. Une autre variable, précédemment dans la base, en sort et prend la valeur nulle qui caractérise les variables hors base.

Le processus se poursuit jusqu'à convergence, c'est à dire lorsqu'il n'y a plus moyen de faire diminuer la fonction objectif. La base optimale correspond au sommet situé à l'extrême droite pour lequel  $X_1$  et  $X_2$  prennent des valeurs positives, alors que  $X_3$  et  $X_4$ , variables hors base, sont nulles.

### 2.3 Caractérisation algébrique des points extrêmes

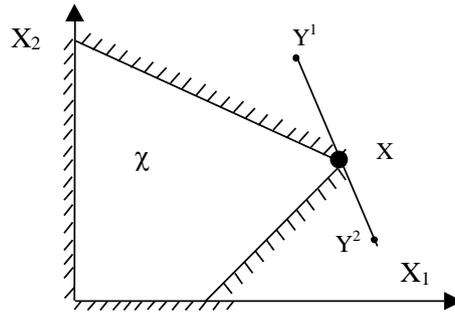
Notons  $\chi = \{X : AX = b, X \geq 0\}$ , l'ensemble des solutions du problème de programmation linéaire standard.  $\chi$  est un ensemble convexe.

#### Définition 1

Un ensemble convexe de la forme  $\chi = \{X \text{ tq } AX = b, X \geq 0\}$  est appelé polytope convexe. Un polytope convexe borné sera appelé polyèdre convexe.

#### Définition 2

On appelle points extrêmes d'un polytope ou d'un polyèdre convexe  $\chi$  tout point  $X \in \chi$  qui ne peut pas être exprimé comme combinaison convexe d'autres points  $Y \in \chi$ , avec  $Y \neq X$ .



**Théorème 1'**

L'ensemble des points extrêmes d'un polytope  $\chi = \{X : AX = b, X \geq 0\}$  correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.

**Corollaire 1**

L'ensemble (polytope ou polyèdre) convexe  $\chi = \{X : AX = b, X \geq 0\}$  a un nombre fini  $n(\chi)$  de points extrêmes.

$$n(\chi) \leq C_n^m$$

**Corollaire 2**

Tout point d'un polyèdre convexe  $\chi \in R^n$  est combinaison convexe des points extrêmes de  $\chi$ .

**Etude du cas où  $\chi$  est un polytope non borné**

On dit que le vecteur  $Y \geq 0$  est un *rayon infini* si

$$\forall X \in \chi : \quad X + \lambda Y \in \chi \quad \forall \lambda \geq 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $Y \geq 0$  soit un rayon infini est que Y soit solution non négative de  $AY = 0$ .

L'ensemble  $Y = \{Y : AY = 0, Y \geq 0\}$  des rayons infinis est un cône.

Si on considère l'hyperplan H d'équation  $\sum_{i=1}^n Y_i = 1$ , l'ensemble  $H \cap Y$  est un polytope borné, donc un polyèdre convexe. Il admet donc un nombre fini de points extrêmes  $Y^1, \dots, Y^k$ .

Comme tout point de Y se déduit par homothétie d'un point de  $H \cap Y$  et que tout point de  $H \cap Y$  est combinaison convexe des points  $Y^1, \dots, Y^k$ , on conclut que tout point de Y est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls des  $Y^1, \dots, Y^k$ . On dit que Y est un

cône polyédrique convexe. Les vecteurs  $Y^1, \dots, Y^k$  qui constituent un ensemble générateur de  $Y$  sont appelés les rayons extrémaux du polytope  $Y$ .

Les points extrémaux sont solutions de base réalisables du problème :

$$\begin{cases} AY = 0 \\ \sum_i Y_i = 1 \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

Pour obtenir les solutions de ce problème, on considère pour toutes les matrices de base  $B$  extraites de  $A$ , toutes les colonnes  $A^j$  ( $j$  hors base).

Chaque fois que le système  $BY = -A^j$  admet une solution  $\bar{Y}$  non négative,  $\bar{Y}$  définit un rayon extrémal de  $\chi$ .

**Corollaire 3**

Tout point d'un polytope convexe  $\chi \subset R^n$  est combinaison convexe des points extrêmes de  $\chi$  à laquelle s'ajoute éventuellement une combinaison linéaire à coefficients de rayons extrémaux.

**2.4 Optimalité en un point extrême**

**Théorème 2**

L'optimum de  $Z$ , fonction linéaire, sur  $\chi \subset R^n$ , polyèdre convexe, est atteint en au moins un point extrême. S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points.

**Théorèmes 1' + 2**

Lorsqu'un programme linéaire admet un optimum à une distance finie, alors il existe une base réalisable  $B^*$  telle que la solution  $X^*$  de base correspondante soit optimale.

**3 L'ALGORITHME DU SIMPLEXE**

**3.1 Théorème fondamental de la programmation linéaire**

Soit un problème de programmation linéaire sous forme standard; on a

- 1) s'il existe une solution réalisable alors il existe une solution de base réalisable;
- 2) s'il existe une solution de base réalisable, alors il existe une solution de base réalisable optimale.

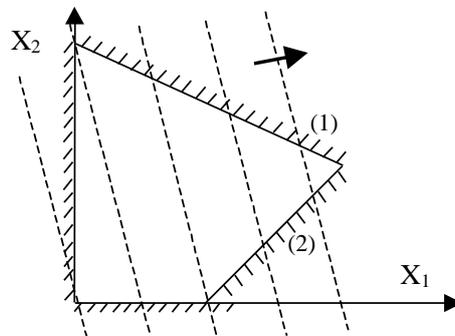
### 3.2 Solutions possibles aux problèmes de programmation linéaire

Les solutions possibles ont été présentées à la section 1.3. La solution peut être unique (solution en un sommet), non unique (solution sur une arête), non bornée ou non réalisable.

### 3.3 Algorithme simplexe

Nous allons expliquer l'algorithme de programmation linéaire en nous basant sur l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \min f &= -4X_1 - X_2 + 50 \\ \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 8 & (1) \\ X_1 - X_2 \leq 2 & (2) \end{cases} \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$



Comme ce fut montré à la section 2.1, le système d'équations décrivant les contraintes du problème d'optimisation peut être exprimé en fonction des variables de base et des variables hors base :

$$AX = b \quad \Leftrightarrow \quad BX_B + NX_N = b \quad (6.2)$$

et la solution de base admissible correspondante :

$$\begin{cases} X_B = B^{-1}b \\ X_N = 0 \end{cases}$$

On peut, de la même manière, décomposer la fonction objectif selon ce principe :

$$Z = C^T X \quad \Leftrightarrow \quad Z = C_B^T X_B + C_N^T X_N \quad (6.3)$$

La fonction objectif s'écrit finalement, en tenant compte de (6.2) et (6.3) :

$$Z = C_B^T B^{-1}b - C_B^T B^{-1}NX_N + C_N^T X_N$$

$$Z = C_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T B^{-1} N) X_N \quad (6.4)$$

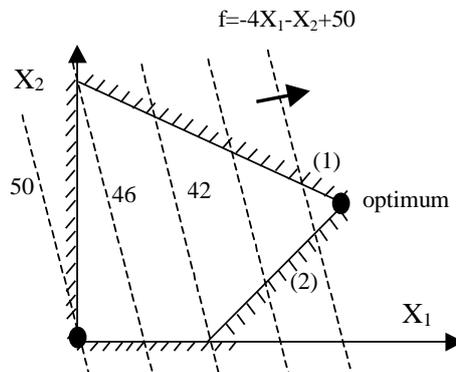
Le premier terme de (6.4) exprime la contribution des variables de base dans la fonction objectif, alors que le deuxième terme représente la contribution des variables hors base.

Il est bien évident qu'en une base donnée, c'est à dire en un sommet du polyèdre donné, les variables hors base sont nulles et le deuxième terme de (6.4) est égal à zéro car  $X_N$  est nul.

Cependant, le deuxième terme de (6.4) constitue une information importante pour savoir s'il est intéressant d'aller au sommet suivant, là où la base est différente et où des variables actuellement hors base deviennent des variables de base. Ces variables prenant une valeur positive, le second terme de (6.4) permet de connaître la variation de la valeur de la fonction objectif quand on se trouve au sommet voisin. Si on constate que ce second terme est positif, il ne sert dès lors à rien de vouloir se rendre au sommet voisin, car la valeur de la fonction objectif y est plus grande; cependant, si ce second terme est négatif, on diminue la fonction objectif en changeant de sommet.

Reprenons l'exemple proposé pour nous éclaircir les idées. La première étape consiste à réécrire le problème sous forme standard :

$$\begin{aligned} \min f &= -4X_1 - X_2 + 50 \\ \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 8 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 2 \end{cases} \\ X_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$



Au départ, nous nous trouvons au sommet (0,0) représenté par le point noir. Nous voyons par (6.5) que les variables ont en effet les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} X_1 = X_2 = 0 & \text{variables hors base} \\ X_3 = 8 \quad X_4 = 2 & \text{variables de base} \end{array}$$

La valeur de la fonction objectif en ce point vaut selon (6.4) :

$$Z = f = 0 \times X_B + [-4; -1] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + 50 = 0 + [-4; -1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + 50 = 50$$

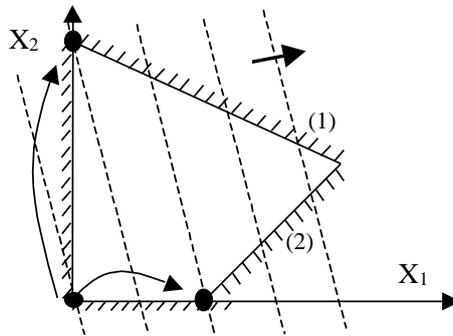
ou plus directement :

$$Z = f = -4X_1 - X_2 + 50 = 50 \quad (6.6)$$

compte tenu du fait que  $X_1 = X_2 = 0$  (variables hors base) et que  $C_B^T = 0$ ,  $C_B^T$  étant le gradient de la fonction objectif par rapport aux variables de base :

$$\frac{\partial(-4X_1 - X_2 + 50)}{\partial X_i} = 0 \quad i = 3,4$$

On voit, d'après (6.6), que la fonction objectif peut diminuer si  $X_1$  ou  $X_2$  prend une valeur positive.



Si  $X_1$  prend une valeur positive, cette variable doit devenir une variable de base et cela revient à se placer au sommet  $(2,0)$ . Si, par contre,  $X_2$  prend une valeur positive, nous nous dirigeons vers l'autre base se trouvant au sommet  $(0,4)$ . Cependant, se placer au sommet  $(2,0)$  permet une plus grande diminution de la fonction objectif :

$$Z = f = -4X_1 + 50 = -4 \times 2 + 50 = 42$$

que de se placer en  $(0,4)$  :

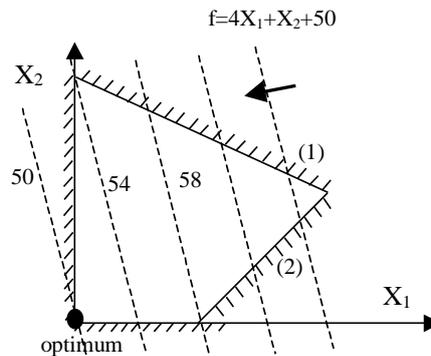
$$Z = f = -X_2 + 50 = -4 + 50 = 46$$

Le signe de  $C_N^T - C_B^T B^{-1} N$  dans l'équation (6.4) joue donc un rôle fondamental dans l'algorithme du simplexe. Si sa valeur est négative relativement à une variable hors base, la fonction objectif peut diminuer si cette variable hors base devient une variable de base (c'est à dire prend une valeur positive). Cela est possible si l'on se déplace jusqu'au sommet voisin. Si la valeur de  $C_N^T - C_B^T B^{-1} N$  est positive pour toutes les variable hors base, faire rentrer une de ces variables dans la base (c'est-à-dire effectuer un mouvement sur la frontière du domaine admissible) ne fera qu'augmenter la valeur de la fonction objectif, ce qui ne nous intéresse pas lorsqu'on veut minimiser cette dernière. En effet, si la fonction objectif à minimiser avait été de la forme :

$$\min f = 4X_1 + X_2 + 50,$$

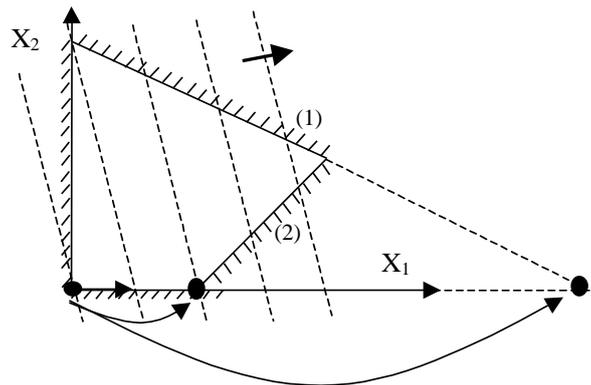
$$\begin{array}{ll} X_1 = X_2 = 0 & \text{variables hors base} \\ X_3 = 8 \quad X_4 = 2 & \text{variables de base} \end{array}$$

serait la solution du problème, car toute augmentation de  $X_1$  ou  $X_2$  entraînerait une augmentation de la fonction objectif.



Il est à noter que si une variable hors base a une contribution nulle dans  $C_N^T - C_B^T B^{-1}N$ , le fait de la faire rentrer dans la base ne changera pas la valeur de la fonction objectif.

Le signe des composantes de  $C_N^T - C_B^T B^{-1}N$  nous permet donc de savoir s'il est intéressant de faire rentrer une variable dans la base, c'est à dire lui assigner une valeur positive. Ce changement de base se déroulera donc en se déplaçant jusqu'à un sommet voisin de celui sur lequel on se trouve actuellement. On peut donc dire qu'à cet instant, nous connaissons la direction dans laquelle nous pouvons diminuer la fonction objectif. Il reste à caractériser le sommet sur lequel nous allons nous arrêter effectivement.



Dans notre exemple, il est intéressant que  $X_1$  prenne une valeur positive pour pouvoir diminuer la fonction objectif. Nous allons donc nous déplacer du sommet initial  $(0,0)$  au sommet suivant. Les sommets sont déterminés par l'intersection des contraintes du problème et comme nous le voyons sur la figure, deux possibilités s'offrent à nous : soit  $X_1$  prend la valeur 2, soit il prend la valeur 8. En prenant cette seconde, nous atteignons une base non admissible car située en dehors du domaine admissible. Tout comme dans l'algorithme du gradient projeté, nous devons prendre la plus petite valeur du pas de

progression dans la direction de recherche déterminée, de manière à ne pas sortir du domaine admissible.

**Théorème 3**

Définissons le vecteur ligne de dimension  $m$  :  $\pi$ .

$$\pi = C_B B^{-1}$$

Une condition nécessaire et suffisante (en l'absence de dégénérescence) pour que  $B$  soit une base réalisable optimale est que :

$$\overline{C}_N = C_N - \pi N = C_N - C_B B^{-1} N \geq 0$$

Le vecteur  $\pi$  est appelé le vecteur des *multiplieurs du simplexe*. Les composantes  $\overline{C}_j$  du vecteur  $\overline{C}_N$  sont appelés *coûts réduits des variables hors base*.

**Corollaire 4**

Soit  $B$ , une base réalisable quelconque,  $X^0$  la solution de base correspondante et  $\overline{C}_N = C_N - \pi N$ .

S'il existe une variable hors base telle que  $\overline{C}_s < 0$ , alors

- 1) ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de  $X_s$  sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables et dans ce cas, l'optimum de  $Z$  est non borné ( $Z = -\infty$ );
- 2) ou bien on met en évidence une autre base  $B^*$  et une autre solution de base réalisable  $X^*$  telle que  $Z(X^*) < Z(X^0)$ .

**Démonstration du théorème 3**

1) Condition suffisante :

$X = [X_B, X_N]$	une solution quelconque
$Z(X)$	la valeur de la fonction objectif

Changement de variables :

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

Exprimer  $Z(X)$  en fonction des variables hors base :

$$Z = C_B^T B^{-1}b + (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)X_N$$

$$Z(X) = Z_B + \overline{C}_N X_N$$

La valeur  $Z_B$  est atteinte par la solution de base réalisable

$$X^0 = [X_B^0, X_N^0] = [B^{-1}b, 0]$$

Comme  $\overline{C_N} \geq 0$  et  $X_N \geq 0$ , alors

$$Z(X) \geq Z_B = C_B^T B^{-1}b$$

$Z_B = Z(X^0)$  est la valeur optimale et  $X^0$  est la solution optimale

2) Condition nécessaire :

Si  $\exists s : \overline{C_S} < 0$ , alors

on peut mettre en évidence une solution de coût inférieure à  $Z_B$ .

$$\begin{aligned} X^0 &= [X_B^0, X_N^0] = [B^{-1}b, 0] \\ X_S &: \quad 0 \rightarrow X_S > 0 \end{aligned}$$

$X = [X_B, X_N]$  vérifie :

$$X_N = X_N^0 + \theta e_S$$

$\theta$  doit être choisi pour que le nouveau point reste une solution :

$$\begin{cases} X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N = B^{-1}b - \theta B^{-1}Ne_S \\ X_B \geq 0 \end{cases}$$

$Ne_S = A_S$  colonne de A correspondant à la variable  $X_S$

Si on note  $\overline{A_S} = B^{-1}A_S = B^{-1}Ne_S$  et  $\overline{b} = B^{-1}b$ , alors

$$\begin{cases} X_B = \overline{b} - \theta \overline{A_S} \\ X_B \geq 0 \end{cases}$$

Comme  $\overline{b} > 0$  (non dégénérescence),  $\theta$  peut être choisi suffisamment petit pour que  $X_B \geq 0$ , et on a :

$$\begin{aligned} Z(X) &= Z(X^0) + \overline{C_N}X_N = Z(X^0) + \theta \overline{C_N}e_S \\ Z(X) &= Z(X^0) + \theta \overline{C_S} < Z(X^0) \end{aligned}$$

et  $X^0$  n'est pas solution optimale.

**Démonstration du corollaire 4**

Considérons pour  $\theta > 0$  la solution  $[X_B, X_N]$  :

$$\begin{cases} X_N = X_N^0 + \theta e_S = \theta e_S \\ X_B = \bar{b} - \theta A_S \end{cases}$$

Soit  $\bar{a}_{iS}$ , ( $i=1, \dots, m$ ), les composantes de  $\bar{A}_S$ .

1) Cas 1 :  $\bar{a}_{iS} \leq 0 \quad \forall i \quad \bar{A}_S \leq 0 \quad \bar{A}_S = B^{-1}A_S$

Donc, on peut prendre  $\theta$  aussi grand que l'on veut, et on aura toujours  $X_B \geq 0$ . Or

$$\begin{aligned} Z(X) &= Z(X^0) + \theta \bar{C}_S & \bar{C}_S < 0 \\ Z(X) &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

problème à un optimum non borné

2) Cas 2 :  $\exists i \quad (i = 1, \dots, m)$  tel que  $\bar{a}_{iS} > 0$

Dans ce cas, on ne peut augmenter  $\theta$  indéfiniment. La plus grande valeur de  $\theta$  que l'on peut prendre pour garder une base est donné par :

$$\hat{\theta} = \min_{i / \bar{a}_{iS} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iS}} = \frac{\bar{b}_R}{\bar{a}_{RS}}$$

La nouvelle solution  $\hat{X}$  obtenue a pour composantes :

$$\begin{cases} \hat{X}_N = \hat{\theta} e_S \\ \hat{X}_B = \bar{b} - \hat{\theta} \bar{A}_S \end{cases}$$

On remarque que si le minimum obtenu est unique (c'est-à-dire en l'absence de dégénérescence), cette solution a exactement  $m$  composantes non nulles.

La variable  $X_S$  qui était nulle dans la solution  $X^0$  est devenue strictement positive.

**$\square$  la variable  $X_S$  est rentrée dans la base.**

La variable  $X_R$  qui était strictement positive a maintenant une valeur nulle :

$$\hat{X}_R = \bar{b} - \hat{\theta} \bar{a}_{RS} = 0$$

**$\square$  la variable  $X_R$  est sortie de la base.**

La nouvelle solution  $\hat{X}$  est une solution de base. Elle correspond à la base  $\hat{B}$  déduite de B en remplaçant la colonne R par la colonne S.

On dit que B et  $\hat{B}$  sont adjacentes et elles correspondent à des points extrêmes adjacents de l'ensemble  $\chi$  des solutions.

Puisque  $\bar{C}_S < 0$        $Z(\hat{X}) = Z(X^0) - \bar{\theta}\bar{C}_S < Z(X^0)$

**3.4 Convergence finie**

**Théorème 4**

Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme primal du simplexe converge en un nombre fini d'itérations.

**Démonstration du théorème 4**

Il existe en effet au plus  $C_n^m$  points extrêmes à parcourir.

**3.5 Forme canonique et tableau simplexe**

**Définition 4**

On dit qu'un programme linéaire est mis sous forme canonique relativement à la base des variables  $(X_1, \dots, X_m)$  si :

- 1) Z est exprimé en fonction des variables hors base (considérées comme variables indépendantes) ;
- 2) les colonnes de la matrice des contraintes correspondant aux variables en base forment (à une perturbation près) une matrice unité.

**Tableau simplexe**

$X_1$	$X_2$	.....	$X_m$	$X_{m+1}$	.....	$X_n$	Z
0	0	.....	0	$\bar{C}_N = C_N - \pi N$		-1	$-Z_B$
1	0	.....	0	$\bar{N} = B^{-1}N$		0	$\bar{b} = B^{-1}b$
0	1	.....	0			...	
		...				...	
0	0	.....	1			0	

variables en base
variables hors base

On peut y lire directement :

- 1) la solution de base ;
- 2) la valeur  $Z_B$  de la fonction objectif (avec le signe -) ;
- 3) les coûts réduits  $\overline{C_N}$  des variables hors base.

### **3.6 Mise en oeuvre de l'algorithme du simplexe**

#### **Phase 1**

BUT : produire un système d'équations sous forme canonique et une solution de base réalisable non dégénérée.

Si on ajoute  $m$  variables d'écart pour convertir les contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité et si tous les  $b_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) sont positifs, alors on se trouve en présence d'une forme canonique et on passe à la phase 2.

Toutefois, si la forme canonique n'est pas évidente, on peut ajouter autant de variables artificielles que l'on veut pour arriver à une forme canonique. On crée ensuite une nouvelle fonction objectif (artificielle) :

$$W = \sum X_i^{\text{artificielle}}$$

Tout en traitant la vraie fonction objectif comme une contrainte, on minimise  $W$ . Puisqu'on se trouve en présence d'une forme canonique, on peut utiliser la phase 2.

Si à la fin du pas 3 de la phase 2 de l'algorithme,  $W$  n'est pas réduit à zéro, la solution du problème original n'existe pas.

Si  $W = 0$ , on efface les variables artificielles et la fonction objectif  $W$  et on démarre la phase 2 du simplexe.

#### **Phase 2**

On présuppose un problème mis sous forme canonique avec une solution de base réalisable non dégénérée.

- 1) Trouver le  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) minimum.  
Soit l'indice  $k$  tel que  $C_k = \min C_i$ .  
Si  $C_k$  non négatif, on va en 5).

- 2)  $C_k$  négatif

Trouver le minimum  $\frac{b_j}{a_{jk}}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) avec  $a_{jk} > 0$ .

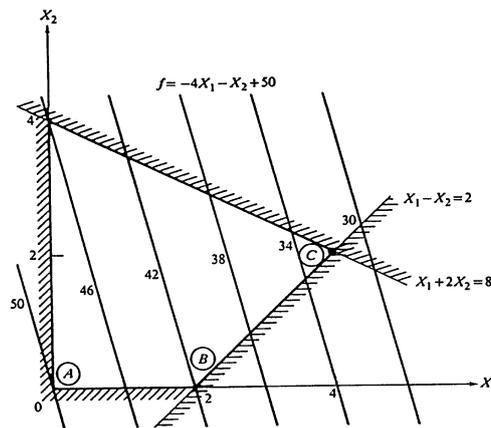
- 2.1) si tous les  $a_{jk}$  sont non positifs, alors la solution est non bornée et on va en 5)

- 2.2) soit  $r$ , l'indice de la rangée correspondant à ce minimum :  $a_{rk}$  est l'élément pivot
- 3) Pivotage sur  $a_{rk}$
- Diviser la rangée  $r$  par  $a_{rk}$   
 Soustraire  $a_{jk}$  fois la rangée  $r$  aux rangées  $j=1, \dots, m+1$  et  $j \neq r$
- 4) Retour en 1) et boucle
- 5) La solution est atteinte
- 5.1) si tous les  $C_i$  des variables non de base sont positifs, la solution est unique ;  
 5.2) si certains  $C_i$  associés aux variables non de base sont nuls, la solution est non unique ;  
 5.3) si certains  $C_i$  sont négatifs, la solution est non bornée.

#### 4 EXERCICES

- Cas d'une solution unique

Minimiser  $f = -4X_1 - X_2 + 50$   
 avec  $X_1 - X_2 \leq 2$   
 $X_1 + 2X_2 \leq 8$   
 $X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$



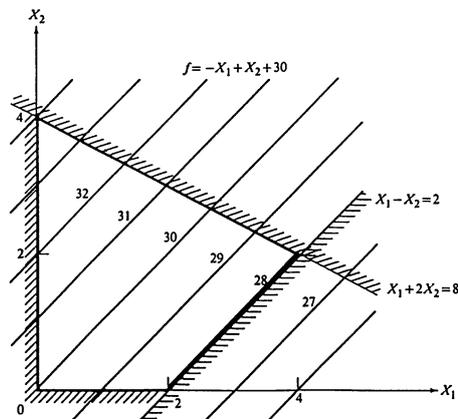
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$b$
1	-1	1	0	2
1	2	0	1	8
-4	-1	0	0	f-50

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b
1	-1	1	0	2
0	3	-1	1	6
0	-5	4	0	f-42

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b
1	0	2/3	1/3	4
0	1	-1/3	1/3	2
0	0	7/3	5/3	f-32

- Cas d'une solution non unique

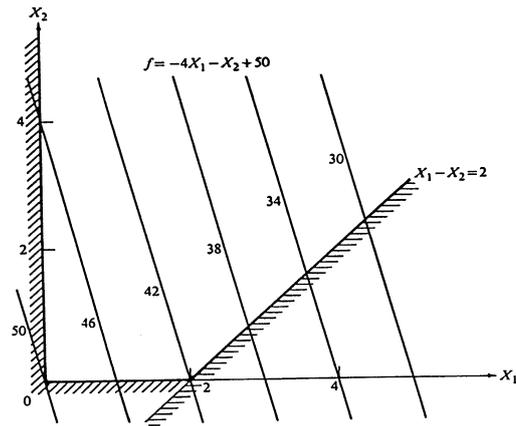
Minimiser  $f = -X_1 + X_2 + 30$   
 avec  $X_1 - X_2 \leq 2$   
 $X_1 + 2X_2 \leq 8$   
 $X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$



$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b
1	-1	1	0	2
0	3	-1	1	6
0	0	1	0	f-28

- Cas d'une solution non bornée

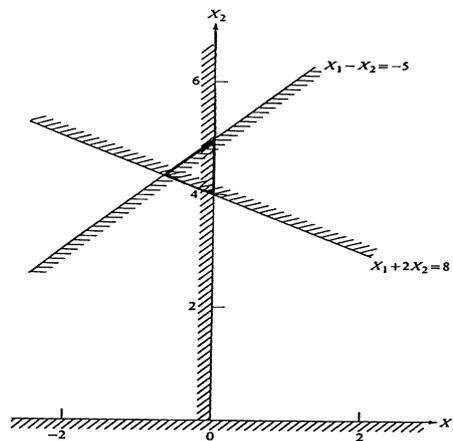
Minimiser  $f = -4X_1 - X_2 + 50$   
 avec  $X_1 - X_2 \leq 2$   
 $X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$



$X_1$	$X_2$	$X_3$	b
1	-1	1	2
0	-5	4	f-42

- cas où il n'y a pas de solution réalisable

Minimiser  $f = -4X_1 - X_2 + 50$   
 avec  $X_1 - X_2 \leq -5$   
 $X_1 + 2X_2 \leq 8$   
 $X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$



$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b
1	-1	1	0	-5
1	2	0	1	8
-4	-1	0	0	f-50

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$b$
-1	1	-1	0	1	5
1	2	0	1	0	8
-4	-1	0	0	0	f-50
0	0	0	0	1	w

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$b$
-1	1	-1	0	1	5
1	②	0	1	0	8
-4	-1	0	0	0	f-50
1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1</span>	1	0	0	w-5

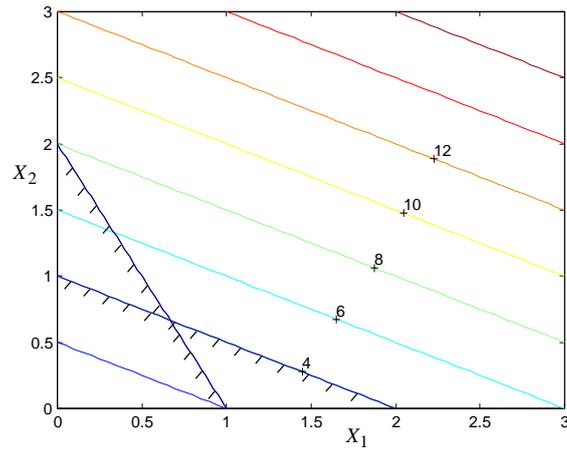
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$b$
-3/2	0	-1	-1/2	1	1
1/2	1	0	1/2	0	4
-7/2	0	0	1/2	0	f-46
<b>3/2</b>	0	<b>1</b>	<b>1/2</b>	0	w-1

- Cas d'une solution non unique

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimiser} && f = 2X_1 + 4X_2 \\
 &\text{avec} && 2X_1 + X_2 \geq 2 \\
 &&& 2X_1 + 4X_2 \geq 4 \\
 &&& X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Sous forme standard :

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimiser} && f = 2X_1 + 4X_2 \\
 &\text{avec} && 2X_1 + X_2 - X_3 = 2 \\
 &&& 2X_1 + 4X_2 - X_4 = 4 \\
 &&& X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0 \quad X_4 \geq 0
 \end{aligned}$$



$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$b$
2	1	-1	0	2
2	4	0	-1	4
2	4	0	0	f

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$b$
2	1	-1	0	1	0	2
2	4	0	-1	0	1	4
2	4	0	0	0	0	f
0	0	0	0	1	1	W

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$b$
2	1	-1	0	1	0	2
2	4	0	-1	0	1	4
2	4	0	0	0	0	f
-4	-5	1	1	0	0	W-6

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$b$
3/2	0	-1	1/4	1	-1/4	1
1/2	1	0	-1/4	0	1/4	1
0	0	0	1	0	-1	f-4
-3/2	0	1	-1/4	0	5/4	W-1

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$b$
1	0	-2/3	1/6	2/3	-1/6	2/3
0	1	1/3	-1/3	-1/3	1/3	2/3
0	0	0	1	0	-1	f-4
0	0	0	0	1	1	W-0

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b
1	0	-2/3	1/6	2/3
0	1	1/3	-1/3	2/3
0	0	0	1	f-4

La solution est donnée par :  $X_1 = X_2 = 2/3$

On remarque que  $C_3 = 0$ . La variable  $X_3$  pourrait donc rentrer dans la base sans modifier la valeur de la fonction objectif : dans ce cas, nous aurions :

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b
1	2	0	-1/2	2
0	1/3	1	-1	2
0	0	0	1	f-4

La solution est donnée par :  $X_1 = 2, X_2 = 0$ .

D'après le théorème 2, l'ensemble des solutions se trouve sur l'arête délimitée par ces 2 solutions.

# THEORIE DE LA DUALITE

## 1 CONDITIONS DE KARUSH-KUHN-TUCKER

Soit le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \min_X f(X) \\ & g_j(X) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ & h_k(X) = 0 \quad k = 1, \dots, m' \end{aligned}$$

Si  $X^*$  est un point régulier du problème général d'optimisation et est aussi un point de minimum, alors il existe  $\lambda \in E^m$  et  $\mu \in E^{m'}$  tels que

$$\begin{aligned} \nabla f(X^*) - \lambda^T \nabla g(X^*) - \mu^T \nabla h(X^*) &= 0 \\ \lambda^T g(X^*) &= 0 \\ \lambda \geq 0 \quad g(X^*) \geq 0 \quad h(X^*) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $f$  est convexe,  $g_j$  sont concaves et  $h_k$  sont linéaires, c'est-à-dire si le problème d'optimisation est un **problème de programmation convexe**, alors  $X^*$  vérifiant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) est la solution du problème. Autrement dit,

**dans un problème convexe, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont nécessaires et suffisantes**

Si, dans un voisinage de  $X^*$ ,  $f$  est convexe,  $g_j$  sont concaves et  $h_k$  sont linéaires, alors les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont suffisantes pour prouver que  $X^*$  est un minimum local du problème.

## 2 DUALITE

### 2.1 Fonction lagrangienne et point de selle

Soit le problème primal

$$\begin{aligned} & \min_X f(X) \quad X \in E^n \\ & g_j(X) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

dans lequel  $f$  est convexe et les  $g_j$  sont concaves (problème convexe).

On exprime les conditions de Karush-Kuhn-Tucker :

$$\begin{aligned} \nabla f(X^*) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(X^*) &= 0 \\ \lambda_j^* g_j(X^*) &= 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* &\geq 0 \quad g_j(X^*) \geq 0 \end{aligned}$$

On écrit la fonction lagrangienne :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = f(X) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker impliquent que :

$$\nabla_X \mathcal{L}(X^*, \lambda^*) = 0$$

qui sont les conditions nécessaires de minimum de  $\mathcal{L}(X, \lambda^*)$

De plus, en  $X = X^*$ ,

$$\mathcal{L}(X^*, \lambda^*) = f(X^*)$$

1) Analysons la dépendance en  $X$  de la fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned} f(X) &\geq f(X^*) + (X - X^*)^T \nabla f(X^*) \\ -g(X) &\geq -g(X^*) - (X - X^*)^T \nabla g(X^*) \end{aligned}$$

$\forall X$ , car la fonction objectif  $f$  est convexe et les contraintes  $g$  sont concaves.

Dès lors,  $\forall \lambda_j^* \geq 0 (j = 1, \dots, m)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, \lambda^*) &= f(X) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(X) \\ \mathcal{L}(X, \lambda^*) &\geq \mathcal{L}(X^*, \lambda^*) + (X - X^*)^T \nabla_X \mathcal{L}(X^*, \lambda^*) \\ \mathcal{L}(X, \lambda^*) &\geq \mathcal{L}(X^*, \lambda^*) \end{aligned}$$

2) Analysons la dépendance en  $\lambda$  de la fonction lagrangienne :  $\forall \lambda_j^* \geq 0 (j = 1, \dots, m)$

$$\mathcal{L}(X^*, \lambda) = \mathcal{L}(X^*, \lambda^*) - \sum_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda_j^*) g_j(X^*)$$

$$\mathcal{L}(X^*, \lambda) \leq \mathcal{L}(X^*, \lambda^*)$$

En conclusion,  $\forall X, \lambda \geq 0$

$$\mathcal{L}(X, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(X^*, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(X^*, \lambda)$$

$$(X^*, \lambda^*) \in E^{m+n} \text{ est un point de selle de } \mathcal{L}(X, \lambda)$$

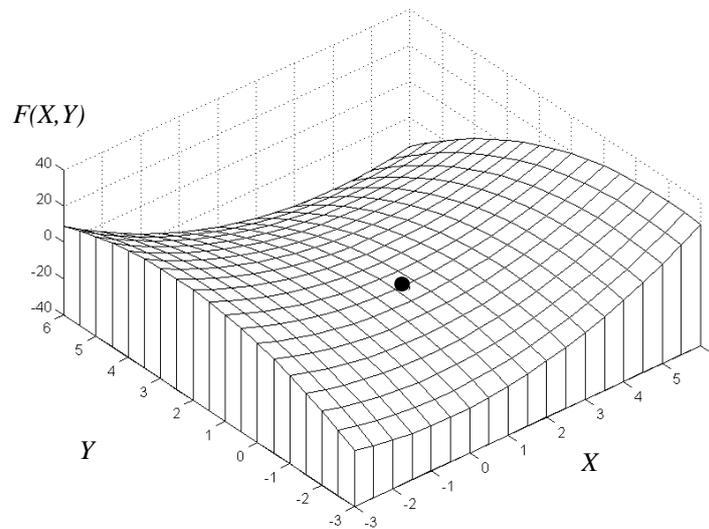


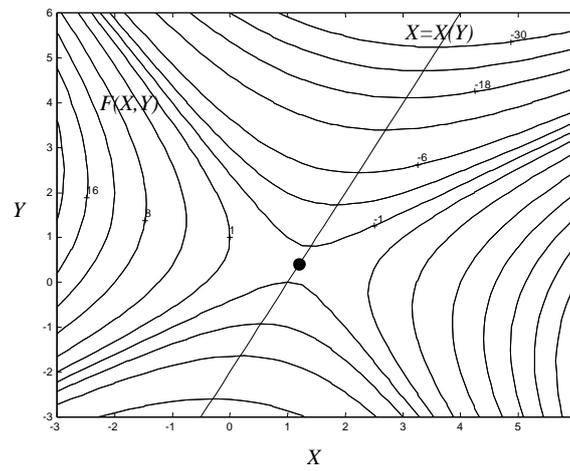
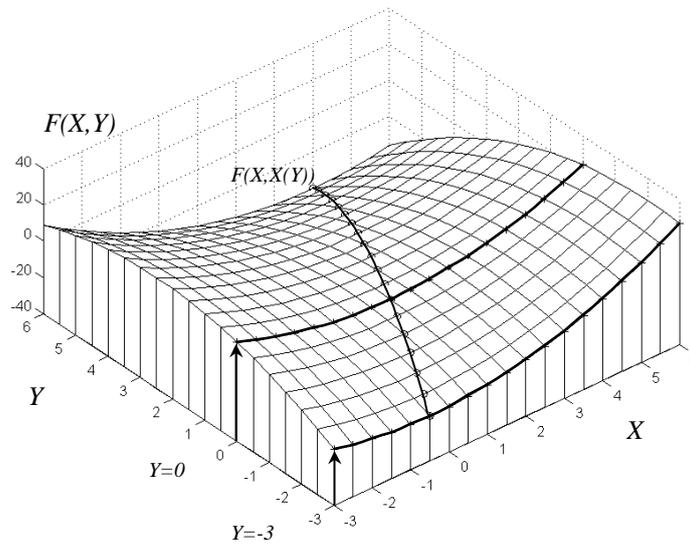
Figure 7.1. Représentation d'une fonction à point de selle

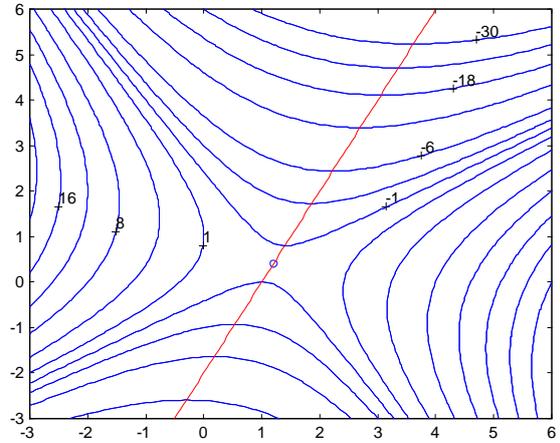
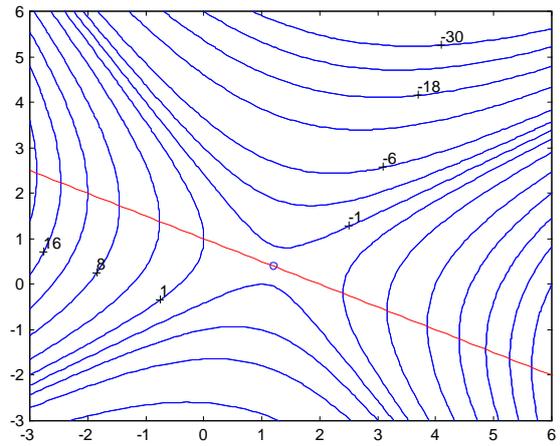
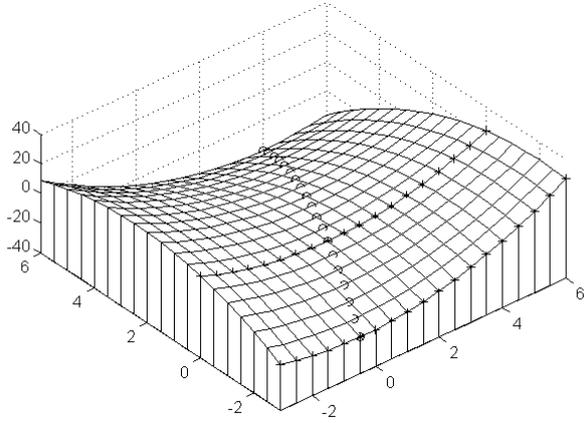
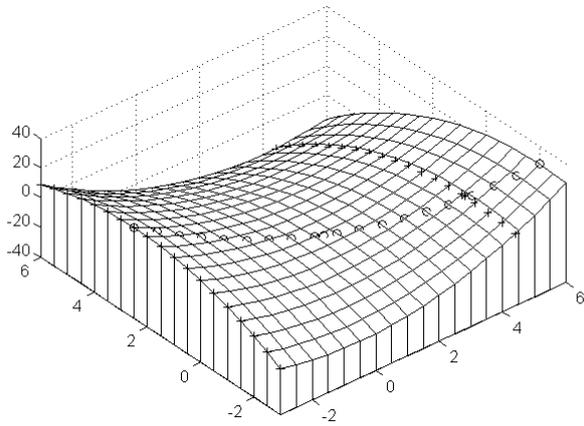
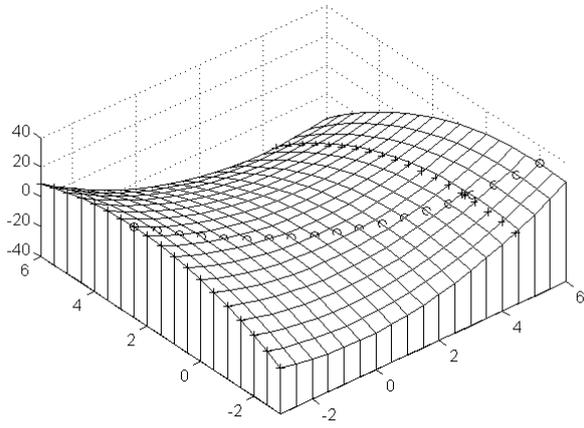
$$F(X, Y) = (X - 1)^2 - (Y - 1)^2 - XY$$

Au problème de minimisation de  $\mathcal{L}(X, \lambda)$  par rapport à la variable  $X$ , est associé un problème de maximisation de  $\mathcal{L}(X, \lambda)$  vis-à-vis de la variable duale  $\lambda$ .

Supposons que l'on ait, pour tout  $X$ ,  $\lambda = \lambda(X)$ , on peut minimiser  $\mathcal{L}(X, \lambda(X))$  avec  $\lambda(X) \geq 0$ .

De même, si on a, pour tout  $\lambda$ ,  $X = X(\lambda)$ , on peut maximiser  $\mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)$  avec  $\lambda \geq 0$ .





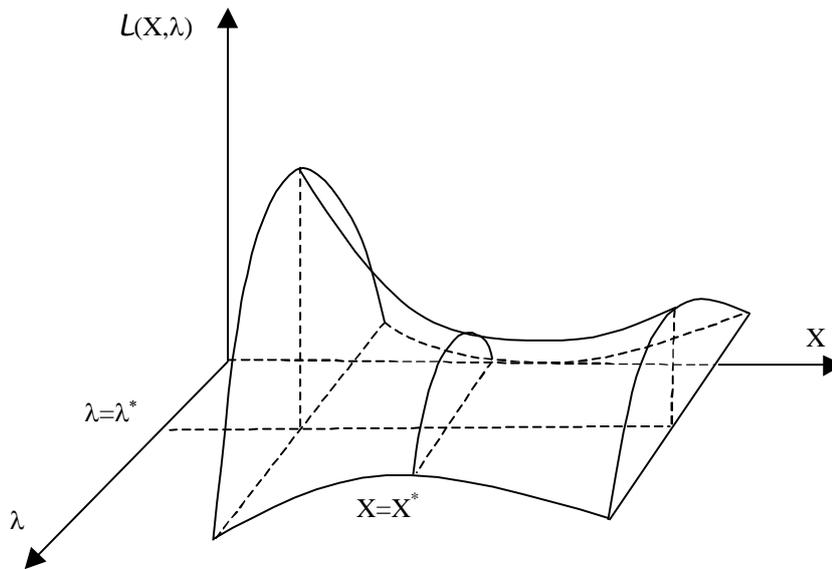


Figure 7.1. Représentation d'une fonction présentant un point de selle

Le problème

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & L(X(\lambda), \lambda) \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

avec  $\lambda = \lambda^*$  et donc  $X = X(\lambda^*) = X^*$  comme solution est le **problème dual**.

On évite de formuler le **problème primal** de la manière précédemment décrite faisant

appel à la fonction  $\lambda(X)$  qui souvent est ambiguë.

De même, dans le problème dual, en toute généralité, la référence à la fonction  $X(\lambda)$  peut être évitée ( $X(\lambda)$  peut ne pas exister) en lui substituant la condition :

$$\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = 0$$

## 2.2 Théorème de la dualité

Soit le problème primal :

$$\begin{aligned} \min_X \quad & f(X) \quad X \in E^n \\ & g(X) \geq 0 \end{aligned}$$

avec  $f$  convexe et  $g$  concaves.

Définissons le problème dual comme étant :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \mathcal{L}(X, \lambda) \quad & (X, \lambda) \in E^{m+n} \\ \lambda \geq 0 \quad & \nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = 0 \\ \text{où } \mathcal{L}(X, \lambda) = & f(X) - \lambda^T g(X) \end{aligned}$$

Alors, dans ce cas, si  $X^*$  est la solution du problème primal, il existe un  $\lambda^*$  tel que le couple  $(X^*, \lambda^*)$  résolve le problème dual et que  $f(X^*) = \mathcal{L}(X^*, \lambda^*)$ .

### 2.3 Propriétés de la fonction duale

#### 1) *Dérivées premières*

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ g_j(X) \geq 0 \end{aligned}$$

La fonction lagrangienne s'écrit :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = f(X) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda_j} = -g_j(X(\lambda))$$

De manière identique,

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ g_j(X) \leq 0 \end{aligned}$$

La fonction lagrangienne s'écrit :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda_j} = g_j(X(\lambda))$$

#### 2) *Dérivées secondes*

Hessien défini négatif

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = - \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_l}$$

Si  $X_i$  est fixé à une borne,  $\frac{\partial X_i}{\partial \lambda_l} = 0$ , et

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = - \sum_{i \text{ libres}} \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_l}$$

### 3) Continuité

| non C2 si contraintes de bornes  $\underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i$

| non C1 si non convexe (exemple des variables discrètes  $X_i \in T = \{X_1, \dots, X_n\}$ ).

## 2.4 Considérations numériques. Séparabilité

L'application numérique de la dualité est assez aisée pour les problèmes linéaires. En problèmes non linéaires, les choses sont un peu plus difficiles. Le principal problème réside dans l'évaluation de  $X(\lambda)$  et à la gestion de ces variables primales lorsque l'on veut les remplacer dans le problème dual.

Toutefois, il est un cas très intéressant (en linéaire ou en non linéaire) où la dualité peut

être appliquée facilement. C'est le cas des **problèmes séparables**.

$$\begin{aligned} \min_{X_i} f(X) &= \sum_i f_i(X_i) \\ g_j(X) &= \sum_i g_{ji}(X_i) \leq \overline{g}_j \\ \underline{X}_i &\leq X_i \leq \overline{X}_i \end{aligned}$$

La fonction lagrangienne est aussi séparable :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_i f_i(X_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \sum_i g_{ji}(X_i) \right) = \sum_i \mathcal{L}_i(X_i, \lambda)$$

Stationnarité de X découpée :

$$\min_{\underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i} \mathcal{L}_i(X_i, \lambda) = f_i(X_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}(X_i)$$

Problème dual :

$$\max_{\lambda_j \geq 0} \sum_i \min_{X_i \leq X_i \leq X_i} \left[ f_i(X_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}(X_i) \right]$$

### 3 CAS PARTICULIERS

#### 3.1 Problèmes linéaires

$$\begin{aligned} \min C^T X + f_0 \\ AX \leq b \\ X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$[A] = (m \times n) \quad m \gg n \quad = \text{la difficulté!}$$

Lagrangien :

$$L(X, \lambda) = C^T X + \lambda^T (AX - b) + f_0$$

Stationnarité du Lagrangien par rapport à X :

$$\min_X L(X, \lambda) = \nabla_X L(X, \lambda) = C + A^T \lambda$$

Or

$$\begin{aligned} \nabla_X L(X^*, \lambda^*) &= 0 \\ \nabla_X L(X, \lambda^*) &\geq 0 \\ X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ C^T X + \lambda^T AX &= 0 \end{aligned} \quad \text{point de selle}$$

Fonction duale :

$$l(\lambda) = -b^T \lambda + f_0$$

Problème dual :

$$\begin{aligned} \max l(\lambda) &= -b^T \lambda + f_0 \\ A^T \lambda &\geq -C \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

#### 3.2 Problèmes quadratiques séparables

$$\min_{X_i} f(X) = \sum_{i=1}^n (a_i X_i + \frac{b_i}{2} X_i^2)$$

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n c_{ji} X_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Fonction Lagrangienne séparable :

$$\min_{X_i} (a_i X_i + \frac{b_i}{2} X_i^2 - \sum_{j=1}^m \lambda_j c_{ji} X_i)$$

Stationnarité du Lagrangien par rapport à  $X_i$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial X_i} = a_i + b_i X_i - \sum_j \lambda_j c_{ji} = 0$$

Si  $b_i \neq 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i = \frac{-a_i + \sum_j \lambda_j c_{ji}}{b_i} & \text{si } \underline{X}_i < \frac{-a_i + \sum_j \lambda_j c_{ji}}{b_i} < \overline{X}_i \\ X_i = \underline{X}_i & \text{si } \underline{X}_i \geq \frac{-a_i + \sum_j \lambda_j c_{ji}}{b_i} \\ X_i = \overline{X}_i & \text{si } \overline{X}_i \leq \frac{-a_i + \sum_j \lambda_j c_{ji}}{b_i} \end{array} \right.$$

Si  $b_i = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i = \overline{X}_i & \text{si } a_i - \sum_j \lambda_j c_{ji} < 0 \\ X_i = \underline{X}_i & \text{si } a_i - \sum_j \lambda_j c_{ji} > 0 \end{array} \right.$$

et le problème dual se met sous la forme :

$$l(\lambda) = \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)$$

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_j} \sum_i (a_i X_i(\lambda) + \frac{b_i}{2} X_i^2(\lambda)) + \sum_j \lambda_j (\sum_i c_{ji} X_i(\lambda)) \\ \lambda_j \geq 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où les contraintes sont également quadratiques :

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n (c_{ji}X_i + \frac{1}{2}d_{ji}X_i^2) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

nous obtenons :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_i \mathcal{L}_i(X_i, \lambda) = \sum_i (a_i X_i + \frac{1}{2}b_i X_i^2) - \sum_j \lambda_j \sum_i (c_{ji}X_i + \frac{1}{2}d_{ji}X_i^2) \quad j = 1, \dots, m$$

La différentiation du Lagrangien par rapport aux variables primales donne :

$$\min_{X_i} \mathcal{L}_i(X_i, \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}_i(X_i, \lambda)}{\partial X_i} = 0$$

$$a_i + b_i X_i - \sum_j \lambda_j (c_{ji} + d_{ji} X_i) = 0$$

$$\tilde{X}_i = \frac{-a_i + \sum_j \lambda_j c_{ji}}{b_i - \sum_j \lambda_j d_{ji}}$$

Si  $b_i - \sum_j \lambda_j d_{ji} \neq 0$ :

$$\begin{aligned} X_i &= \tilde{X}_i & \text{si } \underline{X}_i < X_i < \overline{X}_i \\ X_i &= \underline{X}_i & \text{si } \tilde{X}_i \leq \underline{X}_i \\ X_i &= \overline{X}_i & \text{si } \tilde{X}_i \geq \overline{X}_i \end{aligned}$$

Si  $b_i + \sum_j \lambda_j d_{ji} = 0$ :

$$\begin{aligned} X_i &= \underline{X}_i & \text{si } \sum_j \lambda_j c_{ji} - a_i > 0 \\ X_i &= \overline{X}_i & \text{si } \sum_j \lambda_j c_{ji} - a_i < 0 \end{aligned}$$

### 3.3 Problème quadratique non séparable avec contraintes d'inégalité linéaires (SOP)

$$\begin{aligned} \min_X F(X) &= \frac{1}{2} X^T A X + b^T X \\ &BX \leq C \end{aligned}$$

Ici, les contraintes de bornes sont incluses dans  $BX \leq C$ .  
La matrice A est supposée définie positive, donc invertible.

Le Lagrangien, non séparable, s'écrit :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \frac{1}{2} X^T A X + b^T X + \lambda^T (B X - C)$$

Les conditions de stationnarité du Lagrangien par rapport à  $X$  deviennent :

$$\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = A X + b + B^T \lambda = 0$$

soit

$$X = -A^{-1}(b + B^T \lambda)$$

La fonction lagrangienne s'écrit :

$$l(\lambda) = -\frac{1}{2} \lambda^T D \lambda - d^T \lambda - \frac{1}{2} b^T A^{-1} b$$

avec

$$D = B A^{-1} B^T \quad d = C + B A^{-1} b$$

et le problème dual :

$$\begin{aligned} \max l(\lambda) \\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

## 4 EXERCICE 1

Analyser la fonction suivante :

$$F(X, Y) = (X - 1)^2 - (Y - 1)^2 - XY$$

- Pour quelles valeurs de  $X$  et de  $Y$  le gradient s'annule-t-il ?

$$\nabla F = \begin{cases} 2X - 2 - Y \\ -2Y + 2 - X \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X - Y = 2 \\ X + 2Y = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \frac{6}{5} \quad Y = \frac{2}{5} \quad F = -\frac{4}{5}$$

- Minimum ou maximum par rapport à X et Y ?

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = 2 > 0$$

F minimum vis-à-vis de X

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = -2 < 0$$

F est maximum vis-à-vis de Y

$(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$  est un point de selle

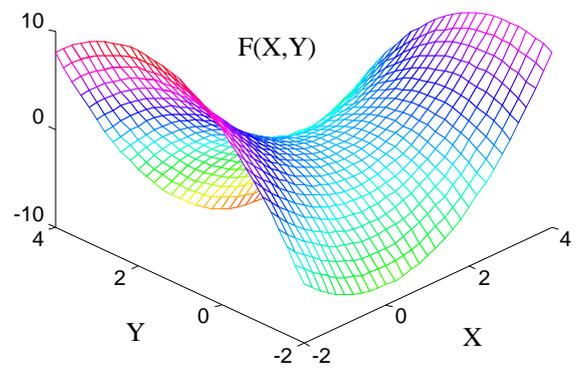
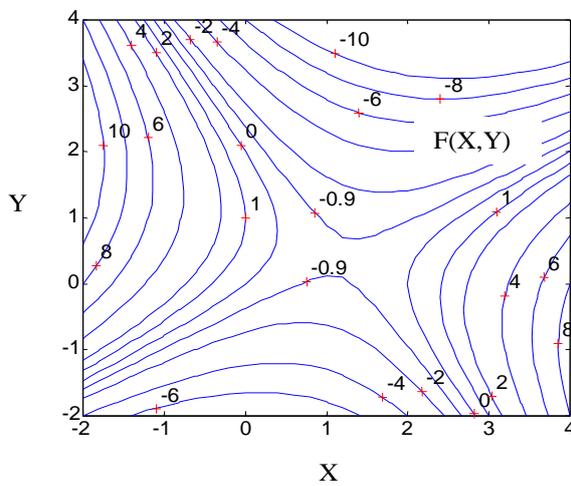
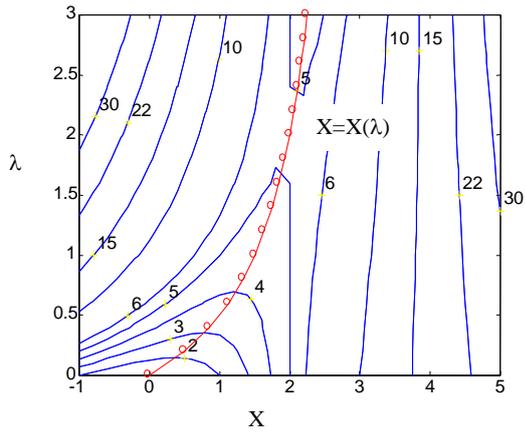


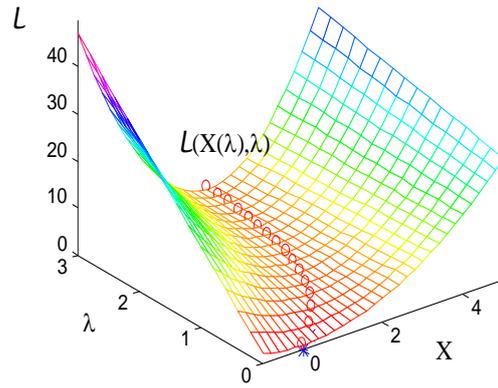
Figure 7.2. Représentation du problème de l'exercice 1

## 5 EXERCICE 2

Exemple de Boyd du Chapitre 2.



a. Iso-valeurs du Lagrangien et projection de  $L(X(\lambda), \lambda)$  et  $X=X(\lambda)$  dans le plan  $(X, \lambda)$



b. Représentation 3D du problème  $L(X(\lambda), \lambda)$

Figure 7.2. Représentation du Lagrangien et de  $X=X(\lambda)$

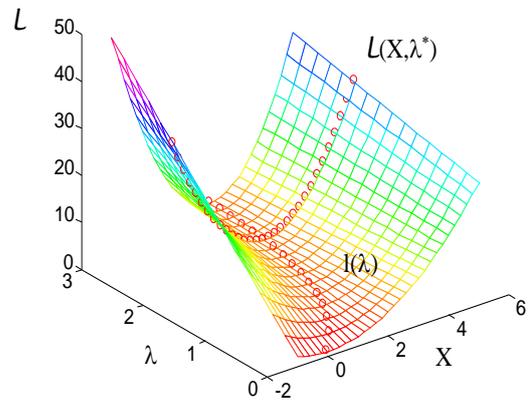
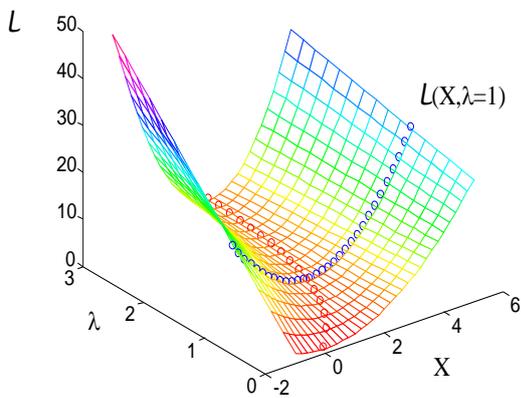


Figure 7.3. Représentation de la fonction duale  $l(\lambda)$

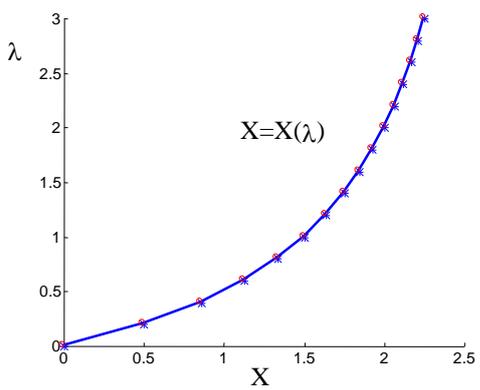


Figure 7.4.  $X(\lambda)$  en étoiles et projection de  $l(\lambda)$  dans le plan  $(X, \lambda)$

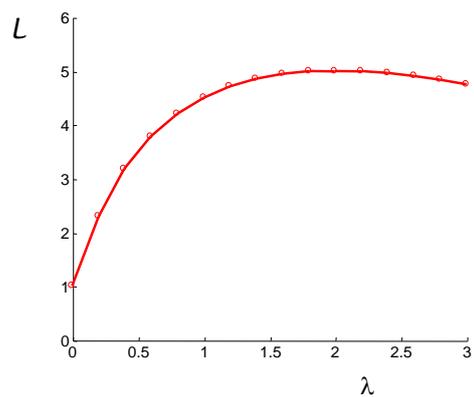


Figure 7.5. Projection de  $l(\lambda)$  dans le plan  $(L, \lambda)$

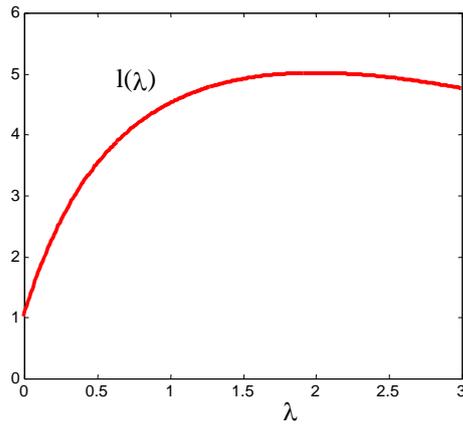


Figure 7.6. Fonction duale  $l(\lambda)$

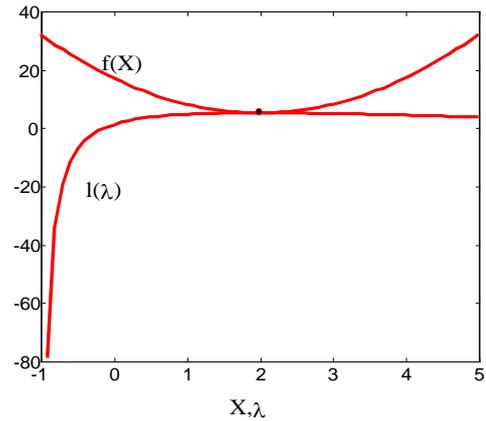


Figure 7.7. Fonctions duale et primale

## 6 EXERCICE 3

On demande de résoudre le problème suivant et de vérifier les conditions de Kuhn-Tucker.

$$\begin{aligned} \min F &= X_1^2 + 2X_2^2 \\ G &= -X_1 - X_2 + 2 \leq 0 \end{aligned}$$

- Lagrangien

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, \lambda) = X_1^2 + 2X_2^2 + \lambda(-X_1 - X_2 + 2)$$

- Réaliser le problème de maximisation de  $\mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)$  fonction de la seule variable duale  $\lambda$ . En déduire les valeurs des variables primales et de la fonction objectif à l'optimum.

$$\nabla_X \mathcal{L} = \begin{Bmatrix} 2X_1 - \lambda \\ 4X_2 - \lambda \end{Bmatrix} = 0$$

$$X_1 = \frac{\lambda}{2} \quad X_2 = \frac{\lambda}{4}$$

$$\mathcal{L}(X(\lambda), \lambda) = l(\lambda) = -\frac{3}{8}\lambda^2 + 2\lambda$$

Le maximum de la fonction duale vaut :

$$\frac{dl}{d\lambda} = -\frac{3}{4}\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = \frac{8}{3}$$

Les variables primales sont alors données par

$$X_1^* = \frac{\lambda^*}{2} = \frac{4}{3} \quad X_2^* = \frac{\lambda^*}{4} = \frac{2}{3}$$

et la valeur de la fonction objectif à l'optimum contraint vaut :

$$F(X^*) = l(\lambda^*) = \frac{8}{3}$$

- Vérification des conditions de Kuhn-Tucker

$$1) G = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} + 2 = 0$$

$$2) \lambda \geq 0$$

$$3) \lambda \times G = 0$$

$$4) \nabla F^* + \lambda^* \nabla G^* = \begin{Bmatrix} 2X_1^* \\ 4X_2^* \end{Bmatrix} + \lambda^* \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{Bmatrix} + \frac{8}{3} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 7 EXERCICE 4

On demande de résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2} \quad & \frac{1}{2} X_1^2 + X_2 \\ & X_1 + X_2 \geq 4 \quad (1) \\ & X_1 - X_2 \geq -4 \quad (2) \\ & 0 \leq X_1 \leq 5 \\ & 0 \leq X_2 \leq 5 \end{aligned}$$

dans lequel apparaissent des contraintes de bornes  $\bar{X}_i$  et  $\underline{X}_i$ .

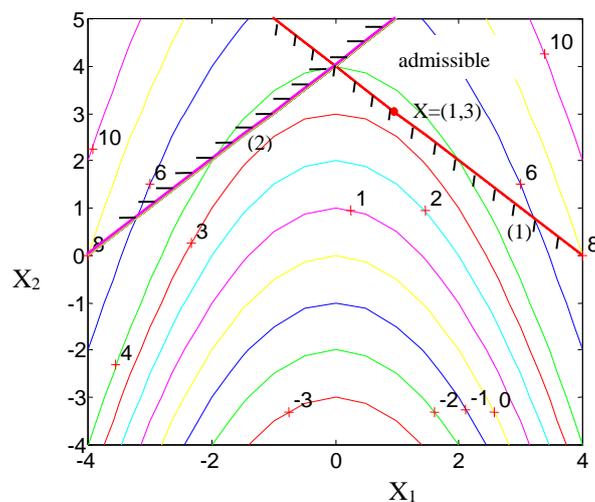


Figure 7.8. Représentation du problème de l'exercice 4

- Lagrangien :

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \frac{1}{2} X_1^2 + X_2 - \lambda_1(X_1 + X_2 - 4) - \lambda_2(X_1 - X_2 + 4)$$

- Stationnarité du Lagrangien par rapport aux variables primales

$$\begin{aligned} \min_{X_1} \mathcal{L} &\Rightarrow X_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \min_{X_2} \mathcal{L} &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2} (X_2 - \lambda_1 X_2 + \lambda_2 X_2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2 = X_2(1 - \lambda_1 + \lambda_2)$$

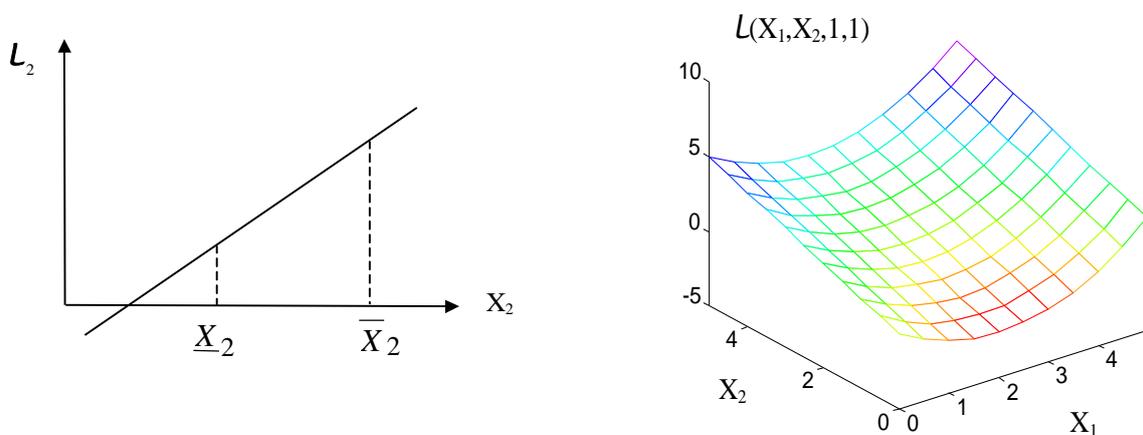


Figure 7.9. Représentation du Lagrangien

Dans le cas de la variable  $X_2$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned} X_2 &= \underline{X_2} && \text{si pente de } \mathcal{L}_2 \text{ positive} \\ X_2 &= \overline{X_2} && \text{si pente de } \mathcal{L}_2 \text{ négative} \end{aligned}$$

la pente étant donnée par  $1 - \lambda_1 + \lambda_2$ .

Il existe un plan de discontinuité d'équation  $1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$  dans l'espace dual.

Si  $\lambda_1 - \lambda_2 < 1$ ,  $X_2 = \underline{X_2}$  et  $X_1 = \lambda_1 + \lambda_2$

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2$$

Si  $\lambda_1 - \lambda_2 > 1$ ,  $X_2 = \overline{X_2}$  et  $X_1 = \lambda_1 + \lambda_2$

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1 + \lambda_2 + 5$$

Si  $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4$$

- Maximisation de  $l(\lambda)$

Sur le plan de discontinuité :

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 + 1$$

$$l(\lambda_2) = -\frac{1}{2}(2\lambda_2 + 1)^2 + 4$$

$$\frac{dl(\lambda_2)}{d\lambda_2} = -(2\lambda_2 + 1) \cdot 2 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

impossible

Cette solution aurait conduit au point primal

$$X_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$X_2 = 4$$

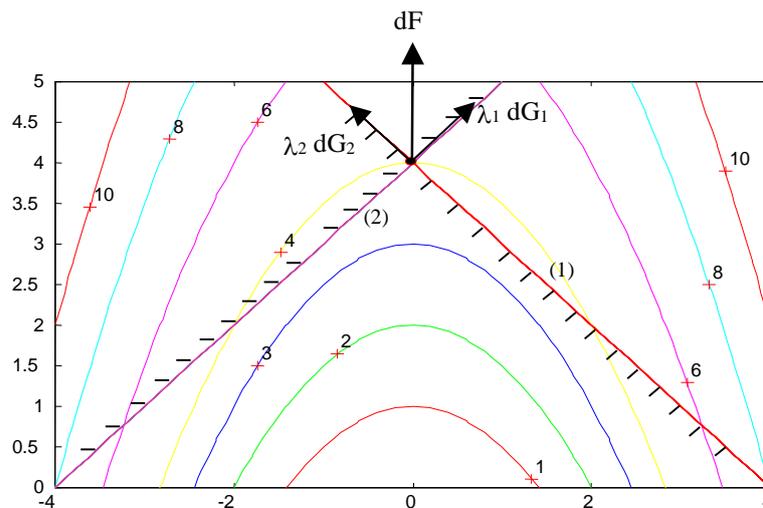


Figure 7.10. Représentation de la solution impossible.  
Le multiplicateur de Lagrange relatif à la contrainte 2 est négatif

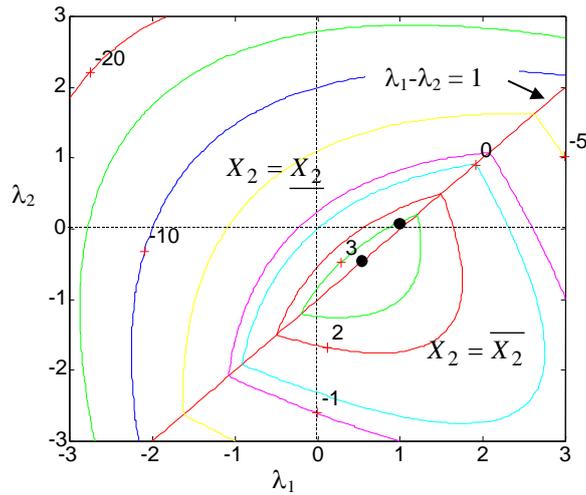


Figure 7.11. Espace dual et solution

Si on prend  $\lambda_2 = 0$  et  $\lambda_1 = 1$ , les variables primales valent  $X_1 = 1$  et  $X_2 = 3$ . On se retrouve au point représenté à la Figure 7.8. La valeur de la fonction objectif  $y$  est de 3.5 et seule la contrainte 1 est active.

## 8 EXERCICE 5

On demande de trouver la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \min F &= (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ X_1 + X_2 - 1 &\leq 0 \\ X_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

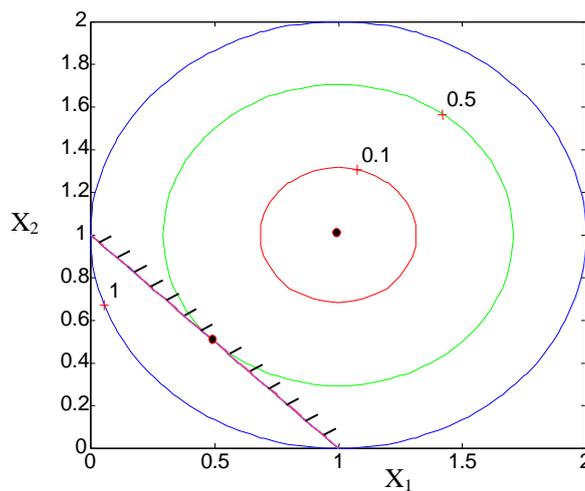


Figure 7.12. Représentation du problème de l'exercice 5

- Lagrangien

$$L = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 + \lambda(X_1 + X_2 - 1) - \mu X_1$$

- Différentiation du lagrangien par rapport aux variables primales

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0 \quad 2(X_1 - 1) + \lambda - \mu = 0 \quad X_1 = 1 - \frac{\lambda - \mu}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0 \quad 2(X_2 - 1) + \lambda = 0 \quad X_2 = 1 - \frac{\lambda}{2}$$

- Fonction duale

$$l(\lambda, \mu) = -\frac{\mu^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\mu\lambda}{2} + \lambda - \mu$$

Supposons que  $\mu = 0$ . Le maximum de la fonction duale est trouvé pour :

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0 = -\lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

On trouve la solution suivante

$$\lambda^* = 1 \quad X_1 = X_2 = \frac{1}{2} \quad F^* = \frac{1}{2}$$

pour laquelle les conditions de Khun-Tucker sont vérifiées.

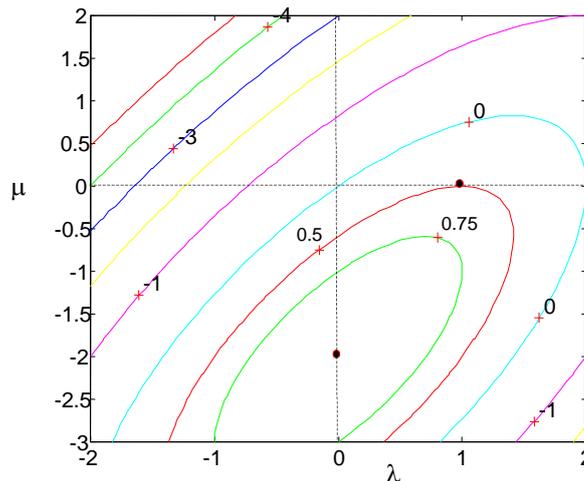
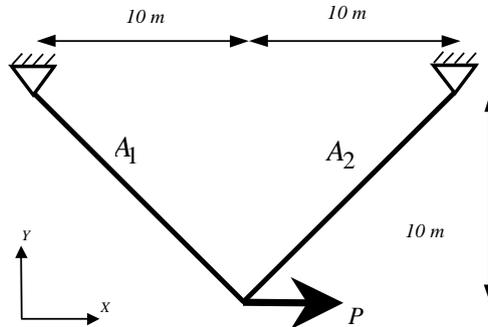


Figure 7.13. Représentation de la fonction duale de l'exercice 5  
Le maximum contraint se trouve en (1,0)

## 9 EXERCICE 6

On recherche le treillis de poids minimum satisfaisant un certain nombre de contraintes sur les tensions et le déplacement :



Les données du problème sont les suivantes :

$$\rho = 26.6 \text{ kN/m}^3 \quad E = 70 \text{ GPa}$$

$$-100 \text{ MPa} \leq \sigma_i \leq 100 \text{ MPa} \quad i = 1, 2$$

$$\delta_X \leq 0.01 \text{ m} \quad A_i \geq 0.0001 \text{ m}^2 \quad i = 1, 2$$

Le problème d'optimisation se met sous la forme mathématique suivante :

$$\begin{aligned} \min_{A_1, A_2} W &= \rho A_1 L_1 + \rho A_2 L_2 \\ \underline{\sigma} \leq \sigma_1 \leq \bar{\sigma} &\quad \text{avec} \quad \sigma_1 = \frac{P}{\sqrt{2} A_1} \\ \underline{\sigma} \leq \sigma_2 \leq \bar{\sigma} &\quad \text{avec} \quad \sigma_2 = -\frac{P}{\sqrt{2} A_2} \\ \delta_X &= \frac{PL}{2E} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \leq 0.01, \end{aligned}$$

problème dans lequel la fonction objectif est linéaire, alors que les contraintes sont non linéaires en les variables de conception  $A_i$ .

Si l'on effectue le changement de variables suivant :

$$X_i = \frac{1}{A_i} \quad i = 1, 2 \quad (\text{variables réciproques})$$

le problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2} W &= \frac{\rho L_1}{X_1} + \frac{\rho L_2}{X_2} \\ -\frac{PX_1}{\sqrt{2}} + \underline{\sigma} &\leq 0 & \frac{PX_1}{\sqrt{2}} - \bar{\sigma} &\leq 0 \\ -\frac{PX_2}{\sqrt{2}} - \bar{\sigma} &\leq 0 & \frac{PX_2}{\sqrt{2}} + \underline{\sigma} &\leq 0 \\ \delta_X &= \frac{PL}{2E}(X_1 + X_2) - 0.01 \leq 0, \end{aligned}$$

qui est un problème de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{X_i} W &= \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{X_i} \\ g_j(X) &= \sum_{i=1}^n a_{ji} X_i - \bar{c}_j \leq 0 \quad j = 1, m \end{aligned}$$

Ce problème peut être résolu efficacement par l'algorithme du gradient projeté décrit au Chapitre 5. Cependant, compte tenu du caractère séparable des réponses structurales, une résolution par voie duale est également appropriée.

En substituant les grandeurs numériques, et après avoir normalisé les contraintes, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{X_i} W(X) &= 376.2 \left( \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \right) \\ g_1(X) &= -3.54 \times 10^{-4} X_1 - 1 \leq 0 \\ g_2(X) &= 2.36 \times 10^{-4} X_1 - 1 \leq 0 \\ g_3(X) &= 3.54 \times 10^{-4} X_2 - 1 \leq 0 \\ g_4(X) &= -2.36 \times 10^{-4} X_2 - 1 \leq 0 \\ g_5(X) &= 5.05 \times 10^{-4} (X_1 + X_2) - 1 \leq 0 \\ 0 < X_i &\leq \frac{1}{0.0001} \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

- Lagrangien

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = W(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$$

- Différentiation du lagrangien par rapport aux variables primales

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-376.2}{X_1^2} - 3.54 \times 10^{-4} \lambda_1 + 2.36 \times 10^{-4} \lambda_2 + 5.05 \times 10^{-4} \lambda_5 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-376.2}{X_2^2} + 3.54 \times 10^{-4} \lambda_3 - 2.36 \times 10^{-4} \lambda_4 + 5.05 \times 10^{-4} \lambda_5 = 0$$

et nous obtenons les relations:

$$X_1 = \sqrt{\frac{376.2 \times 10^4}{-3.54 \lambda_1 + 2.36 \lambda_2 + 5.05 \lambda_5}} \leq 10000$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{376.2 \times 10^4}{3.54 \lambda_3 - 2.36 \lambda_4 + 5.05 \lambda_5}} \leq 10000$$

Si on démarre avec des valeurs nulles pour les multiplicateurs de Lagrange, le dénominateur est nul et on met donc toutes les variables à leur borne, soit  $X_i = \bar{X}_i$  ou  $A_i = \underline{A}_i$ .

La minimisation quasi non contrainte de la fonction duale  $l(\lambda) = \mathcal{L}(X(\lambda), \lambda)$  nous fournit la solution suivante :

$$\lambda^{*T} = (0,0,0,0,0.76)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_5$  relatif à la contrainte de déplacement étant le seul non nul, cette contrainte est la seule active à l'optimum.

Grâce aux relations primal / dual, on trouve que

$$X^{*T} = (990,990)$$

et on peut calculer la valeur de la fonction duale à l'optimum :

$$l(\lambda^*) = 0.760kN = 760N = W(X^*)$$

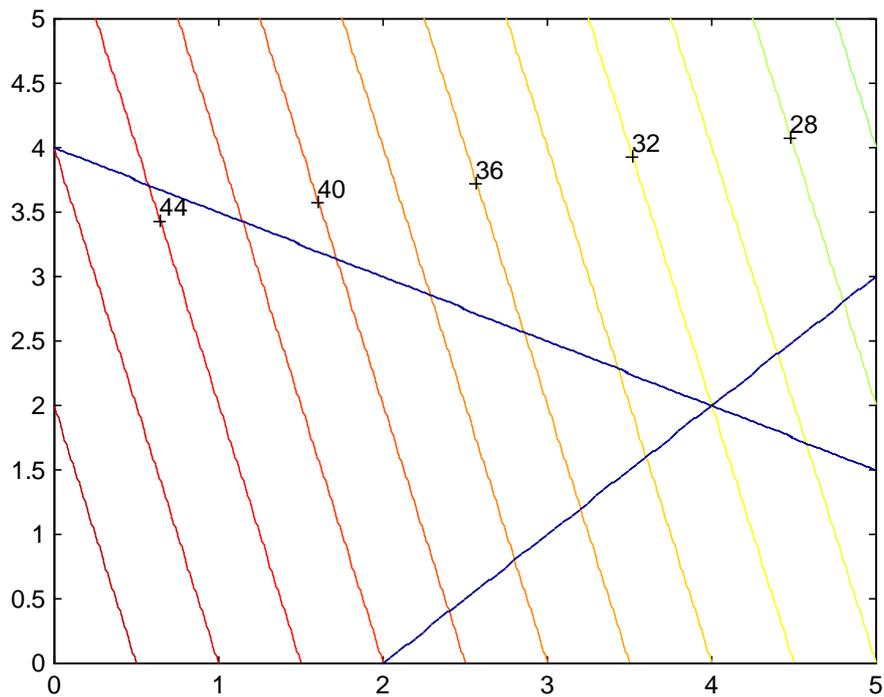
L'aire des sections des barres est donnée par :

$$A_1 = \frac{1}{X_1} = 0.00101m^2 \quad A_2 = \frac{1}{X_2} = 0.00101m^2$$

## 10 EXERCICE 7

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & f = -4X_1 - X_2 + 50 \\
 \text{avec} & X_1 - X_2 \leq 2 \\
 & X_1 + 2X_2 \leq 8 \\
 & X_1 + X_2 \leq 10 \\
 & -5X_1 + X_2 \leq 5 \\
 & X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0
 \end{array}$$



Le problème dual se met sous la forme (section 3.1) :

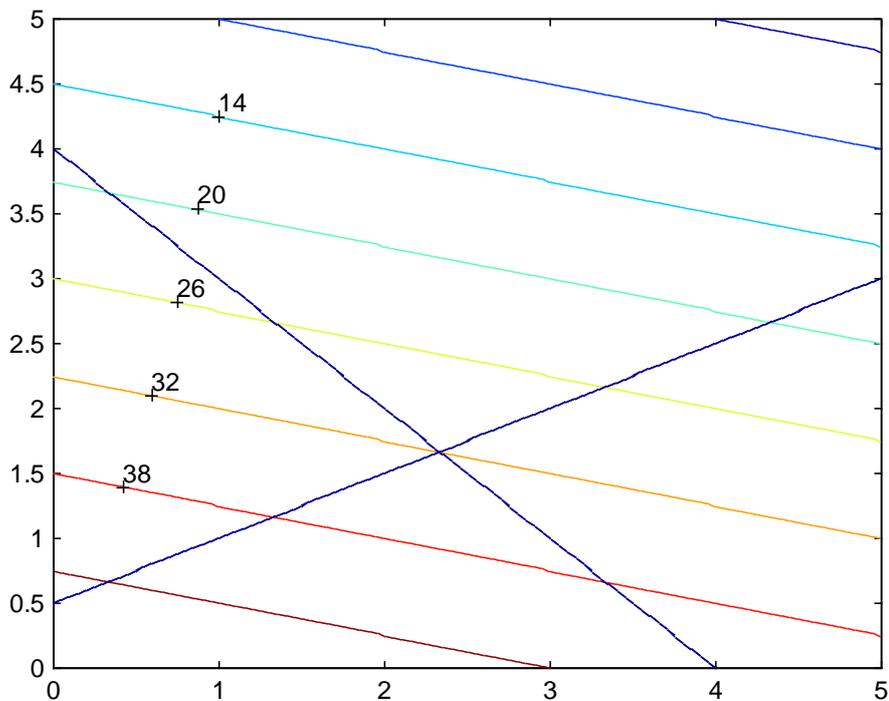
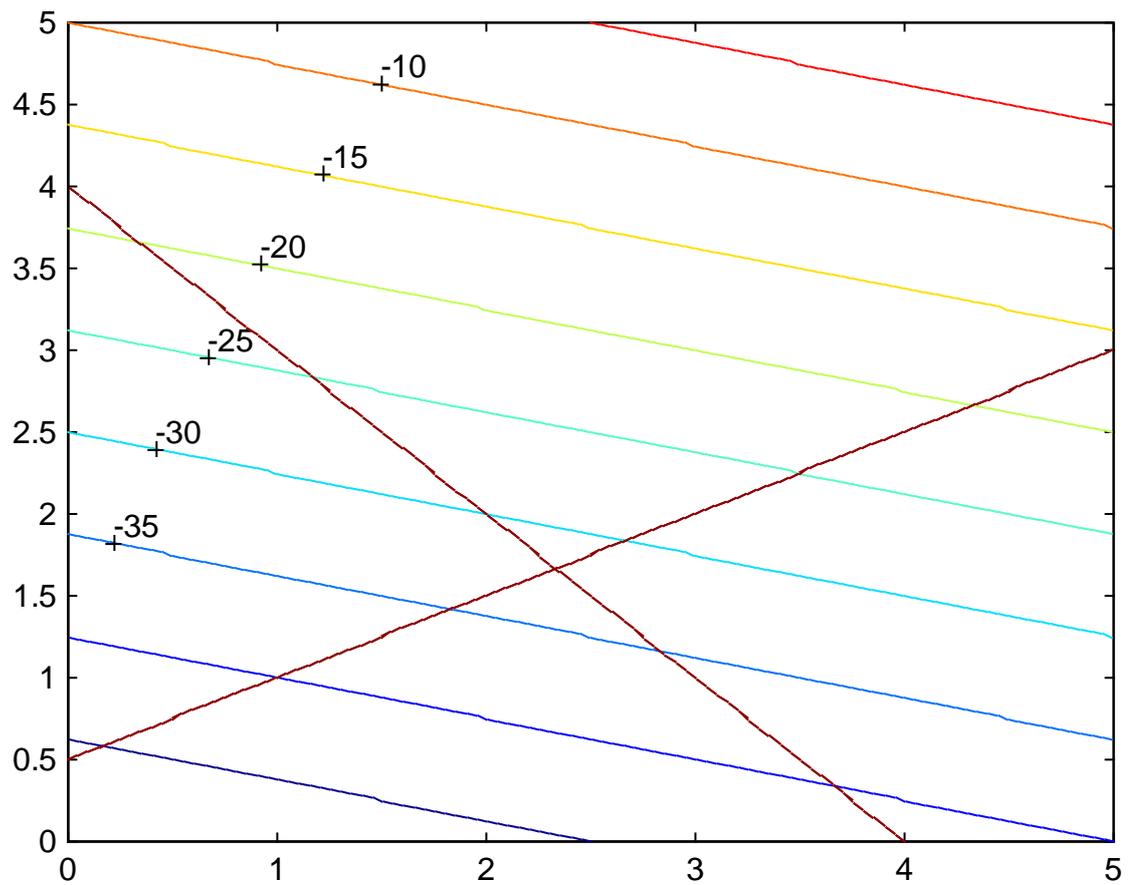
$$\begin{array}{l}
 \max_{\lambda} l(\lambda) = -2\lambda_1 - 8\lambda_2 + 50 \\
 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 \geq 4 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 1 \end{array} \right. \\
 \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4
 \end{array}$$

qui s'écrit de la manière suivante sous forme standard :

$$\min_{\lambda} (-l(\lambda)) = -(-2\lambda_1 - 8\lambda_2 + 50)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4$$



En reportant

les coefficients dans le tableau simplexe :

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	b
1	1	-1	0	4
-1	2	0	-1	1
2	8	0	0	$f - (-50)$

On remarque que l'on n'a pas de solution de base admissible initiale. Pour obtenir une forme de départ qui soit canonique, on crée une fonction objectif artificielle  $W$  que l'on minimise :

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	b
1	1	-1	0	1	0	4
-1	2	0	-1	0	1	1
2	8	0	0	0	0	$f + 50$
0	0	0	0	1	1	$W$

En soustrayant de la ligne 4 les lignes 1 et 2, nous obtenons :

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	b
1	1	1	0	1	0	4
-1	2	1	-1	0	1	1
2	8	10	0	0	0	$f + 50$
0	-3	-2	1	0	0	$W - 5$

On poursuit en minimisant la fonction objectif  $W$  tout en considérant  $f$  comme une contrainte .  
La variable  $\lambda_2$  entre dans la base :

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	b
3/2	0	-1	1/2	1	-1/2	7/2
-1/2	1	0	-1/2	0	1/2	1/2
6	0	0	4	0	-4	$f + 46$
-3/2	0	1	-1/2	0	3/2	$W - 7/2$

La variable  $\lambda_1$  entre dans la base :

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	b
1	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	4
0	1	-1/3	-1/3	1/3	1/3	1
0	0	4	2	-4	-2	$f + 32$
0	0	0	0	1	1	W

On a minimisé la fonction objectif artificielle  $W$ . Le problème peut donc s'écrire de la manière suivante :

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	b
1	0	-2/3	1/3	4
0	1	-1/3	-1/3	1
0	0	4	2	$f + 32$

En on remarque que l'on a atteint la solution :

$$\lambda^{*T} = (7/3, 5/3, 0, 0)$$

$$l(\lambda^*) = 32$$

# METHODES GENERALES DE PROGRAMMATION NON LINEAIRE

## 1 METHODE A FONCTION DE PENALITE EXTERIEURE

### 1.1 Rappels théoriques

Lorsque le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ h_j(X) = 0 \end{aligned}$$

la fonction de pénalité extérieure s'écrit :

$$\min \psi(X, r) = f(X) + \frac{1}{r} \sum_j [h_j(X)]^2$$

Lorsque le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ h_j(X) \geq 0 \end{aligned}$$

la fonction de pénalité extérieure s'écrit :

$$\min \psi(X, r) = f(X) + \frac{1}{r} P(X)$$

avec

$$P(X) = \sum_j (\min[0, h_j(X)])^2 \quad \text{ou} \quad P(X) = -\sum_j \min[0, h_j(X)]$$

### Multiplicateurs de Lagrange

Pour une pénalité quadratique

$$\lambda_j^k = -\frac{2}{r^k} \min[0, h_j(X^k)]$$

Si  $\{r^k\} \rightarrow 0$ , alors  $\{X^k\} = \{\arg \min \psi(X, r^k)\} \rightarrow X^*$  et  $\{\lambda^k\} \rightarrow \lambda^*$

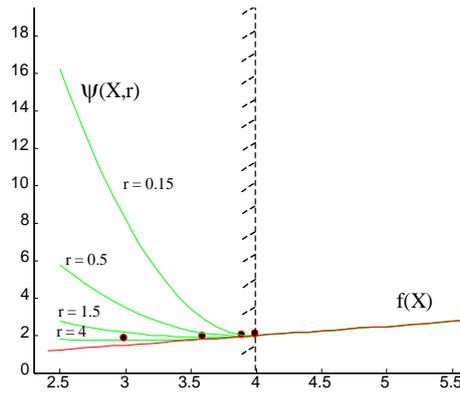


Figure 8.1. Fonction de pénalité extérieure pour  $f(X) = 0.5X$  et  $h(X) = X - 4 \geq 0$

### 1.2 Exercice

$$\begin{aligned} \min & (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ & X_1 + X_2 - 1 \leq 0 \\ & X_1 \geq 0 \end{aligned}$$

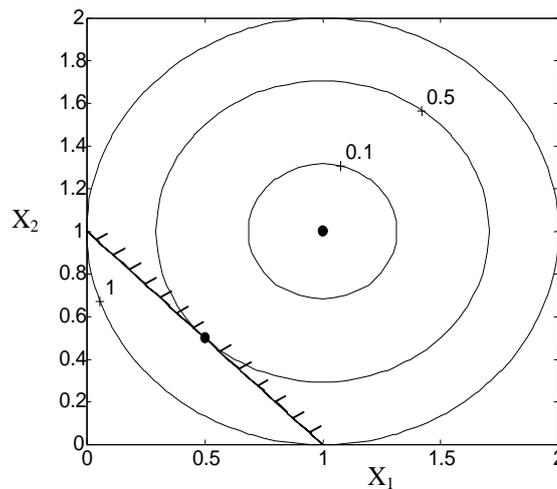


Figure 8.2. Représentation du problème de l'exercice du paragraphe 1.2

Seule la première contrainte est critique. Nous négligeons donc la seconde.

$$\psi(X, r) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 + \frac{1}{r} (\min [0, -X_1 - X_2 + 1])^2$$

Si on traite la première contrainte comme une contrainte d'égalité, nous avons :

$$\psi(X, r) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 + \frac{1}{r}(X_1 + X_2 - 1)^2$$

$$\nabla \psi = \begin{cases} 2(X_1 - 1) + \frac{2}{r}(X_1 + X_2 - 1) \\ 2(X_2 - 1) + \frac{2}{r}(X_1 + X_2 - 1) \end{cases} = 0$$

On trouve :

$$X_1(r) = X_2(r) = \frac{1+r}{2+r}$$

Si  $r=1$  :

$$\begin{aligned} X_1 = 2/3 \quad X_2 = 2/3 \quad \lambda = 2/3 \\ f = 2/9 \quad g_1 = 1/3 \quad g_2 = 2/3 \quad \psi = 1/3 \end{aligned}$$

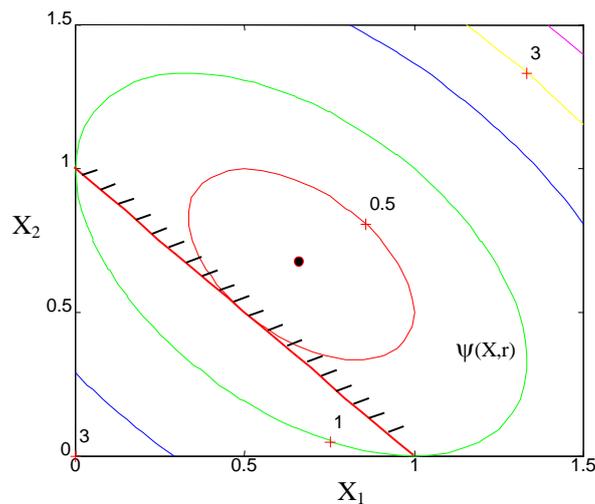


Figure 8.3. Représentation de la fonction de pénalité extérieure pour  $r = 1$

Si  $r=0.1$  :

$$\begin{aligned} X_1 = 11/21 \quad X_2 = 11/21 \quad \lambda = 20/21 \\ f = 2/441 \quad g_1 = 1/21 \quad g_2 = 11/21 \quad \psi = 210/441 \end{aligned}$$

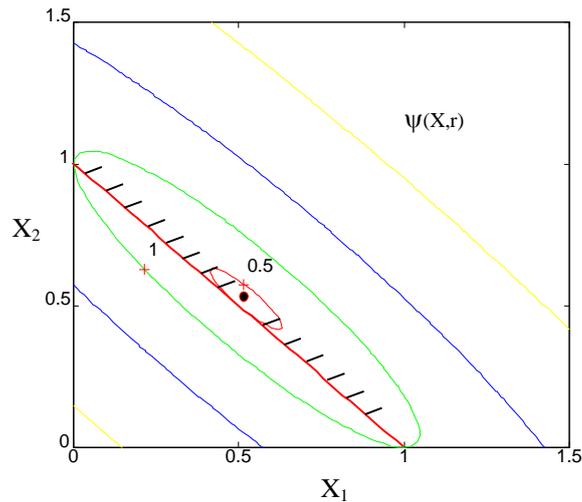


Figure 8.4. Représentation de la fonction de pénalité extérieure pour  $r = 0.1$

## 2 METHODE A FONCTION DE PENALITE INTERIEURE (FONCTION BARRIERE)

### 2.1 Rappels théoriques

Lorsque le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ h_j(X) \geq 0 \end{aligned}$$

la fonction de pénalité intérieure s'écrit :

$$\min \psi(X, r) = f(X) + rB(X)$$

où

$$B(X) = \sum_j (-\ln h_j(X)) \tag{a}$$

$$B(X) = \sum_j \frac{1}{h_j(X)} \tag{b}$$

Si  $r^k \rightarrow 0$ , alors  $\{X^k\} = \{\arg \min \psi(X, r^k)\} \rightarrow X^*$ .

### Multiplicateurs de Lagrange

$$\lambda_j = \frac{r^k}{h_j} \tag{a}$$

$$\lambda_j = \frac{r^k}{h_j^2} \quad (b)$$

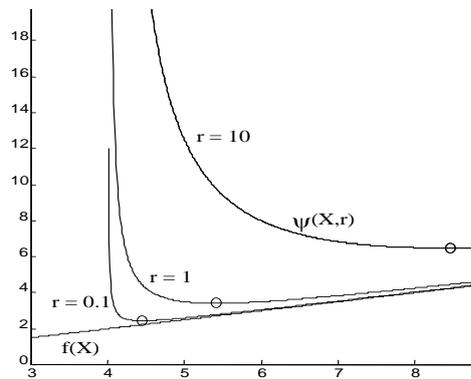


Figure 8.5. Fonction de pénalité intérieure pour  $f(X) = 0.5X$  et  $h(X) = X - 4 \geq 0$

## 2.2 Exercice

$$\begin{aligned} \min & (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ & X_1 + X_2 - 1 \leq 0 \\ & X_1 \geq 0 \end{aligned}$$

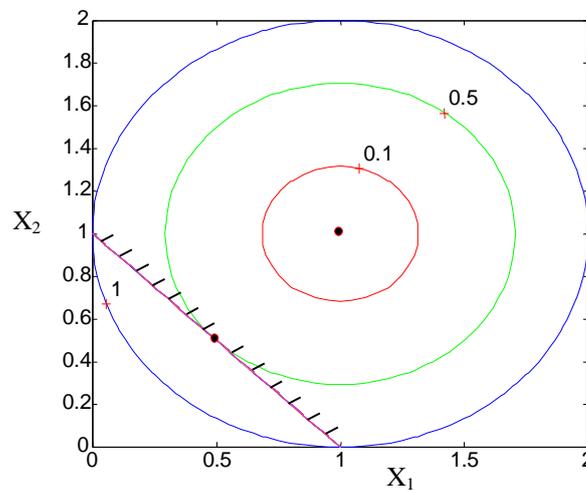


Figure 8.6. Représentation du problème de l'exercice du paragraphe 2.2

$$\psi(X, r) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 - \frac{r}{X_1 + X_2 - 1} + \frac{r}{X_1}$$

$$\nabla \psi = \left\{ \begin{array}{l} 2(X_1 - 1) + \frac{r}{(X_1 + X_2 - 1)^2} - \frac{r}{X_1^2} \\ 2(X_2 - 1) + \frac{r}{(X_1 + X_2 - 1)^2} \end{array} \right\} = 0$$

On trouve :

$$X_2 = X_1 - \frac{r}{2X_1^2}$$

$$(2X_1^3 - r - 2X_1^2)(4X_1^3 - r - 2X_1^2)^2 + 4rX_1^6 = 0$$

qui est résolue par voie numérique (Newton).

Si  $r=1$  :

$$X_1 = 0.7009 \quad X_2 = -0.3169 \quad \lambda_1 = 2.6354$$

$$f = 1.8237 \quad g_1 = -0.616 \quad g_2 = 0.7009 \quad \psi = 4.8738$$

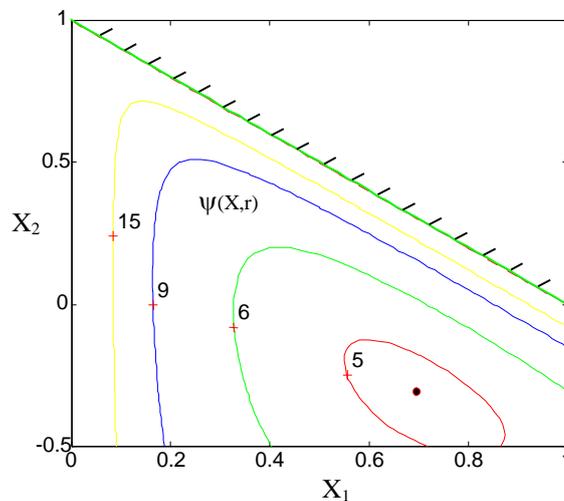


Figure 8.7. Représentation de la fonction de pénalité intérieure pour  $r = 1$

Si  $r = 0.5$  :

$$X_1 = 0.6033 \quad X_2 = -0.0836 \quad \lambda_1 = 2.1674$$

$$f = 1.3315 \quad g_1 = -0.4803 \quad g_2 = 0.6033 \quad \psi = 3.2013$$

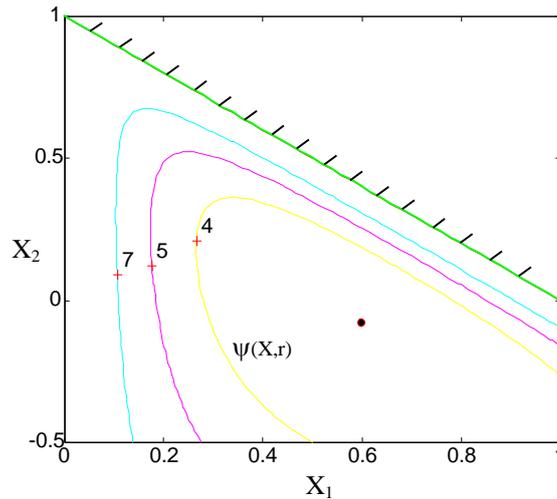


Figure 8.8. Représentation de la fonction de pénalité intérieure pour  $r = 0.5$

### 3 METHODE DU LAGRANGIEN AUGMENTE

#### 3.1 Rappels théoriques

Lorsque le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ h_j(X) = 0 \end{aligned}$$

le lagrangien augmenté s'écrit :

$$\chi(X, \lambda, r) = f(X) - \sum_j \lambda_j h_j(X) + \frac{1}{r} \sum_j [h_j(X)]^2$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} \chi(\lambda^k, r^k) &= \arg \min_X \chi(X, \lambda^k, r^k) \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k - \frac{2}{r^k} h_j(X) \\ r^{k+1} &= \max(r, r^k \cdot f) \end{aligned}$$

Lorsque le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) \\ h_j(X) \geq 0 \end{aligned}$$

le lagrangien augmenté s'écrit :

$$\chi(X, \lambda, r) = f(X) + \frac{1}{r} \sum_j m_j(X, \lambda, r)$$

où

$$m_j(X, \lambda, r) = \begin{cases} h_j^2(X) - r\lambda_j h_j(X) & \text{si } h_j \leq \frac{r}{2} \lambda_j \\ -(\frac{r}{2} \lambda_j)^2 & \text{si } h_j > \frac{r}{2} \lambda_j \end{cases}$$

$$\chi(\lambda^k, r^k) = \arg \min_X \chi(X, \lambda^k, r^k)$$

$$\lambda^{k+1} = \max[0, \lambda^k - \frac{2}{r^k} h_j(X)]$$

$$r^{k+1} = \max(r, r^k \cdot f)$$

### 3.2 Exercice

$$\begin{aligned} \min (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ g = X_1 + X_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\chi(X, \lambda, r) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 - \lambda(X_1 + X_2 - 1) + \frac{1}{r}(X_1 + X_2 - 1)^2$$

$$\nabla \chi = \begin{cases} 2(X_1 - 1) - \lambda + \frac{2}{r}(X_1 + X_2 - 1) \\ 2(X_2 - 1) - \lambda + \frac{2}{r}(X_1 + X_2 - 1) \end{cases} = 0$$

$$X_1(\lambda, r) = X_2(\lambda, r) = \frac{2(r+1) + \lambda r}{2r+4}$$

Si  $r^0 = 8$  et  $\lambda^0 = 0$

$$1) \quad X_1 = X_2 = 9/10 \quad g = 4/5$$

$$\lambda^1 = \lambda^0 - \frac{2}{r^0} g = -1/5 \quad r^1 = \frac{r^0}{2} = 4$$

$$2) \quad r^1 = 4 \quad \lambda^1 = -1/5$$

$$X_1 = X_2 = 0.7666 \quad g = 0.5333$$

$$\lambda^2 = \lambda^1 - \frac{2}{r^1} g = -0.4667 \quad r^2 = \frac{r^1}{2} = 2$$

3)  $r^2 = 2 \quad \lambda^2 = -0.4667$

$$X_1 = X_2 = 0.6333 \quad g = 0.2667$$

$$\lambda^3 = \lambda^2 - \frac{2}{r^2} g = -0.7333 \quad r^3 = \frac{r^2}{2} = 1$$

4)  $r^3 = 1 \quad \lambda^3 = -0.7333$

$$X_1 = X_2 = 0.5444 \quad g = 0.0889$$

$$\lambda^4 = \lambda^3 - \frac{2}{r^3} g = -0.9111 \quad r^4 = \frac{r^3}{2} = 0.5$$

5)  $r^4 = 0.5 \quad \lambda^4 = -0.9111$

$$X_1 = X_2 = 0.5089 \quad g = 0.0178$$

$$\lambda^5 = \lambda^4 - \frac{2}{r^4} g = -0.9822 \quad r^5 = \frac{r^4}{2} = 0.25$$

# PROGRAMMATION SEQUENTIELLE CONVEXE

## 1 INTRODUCTION

Structural optimisation has been, for many years, an attractive field of research. The design optimisation problem (9.1) consists in minimising an objective function  $g_0(X)$  subject to behaviour constraints  $g_j(X)$  insuring the feasibility of the structural design.

$$\begin{aligned} \min g_0(X) \\ g_j(X) \leq g_j^{\max} \quad j=1, \dots, m \\ \underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (9.1)$$

The functions  $g_j(X), j=0, \dots, m$  are structural responses (e.g. mass, stresses, displacements, global stiffness) while the design variables  $X_i, i=1, \dots, n$  can be the thickness of some structural members, geometric parameters, or fibres orientations for composite structures (Figure 9.1). Their range of variation is defined by lower and upper bounds that reflect technological considerations.

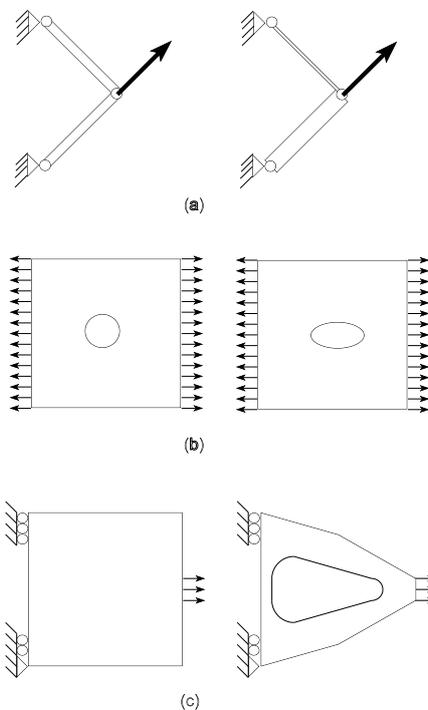


Figure 9.1. Structural optimisation problems  
(a) sizing (b) shape optimisation (c) topology optimisation

The direct solution of the problem (9.1) is prohibitive because of the computational cost of the structural and sensitivity analyses that have to be performed at each iteration of the optimisation procedure. Indeed, the structural restrictions are implicit functions of the design variables, so that they can only be evaluated numerically (e.g. through finite element analysis), leading to long running times to optimise problems of modest proportion.

In the approximation concepts approach [1,2], the primary optimisation problem (9.1) is replaced with a sequence of explicit approximated sub-problems generated through first or second order Taylor series expansion of the structural functions in terms of specific intermediate linearisation variables, e.g. direct or reciprocal variables. The generated structural approximations  $\tilde{g}_j(X)$ , built from the information at the current design point, are often convex and separable. A dual formulation can then be used in a very efficient way for solving each explicit approximated sub-problem [3].

The approximation concepts approach consists basically in the following steps (Figures 9.2 and 9.3):

1. A finite element analysis is performed for the initial design characterised by the values  $X^k$  of the design variables;
2. From the results of the current structural analysis, that is the structural responses and the sensitivity analyses computations, an approximate optimisation sub-problem is generated;
3. The optimisation is then performed on the following sub-problem

$$\begin{aligned}
 & \min \tilde{g}_0(X) \\
 & \tilde{g}_j(X) \leq g_j^{\max} \quad j = 1, \dots, m \\
 & \underline{X}_i^k \leq X_i \leq \overline{X}_i^k \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

where  $\tilde{g}_j(X)$  are the approximated structural responses. Because the approximate sub-problem is fully explicit, convex and separable, it can be efficiently solved by resorting to its dual formulation;

4. The solution  $X^{k*}$  of the approximate sub-problem is adopted as a new starting point in the design space, and the optimisation process is continued until convergence is achieved.

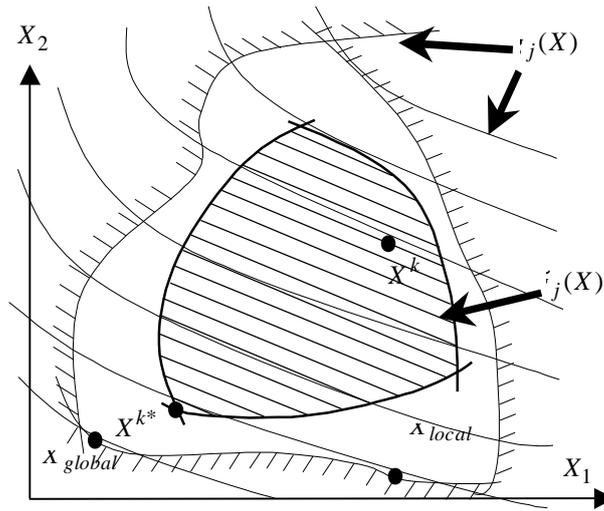


Figure 9.2. Representation of problem (9.1) and its convex approximation around the current point  $X^k$

It is now apparent that the approximation concepts approach is well adapted to structural optimisation including sizing, shape [4] and topology problems [5]. Optimisation including anisotropic materials is under progress [6,7].

The number of structural analyses can be largely reduced when appropriate approximations are used. Besides, their accuracy increases with the number of parameters they contain and/or the way they are computed.

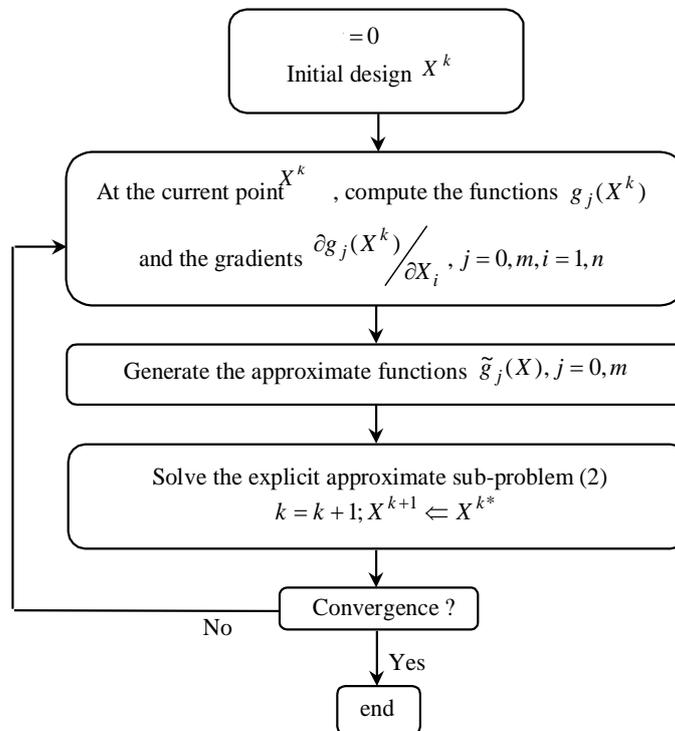


Figure 9.3. Iterative scheme of the optimisation using the approximation concepts approach

## 2 APPROXIMATIONS OF THE MMA FAMILY

The **GCMMA** scheme (3) of Svanberg [8] illustrated in Figures 9.5 and 9.6 is a non monotonous approximation.

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^k) + \sum_i p_{ij}^k \left( \frac{1}{U_i^k - X_i} - \frac{1}{U_i^k - X_i^k} \right) + \sum_i q_{ij}^k \left( \frac{1}{X_i - L_i^k} - \frac{1}{X_i^k - L_i^k} \right) \quad (9.3)$$

This property makes it reliable for the optimisation of structures that exhibit such a behaviour (Figure 9.4).

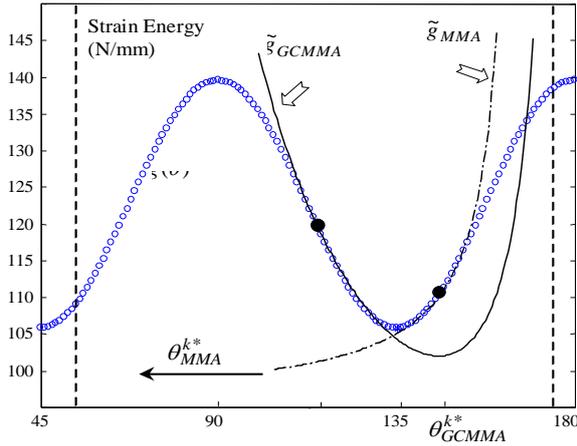


Figure 9.4. Approximations of the strain energy  $g(\theta)$  for optimal orientation in a single ply laminate.

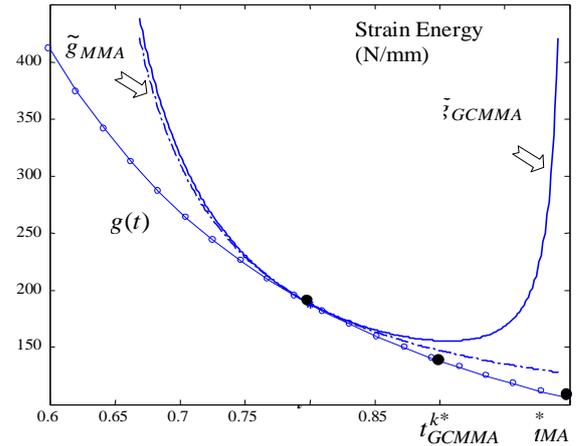


Figure 9.5: Approximations of the strain energy  $g(t)$  for optimal thickness in a single ply laminate.

The GCMMA convexity and conservativeness are ruled by the asymptotes  $L_i^k$  and  $U_i^k$  positions, and by an additional non monotonic parameter  $\rho_j^k$ , updated at each iteration  $k$ . Both  $L_i^k$  and  $U_i^k$  asymptotes are attached to a given design variable  $X_i^k$  and are updated according to the following heuristic rules:

$$\begin{aligned} L_i^k &= X_i^k - s_i(X_i^{k-1} - L_i^{k-1}) \\ U_i^k &= X_i^k + s_i(U_i^{k-1} - X_i^{k-1}) \end{aligned} \quad (9.4)$$

where the scalar  $s_i$  is computed depending on the design variable values at 3 successive iterations.

The parameters  $p_{ij}^k$  and  $q_{ij}^k$  are computed based on the first order information and on the non monotonic parameter according to (9.5) and (9.6).

$$\text{if } \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} < 0: \begin{cases} p_{ij}^k = (U_i^k - X_i^k)^2 \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \\ q_{ij}^k = (X_i^k - L_i^k)^2 \left( -\frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} + \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \end{cases} \quad (9.5)$$

$$\text{if } \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} > 0: \begin{cases} p_{ij}^k = (U_i^k - X_i^k)^2 \left( \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} + \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \\ q_{ij}^k = (X_i^k - L_i^k)^2 \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \end{cases} \quad (9.6)$$

For the approximation to be strictly convex,  $p_{ij}^k$  and  $q_{ij}^k$  have to be positive, leading to

$$\begin{aligned} L_i^k < X_i^k < U_i^k \quad i=1,\dots,n \\ \rho_j^k \geq 0 \quad s_i > 0 \quad i=1,\dots,n \end{aligned}$$

One can resort to other approximations by giving appropriate values to those parameters. If  $\rho_j^k$  is equal to zero, one is working with the monotonous **Method of Moving Asymptotes** [8] where either  $L_i^k$  or  $U_i^k$  is used according to the sign of the first order derivative (9.7).

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^k) + \sum_+ p_{ij}^k \left( \frac{1}{U_i^k - X_i} - \frac{1}{U_i^k - X_i^k} \right) + \sum_- q_{ij}^k \left( \frac{1}{X_i - L_i^k} - \frac{1}{X_i^k - L_i^k} \right) \quad (9.7)$$

The symbols  $\sum_+$  and  $\sum_-$  designate the summations over terms having positive and negative first order derivatives, respectively, according to (9.5) and (9.6).

If further  $L_i^k = 0$  and  $U_i^k = +\infty$ , MMA is reduced to **ConLin** [10]:

$$\tilde{g}(X) = g(X^k) + \sum_+ \frac{\partial g(X^k)}{\partial X_i} (X_i - X_i^k) - \sum_- (X_i^k)^2 \frac{\partial g(X^k)}{\partial X_i} \left( \frac{1}{X_i} - \frac{1}{X_i^k} \right) \quad (9.8)$$

leading to an approximation with reciprocal variables  $Y_i = \frac{1}{X_i}$  for the set of design variables with negative gradients:

$$\tilde{g}(X) = g(X^k) + \sum_i \frac{\partial g(X^k)}{\partial Y_i} (Y_i - Y_i^k) = g(X^k) - \sum_i (X_i^k)^2 \frac{\partial g(X^k)}{\partial X_i} \left( \frac{1}{X_i} - \frac{1}{X_i^k} \right)$$

and to linear approximation (Sequential Linear Programming sub-problems):

$$\tilde{g}(X) = g(X^k) + \sum_i \frac{\partial g(X^k)}{\partial X_i} (X_i - X_i^k)$$

for the others, that is the case where  $L_i^k = -\infty$  and  $U_i^k = +\infty$  in (9.7).

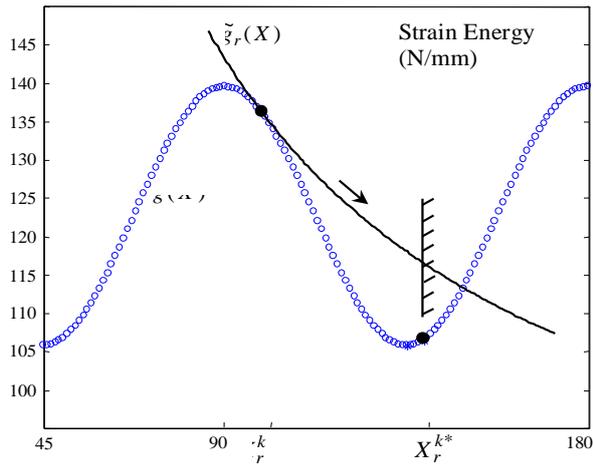


Figure 9.7. Reciprocal approximation  
Use of move limits to control the convergence  
Approximation of the strain energy in a two plies symmetric laminate subject to shear load and torsion

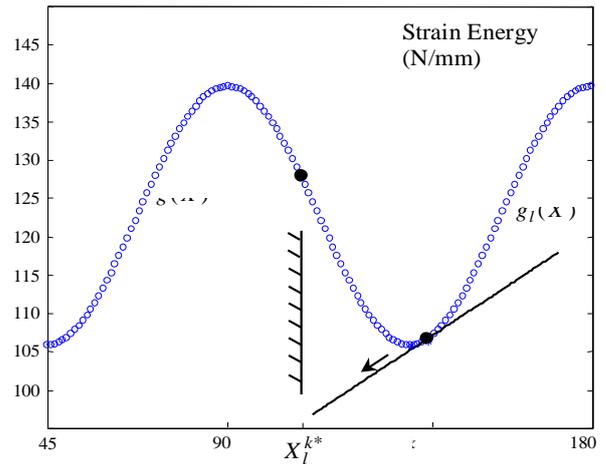


Figure 9.8. Linear approximation  
Use of move limits to control the convergence  
Approximation of the strain energy in a two plies symmetric laminate subject to shear load and torsion

See Figure 9.9 for a comparison of those convex approximations.

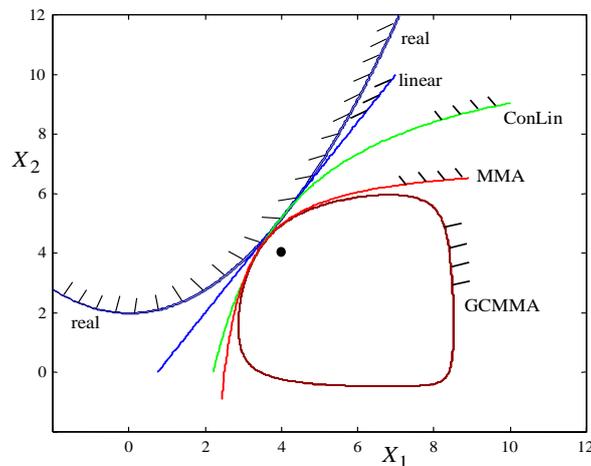


Figure 9.9. Approximations of the function  $5X_2 - X_1^2$  around the point  $(X_1, X_2) = (4,4)$

In order to match the curvature of the true function, second order information can be used to build the GCMMA approximation [9].

$$p_{ij}^k = \frac{(U_i^k - X_i^k)^3}{2(U_i^k - L_i^k)} \left( 2 \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} + (X_i^k - L_i^k) \frac{\partial^2 g_j(X^k)}{\partial X_i^2} \right)$$

$$q_{ij}^k = \frac{(X_i^k - L_i^k)^3}{2(U_i^k - L_i^k)} \left( -2 \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} + (U_i^k - X_i^k) \frac{\partial^2 g_j(X^k)}{\partial X_i^2} \right)$$

The use of second order sensitivity information enhances the reliability and the efficiency of the optimisation process. However, its analytical evaluation can lead to difficulties and/or to prohibitive analyses costs for large scale problems.

### 3 APPROXIMATIONS OF THE GMMA FAMILY

The approximations of the MMA family described in the previous section use the same asymptotes for all the design functions  $g_j(X)$  involved in the optimisation problem. This definition doesn't give the flexibility of adjusting the approximation of each structural response in accordance with its characteristics. The asymptotes can be tightened for non linear functions, while they can not be relaxed at the same time for approximating in a reliable way a linear function. This led some researchers to **Generalise the Method of Moving Asymptotes** by attaching a proper moving asymptote to each design variable in each design function, that is  $L_{ij}^k$  or  $U_{ij}^k$  are now used in place of the unique pair  $L_i^k$  or  $U_i^k$ . The **GMMA** approximation is written as in relation (9.9).

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^k) + \sum_+ p_{ij}^k \left( \frac{1}{U_{ij}^k - X_i} - \frac{1}{U_{ij}^k - X_i^k} \right) + \sum_- q_{ij}^k \left( \frac{1}{X_i - L_{ij}^k} - \frac{1}{X_i^k - L_{ij}^k} \right) \quad (9.9)$$

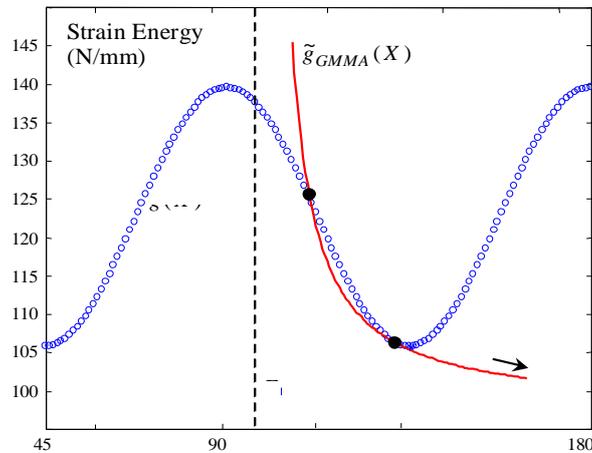


Figure 9.10. Two Points Approximation. Representation of the GMMA approximation scheme Approximation of the strain energy in a two plies symmetric laminate subject to shear load and torsion

The asymptotes are now computed based on the second order derivatives [11] or based on the value of the considered structural response at the previous iteration [12], that is  $g_j(X^{k-1})$ . The resulting approximations are monotonous.

## 4 DIAGONAL QUADRATIC APPROXIMATIONS

The Diagonal Sequential Quadratic Programming approach is a simplified form of the pure SQP method. Considering the difficulties of computing second order derivatives in structural optimization, the immense storage of the entire Hessian matrix in large scale structural optimization as well as the non-separability of the SQP problem, the solution proposed in [13] is to retain only the diagonal terms and set other terms to be zero. Finally, this manipulation leads to a reduced quadratic sub-problem of separable form:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla g_0(X^k)^T(X-X^k) + \frac{1}{2}(X-X^k)H^d(X-X^k) \\ & g_j(X^k) + \nabla g_j(X^k)^T(X-X^k) \leq \overline{g}_j \\ & \underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i \end{aligned} \quad (9.10)$$

where

$$H_i^d = H_{ii} + \delta_i \quad (9.11)$$

The role of the artificial parameter  $\delta_i$  ( $i=1,\dots,n$ ) is to preserve the convexity of the problem when some diagonal terms of the Hessian matrix  $H$  are eventually zero or negative. In addition, it can be used as an inherent controlling factor of move limits through the adjustment of the curvature. Zhang [14] proposed to modify the DSQP approach and approximate the structural constraints with a separable form of a quadratic function. The MDQA approximation is written

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0(X^k) + \sum_i \frac{\partial g_0(X^k)}{\partial X_i}(X_i - X_i^k) + \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_0(X^k)}{\partial X_i^2}(X_i - X_i^k)^2 \\ & g_j(X^k) + \sum_i \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i}(X_i - X_i^k) + \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_j(X^k)}{\partial X_i^2}(X_i - X_i^k)^2 \quad j=1,\dots,m \quad (9.12) \\ & \underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i \quad i=1,\dots,n \end{aligned}$$

## 5 EXAMPLES

### 5.1 Composite structure optimization

We consider a one ply composite structure with the following material properties :

$E_L$	$E_T$	$\nu_{LT}$	$G_{LT}$
$20 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$	$2 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$	0.2	$0.8 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$

This laminate is subject to in plane loads (Figure 9.11) :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.49 \\ 29.924 \\ 17.039 \end{Bmatrix} \text{ lb/in}$$

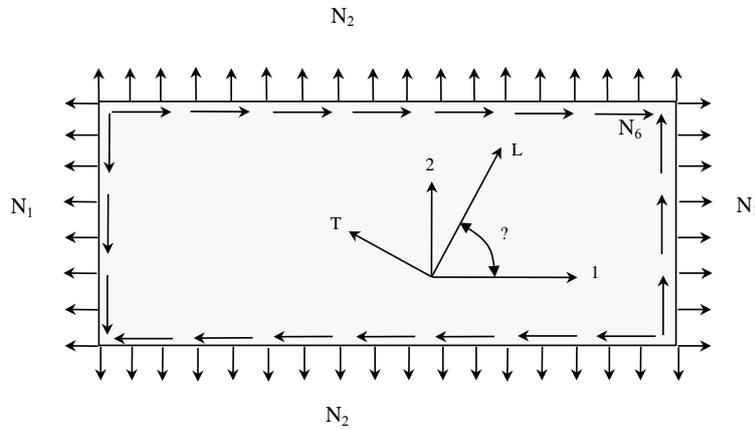


Figure 9.11. Geometry of the laminate and applied loads

The ply thickness of the laminate is equal to  $10^{-3} \text{ in}$ .

We want to find the ply orientation for the stiffest laminate. We then minimize the strain energy of the composite :

$$\min_{\theta} g(\theta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T A \boldsymbol{\varepsilon}$$

The internal strain energy versus the ply orientation is presented in Figure 9.12.

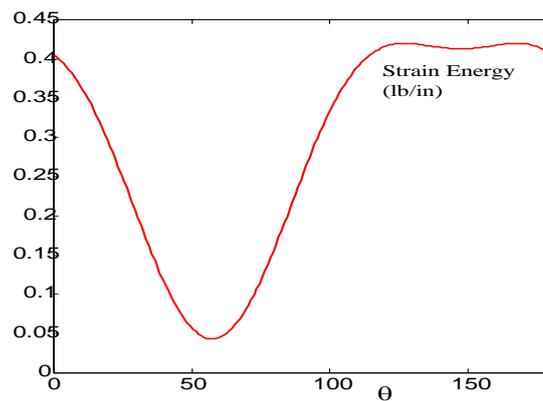


Figure 9.12. Strain energy variation versus ply orientation

Two methods, previously described, are used to find the minimum of the strain energy. The starting point is  $\theta = 20^\circ$

- Convex Linearization scheme ConLin (9.8)

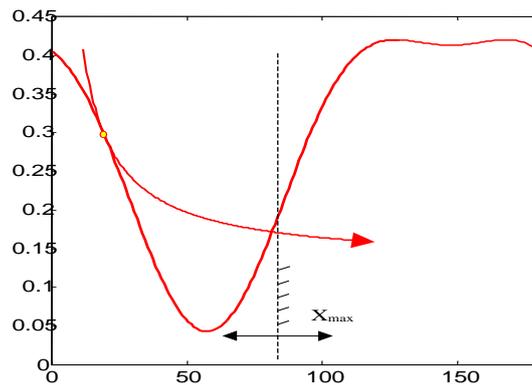
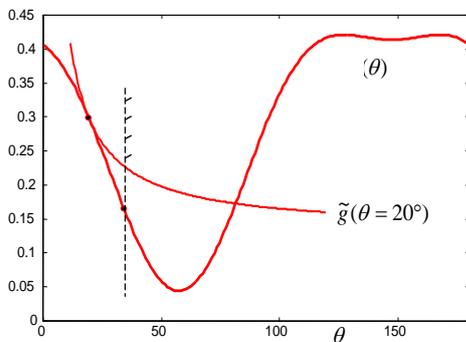
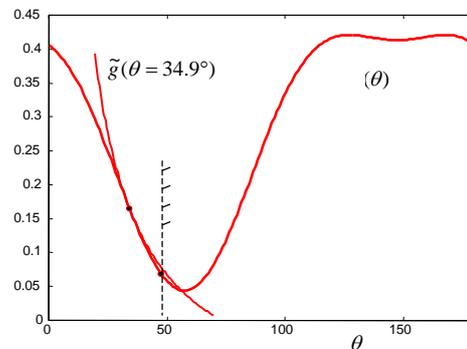


Figure 9.13. Reciprocal approximation of the structural response ( $\frac{\partial g}{\partial \theta} < 0$ )

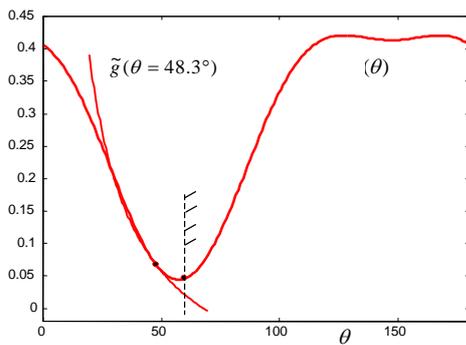
Minimum found along the approximation  
Use of move limits to control the convergence



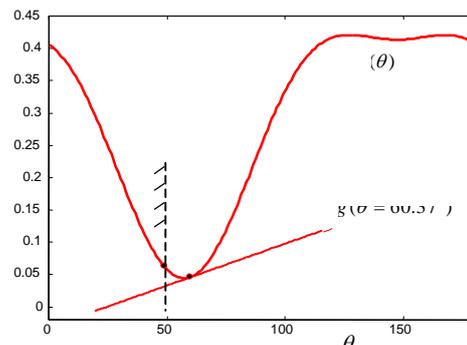
(a) iteration 1.  $X^0 = 20^\circ$   $X^1 = 35^\circ$



(b) iteration 2.  $X^1 = 35^\circ$   $X^2 = 48.3^\circ$



(c) iteration 3.  $X^2 = 48.3^\circ$   $X^3 = 60.4^\circ$



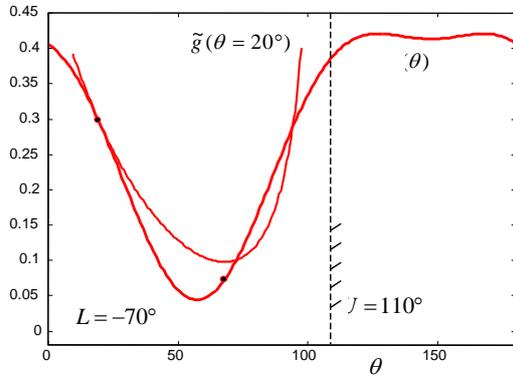
(d) iteration 4.  $X^3 = 60.4^\circ$   $X^4 = 49.5^\circ$

Figure 9.14. Approximation of the structural response using ConLin  
When the gradient is positive, the structural response is approximated  
by a first order Taylor expansion in term of direct variable  $\theta$   
When the gradient is negative, the structural response is approximated  
by a first order Taylor expansion in term of inverse variable  $1/\theta$

The optimal orientation  $\theta = 57.87^\circ$  is found in about 70 iterations.

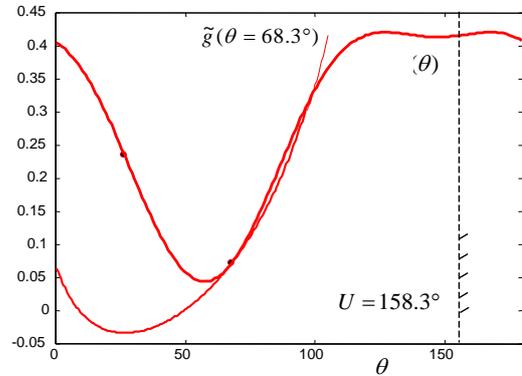
- GCMMA approximation scheme (9.3)

This is a non monotonous approximation of the structural response. Both lower and upper asymptotes  $U_i$  and  $L_i$  in (9.3) are used.



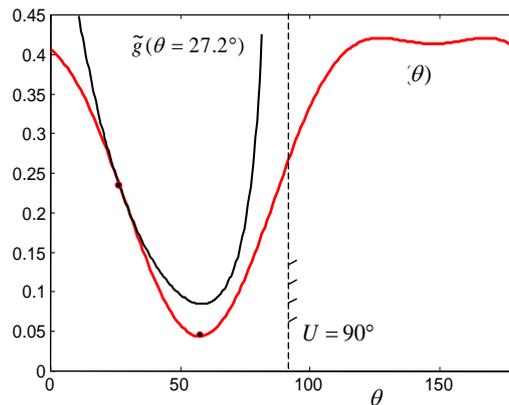
(a) iteration 1.  $U = 110^\circ$  and  $L = -70^\circ$ .

$$X^0 = 20^\circ \quad X^1 = 68.3^\circ$$



(b) iteration 2.  $U = 158.3^\circ$  and  $L = -21.6^\circ$ .

$$X^1 = 68.3^\circ \quad X^2 = 27.2^\circ$$



(c) iteration 3.  $U = 90^\circ$  and  $L = -35.8^\circ$   $X^2 = 27.2^\circ$   $X^3 = 58.6^\circ$

Figure 9.15. Approximation of the structural response using GCMMA

The optimal orientation  $\theta = 57.87^\circ$  is found in 10 iterations. The strain energy is 0.042 lb/in.

## 5.2 Optimization of a 2 bar truss

This problem is extracted from [9]. The objective is to minimize the weight of a two-bar truss (Figure 9.16). The design variables  $X_1$  and  $X_2$  are the cross section of the bars and the half distance between the two bottom nodes, respectively. Constraints are imposed to limit the stress in each bar.

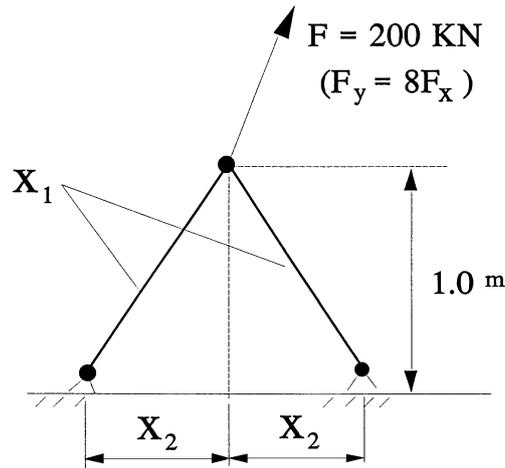


Figure 9.16. Two bar truss problem

This problem can be stated in the following analytical form:

$$\min f = X_1 \sqrt{1 + X_2^2} \quad (9.13)$$

$$g_1 = 0.124 \sqrt{1 + X_2^2} \left( \frac{8}{X_1} + \frac{1}{X_1 X_2} \right) \leq 1 \quad (9.14)$$

$$g_2 = 0.124 \sqrt{1 + X_2^2} \left( \frac{8}{X_1} - \frac{1}{X_1 X_2} \right) \leq 1 \quad (9.15)$$

$$0.2 \leq X_1 \leq 4.0 \quad 0.1 \leq X_2 \leq 1.6 \quad (9.16)$$

where both the objective and the constraints are non-separable and non-linear.

The stress in bar 2 (relation 9.15) becomes never active. The problem is presented in Figure 9.17.

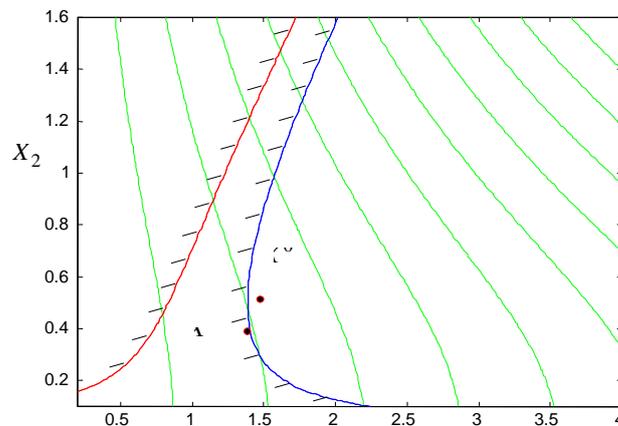
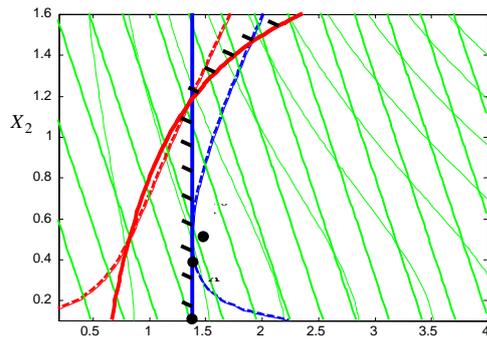
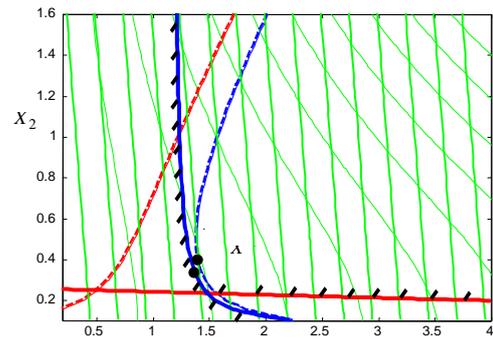


Figure 9.17. Objective function and structural restrictions for the two bar truss problem

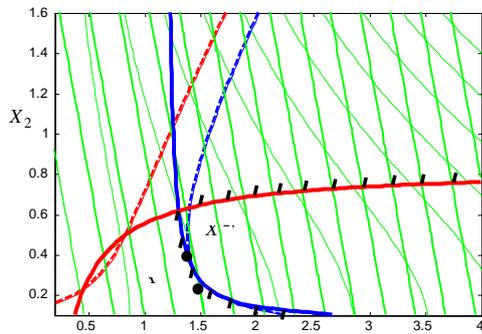
The sequence of convex approximations of the problem is presented below.



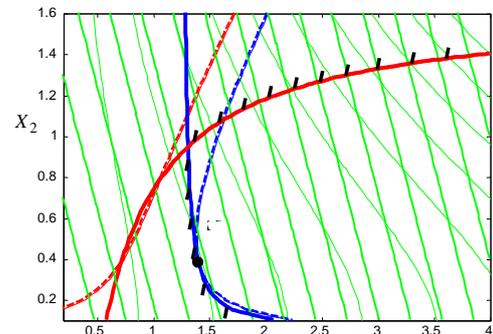
(a) iteration 1.  $X^0 = (1.5, 0.5)$   $X^{0,*} = (1.39, 0.1)$



(b) iteration 2.  $X^1 = (1.39, 0.1)$   $X^{1,*} = (1.49, 0.23)$



(c) iteration 3.  $X^2 = (1.49, 0.23)$   $X^{2,*} = (1.39, 0.39)$



(d) iteration 4.  $X^3 = (1.39, 0.39)$   $X^{3,*} = (1.41, 0.37)$

Figure 9.18. Convex approximations of the two bar truss problem and iteration history

The problem needs 5 iterations to converge at  $X = (1.41, 0.37)$ ,  $f = 1.5$ ,  $g_1 = 1.0$ ,  $g_2 = 0.5$ .

## 6 EXERCICE

Consider the following explicit problem:

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2} \quad & \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 \leq 4 \end{aligned}$$

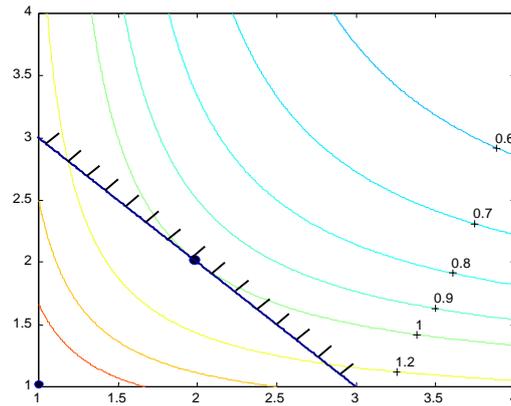


Figure 9.19. Representation of the problem

Solve this problem by approximating the objective function by a quadratic expansion.

---

- Determination of the coefficients of the quadratic approximation

Quadratic approximation  $\tilde{g}(X)$  of a function  $g(X)$  around the point  $X^k$ :

$$\tilde{g}(X) = \frac{1}{2} \sum_i a_i X_i^2 - \sum_i b_i X_i + c$$

The coefficients  $a_i, b_i$  and  $c$  are determined in Chapter 11.

- Solution of the problem

The resulting optimization problem can be written as follows:

$$\begin{aligned} \min_{X_i} \quad & \frac{1}{2} \sum_i a_i X_i^2 - \sum_i b_i X_i + c \quad i = 1, 2 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 \leq 4 \end{aligned}$$

The solution is found by successive quadratic approximation of the objective function.

- $(X_1^0, X_2^0) = (1, 1)$

The approximate sub-problem is written:

$$\begin{aligned} \min \quad & X_1^2 + X_2^2 - 3X_1 - 3X_2 + 6 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 \leq 4 \end{aligned}$$

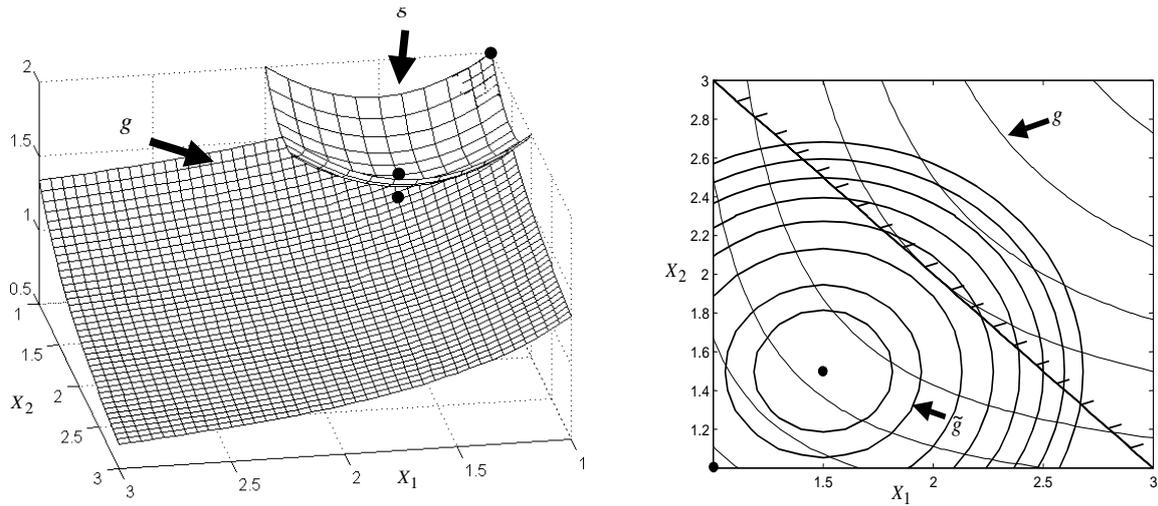


Figure 9.20. Représentation of the approximation of the objective function at the first iteration

This problem is solved by the dual approach (Chapter 7). The dual function is computed and maximised with non negative dual variable.

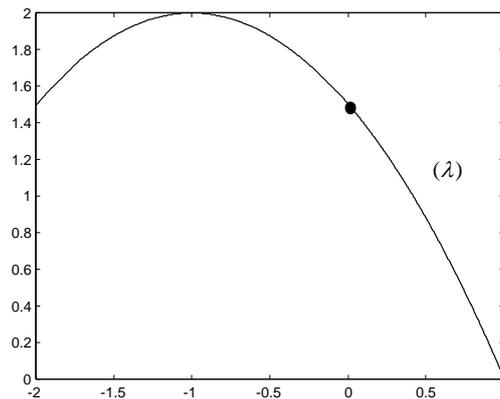


Figure 9.21. Dual function of the first approximate sub-problem

The solution of this sub-problem is  $(X_1^1, X_2^1) = (1.5, 1.5)$ ,  $g(X_1, X_2) = 4/3$ ,  $\tilde{g}(X_1, X_2) = 1.5$

- $(X_1^1, X_2^1) = (1.5, 1.5)$

The approximate sub-problem is written:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{0.5926}{2} X_1^2 + \frac{0.5926}{2} X_2^2 - \frac{4}{3} X_1 - \frac{4}{3} X_2 + 4 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 \leq 4 \end{aligned}$$

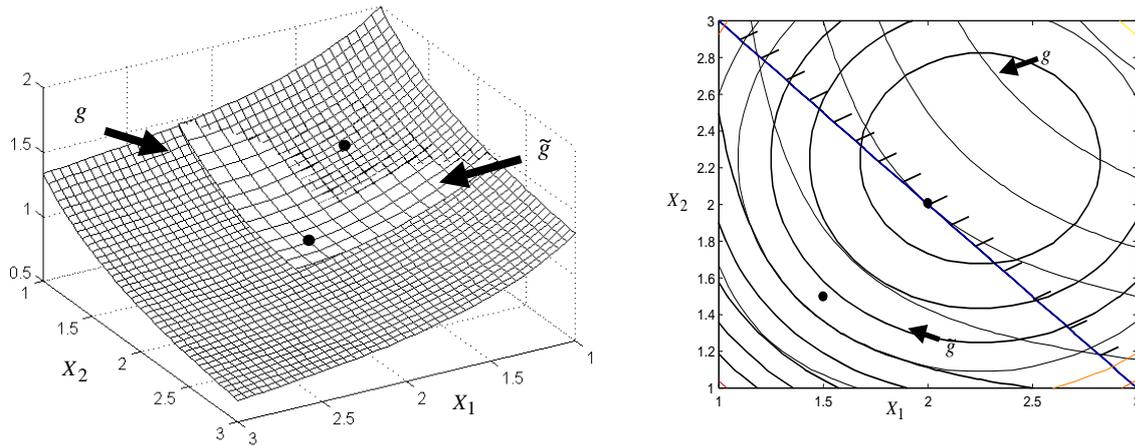


Figure 9.22. Représentation of the approximation of the objective function at the second iteration

The dual function is computed and maximised with non negative dual variable.

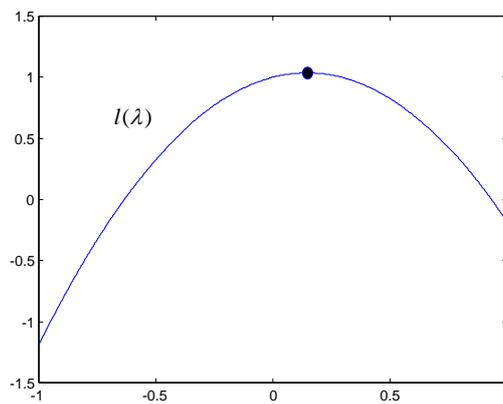


Figure 9.23. Dual function of the second approximate sub-problem

The solution of this sub-problem is  $(X_1^2, X_2^2) = (2.0001, 2.0001)$ ,  $g(X_1, X_2) = 1$ ,  $\tilde{g}(X_1, X_2) = 1.037$

- $(X_1^2, X_2^2) = (2.0001, 2.0001)$

The approximate sub-problem is written:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{0.25}{2} X_1^2 + \frac{0.25}{2} X_2^2 - 0.75X_1 - 0.75X_2 + 3 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 \leq 4 \end{aligned}$$

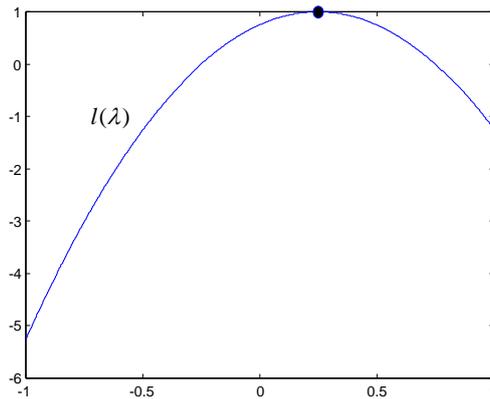


Figure 9.24. Dual function of the third approximate sub-problem

The solution of this sub-problem is  $(X_1^3, X_2^3) = (2., 2)$ ,  $g(X_1, X_2) = 1$ ,  $\tilde{g}(X_1, X_2) = 1$

The following listing in Matlab format allows to solve this problem:

```
format long e
lambda=0:0.0001:1;
x1=1.
x2=1.
a1=
a2=
b1=
b2=
c=
x1dual=(b1-lambda)./a1;
x2dual=(b2-lambda)./a2;
dual=0.5.*a1.*x1dual.^2+0.5.*a2.*x2dual.^2-b1.*x1dual-b2.*x2dual+c+lambda.*(x1dual+x2dual-4);
plot(lambda,dual)
y=max(dual)
i=find(dual==max(dual));
lambda(i);
lambdamin=lambda(i)
if lambdamin < 0
    lambdamin=0.
end
x1primal=(b1-lambdamin)./a1
x2primal=(b2-lambdamin)./a2
```

## 7 REFERENCES

- [1] L.A. Schmit and B. Farshi (1974). "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", *AIAA Journal*, vol. 12, N° 5, pp. 692-699.
- [2] Schmit, L.A. and C. Fleury (1980). Structural Synthesis by combining approximation concepts and dual methods. *AIAA Journal*, vol. 18, pp. 1252-1260.
- [3] Fleury, C., "Sequential Convex Programming for Structural Optimisation Problems", In *Optimisation of Large Structural Systems*, G.I.N. Rozvany (Editor), Vol. I, 531-553, 1993.
- [4] Braibant, V. and C. Fleury (1985). "An Approximate Concepts Approach to Shape Optimal Design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 53, pp. 119-148.
- [5] Duysinx, P. (1996). "Optimisation Topologique: du Milieu Continu à la Structure Elastique", Thèse de Doctorat, FSA, Université de Liège.
- [6] Bruyneel, M., Vermaut O. and Fleury C. (1999). "Two Point Based Approximation Schemes for Optimal Orientation in Laminates", *Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization-WCSMO3*, Niagara Falls/Amrhest, New York, 17-21 Mai 1999.
- [7] Bruyneel, M. and Fleury, C. (2000). "Composite Structures Optimisation Using Sequential Convex Programming", In B. Toppings, editor, *5<sup>th</sup> International Conference on Computational Structures Technology*, 6-8 September, 2000.
- [8] Svanberg, K. (1995). "A globally Convergent Version of MMA without Linesearch", *Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Germany, May 28 - June 2, pp 9-16.
- [9] Svanberg, K. (1987). "The Method of Moving Asymptotes-a New Method for Structural Optimization", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 24, pp. 359-373.
- [10] Fleury, C. and V. Braibant. (1986). "Structural Optimization : a New Dual Method Using Mixed Variables", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 23, pp. 409-428.
- [11] Smaoui, H., Fleury, C. and Schmit, L.A., "Advances in Dual Algorithms and Convex Approximation Methods", In Proc. AIAA/ASME/ASCE "29<sup>th</sup> Structural Dynamics and Material Conference", 1339-1347, 1988.
- [12] Zhang, W.H. and Fleury, C., "Selection of Appropriate Approximation Schemes in Engineering Optimisation", Internal Report OA-29, Aerospace Laboratory, University of Liège, 1993.
- [13] Fleury, C. (1989). "First and Second Order Convex Approximation Strategies in Structural Optimization", *Structural Optimization*, vol. 1, pp. 3-10.
- [14] Zhang, W.H. and C. Fleury. (1994). "Recent Advances in Convex Approximation Methods for Structural Optimization", in *Advances in Structural Optimization* (ed. Topping B.H.V and Papadrakakis, M.), pp. 83-90, Civil Comp Press, Edinburgh.

# APPLICATIONS DE L'OPTIMISATION DE STRUCTURES

## 1 INTRODUCTION

### 1.1 Les différentes classes de problème de conception

On peut scinder les techniques d'optimisation structurale selon la nature des données que l'on modifie. Historiquement, chaque type de données a été abordé selon un ordre croissant de difficulté et de généralité (Figure 10.1).

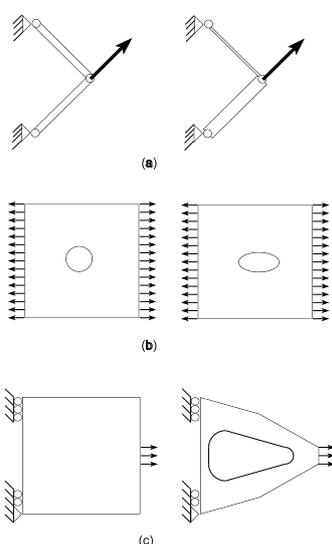


Figure 10.1. Les 3 classes de problèmes d'optimisation des structures.  
(a) Dimensionnement (b) Forme (c) Topologie

Dans le *dimensionnement automatique* des structures (Figure 10.1.a), on modifie les dimensions transversales des éléments de structures minces: la section droite des barres ou des poutres ou bien l'épaisseur transversale des plaques ou des coques. Ni la forme ni la topologie de la structure ne sont altérées de sorte qu'on peut travailler sur un modèle éléments finis figé. Du fait de cette simplification le problème d'optimisation des dimensions transversales a été étudié dès les années 60. Aujourd'hui cette technique a atteint une maturité industrielle et on peut trouver sur le marché plusieurs programmes informatiques commercialisés capables de résoudre des applications pratiques intéressantes.

En *optimisation de forme* (Figure 10.1.b) les variables de conception du problème modifient la représentation paramétrique des frontières extérieures ou intérieures de la structure. On n'admet cependant que des changements de forme compatibles avec une topologie fixée au préalable. En faisant bouger les frontières des domaines, la solution recherchée reste confinée à l'ensemble de toutes les structures obtenues par transformation

homéomorphe de la structure originale. Il n'est ni permis d'altérer la connectivité de la structure en créant ou en rebouchant des trous, ni possible de modifier la nature et le nombre des membres structuraux. Depuis les premiers travaux consacrés à l'optimisation de forme cette technique a pu bénéficier largement de développements récents en conception assistée par ordinateur. Citons par exemple les techniques de géométrie variationnelle, les mailleurs libres, le contrôle d'erreur et l'adaptation de maillage. L'optimisation de forme devient aujourd'hui un outil industriel.

Enfin, l'*optimisation topologique* (Figure 10.1.c) permet de modifier plus fondamentalement la nature de la structure. Cette fois, la géométrie de la pièce est envisagée sans aucun a priori sur la connectivité des domaines ou des membres structuraux présents dans la solution. Optimiser la topologie conduit naturellement à déterminer d'une certaine manière la forme ou les dimensions transversales optimales de la structure, de sorte que certains auteurs lui attribuent aussi le nom d'*optimisation de forme généralisée*. Le choix d'une topologie adéquate permet un gain de performance généralement très important. Précédemment la topologie était déterminée de manière empirique ou intuitive. Aujourd'hui le choix de la topologie structurale peut être effectué à l'aide de méthodes rationnelles basées sur l'optimisation. La méthode d'optimisation topologique utilisant l'homogénéisation est aujourd'hui la formulation la plus populaire. Depuis une dizaine d'années le domaine de l'optimisation topologique est en évolution rapide et elle sera l'optimisation de demain.

## 1.2 Une approche de programmation mathématique

Les problèmes d'optimisation structurale que nous avons à traiter sont des problèmes d'optimisation non-linéaire avec contraintes dont la formulation mathématique peut s'écrire sous la forme générale suivante:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser } f(d) \\
 & c_j(d) \leq \bar{c}_j \quad j = 1, m \\
 & h_k(d) = 0 \quad k = 1, l \\
 & \underline{d}_i \leq d_i \leq \bar{d}_i \quad i = 1, n
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Le vecteur  $d$  regroupe les variables de conception. Elles sont généralement soumises à des contraintes de borne.  $f(d)$  désigne la fonction objectif. Les contraintes d'inégalités définies sont associées aux limitations des réponses mécaniques ou autres de la structures. Les contraintes d'égalités correspondent généralement à des restrictions technologiques telles que des contraintes géométriques sur le modèle.

Les techniques de programmation mathématique appliquées à la résolution des problèmes d'optimisation constituent une méthode fiable et efficace permettant généralement d'obtenir une solution en 10 à 20 ré-analyses du système. De plus elles présentent l'avantage d'offrir une procédure ayant la généralité et la flexibilité nécessaire pour pouvoir traiter des problèmes variés en milieu industriel.

Pour la résolution numérique des différents problèmes d'optimisation nous nous appuyons sur le logiciel CONLIN développé par Fleury [1-9]. Ce logiciel exploite plusieurs types

d'approximations séparables convexes [2,3,4,5,6,8,9]. La résolution numérique des sous-problèmes convexes repose sur des algorithmes de type méthode de maximisation Lagrangienne ou méthode duale [1,2,7].

## 2 OPTIMISATION DE FORME

La procédure d'optimisation de forme intègre plusieurs outils de conception assistée par ordinateur: modélisation géométrique, sélection de variables indépendantes, utilisation de maillage libre, analyse de sensibilité utilisant des perturbations de maillage, estimation d'erreur et adaptation du maillage. Munis de ces perfectionnements, les programmes d'optimisation de forme sont capables d'attaquer des problèmes industriels relativement compliqués.

### 2.1 Modèle paramétrique et définition des variables de conception

Selon le principe décrit en [10,11] l'optimisation de forme est un problème bien posé lorsqu'il est pratiqué sur la base d'un modèle paramétrique de la structure. La topologie de la solution étant fixée, la tâche de modélisation revient alors à créer un modèle géométrique de la structure en l'exprimant au moyen de paramètres qui sont les variables de conception du problème et que l'on pourra ultérieurement faire varier afin d'améliorer la conception.

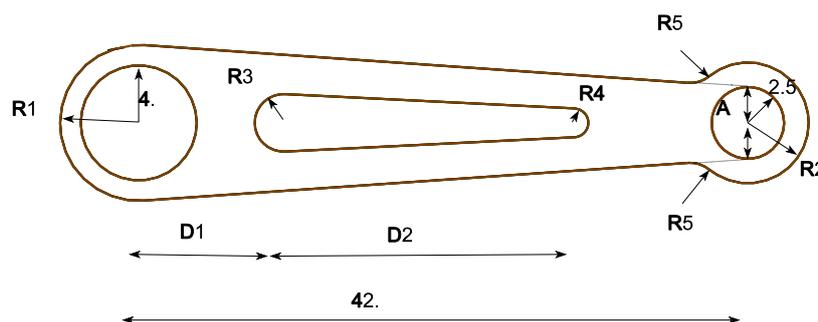


Figure 10.2. Modèle paramétrique d'une bielle

Cette expression du modèle doit être aussi générale que possible de sorte qu'on puisse générer automatiquement l'ensemble des géométries dans lequel on recherche une forme optimale en modifiant la valeur des paramètres. La définition du modèle permet de spécifier la nature de la représentation mathématique des courbes du contour (droite, arc de cercle, courbe B-Spline, NURBS, etc.). Les courbes modernes de la CAO telles que les B-splines ou les NURBS offrent l'avantage de d'introduire une grande flexibilité pour la description des contours. Elles permettent également d'introduire de manière implicite des conditions de continuité dans le modèle. Malgré cela, on leur préfère souvent les courbes simples, telles que les segments de droite et les arcs de cercle, qui sont plus intéressantes pour les applications pratiques. Dans ce cas, il est souvent obligatoire d'introduire des contraintes d'égalité dans le problème d'optimisation afin d'imposer la continuité de la pente aux points de raccordement entre deux courbes.

## 2.2 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité a pour objet de calculer les dérivées des réponses structurales par rapport aux variables de conception. On calcule d'abord les dérivées des déplacements généralisés du modèle. On différencie l'équation d'équilibre du modèle par éléments finis  $K q = g$  ce qui conduit à:

$$\frac{\partial q}{\partial d_i} = K^{-1} \left( \frac{\partial g}{\partial d_i} - \frac{\partial K}{\partial d_i} q \right) \quad (10.2)$$

La méthode semi-analytique consiste à évaluer les dérivées des matrices de raideur structurale  $\partial K / \partial d_i$  et du vecteur des charges  $\partial g / \partial d_i$  par différence finie.

En optimisation de forme la difficulté principale du calcul de sensibilité provient du fait que toute modification de la forme de la frontière induit une déformation de tout le domaine structural de sorte qu'on doit tenir compte de la modification de la position des points matérielles où l'on évalue les réponses mécaniques. Si on assimile le paramètre de forme à une variable temporelle, le mouvement du maillage durant l'incrément de variable  $\delta d_i$  peut alors être vu comme un champ de vitesse  $\mathbf{V}$ . Ce champ de vitesse se définit par la variation relative des points du maillage par rapport à une variation de la frontière  $\mathbf{V} = [\partial x_j / \partial d_i, \partial y_j / \partial d_i]$  de sorte qu'au premier ordre la position d'un noeud dans le maillage perturbé est donnée par:

$$\begin{cases} x_j^* = x_j^0 + V_x \delta d_i \\ y_j^* = y_j^0 + V_y \delta d_i \end{cases} \quad (10.3)$$

Connaissant les coordonnées nodales  $(x^*, y^*)$  et  $(x^0, y^0)$  relatives respectivement aux maillages perturbé et initial, on peut procéder à l'évaluation des dérivées de la matrice de raideur et des charges par différences finies. Soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial d_i} &\approx \frac{\delta g}{\delta d_i} = \frac{g(x^*, y^*) - g(x^0, y^0)}{\delta d_i} \\ \frac{\partial K}{\partial d_i} &\approx \frac{\delta K}{\delta d_i} = \frac{K(x^*, y^*) - K(x^0, y^0)}{\delta d_i} \end{aligned} \quad (10.4)$$

Examinons maintenant la manière dont on peut déterminer le champ de vitesse nécessaire au calcul de sensibilité et les coordonnées nodales  $(x^*, y^*)$ .

Sur la frontière le champ de vitesse est connu à partir des équations paramétriques des courbes du contour  $\Psi = \sum_i W_i(s) d_i$ . Soit pour une perturbation du paramètre  $d_i$

$$V_{\Gamma} = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial d_i} \right] = \left[ W_i(s) \right] \quad (10.5)$$

Le problème est maintenant d'évaluer le champ de vitesse à l'intérieur du domaine. Le champ de vitesse est arbitraire à condition qu'il possède des conditions de continuité identiques à celle d'un champ de déplacement et qu'il satisfasse aux conditions aux limites (10.5) sur la frontière.

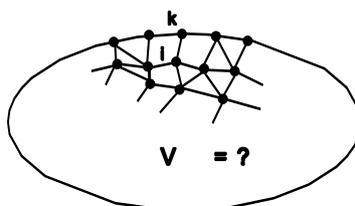


Figure 10.3. Détermination du champ de vitesse

Pour déterminer le champ de vitesse, plusieurs approches sont possibles. Historiquement, la première approche retenue pour calculer le champ de vitesse est basée sur des méthodes géométriques. Lorsqu'on utilise un maillage transfini, les coordonnées intrinsèques  $(s,t)$  constituent un moyen naturel et efficace pour identifier chaque noeud du maillage et les équations paramétriques du "patch" constituent une loi sans ambiguïté pour régénérer les coordonnées des noeuds après perturbation de la frontière. Si la position d'un point du "patch" s'écrit  $P(s,t) = \sum_i F_i(s,t) d_i$ , alors le champ de vitesse est donné par:

$$V = \left[ \frac{\partial P}{\partial d_i} \right] = \left[ F_i(s,t) \right] \quad (10.6)$$

Une deuxième sorte d'approche consiste à déterminer le champ de vitesse au moyen d'un problème mécanique ou physique associé. Belegundu et Rajan [12] proposent d'appliquer une distribution de forces sur les points de contrôle du modèle afin de déterminer les fonctions de forme de la modification de la géométrie et du même coup le champ de vitesse qui y est associé. Pour s'inscrire dans une approche paramétrique basée sur la C.A.O., Zhang [13] et Beckers [14] proposent de modifier cette approche en se basant sur les solutions élastiques relatives à des déplacements imposés correspondant aux perturbations des courbes de frontières.

Enfin plus récemment, Braibant et Morelle [15] ont proposé de déterminer le champ de vitesse sous une forme discrétisée comme une loi de repositionnement du maillage après une modification de la frontière. Une difficulté essentielle du calcul du champ de vitesse sur un maillage discrétisé réside dans la nécessité de travailler en maintenant la topologie et une connectivité de maillage de départ. Dans cet esprit on peut par exemple user d'une technique de relocalisation ou de lissage pour déterminer la perturbation des noeuds intérieurs sous l'effet de la perturbation de frontière [16]. Dans cette approche chaque côté de maille porte une raideur unidimensionnelle. Les composantes du champ de vitesse  $V_k$  sont données par les solutions d'une équation d'équilibre.

$$\sum_{j \neq i} k_{ij} (V_k^{(i)} - V_k^{(j)}) = 0 \quad (10.7)$$

L'avantage de cette méthode réside dans son coût peu élevé, car on y découple les problèmes relatifs aux différentes coordonnées. Remarquons que ce type de méthode peut être également relié aux méthodes physiques étant donné qu'il s'agit, en quelque sorte, d'une version simplifiée de la solution d'une équation Laplacienne (et donc d'un problème physique) sur le domaine de conception. Cette méthode est implantée dans les modules OPTI de SAMCEF et BOSS Quattro. Elle a été récemment étendue aux structures volumiques et aux coques dans l'espace.

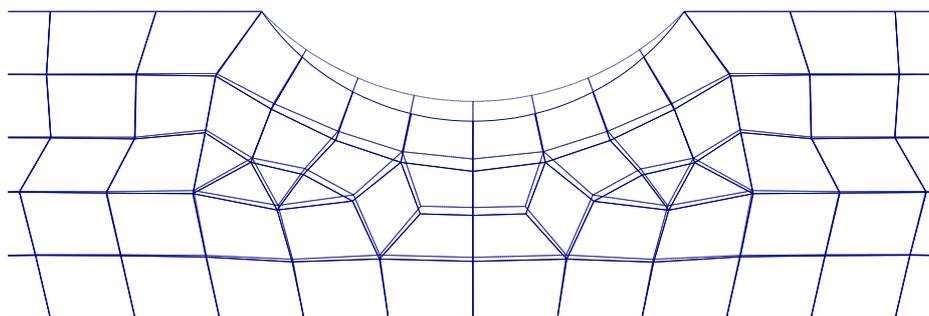


Figure 10.4. Exemple de champ de vitesse obtenu par critère de relocalisation

### 2.3 Exemple

La structure initiale et son modèle paramétrique sont ceux montrés à la Figure 10.2. Le problème est une version simplifiée de la conception d'un bras de suspension d'automobile. On cherche à minimiser la masse de la structure tout en respectant des restrictions sur la contrainte équivalente de von Mises. La paramétrisation de la forme fait appel uniquement à des segments de droite et à des arcs de cercle. La formulation du modèle est telle que les contraintes de tangence au point de raccordement sont prises en compte implicitement dans le modèle. Le modèle est alors décrit par 8 paramètres indépendants qui sont retenus comme variables de conception. Par ailleurs on doit tenir compte de contraintes technologiques additionnelles imposant une section minimale de 1 cm pour chaque membre. celles-ci sont imposées au moyen de contraintes de distances minimales entre deux courbes. Les données numériques sont les suivantes: module de Young  $E = 20.74 \cdot 10^6$  N/cm<sup>2</sup>, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , épaisseur  $t = 0.3$  cm, masse volumique  $\rho = 7.81 \cdot 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>, et une contrainte admissible de  $\bar{\sigma}_c = 80,000$  N/cm<sup>2</sup>. Le moyeu de gauche est encastré tandis que celui de droite est soumis à une force de résultantes  $F_x = 2,789$  N et  $F_y = 5,066$  N.

Les Figures 10.5 et 10.6 montrent le résultat de l'optimisation lorsqu'elle est menée avec des éléments à 8 noeuds. La masse de la structure après 10 itérations est de 0.407 kg.

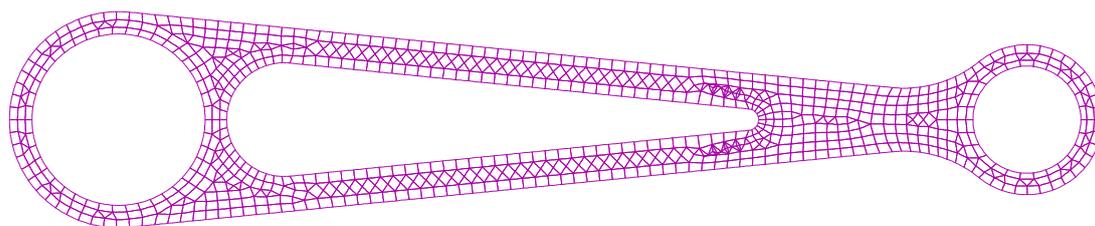


Figure 10.5. Maillage de la structure optimisée

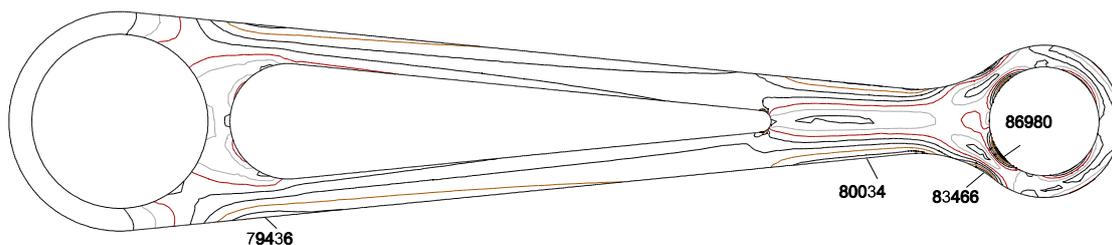


Figure 10.6. Courbe d'isovaleur de la contrainte de von Mises

On obtient une géométrie optimisée dont les contraintes réelles maximales dépassent la contrainte autorisée de 5.6 % (soit 83,466 N/cm<sup>2</sup>). La seconde procédure intègre le contrôle d'erreur de la solution élément fini et l'adaptation de maillage. Le maillage optimisé de la dernière itération est présenté à la Figure 10.7. A la Figure 10.8, on montre les courbes d'isovaleur des contraintes après le post-processing. On a imposé une précision relative de 1% sur la solution globale, de 1% sur les frontières et de 1% sur les éléments critiques au niveau contraintes. Comme on contrôle l'erreur, on maintient une borne de 80,000 N/cm<sup>2</sup> sur les tensions. La solution finale est un peu plus lourde avec une masse de 0.413 kg. La forme est assez similaire à la précédente excepté au niveau de raccordement où se trouvent les principales erreurs sur les tensions. Par contre les tensions respectent la borne prescrite avec une très bonne tolérance. La Figure 10.9 donne l'évolution de la masse en fonction des itérations. La gain de précision se paie par une réduction moins rapide de la masse.

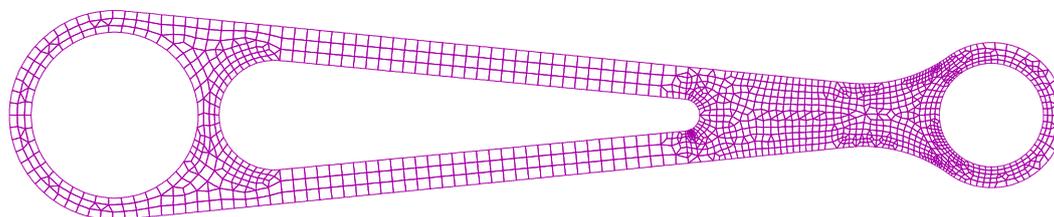


Figure 10.7. Maillage de la structure optimisée avec contrôle d'erreur

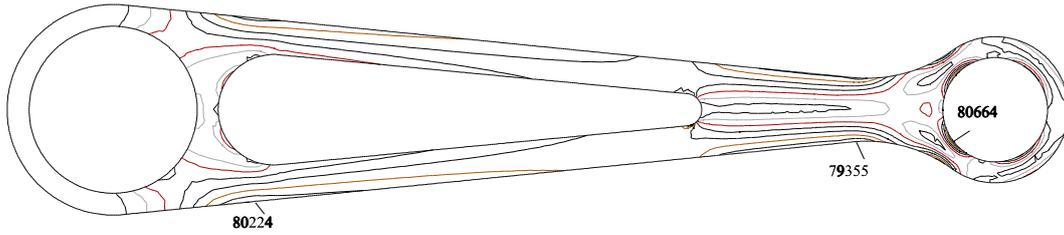


Figure 10.8. Courbe d'isovaleur de la contrainte de von Mises dans le cas de l'optimisation avec contrôle d'erreur

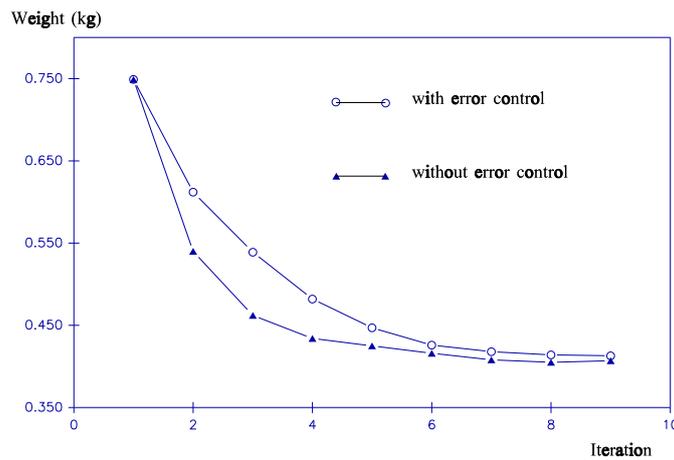


Figure 10.9. Courbe d'évolution de la masse

### 3 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

#### 3.1 Formulation du problème de topologie

La difficulté majeure pour modifier la topologie de la structure réside dans l'impossibilité de définir une transformation homéomorphe qui permette de passer de manière continue entre deux structures de topologies différentes. Il n'est donc pas possible de définir une notion de dérivée pour les variables topologiques sur des modèles paramétriques. Pour contourner cette difficulté, on abandonne la définition paramétrique de la structure et on formule le problème de topologie comme une distribution optimale de matière. Ce problème présente l'avantage de pouvoir permettre le travail sur un maillage fixe et d'éviter les problèmes de maillage variable de l'optimisation de forme.

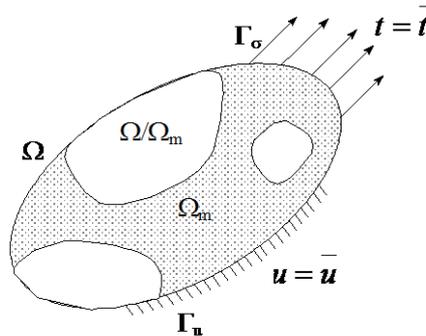


Figure 10.10. Problème de distribution de matière

Les problèmes de distribution optimale de matière possèdent une grande difficulté: les résultats dépendent du maillage adopté. Pour assurer l'existence et la stabilité de la solution, il faut régulariser le problème. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature.

On peut d'abord remarquer que lorsqu'on raffine le maillage les résultats numériques tendent à recréer une disposition de plus en plus fine de la matière. En d'autres mots le problème d'optimisation tend à introduire une microstructure et des matériaux composites dans la solution. Au point de vue mathématique, on peut démontrer que la solution du problème existe si on étend l'ensemble des solutions à tous les matériaux composites dont la porosité peut varier entre le vide et le solide. Bendsøe et Kikuchi [17] ont alors proposé de déterminer la topologie de composants mécaniques comme une distribution optimale de microstructure poreuse. La méthode connue sous le nom d'*optimisation topologique utilisant l'homogénéisation* a successivement été étendue à de nombreux problèmes de conception. Citons quelques travaux qui nous semblent importants: conception topologique de structures en vibration [18], aux problèmes avec contraintes sur la stabilité élastique [19], aux structures contrôlées [20]. Pour une revue plus complète on consultera Bendsøe [21] ou Duysinx [22].

Une deuxième stratégie pour régulariser le problème de conception consiste à adjoindre une contrainte afin de pénaliser le périmètre de la solution [23]. Haber et al. [24] ont montré que la méthode du périmètre pouvait être adaptée aux distributions continues de matière.

Enfin une troisième alternative est appelée *conception avec des matériaux libres* [25]. Elle consiste à inclure dans l'espace de conception tous les tenseurs d'élasticité admissibles par les lois de la thermodynamique.

Illustrons dès à présent la manière avec laquelle une topologie d'une structure peut être prédite par une distribution de matière. On veut reprendre trois chargements indépendants, d'intensité et de directions différentes (Figure 10.11). On recherche la configuration qui présente la moins grande flexibilité sous l'action des trois chargements. Le "nuage" de matériau composite poreux, considéré comme un milieu continu, se transforme progressivement en une distribution qui suggère en fin de processus une structure formée d'un treillis 2 barres (Figure 10.12).

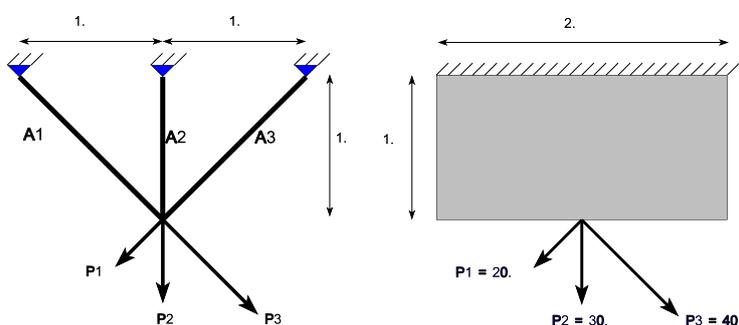


Figure 10.11. Problème de topologie correspondant au treillis 3 barres

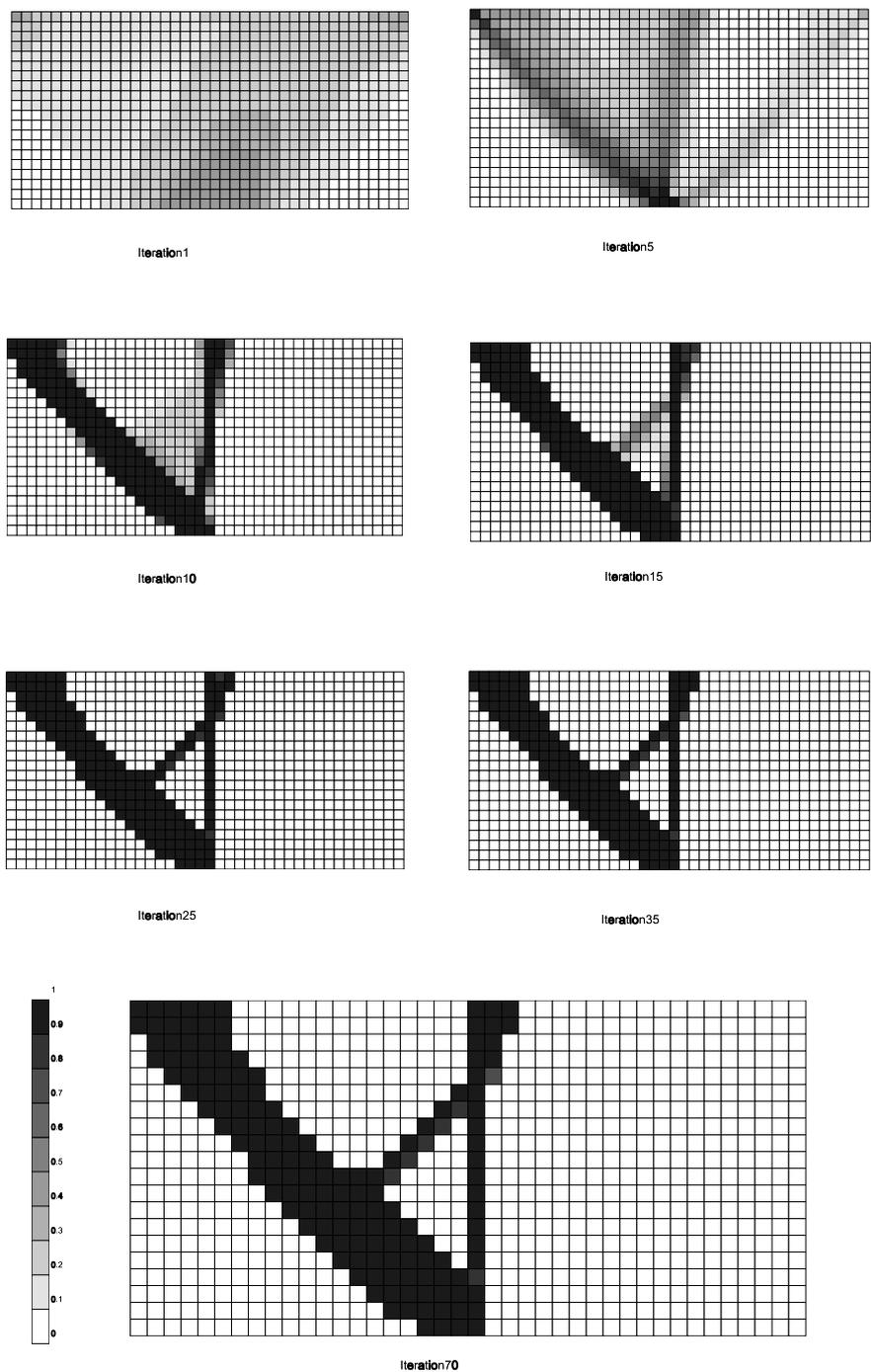


Figure 10.12. Problème de topologie correspondant au treillis 3 barres

### 3.2 Microstructures pour le problème de topologie

Le problème de distribution optimale de matière admet l'existence d'une solution si l'on introduit toutes les microstructures formées de vide et de solide. Cependant dans une procédure numérique il n'est pas possible de considérer toutes les microstructures. On sélectionne une famille de microstructures dont on peut paramétrer la micro-géométrie.

### Matériaux de rang N

Les matériaux feuilletés de rang-N sont construits par un procédé récursif à partir de deux matériaux de bases, un matériau de grande raideur et un matériau de faible raideur (qui peut être le vide). Le matériau composite de rang 1 est formé de lamelles parallèles des deux matériaux de base. Ce composite ainsi formé est ensuite utilisé à une échelle microscopique supérieure où il est caractérisé par son comportement homogénéisé. On fabrique ensuite un matériau composite de rang 2 à l'aide de lamelles du matériau de plus grande raideur et du composite de rang 1. On peut ainsi recommencer le processus un certain nombre de fois afin de former un matériau de rang N. Pour n'importe quelle densité, Avellaneda [26] a montré qu'avec un matériau de rang N ( $N \leq 6$ ) on pouvait réaliser un composite dont le comportement moyen maximise/minimise l'énergie de déformation quel que soit le chargement. Le problème de compliance minimale (c'est-à-dire l'énergie développée par les charges appliquées) est régularisé si on utilise les matériaux feuilletés [27]. Pour un problème plan soumis à un seul cas de charge l'utilisation de matériaux de rang 2 avec des directions de lamination orthogonales est suffisante (voir Figure 10.13).

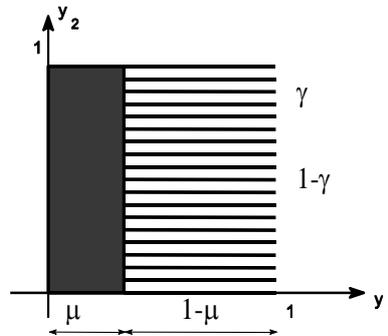


Figure 10.13. Microstructure de matériau feuilleté de rang 2

Si  $\gamma$  et  $\mu$  sont les densités relatives du solide dans les composites de rang 1 et de rang 2 et si  $E$  et  $\nu$  sont le module de Young et le coefficient de Poisson du solide de base, alors la raideur du matériau poreux de rang 2 est donnée par [28]:

$$\langle D(\gamma, \mu) \rangle = \frac{E}{(1-\mu) + \mu\gamma(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \gamma & \mu\gamma\nu & 0 \\ \mu\gamma\nu & \mu(1-\mu(1-\gamma)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

$$\langle \rho \rangle = (\gamma + \mu - \gamma\mu) \rho^0$$

### Loi de pénalisation de type puissance des propriétés matérielles

Même si les matériaux de rang N assurent la relaxation complète du problème de conception, ils introduisent de larges zones de matériaux composites de densité intermédiaire dans la solution dont l'interprétation est souvent difficile. Pour des applications pratiques, on a constaté que le choix de microstructures différentes pénalisant plus fortement les densités intermédiaires conduisait à des distributions avec une séparation

vide-solide plus prononcée. Ces distributions suggèrent alors plus facilement une topologie macroscopique utile à l'ingénieur pour poursuivre le processus de conception.

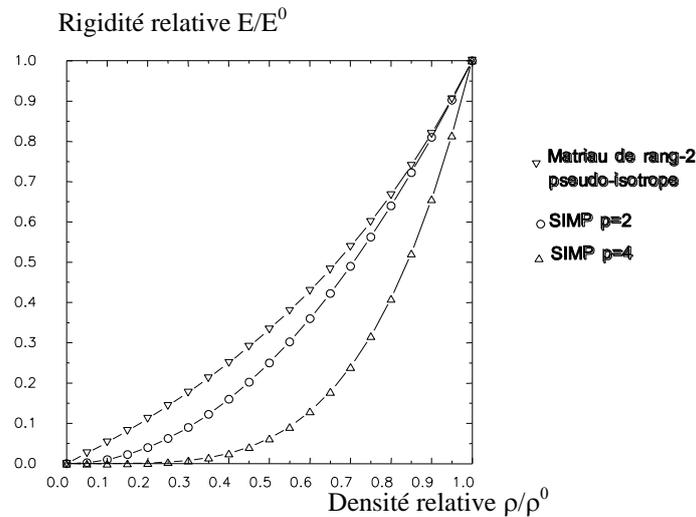


Figure 10.14. Différentes lois de puissance :  $p=2$ ,  $p=4$

Parmi ces lois empiriques, il est très courant d'utiliser la loi basée sur une pénalisation de type puissance des densités intermédiaires ou matériau SIMP pour *Simple Microstructure with Penalization of intermediate densities* [28,29,30]. Dans ce modèle, les propriétés mécaniques sont décrites par une fonction de puissance  $p$  d'une variable de simili densité  $\mu$ .

$$\langle E(\mathbf{x}) \rangle = \mu(\mathbf{x})^p E^0, \quad \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \mu(\mathbf{x}) \rho^0, \quad 0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \text{et} \quad p > 1 \quad (10.9)$$

Pour pénaliser les densités intermédiaires, on augmente graduellement la valeur de  $p$  ( $p=2$  ou  $p=3$  voire  $p=4$ ). La Figure 10.14 montre l'influence de l'exposant  $p$  sur la pénalisation des densités intermédiaires. Les matériaux SIMP donnent lieu à une raideur déraisonnablement faible pour un coût en volume donné. La matière aura tendance à ne former que des régions de vide ou de solide pour former la structure la plus efficace possible. On peut montrer que les matériaux pseudo-isotropes de rang 2 correspondent approximativement à un exposant  $p = 1.6$ . Même si cette loi SIMP est très facile et très intéressante pour les applications pratiques, il ne faut toutefois pas oublier qu'elle n'a aucun fondement microstructural et que la relaxation du problème n'est que partielle de sorte que les résultats numériques peuvent dépendre du maillage.

### 3.3 Critères globaux

Bien que le problème de topologie puisse être transformé en une sorte de dimensionnement de densité variable, le problème reste coûteux à cause du très grand nombre de variables de conception introduites par la formulation. Un calcul précis des contours de la distribution de matière demande des maillages fins et, donc, un très grand nombre de variables de conception. Par conséquent, le problème de topologie est souvent étudié sous une forme relativement simple afin de réduire les efforts de calcul. Fréquemment la topologie

optimale est déterminée suivant un critère de raideur maximale [17]. Le critère de raideur moyen adopté est celui de l'énergie potentielle des charges extérieures encore appelé compliance.

Si  $\mathbf{g}$  désigne les charges extérieures,  $\mathbf{q}$  les déplacements généralisés,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $V$  le volume de matière,  $\mu$  le vecteur des variables de microstructure, et  $\theta$  les angles d'orthotropie, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & \mathbf{g}^T \mathbf{q} \\ \text{s.t.} \quad & V \leq \bar{V} \\ & \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g} \end{aligned} \tag{10.10}$$

Pour l'étude de structures vibrantes, la maximisation de la fréquence propre fondamentale est une critère équivalent à la compliance [18].

Si le problème de conception n'est pas relaxé ou suffisamment relaxé par l'introduction d'une microstructure adéquate, Ambrosio et Buttazzo [23] ont démontré que problème redevient régulier si l'on ajoute une pénalisation sur le périmètre  $P$  de la distribution de matière. Avec une contrainte sur le périmètre, le problème de topologie peut être résolu sous forme discrète ou bien avec une microstructure suboptimale:

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \theta} \quad & \mathbf{g}^T \mathbf{q} \\ \text{s.t.} \quad & V \leq \bar{V} \\ & P \leq \bar{P} \end{aligned} \tag{10.11}$$

Cette approche est souvent intéressante pour l'ingénieur. D'abord, on peut introduire, en toute rigueur, une pénalisation importante des densités intermédiaires, ce qui améliore la séparation entre les zones de vide et de solide. Ensuite, le périmètre permet de contrôler le nombre et la taille des perforations et des membres structuraux et ainsi limiter la complexité de la solution. Dès lors ces solutions sont facilement transcriposables en une conception pragmatique et converties en des modèles paramétriques. Il est facile alors de poursuivre le processus de conception avec une optimisation de forme ou de dimensionnement.

3.4 Applications

Topologie d'une poutres de plancher d'airbus

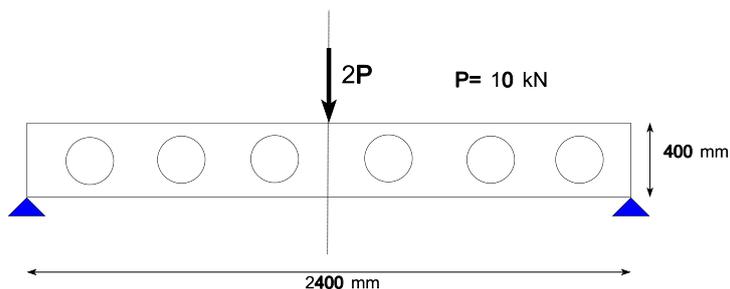


Figure 10.15 : Problème de la poutre d'Airbus

La procédure que nous avons décrite a été validée sur de nombreuses applications de tailles différentes. On illustre différentes formulations du problème de topologie sur le problème dit de la poutre de plancher d'Airbus [32] (Figure 10.15). Le problème est d'abord résolu (Figure 10.16) avec une microstructure semblable au matériau de rang 2. Ensuite le problème est étudié avec une loi de pénalisation cubique des densités intermédiaires (Figure 10.17). A la Figure 10.18 on montre de quelle manière la complexité de la solution peut être contrôlée avec la réduction du périmètre admissible.

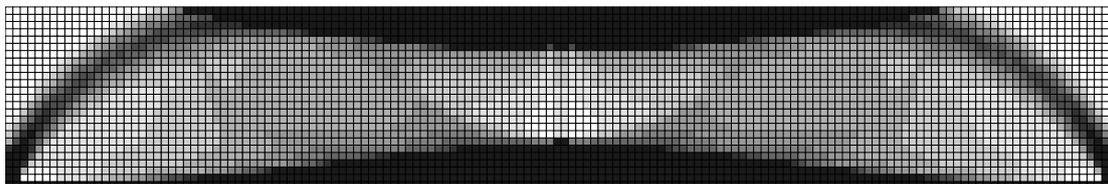


Figure 10.16. Topologie avec une microstructure orthotrope

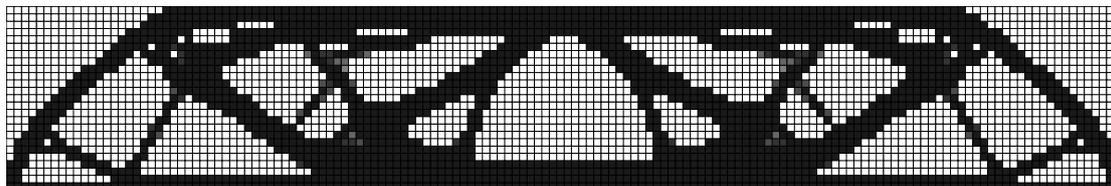


Figure 10.17. Topologie avec une pénalisation cubique des densités intermédiaires

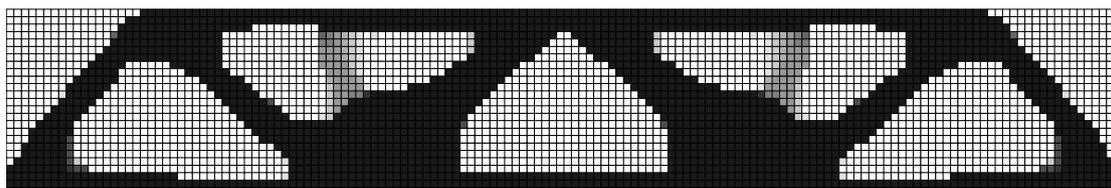


Figure 10.18. Topologie avec contrôle du périmètre

### **Conception d'une poutre cantilever**

L'application suivante illustre l'utilisation de l'optimisation topologique pour la conception de structures tridimensionnelles. On étudie une plaque cantilever courte soumise à une force de cisaillement. Les dimensions du problème sont reprises à la Figure 10.19 en unités MKS. Le domaine est discrétisé avec un maillage régulier de  $32 \times 20 \times 4 = 2560$  éléments de brique du premier degré [22].

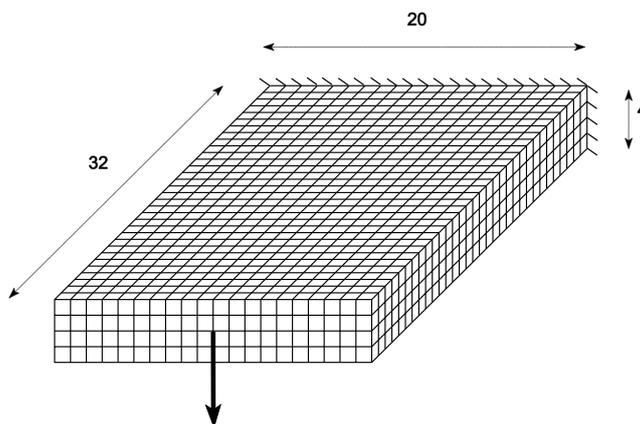


Figure 10.19. Géométrie du problème de conception d'une poutre tridimensionnelle

On obtient la solution après 50 itérations. La visualisation des résultats en trois dimensions est évidemment plus difficile. A la Figure 10.20, on montre, d'abord, la distribution de matière suivant des coupes faites selon l'épaisseur en partant de la couche supérieure. Ensuite, la Figure 10.21 donne deux vues en perspective dans lesquelles on retire tous les éléments dont la densité relative est inférieure à 30% de la densité du solide de référence. La distribution de matière forme deux semelles de forme triangulaire. Les couches intérieures forment un caisson ouvert, et l'on reconnaît une sorte de poutre caissonnée. Elle se compose de deux semelles pour augmenter la raideur flexionnelle. La matière dans les deux couches intérieures forme un caisson qui relie les deux faces et les tient écartées. En l'absence de torsion, la présence du caisson fait en sorte que la solution optimale peut être assimilée à une plaque sandwich, dont le bon comportement en flexion est réputé. Les semelles ont une forme de largeur croissante, de sorte que le moment d'inertie de la poutre va en augmentant depuis l'emplanture jusqu'au point d'application de la force. La forme du caisson est, elle aussi, surprenante : elle s'évase depuis la pointe puis se referme aux  $2/3$  de la portée. L'encastrement est libre de caissonnage. On pense que la solution libère de la matière à l'encastrement où l'écartement des semelles est maintenu par les conditions de fixation, pour la placer là où elle est plus utile.

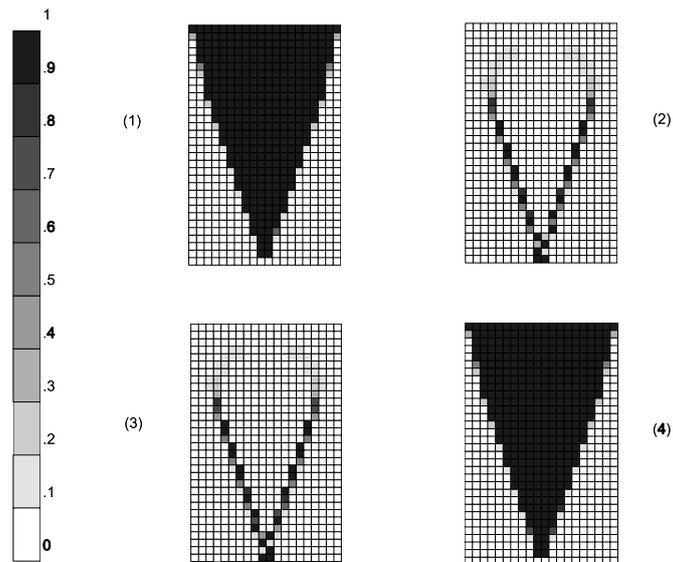


Figure 10.20. Distribution de la densité - coupes selon l'épaisseur

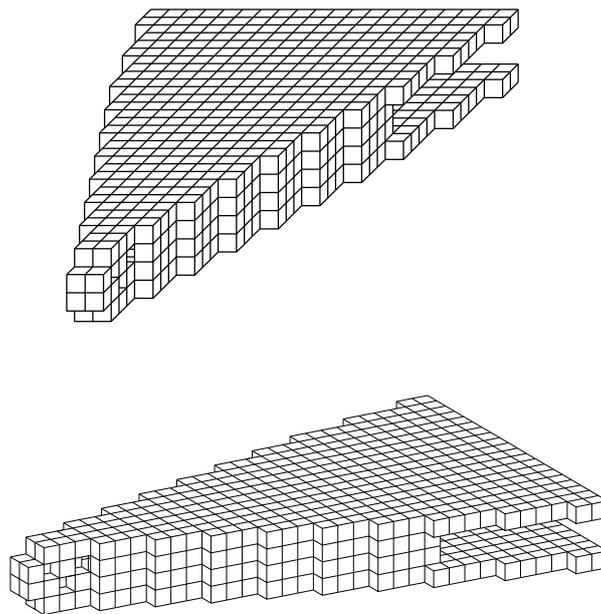


Figure 10.21. Vue tridimensionnelle de la plaque cantilever

**Problème tridimensionnel de type Michel [31]**

Dans ce problème, le volume de matière à répartir dans la structure est limité à  $1200 \text{ m}^3$  (la valeur maximale valant  $2048 \text{ m}^3$ ). La charge appliquée vaut  $10^5 \text{ N}$ .

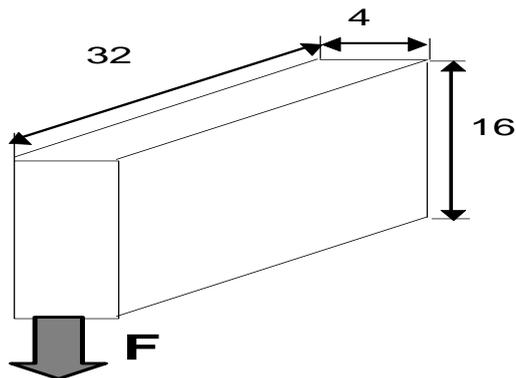


Figure 10.22. Données du problème de type Michell

Dans un premier temps, on discrétise la structure en 2048 éléments finis et on étudie la topologie sans borner le périmètre de la solution (Figure 10.23). Le résultat obtenu laisse apparaître une topologie floue au niveau du point d'application de la charge. Dans ce cas encore, l'utilisation de la contrainte sur le périmètre va permettre de répartir plus précisément la matière à l'intérieur du domaine initial (Figure 10.24).

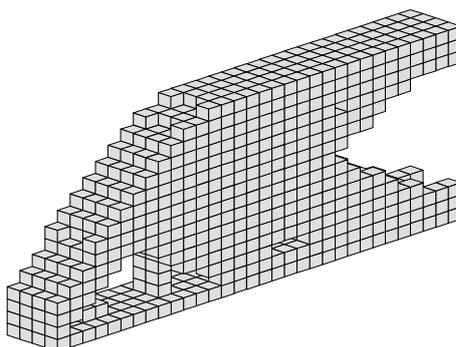


Figure 10.23. Topologie du problème de type Michell sans contrainte sur le périmètre.

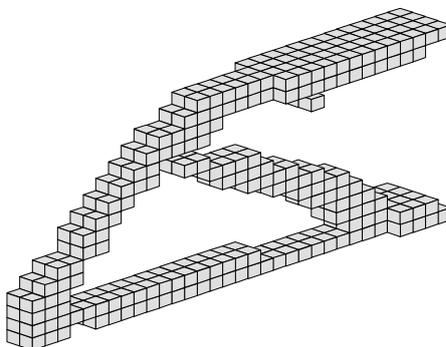


Figure 10.24. Topologie du problème de type Michell avec périmètre de 1000.

Dans un deuxième temps, ce problème a été étudié en utilisant une discrétisation plus grossière du domaine spatial (on passe de 2048 à 512 éléments). Les résultats obtenus sont présentés aux Figures 10.25 et 10.26. On observe clairement que la solution de moindre précision obtenue sans périmètre (Figure 10.25) conduit à une topologie différente de celle obtenue lorsque la discrétisation est plus fine (Figure 10.23). Par contre la prise en compte d'une contrainte sur le périmètre permet de faire converger la solution avec le maillage (Figures 10.24 et 10.26).

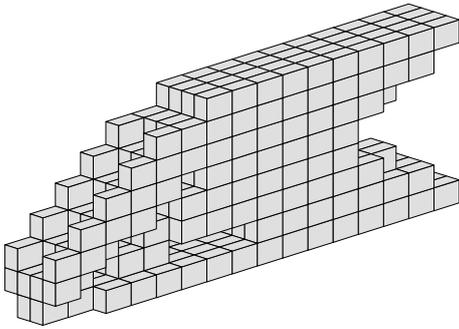


Figure 10.25. Topologie du problème de type Michell sans contrainte sur le périmètre.  
512 éléments

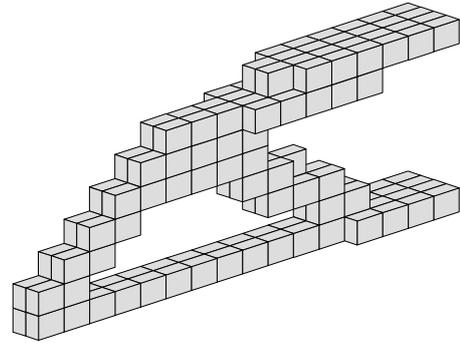


Figure 10.26. Topologie du problème de type Michell avec périmètre de 1000.  
512 éléments

Ci-dessous (Figures 10.27 et 10.28), les topologies du problème de type Michell obtenues sans appliquer de contrainte sur le périmètre. On observe aisément que dans ce cas, la topologie dépend de la discrétisation du domaine spatial. La contrainte sur le périmètre permet de faire converger la solution avec le maillage (Figures 10.24 et 10.26).

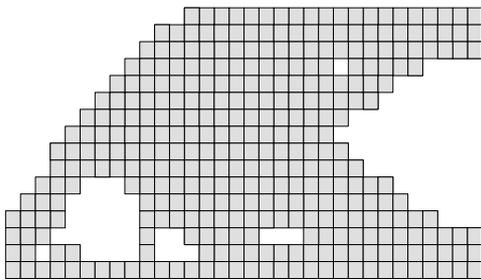


Figure 10.27. Topologie du problème de type Michell sans contrainte sur le périmètre.  
2048 éléments

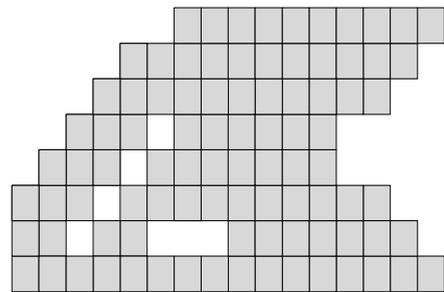


Figure 10.28. Topologie du problème de type Michell sans contrainte sur le périmètre.  
512 éléments

***Structures de type sandwich [31]***

Ce dernier exemple montre l'utilité de l'optimisation topologique dans le pré-dimensionnement de structures sandwich. Dans ce problème, on recherche la distribution optimale de matière dans le coeur d'un panneau sandwich encadré. La structure étudiée est représentée à la Figure 10.29. On recherche l'emplacement et la forme des raidisseurs ainsi que celui de la mousse (matériau moins rigide) dans le coeur du sandwich. En tenant compte des symétries, la structure est discrétisée en trois fois 100 éléments volumiques du premier degré. Deux configurations sont étudiées (Figure 10.29). La charge appliquée sur la structure est de  $10^4\text{N}$ . La densité initiale des éléments du coeur vaut 0.001.

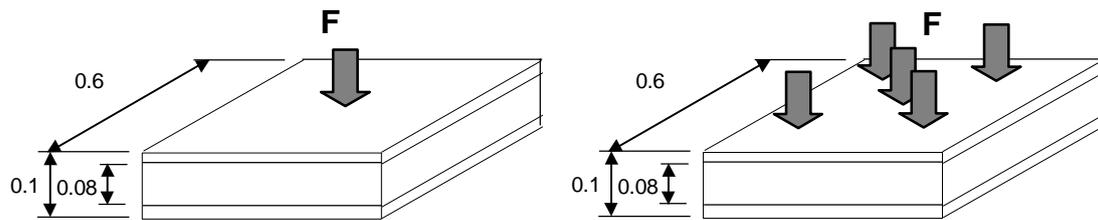


Figure 10.29. Données du problème de type sandwich  
 a. une seule charge concentrée b. cinq charges concentrées

Les Figures 10.30 à 10.33 représentent les solutions des deux cas de charge lorsque le volume de la plaque est limité à 30, 40, 50 et 60% du volume total.



Figure 10.30. Structure sandwich soumise à une charge concentrée  
 a. 30% du volume b. 40% du volume



Figure 10.31. Structure sandwich soumise à une charge concentrée  
 a. 50% du volume b. 60% du volume



Figure 10.32. Structure sandwich soumise à cinq charges concentrées  
a. 30% du volume b. 40% du volume



Figure 10.33. Structure sandwich soumise à cinq charges concentrées  
a. 50% du volume b. 60% du volume

La dernière application numérique traitée dans le cadre des structures de type sandwich concerne la distribution optimale de matière dans le coeur d'une plaque sandwich à peaux minces (2 mm d'épaisseur au lieu de 10 précédemment), encastrée et soumise à une charge concentrée, structure dans laquelle 96% du volume peut être réparti dans le coeur du panneau (Figure 10.34). Les peaux sont modélisées par des éléments de coque, tandis que le coeur est constitué d'éléments volumiques. On désire ne conserver que 50% du volume maximal.

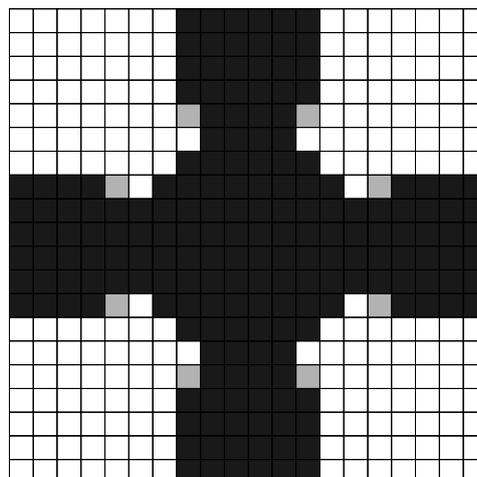


Figure 10.34. Plaque sandwich à peaux minces soumise à une charge concentrée

### 3.5 Vers une approche intégrée topologie et forme

L'optimisation topologique a été développée pour compléter les techniques d'optimisation de dimensionnement et d'optimisation de forme. Le choix de la topologie est une des données fondamentales du modèle. Le choix "rationnel" de la topologie structurale doit donc être effectué dans une phase de conception préliminaire précédant les cycles de modification des paramètres de la frontière ou des dimensions transversales. Comme montré à la Figure 10.35, on complète l'enchaînement classique de la conception de structure en plaçant l'optimisation topologique en avant des procédures d'optimisation de forme et de dimensionnement.

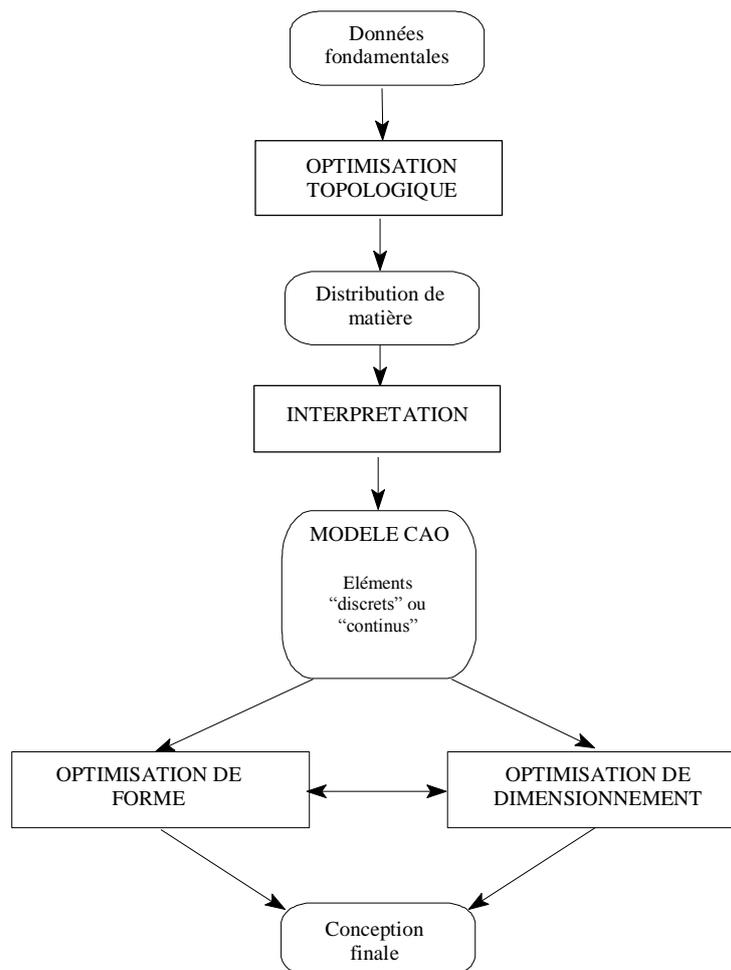


Figure 10.35. Chaîne de conception intégrant l'optimisation topologique

Toutefois, le résultat issu de l'optimisation topologique se présente sous forme d'une distribution de matière. Un processus d'interprétation est nécessaire pour dégager un modèle CAO de la structure qui soit exploitable dans les outils classiques de conception. L'habileté de l'ingénieur et son savoir-faire interviennent ici pour concilier la topologie idéale et un certain nombre de contraintes technologiques explicites ou implicites intervenant dans une "bonne" conception. Par exemple, il est courant que le contour soit décrit à l'aide de morceaux de courbe simple (segments de droite et arcs de cercle), tandis que l'épaisseur des membres est souvent limitée à une jauge minimale.

La description d'outils de conception intégrant forme et topologie a été abondamment réalisée par [32-36]. Cet organigramme est simple à mettre en oeuvre, car ne modifie pas la séquence des processus de conception; il la complète. A l'heure actuelle, on tente d'intégrer plus fortement les processus d'optimisation de forme et de topologie pour aborder des problèmes où la forme et la topologie interagissent fortement.

## 4 REFERENCES

- P. Duysinx. 1996. "Optimisation Topologique: Du Milieu Continu à la Structure Elastique", Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées Rapport LTAS OF-37.
- P. Duysinx et C. Fleury. 1998. "Optimisation Géométrique et Topologique en Mécanique", PRIMECA.
- [1] C. Fleury. 1979. "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp 1761-1783.
- [2] C. Fleury et L.A. Schmit. 1980. "Dual methods and approximation concepts in structural synthesis", NASA Contractor Report, NASA-CR 3226.
- [3] C. Fleury et G. Sander. 1983. "Dual Method for Optimizing Finite Element Flexural Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, 1983, pp 249-275.
- [4] C. Fleury et V. Braibant. 1986. "Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp 409-428.
- [5] C. Fleury. 1989. "CONLIN : an Efficient Dual Optimizer Based on Convex Approximation Concepts", *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp 81-89.
- [6] C. Fleury. 1989. "Efficient Approximation Concepts Using Second Order Information", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp 2041-2058.
- [7] C. Fleury. 1993. "Mathematical Programming Methods for Constrained Optimization: Dual Methods", dans: volume 150 of *Progress in Astronautics and Aeronautics* (M.P. Kamat, ed.), chap. 7, pp 123-150, AIAA, 1993.
- [8] C. Fleury. 1993. "Recent Developments in Structural Optimization Methods", dans: volume 150 of *Progress in Astronautics and Aeronautics* (M.P. Kamat, ed.), chap. 9, pp 183-208, AIAA, 1993.
- [9] P. Duysinx, W.H. Zhang, C. Fleury, V.H. Nguyen et S. Haubruge. 1995. "A New Separable Approximation Scheme for Topological Problems and Optimization Problems Characterized by a Large Number of Design Variables", *Proceedings du First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 108-109.
- [10] V. Braibant et C. Fleury. 1984. "Shape Optimal design Using B-Splines". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol 44, pp 247-267.
- [11] C. Fleury. (1987). "Computer Aided Optimal Design of Elastic Structures", dans: *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems* (C.A. MOTA SOARES, éd.), Springer-Verlag, NATO ASI Series F, Vol. 27, pp. 832-900.

- [12] A.D. Belgundu et S.D. Rajan. 1988. "Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variables and Shape Functions". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, pp 87-106.
- [13] W.H. Zhang. 1991. "Analyse de sensibilité et Optimisation de Forme Structurale par la Méthode des Eléments Finis". Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique.
- [14] P. Beekers. 1991. "Recent Developments in Shape Sensitivity Analysis: the Physical Approach". *Engineering Optimization*, vol. 18, pp -67-78.
- [15] V. Braibant et P. Morelle. 1990. "Shape Optimal Design and Free Mesh Generation". *Structural Optimization*. vol. 2, pp 223-231.
- [16] P. Duysinx, W.H. Zhang, et C. Fleury. 1993. "Sensitivity Analysis with Unstructured Free Mesh Generators in 2-D and 3-D Shape Optimization," *Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, 2-6 Août.
- [17] M.P. Bendsøe et N. Kikuchi. 1988. "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, 1988, pp 197-224.
- [18] A. Díaz et N. Kikuchi. 1992. "Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1992, pp 1487-1502.
- [19] M.M. Neves, J.M. Guedes et H.C. Rodrigues. 1995. "Generalized Topology Design of Structures with a Buckling Load Criterion". *Structural Optimization*. Vol. 10, pp 71-78.
- [20] J.S. Ou et N. Kikuchi. 1996. "Optimal Design of Controlled Structures. *Structural Optimization*. Vol. 11, pp 19-28.
- [21] M.P. Bendsøe. 1995. "Optimization of Structural Topology, Shape, and Material", Springer Verlag, Heidelberg.
- [22] P. Duysinx. 1996. "Optimisation Topologique: Du Milieu Continu à la Structure Elastique", Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées Rapport LTAS OF-37.
- [23] L. Ambrosio et G. Buttazzo. 1993. "An Optimal Design Problem with Perimeter Penalization", *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Vol. 1, pp 55-69.
- [24] R.B. Haber, C.S. Jog et M.P. Bendsøe. 1996. "A New Approach to Variable-Topology Shape design Using a Constraint on Perimeter", *Structural Optimization*, vol. 11, pp 1-12.
- [25] M.P. Bendsøe, J. Guedes, R.B. Haber, P. Pedersen et J.E. Taylor. 1993. "An Analytical Model to Predict Optimal Material Properties in the Context of Optimal Structural Design", DCAMM Report n° 453, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, December 1992, à paraître dans *Journal of Applied Mechanics*.
- [26] M. Avellaneda. 1987. "Optimal Bounds and Microgeometries for Elastic Two-Phase Composites", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 47, 1987, pp 1216-1228.
- [27] G. Allaire et R.V. Kohn. 1993. "Optimal Desing of Minimum Compliance", *European Journal of Mechanics A*, vol. 12, pp 839-878.
- [28] M.P. Bendsøe. 1989. "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", *Structural Optimization*, vol. 1, 1989, pp 193-202.
- [29] H.P. Mlejnek. 1993. "Some Exploration in the Genesis of Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 287-300, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- [30] M. Zhou et G.I.N. Rozvany. 1991. "The COC algorithm, Part II : Topological, Geometry and Generalized Shape Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp 309-336.
- [31] M. Bruyneel 1998. "Le Périmètre en Optimisation Topologique de Structures Tridimensionnelles", Université de Liège, LTAS-Structures Aérospatiales, Internal Report OA50.

- [32] N. Olhoff, M.P. Bendsøe et J. Rasmussen. 1992. "On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 89, pp 259-279.
- [33] P.Y. Papalambros et M. Chiredast. 1990. "An Integrated Environment for Structural Configuration Design", *Journal of Engineering Design*, vol. 1, pp 73-96.
- [34] M.P. Bendsøe et H.C. Rodrigues. 1991. "Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 87, pp 15-34.
- [35] M. Bremicker, M. Chirehdast, N. Kikuchi et P. Papalambros. 1992. "Integrated Topology and Shape Optimization in Structural Design", *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 19, 1991, pp 551-587.
- [36] J. Rasmussen, J. Thomsen et N. Olhoff (1993). "Integrating Topology and Boundary Variations Design Method in a CAD System", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares éd.), pp 483-499, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.

## TRAVAIL SUR ORDINATEUR # 1 MINIMISATION NON CONTRAINTE

On vous fournit un programme informatique qui peut résoudre un problème de minimisation non contrainte par une méthode de gradient ou de gradient conjugué.

Modifiez ce programme pour qu'il puisse considérer un nombre arbitraire de variables - il est actuellement restreint à des problèmes quadratiques à deux variables.

Appliquez votre programme aux fonctions quadratiques (A) et (B) données ci-dessous:

$$(A) \quad f(X) = X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_1X_2 + 4X_1 - 6X_2 + 5$$

$$(B) \quad f(X) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} (X_i - i + 5)^2$$

Pour chaque fonction (A) et (B), fournissez une table récapitulative expliquant vos résultats et l'histoire du processus itératif dans le cas où les points de départ sont donnés par  $X_i = 5$ .

Iter	X(1)	X(2)	...	S(1)	S(2)	...	pas	f(X)	$ grad(X) $
------	------	------	-----	------	------	-----	-----	------	-------------

S'il y avait trop d'itérations nécessaires à la convergence des méthodes proposées, ne mettez que les 5 premières et les 5 dernières itérations dans le tableau.

## TRAVAIL SUR ORDINATEUR # 2 MINIMISATION QUASI NON CONTRAINTE

Modifiez votre programme issu du travail # 1 pour résoudre le problème quasi non contraint:

$$\min_X f(X)$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Appliquez votre programme aux problèmes quadratiques (A) et (B). Pour chaque fonction (A) et (B), fournissez une table récapitulative expliquant vos résultats et l'histoire du processus itératif dans le cas où les points de départ sont donnés par  $X_i = 5$ .

Iter	X(1)	X(2)	...	S(1)	S(2)	...	pas	f(X)	$ grad(X) $
------	------	------	-----	------	------	-----	-----	------	-------------

**TRAVAIL SUR ORDINATEUR # 3**  
**LA DUALITE**

Considérez le problème quadratique linéairement contraint suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) &= \sum \frac{1}{2} a_i X_i^2 - \sum b_i X_i + f_0 \\ \sum c_{ij} X_i &\leq \bar{c}_j \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

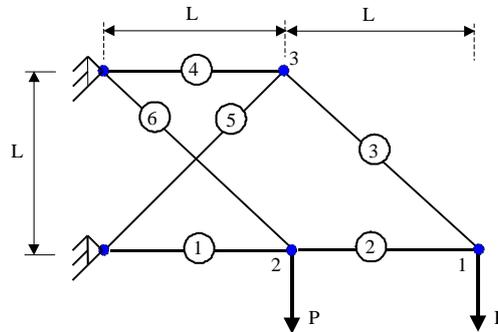
Puisque le problème "primal" est séparable et convexe, vous pouvez le remplacer par son dual. Résolvez ce dernier problème quasi non contraint, le problème quadratique dual, en utilisant votre programme développé dans les travaux précédents.

Appliquez votre programme au problème suivant :

$$\begin{aligned} \min f(X) &= 8X_1^2 + 8X_2^2 - 18X_1 - 18X_2 + 6 \\ X_1 + X_2 &\leq \frac{3}{2} \\ X_1 - X_2 &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## TRAVAIL SUR ORDINATEUR # 4 OPTIMISATION D'UN TREILLIS ISOSTATIQUE

Utilisez le programme établi en #3 pour minimiser le poids du treillis isostatique suivant:



Données:

E	10E7 psi
$\rho$	0.1 lb/in <sup>3</sup>
L	360 in
P	10E5 lb
$\bar{u}$	2 in
$\bar{\sigma}$	2 × 10E4 psi

Problème de minimisation:

$$\begin{aligned} \min W \\ |\sigma_i| \leq \bar{\sigma} \quad i = 1, \dots, 6 \\ |u_i| \leq \bar{u} \quad i = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Pour ce faire, reformulez le problème de minimisation en utilisant les variables réciproques. Cela rendra les contraintes sur les tensions et les déplacements linéaires. Cependant, la fonction objectif est non quadratique en les nouvelles variables. Il faudra donc la quadratiser (par un développement en série de Taylor). Cette démarche permet de transformer le problème initial en une suite de problèmes quadratiques linéairement contraints.

L'analyse structurale du treillis fournit les formes explicites des contraintes suivantes (en fonction des variables réciproques):

$$\begin{aligned} |\sigma_1| = 2PX_1 \quad |\sigma_2| = PX_2 \quad |\sigma_3| = \sqrt{2}PX_3 \quad |\sigma_4| = 2PX_4 \quad |\sigma_5| = \sqrt{2}PX_5 \quad |\sigma_6| = \sqrt{2}PX_6 \\ u_1 = \frac{PL}{E}(2X_1 + X_2 + 2\sqrt{2}X_3 + 4X_4 + 2\sqrt{2}X_5) \\ u_2 = \frac{PL}{E}(2X_1 + 2\sqrt{2}X_6) \quad u_3 = \frac{PL}{E}(2X_4 + 2\sqrt{2}X_5) \end{aligned}$$

N'oubliez pas d'imposer des contraintes de borne sur les variables de conceptions. On vous demande de partir du point de départ  $X^0 = (0.2, 0.2, \dots, 0.2)$ .

## REFERENCES

Boyd, S et Vandenberghe, L. (1997). "Convex Optimization", Stanford University.

Fleury, C. (1994). "Optimisation des Structures", Université de Liège, Centrale des Cours de L'A.E.E.S.

Gill, P.E., Murray, W. et Wright M.H. (1981). "Practical Optimization", ACADEMIC PRESS, San Diego, USA.

Haftka R.T. et Gurdal Z. (1992). "Elements of Structural Optimization", KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, Dordrecht, The Netherlands.

Teghem, J.J. (1994). "Introduction à l'Optimisation et aux Mathématiques Discrètes", Faculté Polytechnique de Mons, Mutuelle d'Édition des Étudiants.

Vanderplaats, G.N. (1984). "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Applications", MCGRAW-HILL PUBLISHERS.